دینامیک

دکتر رضا انصاری

کتاب مرجع

Engineering mechanics, dynamics, 6th Edition (2006) J.L. Meriam and L.G. Kraige

سایر مراجع

Engineering mechanics, dynamics, J.H. Shames

Vector mechanics for engineers, dynamics, F.P. Beer and E.R. Johnstone

دینامیک برداری، دکتر منصور نیکخواه بهرامی

مباحث دینامیک

بخش اول : دینامیک ذرات

۱)آشنایی با دینامیک

۲)سینماتیک ذرات

۳)سینتیک ذرات
- الف) نیرو ، جرم و شتاب
- ب) کار و انرژی
- ج) ضربه و مومنتوم
- د) کاربرد های ویژه

۴)سینتیک مجموعه ذرات

بخش دوم : دینامیک اجسام صلب

۵)سینماتیک اجسام صلب در صفحه
۶)سینتیک اجسام صلب در صفحه

الف) نیرو ، جرم و شتاب
ب) کار و انرژی
ج) ضربه و ممنتوم

۷)آشنایی با دینامیک سه بعدی اجسام صلب

الف) سینماتیک
ب) سینتیک

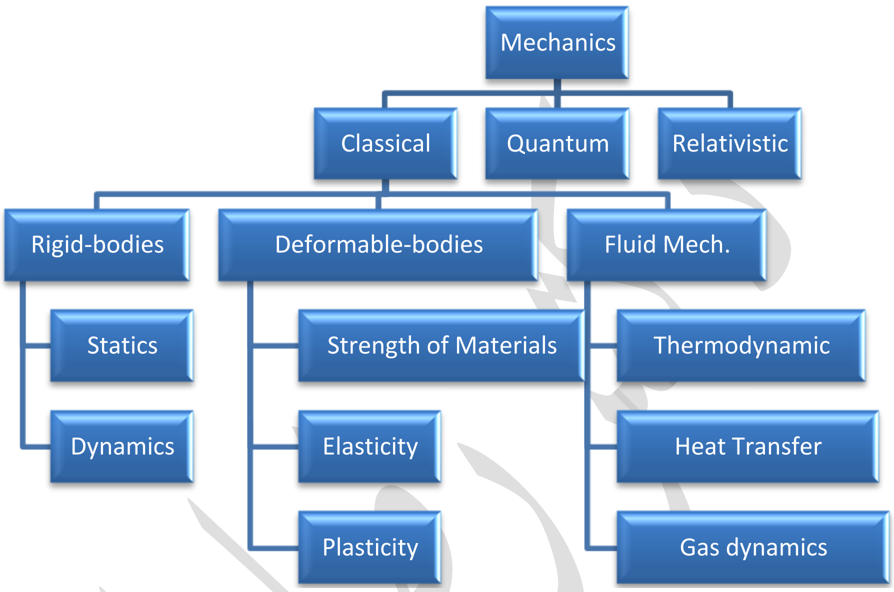
مقدمه (آشنایی با دینامیک)

سه شاخه اصلی رشته مکانیک عبارتند از

۱. مکانیک کلاسیک
۲. مکانیک کوانتوم
۳. مکانیک نسبیت

تقسیم بندی مکانیک کلاسیک

مکانیک اجسام صلب		مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر		مکانیک سیالات



تعریف دینامیک

شاخه ای از علم مکانیک است که با حرکت اجسام صلب تحت نیرو سر و کار دارد. تغییر در طبیعت اجتناب ناپذیر و مطالعه تکامل اساس دینامیک را بنیان می نهد.

شاخه های دینامیک

سینماتیک

سینتیک

تاریخ های مهم در تکامل دینامیک

1687 → Principia by Newton

1717 → Principle of virtual work by Bernolli

1740 → Systems of particles by Euler

1743 → D'Alember's principle

1765 → Rigid bodies by Euler

1775 → The Newton-Euler formulation for Force and moment balances

(They constitute the basis of Newtonian mechanics)

1780 → Lagrange's equations

1829 → Gauss's variational principle

1830 → Hamilton's equations and Hamilton's principle

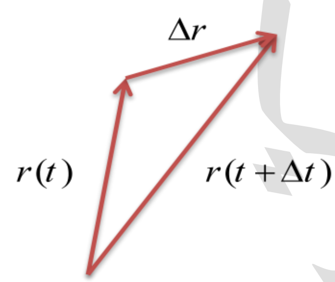
1829 → Jourdian's principle

1870-1910 → Gibbs – Appell's equations

1970 → kane's equations

سینماتیک ذرات :

حرکت منحنی الخط در صفحه



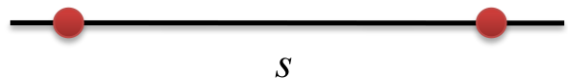
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$|\vec{r}| = b \;\; , \vec{r}.\vec{r} = b^2 \quad b = constant \quad parameter \qquad \vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}.\vec{r} = 0$$

$$\vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \qquad \vec{r} \perp \dot{\vec{r}}$$



$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$vdv = ads \longrightarrow \dot{s}d\dot{s} = \ddot{s}ds$$

درنیروهای گرانش وفنر : $a = a(s) \longrightarrow \ vdv = a(s)ds$

$$if\ a = costant\ \longrightarrow\ v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$$

$$if\ a = variable \longrightarrow \frac{vdv}{a(v)} = ds$$

مثال : یک ذره درامتداد خط مستقیم حرکت می کند که جابجایی آن ازرابطه $s = 2t^3 - 24t + 6$ تبعیت می کند . زمان لازم برای اینکه این ذره به سرعت $72\frac{m}{s}$ برسد رابدست آورید. شتاب ذره وقتی سرعت آن $30\frac{m}{s}$ است و جابجایی خالص ذره در بازه زمانی [1, 4] رابدست آورید ؟

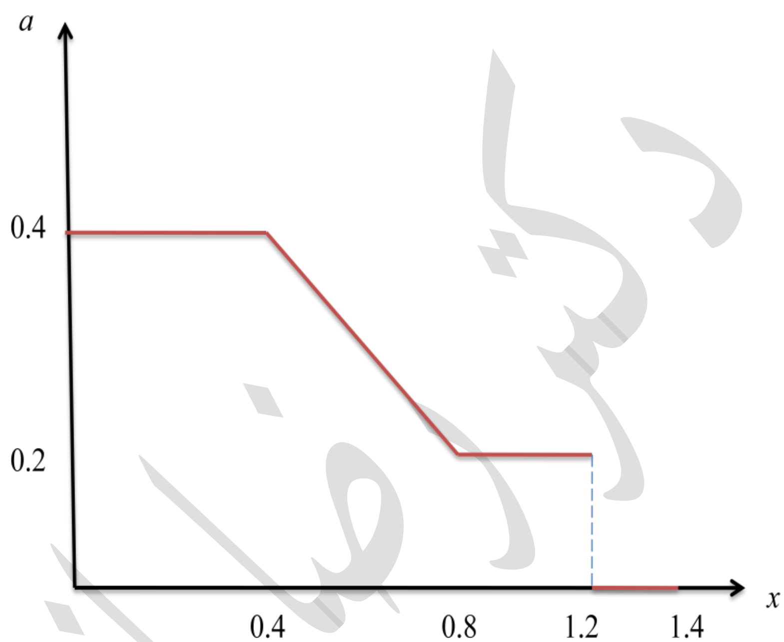
$$\dot{s} = v = 6t^2 - 24 = 72 \qquad\qquad t = 4s$$

$$\ddot{s} = \dot{v} = a = 12t$$

$$if\ \ v = 30\frac{m}{s} \longrightarrow\ t = 3s \longrightarrow\ a = 36\frac{m}{s^2}$$

$$s|_{t=4s} - s|_{t=1s} = \Delta s = 54m$$

مثال : منحنی شتاب-تغییرمکان ذره ای که با سرعت اولیه $0.1\frac{m}{s}$ شروع به حرکت می نماید به صورت زیرداده شده است . سرعت ذره را در $x=1.4\ m$ بدست آورید ؟



$$\int v dv = \int a dx$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int a dx$$

$$v^2 - {v_0}^2 = 2\int a dx = 2(area) \longrightarrow v^2 - (0.1)^2 = 2(0.36) \longrightarrow v = 0.85\frac{m}{s}$$

مثال : بااستفاده از یک چترمقاومتی شتاب $a = -0.004v^2 \ \frac{m}{sec^2}$ به هواپیمایی در حال فرود وارد می شود. مدت زمان لازم برای اینکه سرعت این هواپیما از $80\frac{m}{s}$ به $10\frac{m}{s}$ برسد را تعیین کنید؟ مسافت طی شده در طی این مدت زمانی را بدست آورید؟

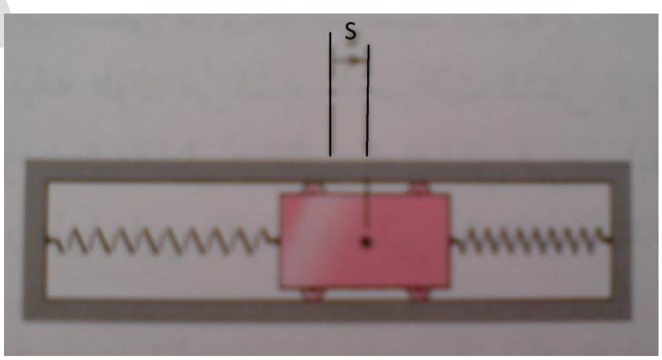
$$a = -0.004v^2 \longrightarrow \frac{dv}{dt} = -0.004v^2$$

$$\int_{v_0=80}^{v=10} \frac{dv}{v^2} = -0.004\int_{t_0=0}^{t} dt \qquad\qquad t = 21.875s$$

$$-0.004v^2 ds = vdv$$

$$-0.004\int_{s_0=0}^{s} ds = \int_{v_0=80}^{v=10} \frac{dv}{v} \longrightarrow s = 519.86m$$

مثال : لغزنده ای بین دو فنر در شیار راهنمای افقی بااصطکاک ناچیز حرکت کرده و دارای سرعت v_0 درامتداد s به هنگام عبور درنیمه راه $t = 0$ و $s = 0$ می باشد. مجموعه دو فنر نیروی بازدارنده ای را برحرکت لغزنده اعمال می نمایند که به آن ، شتاب متناسب با جابجایی ولی درجهت خلاف حرکت یعنی برابر با $a = -k^2 s$ می دهد که درآن k ثابت است. جابجایی s و سرعت v رابه صورت تابعی از زمان t بدست آورید.



$$ads = vdv$$

$$-k^2\int sds = \int vdv \longrightarrow \frac{-k^2s^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2}v^2$$

$$if\ s_0 = 0\ \ \&\ v = v_0 \longrightarrow\ c_1 = \frac{1}{2}{v_0}^2$$

$$-\frac{k^2s^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{2}v^2 \longrightarrow\ \ v = \sqrt{{v_0}^2 - k^2s^2}$$

از طرفی: $\int \frac{ds}{dt} = \int \sqrt{v_0^2 - k^2s^2} \longrightarrow \int_{s_0=0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - k^2s^2}} = \int_{t_0=0}^{t} dt$

$$\frac{1}{k}\arcsin\left(\frac{ks}{v_0}\right) = t$$

$$s = \frac{v_0}{k}\sin(kt) \qquad \rightarrow \quad v = v_0\cos(kt)$$

نکته :

$$\ddot{s} + k^2s = 0$$

$$s = Ce^{(\alpha t)}$$

این معادله s رابایددرمعادله اصلی جایگذاری کرد ، این معادله s به عنوان یک ریشه درنظرگرفته می شود.

$$\alpha^2 + k^2 = 0 \quad \alpha = \pm ki$$

$$s = c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt} \quad or \quad s = Asin(kt) + Bcos(kt)$$

$$1)\ t = 0 \longrightarrow\ s = 0 \ \longrightarrow\ B = 0$$

$$2)t = 0\ \longrightarrow\ \ \dot{s} = v_0 \longrightarrow A = \frac{v_0}{k} \longrightarrow s = \frac{v_0}{k} sin(kt)$$

مثال : یک سفینه فضایی درفاصله s_0 ازمرکز زمین قراردارد. سرعت به طرف بیرون v_0 برای آنکه به فاصله تعیین شده h از مرکز زمین منتقل شود راحساب کنید ؟

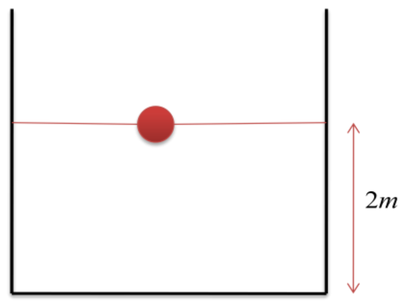
$$a = -g\frac{R_E^2}{s^2} \quad at \quad s = R_E \qquad \rightarrow a = g$$

$$vdv = ads\ \longrightarrow \int_{v_0}^{0} vdv = -gR_E^2 \int_{s_0}^{h} \frac{ds}{s^2} \Longrightarrow \frac{1}{2}{v_0}^2 = gR_E^2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{s_0}\right)$$

$$\longrightarrow v_0 = \sqrt{\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{s_0}\right) \times 2gR_E^2} \quad if \quad h \longrightarrow \infty \quad v_0 = R_E\sqrt{\frac{2g}{s_0}}$$

تمرین : ثابت کنید که برای یک سیاره فرضی دوبعدی سرعت فرار وجود ندارد ؟

مثال : یک گلوله فولادی ازحالت سکون درداخل ظرفی که محتوی یک سیال مخصوص است ازارتفاع ۲ متری رها می شود. شتاب گلوله برابر $a = 0.9\mathrm{g} - \mathrm{Cv}$ است که در آن C ثابت می باشد. اگر مدت زمانی که گلوله به ته ظرف می رسد ۲ ثانیه باشد ، مقدارC رامحاسبه کنید ؟



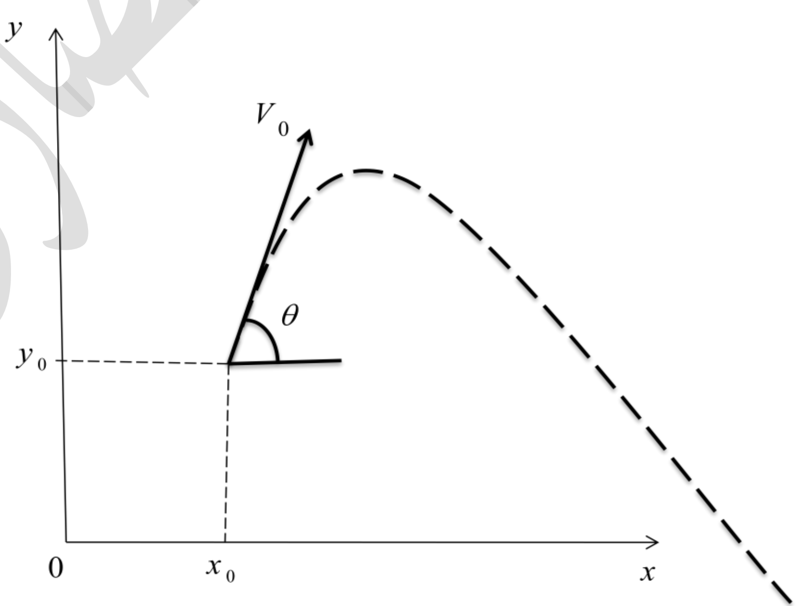
$$\frac{dv}{\mathrm{dt}} = 0.9\mathrm{g} - \mathrm{Cv} \longrightarrow \int_{\mathrm{v}_0=0}^{v} \frac{\mathrm{dv}}{0.9\mathrm{g} - \mathrm{Cv}} = \int_{\mathrm{t}_0=0}^{\mathrm{t}} \mathrm{dt}$$

$$\mathrm{v} = \frac{0.9\mathrm{g}}{\mathrm{C}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{Ct}}\right)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{0.9g}{C}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{Ct}})$$

$$s = \frac{0.9g}{c^2}\left(Ct - 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{Ct}}\right) \longrightarrow c = 8.3\frac{1}{s}$$

حرکت پرتا بی:



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

$$a_x = 0 \qquad and \qquad a_y = -g$$

$$a_x = \ddot{x} = 0 \longrightarrow \dot{x} = v_0 cos\Theta$$

$$x = (v_0 t\cos\theta) + cte \;\longrightarrow\; x = (v_0 t\cos\theta) + x_0$$

$$a_y = -g \longrightarrow \ddot{y} = -g \longrightarrow \dot{y} = -gt + cte = -gt + v_0\sin\theta$$

$$\longrightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta + cte = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta + y_0$$

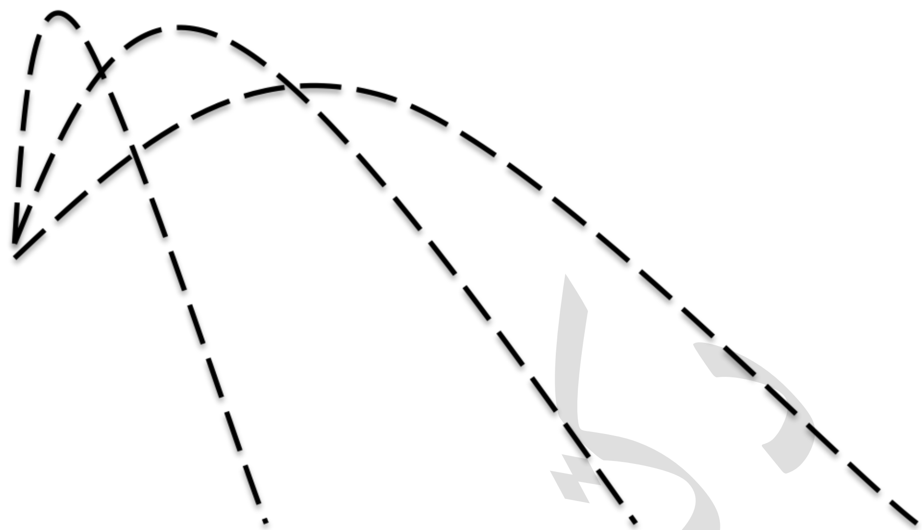
برای به دست آوردن معادله مسیر t را از معادله x حذف و در معادله y جاگذاری می کنیم .

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 cos\Theta} \longrightarrow y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{v_0\cos\theta}\right)^2 + \tan\Theta\,(x - x_0) + y_0$$

$$if\;\; x_0 \quad and \quad y_0 = 0 \longrightarrow t = \frac{v_0\sin\theta}{g} \quad , \quad R = \frac{{v_0}^2\sin 2\theta}{2g}$$

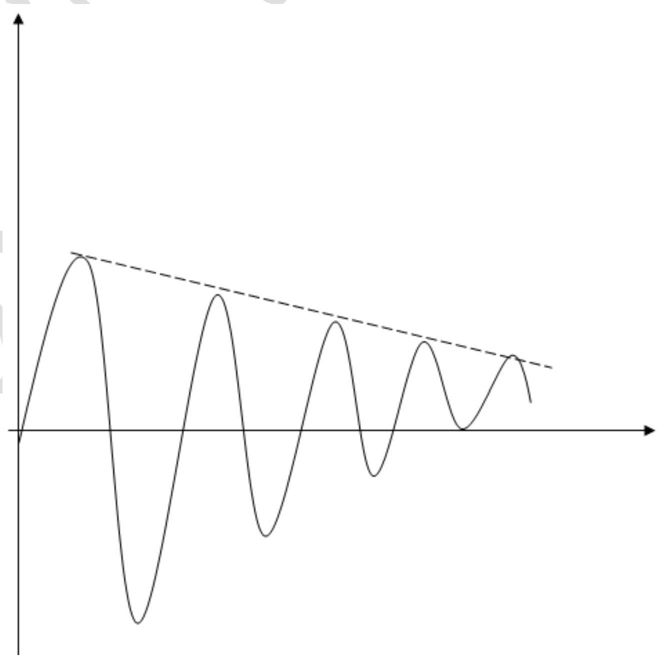
پوش منحنی های مسیر حرکت پرتابه به ازای زوایای مختلف پرتاب :

پوش (envelope) منحنی است که بر تمام منحنی های زیر مماس باشد .



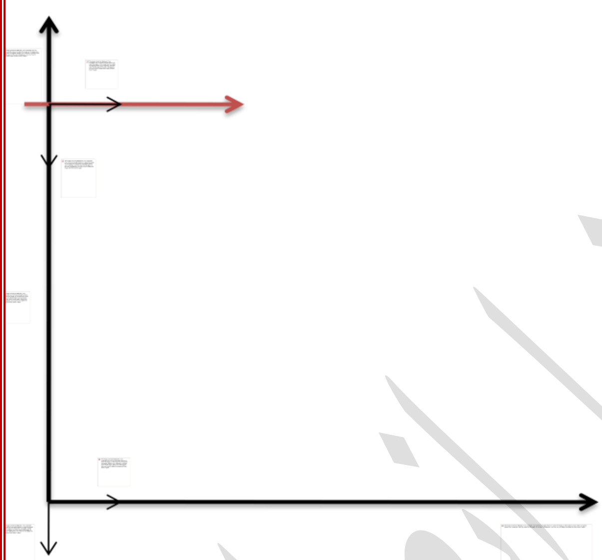
$$m = tan\theta$$

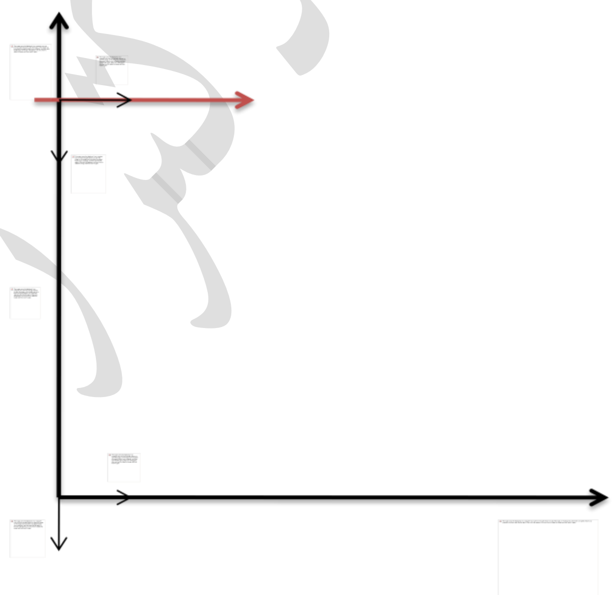
$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2 \cos \theta^2} + x \tan \Theta$$



$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}(1+m^2) + mx$$

$$0 = \frac{-gx^2}{v_0^2} m + x \longrightarrow m = \frac{v_0^2}{gx} \quad \longrightarrow y = \frac{-gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$$





$$\mathrm{a_x} = 0 \longrightarrow \mathrm{v_x} = \mathrm{v_0} \longrightarrow x = v_0 t$$

$$\mathrm{a_y} = \mathrm{g} \longrightarrow \mathrm{v_y} = \mathrm{gt} \longrightarrow \mathrm{y} = \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = h$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \longrightarrow t = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$s = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\frac{\mathrm{s_M}}{\mathrm{s_E}} = \sqrt{\frac{\mathrm{g_E}}{\mathrm{g_M}}} = \sqrt{6}$$

$$a_x = 0 \longrightarrow x = v_0 t$$

$$\mathrm{a_y} = \mathrm{g} \longrightarrow \dot{\mathrm{y}} = \mathrm{gt} \longrightarrow \mathrm{y} = \frac{1}{2}gt^2 - h \longrightarrow y = 0 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

تمرین) مسیر حرکت یک پرتابه را که با سرعت $24\ \frac{m}{sec}$ با زاویه $30°$ بالای افق پرتاب می شود ، را با فرض $w = 9\ N$ و ضریب مقاومت هوای $c = 0.58\ \left(\frac{N.s}{m}\right)$ به دست آورید ؟ نیروی مقاومت هوا را متناسب با سرعت پرتابه در نظر بگیرید .

مثال) یک روتور جت با دور $10000\ rpm$ در حال چرخش است که ناگهان سوخت آن قطع می گردد ، در صورتی که $\alpha = -0.02\omega$ باشد مدت زمان لازم برای آنکه دور موتور به $1000\ rpm$ برسد را تعیین نمایید ؟ همچنین تعداد دورهایی که روتور در طول این مدت می چرخد را به دست آورید ؟

$$v = \dot{s} \qquad \omega = \dot{\theta}$$

$$a = \dot{v} = \ddot{s} \qquad and \qquad \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

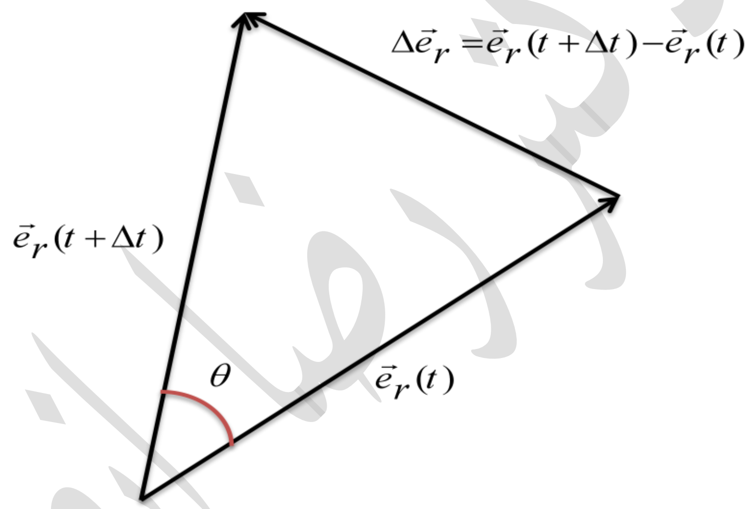
$$vdv = ads \qquad \omega d\omega = \alpha d\theta$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -0.02\omega \longrightarrow \int_{10000\times\frac{2\pi}{60}}^{1000\times\frac{2\pi}{60}} \frac{d\omega}{\omega} = -0.02\int_0^t dt \longrightarrow t = 115.1$$

$$\omega d\omega = -0.02\omega d\theta \;\longrightarrow\; \int_{10000\times\frac{2\pi}{60}}^{1000\times\frac{2\pi}{60}} d\omega = -0.02\int_0^{\theta} d\theta$$

$$\theta = 15000\pi(rad) \;\longrightarrow\; \theta = 7500(rev)$$

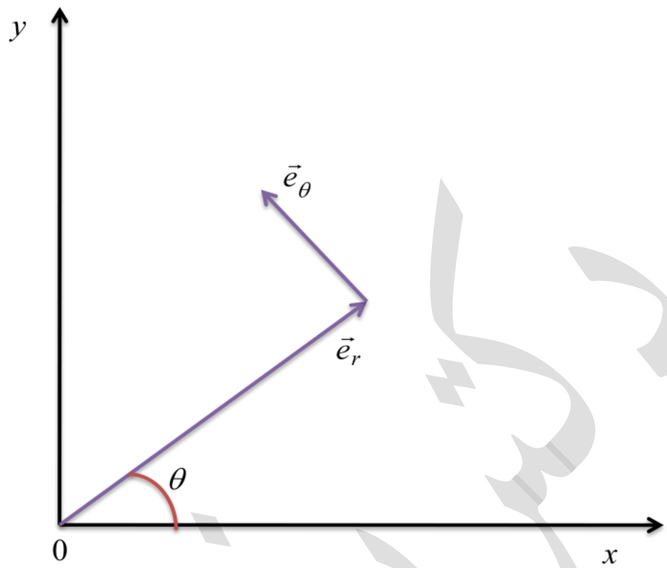
مشتق زمانی یک بردار :



$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{e_r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}\overrightarrow{e_\theta}}{\Delta t}$$

$$\left(if\,\frac{\Delta\theta}{2} \le 6^{\circ} \longrightarrow\; sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}\right) \longrightarrow\; \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

روش دیگر اثبات ($\dot{\theta}$) :



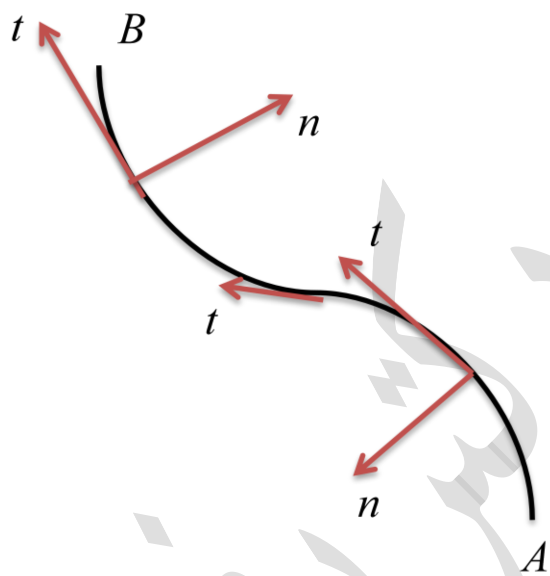
$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$$

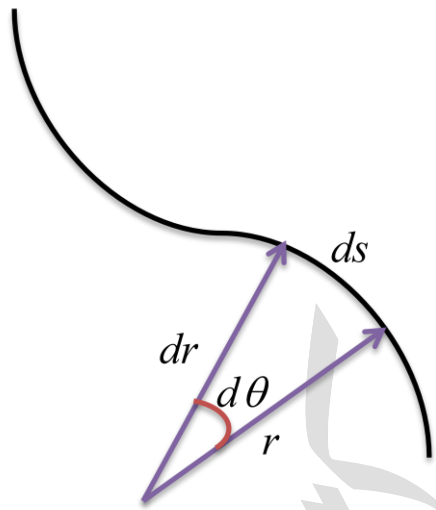
مختصات مسیر :



در نقطه عطف :

$$\begin{cases} \text{انحنا} = 0 \\ \text{شعاع انحنا} = \infty \end{cases}$$

√ n همواره به طرف مرکز انحنا و t مماس بر مسیر می باشد .



$d\vec{r} = \vec{e_t}ds \longrightarrow \vec{e_t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{ds}{dt} \longrightarrow \vec{v} = \dot{s}\overrightarrow{\mathrm{e_t}}$

$\dot{\vec{e_t}} = \dot{\theta}\overrightarrow{\mathrm{e_n}}$ and $\dot{\vec{e_n}} = -\theta\overrightarrow{\mathrm{e_t}}$

$ds = \rho d\theta \longrightarrow \vec{v} = \rho\dot{\theta}$

$\vec{\mathrm{a}} = \dot{\mathrm{v}}\overrightarrow{\mathrm{e_t}} + \mathrm{v}\dot{\vec{e_t}} = \dot{\mathrm{v}}\overrightarrow{\mathrm{e_t}} + \mathrm{v}\dot{\theta}\overrightarrow{\mathrm{e_n}}$

$\mathrm{a_t} = \dot{\mathrm{v}}$

$\mathrm{a_n} = \mathrm{v}\dot{\theta} = \frac{\mathrm{v}^2}{\rho} = \rho\dot{\theta}^2$

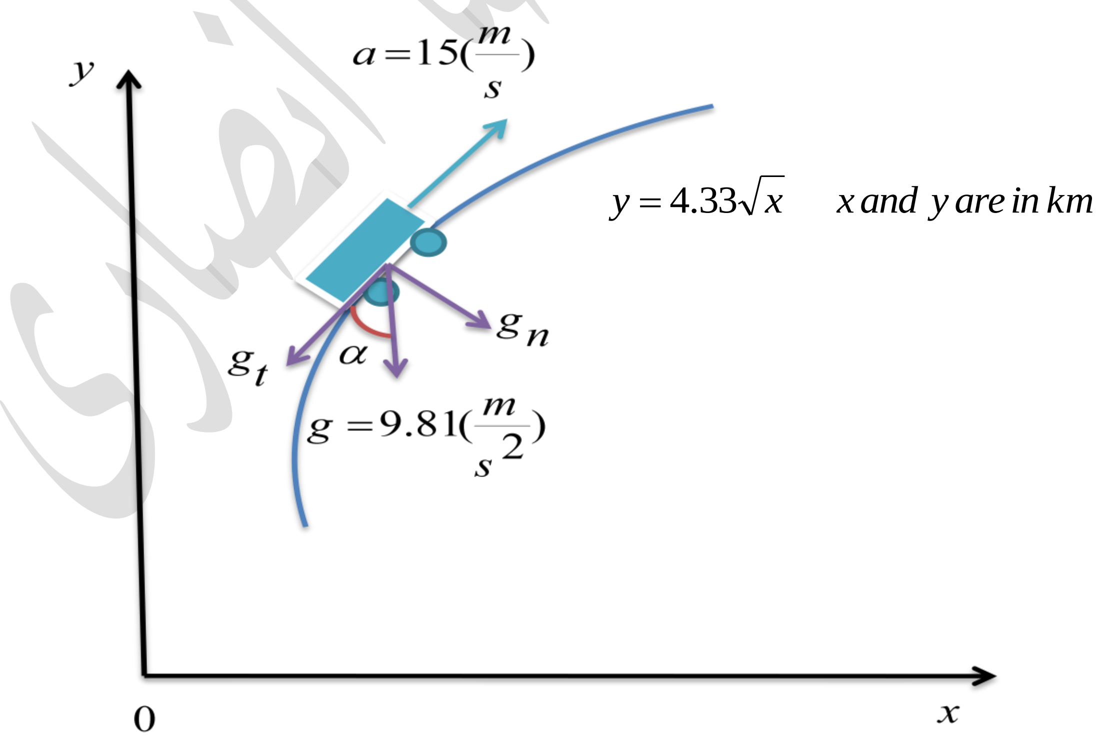
√برای حرکت دایره ای ρ مقدار ثابتی دارد $\rho = R$

$$a_n = v\omega = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

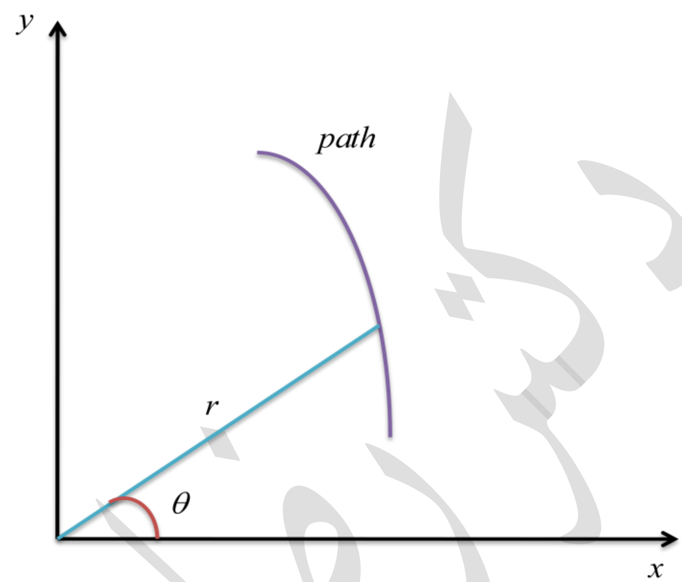
$$a_t = \dot{v} = R\alpha$$

$$\rho = \frac{\left(1 + {y'}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad \left(if \qquad y = f(x) \longrightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

مثال) سرعت و شتاب راکت نمایش داده شده در شکل زیر را در موقعیت $x = 3\ (km)$ به دست آورید ؟



مختصات قطبی :



$\vec{r} = r\overrightarrow{e_r}$

$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\overrightarrow{\dot{e_r}} \quad and \quad \overrightarrow{\dot{e_r}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \quad \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

$v_r = \dot{r} \quad and \quad v_\theta = r\dot{\theta} \longrightarrow v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

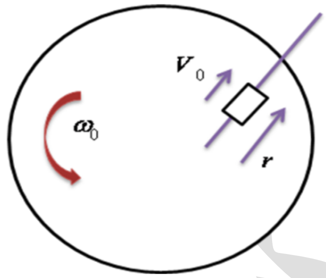
$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left(\ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\overrightarrow{\dot{e_r}}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\theta}\overrightarrow{\dot{e_\theta}}\right)$

$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad and \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$\longrightarrow a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2}$

تمرین) شخصی بر روی یک دیسک دوار در راستای شعاع آن که با سرعت زاویه ای ثابت ω_0 در حال دوران است به سمت بیرون با سرعت ثابت V_0 در حال حرکت است . سرعت و شتاب را به دست آورید ؟



$$\begin{cases} \dot{r} = v_0 \\ \ddot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega_0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_0\overrightarrow{e_r} + r\omega_0\overrightarrow{e_\theta} \qquad and \qquad \vec{a} = -r{\omega_0}^2\overrightarrow{e_r} + 2v_0\omega_0\overrightarrow{e_\theta}$$

تمرین)

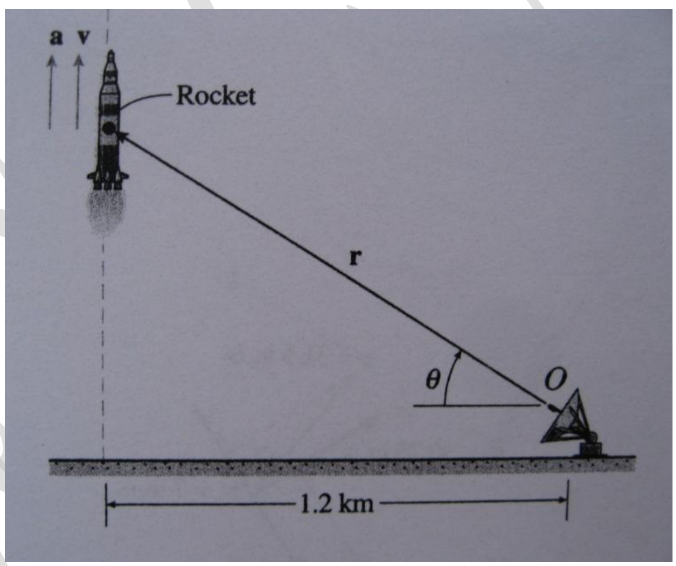
$$\begin{cases} \theta = 0.2t + 0.02t^3 \\ r = 0.2 + 0.04t^2 \end{cases}$$

$$if \quad t = 3(s) \quad \Longrightarrow \quad v \;\; and \;\; a = ?$$

مثال) یک راکت به وسیله ی یک رادار در حال مانیتور شدن است اطلاعات ردیابی به صورت زیر است

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0.2\ \dfrac{rad}{s} \\ \ddot{\theta} = 0.1\ \dfrac{rad}{s^2} \end{cases}$$

وقتی که زاویه $\theta = 45^{\circ}$ **است مطلوبست تعیین سرعت و شتاب راکت نشان داده شده در شکل زیر ؟**



$$r = \frac{1}{2} sec\theta \longrightarrow r = 1697.06m$$

$$\dot{r} = 1200 tan\theta sec\theta\ \dot{\theta} \longrightarrow \dot{r} = 339.4 \frac{m}{s}$$

$$\ddot{r} = 1200\left[(sec^3\theta + tan^2\theta sec\theta)\dot{\theta}^2 + tan\theta sec\theta\ddot{\theta}\right] = 373.35 \frac{m}{s^2}$$

$$v = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$|v| = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2} \longrightarrow |v| = 480\frac{m}{s}$$

$$a = \left(\ddot{r} - 2\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\theta + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

$$|a| = \sqrt{ar^2 + a\theta^2} \rightarrow |a| = 432\frac{m}{s^2}$$

مثال) یک ذره روی مسیری که معادله ی آن به صورت $r = 2\theta$ حرکت می کند اگر θ به صورت $t^{\ 2}$ مشخص شود $(\theta = t^2)$. سرعت و شتاب ذره را وقتی $\theta = 60$ درجه می باشد را بدست آورید؟

$$if \quad \theta = t^2 \rightarrow \dot{\theta} = 2t \qquad and \qquad \ddot{\theta} = 2$$

$$and \quad if \begin{cases} r = 2\theta \\ \theta = t \end{cases} \longrightarrow r = 2t^2 \longrightarrow \dot{r} = 4t \longrightarrow and \longrightarrow \ddot{r} = 4$$

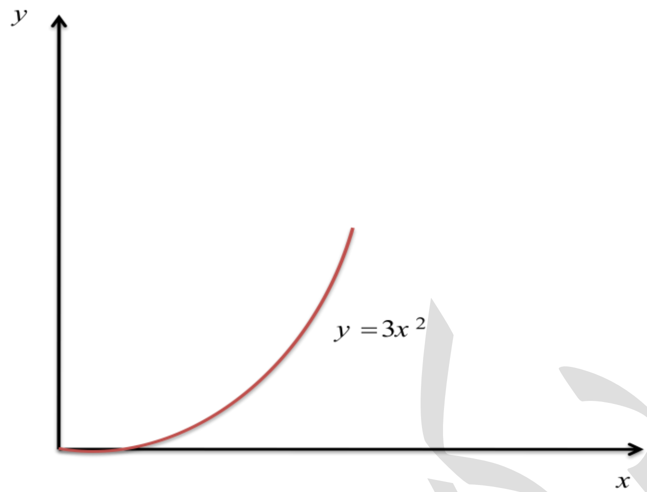
$$\frac{\pi}{3} = t^2 \longrightarrow t = 1.023$$

$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \longrightarrow \vec{v} = 4.09\overrightarrow{e_r} + 4.28\overrightarrow{e_\theta} \longrightarrow |\vec{v}| = 5.92\left(\frac{ft}{s}\right)$$

$$a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} \Longrightarrow a = -4.77\overrightarrow{e_r} + 20.94\overrightarrow{e_\theta}$$

$$|\vec{a}| = 21.5\ \frac{ft}{sec^2}$$

مثال) ذره ای با سرعت $10\frac{ft}{sec}$ روی منحنی $y = 3x^2$ در حال حرکت است . شتاب ذره را در $x = 5\ ft$ را بدست آورید؟

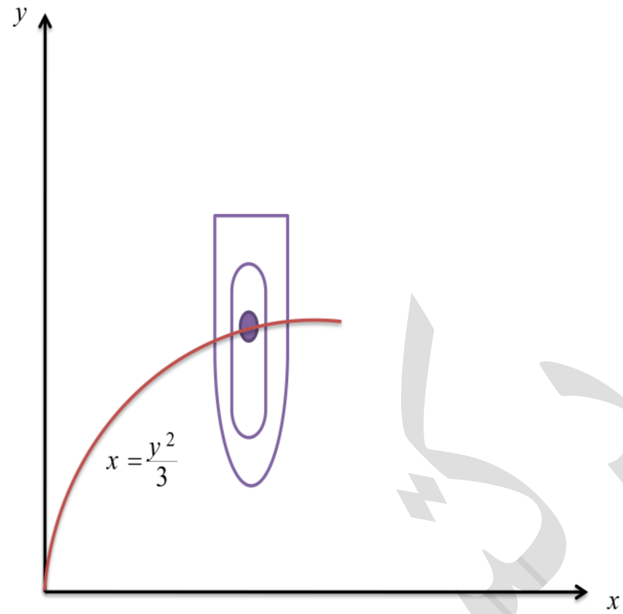


$$\begin{cases} v = 10\dfrac{ft}{s} \\ x = 5\,ft \end{cases}$$

$$if \quad v_t = const \;\longrightarrow\; a_t = 0 \;\longrightarrow\; \vec{a} = a_n\overrightarrow{e_n} = \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{e_n}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow \frac{6}{(1+36x^2)^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{6}{(901)^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow \vec{a} = \frac{100\times 6}{(901)^{\frac{3}{2}}}\overrightarrow{e_n}$$

مثال) ذره ای بر روی منحنی $x=\dfrac{y^2}{3}$ **حرکت می نماید. سرعت و شتاب ذره را در** $y=2m$ **تعیین نمایید؟**



$$x=\frac{y^2}{3} \longrightarrow \dot{x}=\frac{2y\dot{y}}{3}$$

$$if \quad \begin{cases} \dot{x}=2(\frac{m}{s}) \\ y=2(m) \end{cases} \longrightarrow \dot{y}=1.5$$

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \qquad |v|=2.5(\frac{m}{s})$$

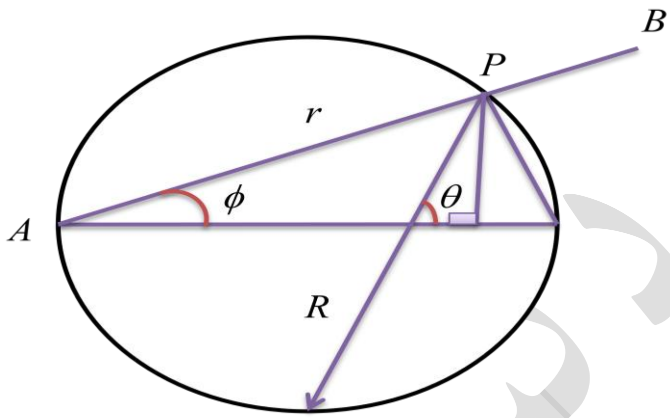
$$if \quad v=\dot{x}=const \longrightarrow \ddot{x}=\frac{2}{3}\ \dot{y}^2+\frac{2}{3}y\ddot{y} \longrightarrow \ddot{y}=-1.125(\frac{m}{s^2})$$

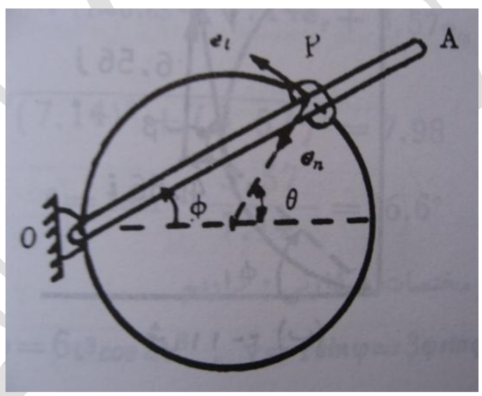
$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2} \longrightarrow a=1.125(\frac{m}{s^2})$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{3} \longrightarrow y'=\frac{3}{2y} \qquad and \qquad y''=-\frac{9}{4y^3} \longrightarrow \rho=6.94m$$

$$a_n=\frac{v^2}{p} \longrightarrow a_n=0.9\left(\frac{m}{s^2}\right) \longrightarrow a_t=\sqrt{a^2-a_n^2} \Longrightarrow a_t=675\times10^{-3}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

مثال) میله ای AB با سرعت زاویه ای $\dot{\Phi}$ در حال دوران است مطلوبست سرعت و شتاب ذره ای P در شکل زیر ؟



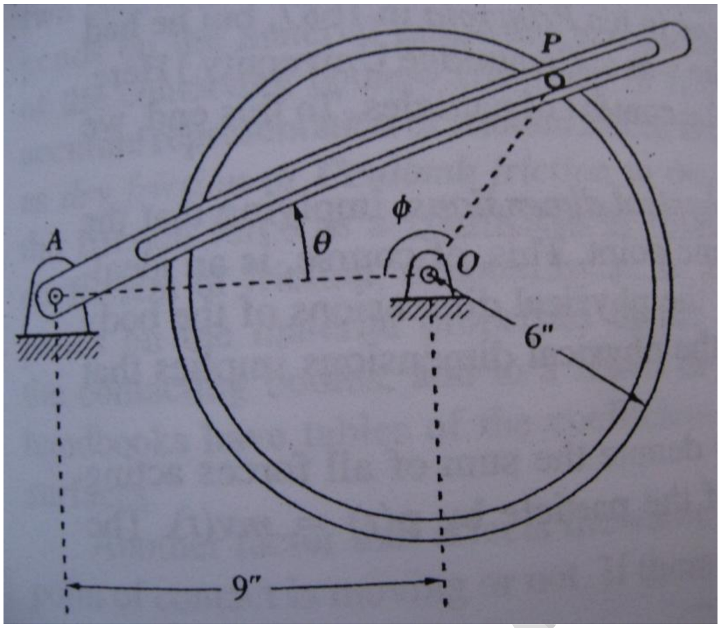


$$OP = R \qquad and \qquad \theta = 2\varphi \longrightarrow \ \dot{\theta} = 2\dot{\varphi}$$

$$v = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta$$

$$\vec{\dot{r}} = 0 \longrightarrow v = 2R\dot{\varphi}e_\theta \qquad and \qquad a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e_\theta$$

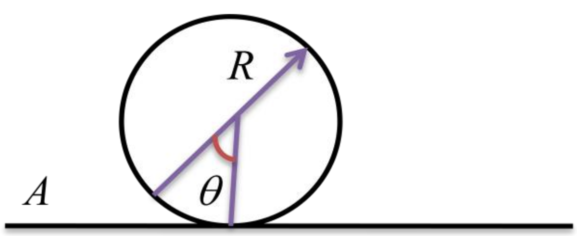
$$\ddot{r} = 0 \qquad and \qquad \dot{r} = 0 \qquad and \qquad \ddot{\theta} = 0 \longrightarrow \ a = -4R\dot{\varphi}^2\ e_r$$



$$y = f(x) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r = f(\theta) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad r' = \frac{dr}{d\theta}$$

مثال) دیسکی مطابق شکل زیر بر روی سطحی صاف به شعاع R غلتی بدون لغزش انجام میدهد. سرعت و شتاب نقطه A را به دست آورید ؟



$No\ Slip: x = R\theta$

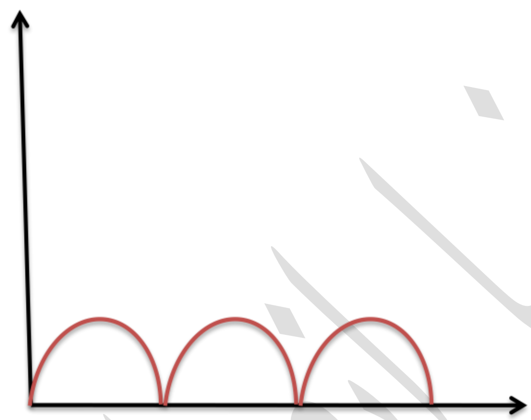
$x_A = x - Rsin\theta = R(\theta - sin\theta)$

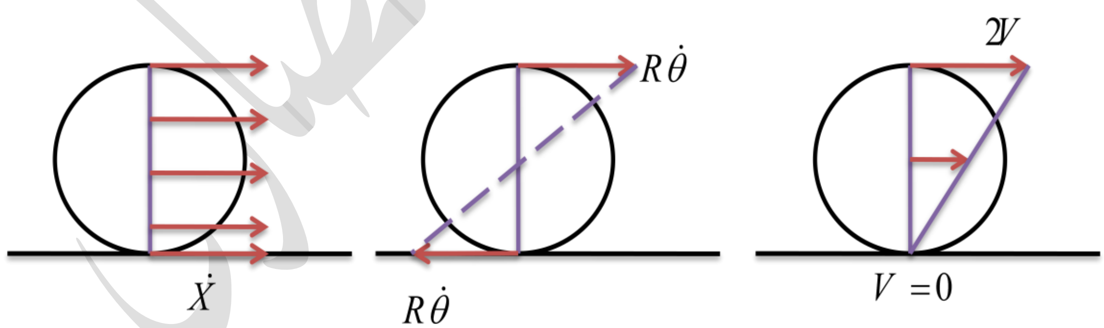
$y_A = R(1 - cos\theta)$

$v_A = \dot{x_A}\vec{i} + y_A\vec{j} \longrightarrow v_A = R\left(\dot{\theta} - \dot{\theta}cos\theta\right)\vec{i} + \left(R\dot{\theta}sin\theta\right)\vec{j}$

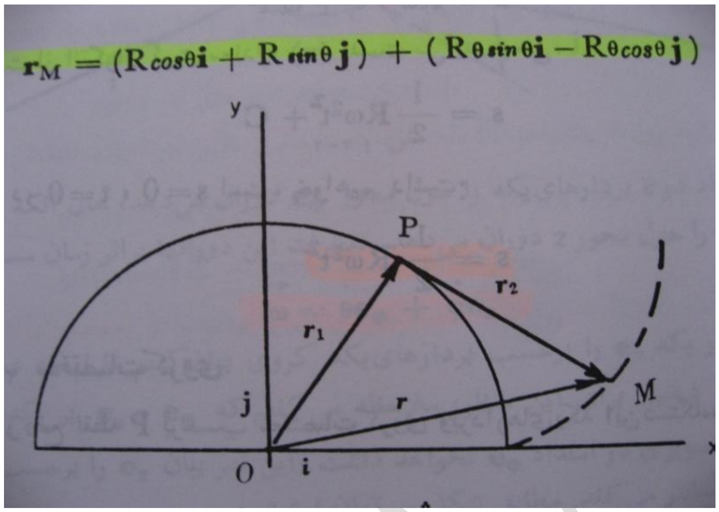
$a_A = R\left(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 sin\theta - \ddot{\theta}cos\theta\right)\vec{i} + \left(R\ddot{\theta}sin\theta + R\dot{\theta}^2 cos\theta\right)\vec{j}$

$if\ \ \theta = 0 \Longrightarrow v_A = 0 \qquad and \qquad a_A = R\dot{\theta}^2\vec{j}$





تمرین) در حالتی که انتهای یک نخ را که بر روی یک قرقره پیچیده شده است را باز نماییم (به اندازه ی مشخص) سرعت و شتاب انتهای آزاد نخ و طول نخ باز شده را بدست آورید؟



$$\begin{cases} x_p = R\cos\theta + R\theta\sin\theta \\ y_p = R\sin\theta - R\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\theta = \omega t$$

$$\vec{r_p} = x_p\vec{i} + y_p\vec{j}$$

$$\vec{r_p} = (R\cos\omega t + R\omega t\sin\omega t)\vec{i} + (R\sin\omega t - R\omega t\cos\omega t)\vec{j}$$

$$\vec{v_p} = \vec{\dot{r_p}} \longrightarrow v_p = (-R\omega\sin\omega t + R\omega\sin\omega t + R\omega^2 t\cos\omega t)\vec{i}$$

$$+(R\omega\cos\omega t - R\omega\cos\omega t + R\omega^2 t\sin\omega t)\vec{j}$$

$$\vec{v_p} = R\omega^2 t\cos\omega t\vec{i} + R\omega^2 t\sin\omega t\vec{j}$$

$$a = \vec{\dot{v_p}}$$

$$|\vec{v_p}| = R\omega^2 t = \frac{ds}{dt} \longrightarrow s = \frac{1}{2}r\omega^2 t^2 + c$$

$$if\ \ t_0 = 0 \ \longrightarrow\ s_0 = 0 \longrightarrow\ \ c = 0 \longrightarrow\ s = \frac{1}{2}R\omega^2 t^2$$

سینماتیک سه بعدی :

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \\ \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = r\overrightarrow{e_r} + z\vec{k} \\ \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\vec{k} \\ \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\vec{k} \end{cases}$$

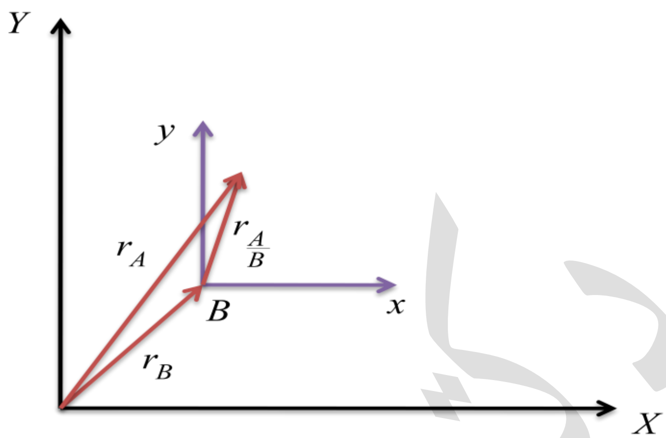
$$\vec{v} = v_r\overrightarrow{e_r} + v_\theta\overrightarrow{e_\theta} + v_\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta}\cos\varphi \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_r\overrightarrow{e_r} + a_\theta\overrightarrow{e_\theta} + a_\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

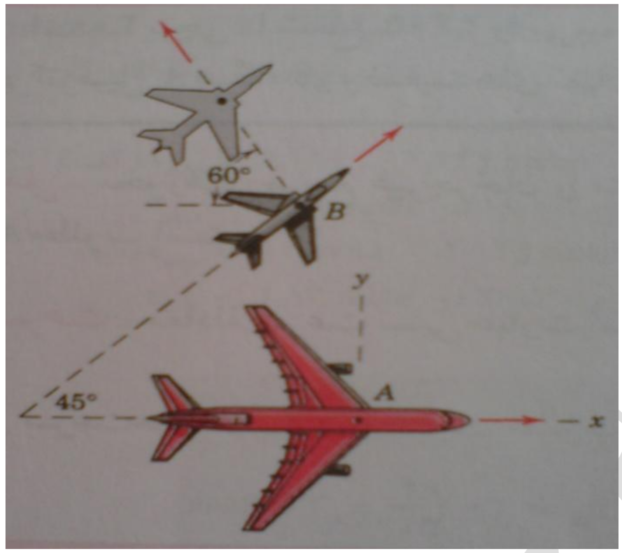
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2 cos^2\varphi \\ a_\theta = cos\dfrac{\varphi}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ a_\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) + r\dot{\theta}^2 sin\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

حرکت نسبی :



$$\begin{cases} r_A = r_B + r_{A/B} \\ v_A = v_B + v_{A/B} \\ a_A = a_B + a_{A/B} \end{cases}$$

مثال) سرنشینان هواپیمای جت A که با تندی $800\frac{km}{h}$ به سمت شرق پرواز می کند هواپیمای جت دوم Bرا مشاهده می کنند که از زیر هواپیمایشان در خط افق پرواز کرده و می گذرد . اگرچه که دماغه هواپیمای Bدر راستای $45°$ شمال شرقی قرار دارد از نظر سرنشینان هواپیمای Aچنین به نظر می رسد که B درحال دور شدن از آن ها تحت زاویه $60°$ مطابق شکل می باشد . سرعت واقعی B را تعیین کنید ؟



$$solve\ 1: \frac{v_B}{sin60} = \frac{v_A}{sin75} \qquad v_B = 717\left(\frac{m}{s}\right)$$

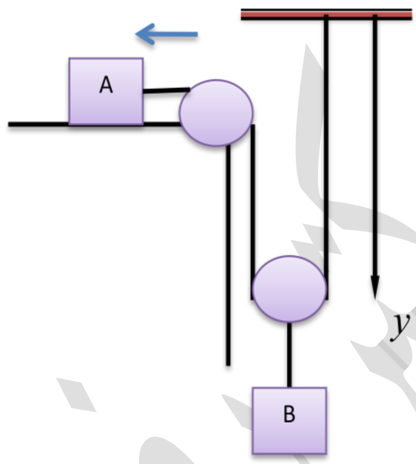
$$solve\ 2: v_B = v_A + v_{B/A}$$

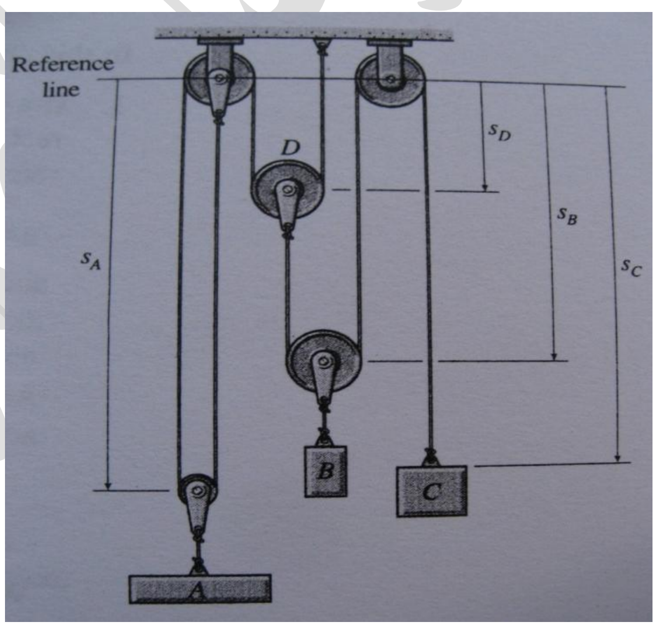
مثال) از منظر A ، قایق Bبا سرعت $\left(\frac{mil}{h}\right)$ 30 عمود بر مسیر A از آن دور می شود. اگر سرعت مطلق A ، $\left(\frac{mil}{h}\right)$ 40 باشد ، سرعت مطلق قایق B را تعیین نمایید؟

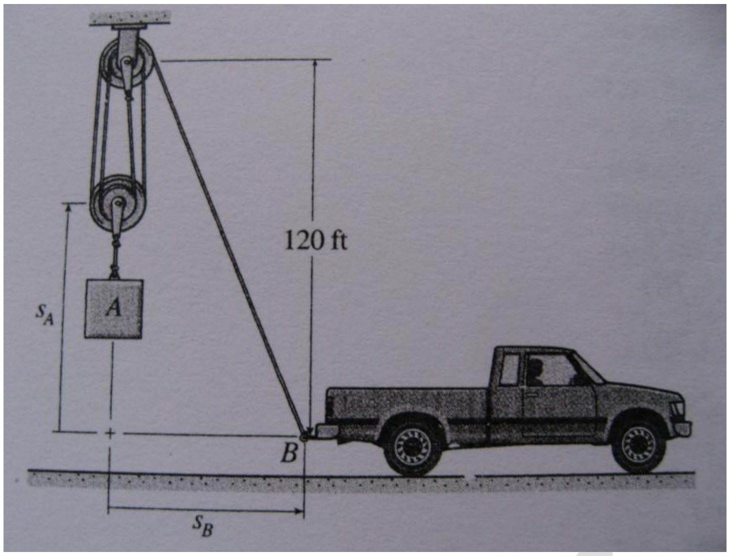
$$v_B{}^2 = 40^2 + 30^2 \qquad \begin{cases} v_B = 50(\frac{mil}{h}) \\ \theta = 36.87° \end{cases}$$

درجه آزادی :

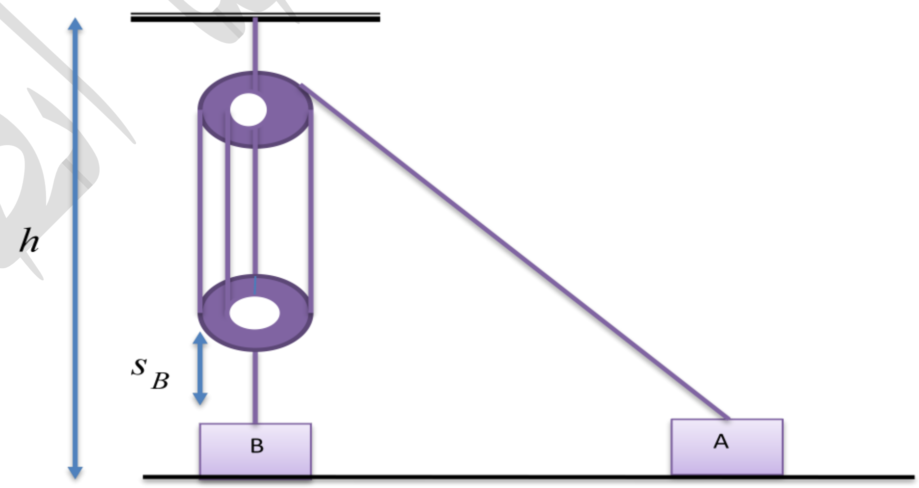
تعریف درجه آزادی : تعداد مختصه های مستقل مورد نیاز برای تعیین موقعیت همه ی اجزای یک سیستم در هر لحظه از زمان درجه ی آزادی آن سیستم نامیده می شود.







تمرین) تراکتور A با شتاب ثابت a_A از زیر قرقره شروع به حرکت می نماید سرعت بالا رفتن وزنه ی B بعد از زمان گذشت t (s) را بدست آورید؟



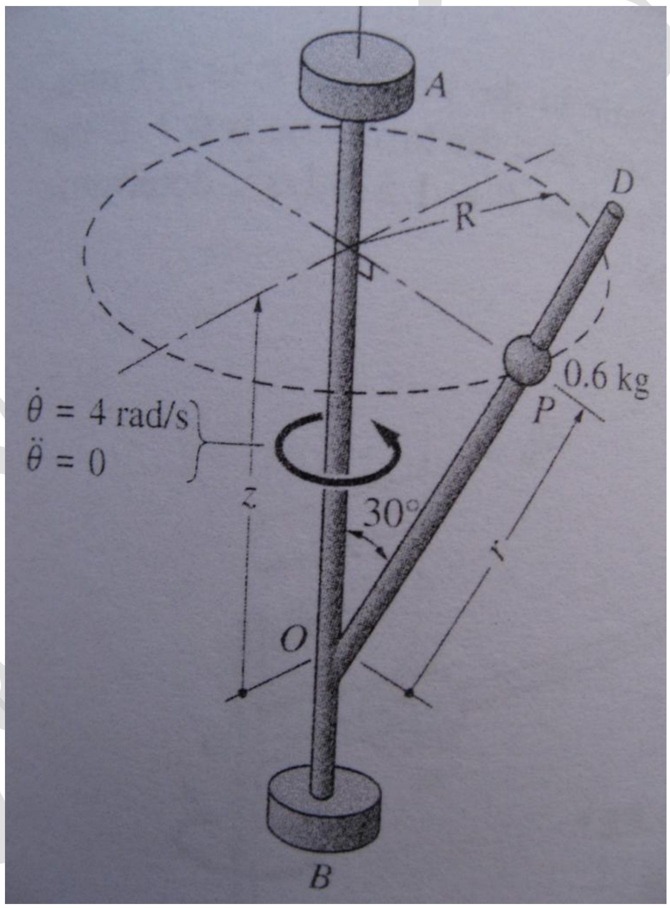
$$L = 4(h - s_B) + \sqrt{h^2 + s_A^2} + Constant$$

$$\dot{L} = 0 \qquad -4v_B + \frac{2s_A v_A}{2\sqrt{h^2 + s_A^2}} = 0 \qquad v = \frac{s_A v_A}{4\sqrt{h^2 + s_A^2}}$$

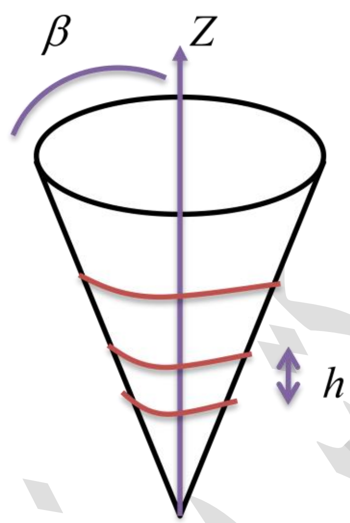
$$\ddot{s_A} = a_A \longrightarrow \dot{s_A} = a_A t + c\big(if\ t_\circ = 0\ \ and\ \ \dot{s_A}|_{t=t_0} = 0\big) \longrightarrow c = 0$$

$$\dot{s_A} = a_A \times t \longrightarrow s_A = \frac{1}{2} a_A \times t^2 + C\big(if\quad t_0 = 0\ \ and\ \ s_A|_{t=t_0} = 0\ \big)$$

$$\longrightarrow s_A = \frac{1}{2} a_A t^2$$



مثال) حرکت ذره ای روی سطح مخروطی قائم با روابط $r = ht\ \tan\beta$ ، $\theta = 2\pi t$ ، $z = ht$ تعریف می گردد مقادیر سرعت و شتاب ذره را در لحظه ی معین t بدست آورید؟



$$if \quad r = ht\,tan\beta \quad \longrightarrow \quad \dot{r} = h\,tan\beta \quad \longrightarrow \quad \ddot{r} = 0$$

$$if \quad \theta = 2\pi t \quad \longrightarrow \quad \dot{\theta} = 2\pi \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$if \quad z = ht \longrightarrow \dot{z} = h \longrightarrow \ddot{z} = 0$$

$$v = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta + \dot{z}k$$

$$v = htan\beta e_r + 2\pi ht\,tan\beta e_\theta + he_k$$

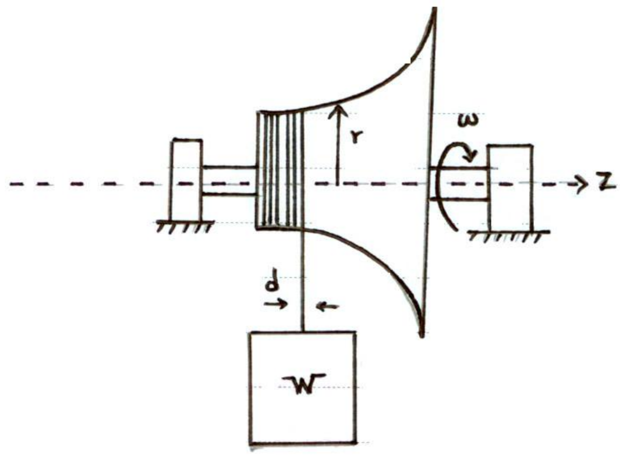
$$|v| = h\,tan\,\beta\sqrt{1 + 4\pi^2 t^2 + cot^2\beta}$$

$$a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)e_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)e_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

$$a = -4\pi^2 ht\,tan\,\beta e_r + 2h\,tan\beta\ 2\pi e_\theta + 0$$

$$|a| = 4\pi h\,tan\beta\sqrt{1 + \pi^2 t^2}$$

مثال) در شکل زیر شعاع r قرقره را بر حسب z چنان تعیین نمایید که وزنه با سرعت $v=0.4+\frac{t^2}{8000}\quad(\frac{\text{ft}}{\text{s}})$ بالا کشیده می شود ؟



$$\begin{cases}\omega = 10\,rpm\\ d = 0.5\,in\\ t = 0\\ z = 0\end{cases}$$

$$\dot{z} = \frac{d}{T} = \frac{d}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega d}{2\pi}$$

$$\dot{z} = \frac{10\frac{2\pi}{60}\left(\frac{0.5}{12}\right)}{2\pi} \longrightarrow \dot{z} = 0.00694\left(\frac{ft}{s}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.00694 \qquad t = 144z \qquad (1)$$

در $z_0 = 0$ و $\mathrm{t}_0 = 0$ ثابت انتگرال صفر می شود.

سرعت محیطی این قرقره:

$$r\omega = 0.4 + \frac{t^2}{8000} \qquad r\left(\frac{2\pi}{60}10\right) = 0.4 + \frac{t^2}{8000} \qquad (2)$$

۱ را در ۲ جایگذاری می کنیم :

$$r = 0.382 + 2.482z^2$$

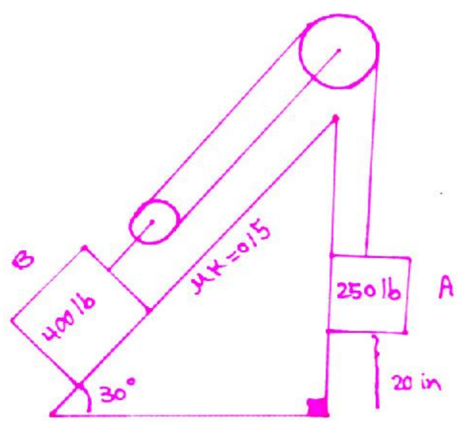
سینتیک ذرات :

مثال) آسانسوری با شتاب ثابت a به سمت بالا و یا پایین حرکت می کند شخصی که بر روی وزنه ایستاده وزن خود را چقدر قرائت می کند؟

$$T - mg = ma \rightarrow T = m(g + a)$$

$$mg - T = ma \rightarrow T = m(g - a)$$

مثال) درشکل زیر وزنه ی A از حالت سکون رها می گردد سرعت این وزنه در هنگام اصابت به زمین را بدست آورید؟



$$m_A g - T = m_A \times a_A$$

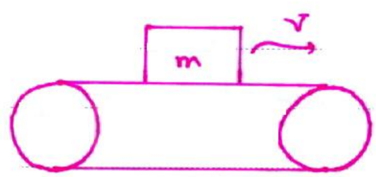
$$2T - m_B g \sin\theta - \mu_k N_B = m_B \frac{a_A}{2}$$

$N_B - m_B \cos\theta = 0$

با توجه به داده های فرضی $\rightarrow \begin{cases} a_A = 5.83\left(\frac{ft}{s^2}\right) \\ T = 205(lb) \\ N_B = 346(lb) \end{cases}$

$v_A = \sqrt{2a_A x} \rightarrow v_A = 15.27\left(\frac{ft}{s}\right)$

مثال) قرقره ای (تسمه ای) داریم که با سرعت خطی v حرکت می نماید. جرم M را بر روی آن رها می نماییم مدت زمان لغزش جسم بر روی تسمه را تعیین نمایید؟

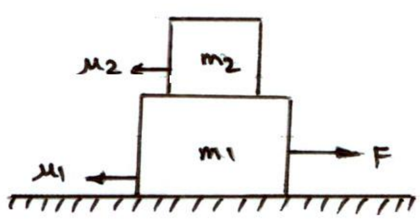


$N - mg = 0$

$\mu_k mg = ma \rightarrow a = \mu_k g$

$v = at + v_0 \rightarrow t = \dfrac{v}{\mu g}\ \ (if\ t_0 = 0 \rightarrow v_0 = 0)$

مثال) در شکل زیر حداکثر نیروی F برای اینکه جرم m_2 بر روی جرم m_1 حرکت نکند را بدست آورید؟



$N_2 - m_2 g = 0$

$f_2 = m_2 a \rightarrow \mu_2 m_2 g = m_2 a \rightarrow a = \mu_2 g$

$N_1-(m_1+m_2)g=0 \rightarrow N_1=(m_1+m_2)g$

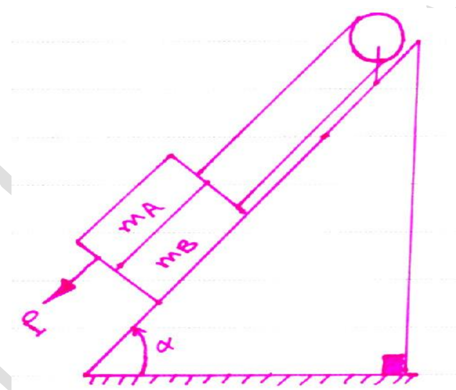
$F-f_2-f_1=m_1a$

$F=m_2\mu_2 g+\mu_2 m_1 g+\mu_1(m_1+m_2)g$

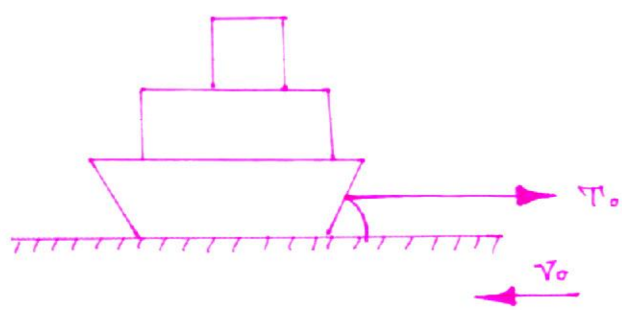
$F=\mu_2 g(m_1+m_2)+\mu_1 g(m_1+m_2)$

$F=(m_1+m_2)g(\mu_1+\mu_2)$

تمرین) با فرض آنکه ضریب اصطکاک بین همه ی سطوح μ_s and μ_k باشد وضعیت حرکت سیستم نشان داده شده در شکل زیر را تعیین کنید؟



مثال)کشتی به جرم m در رودخانه ای که آب آن با سرعت V_0 جریان دارد لنگرانداخته است اگر مولفه ی افقی زنجیر لنگره T باشد بعد از بریده شدن آن زمان لازم برای رسیدن سرعت کشتی به $\frac{V_0}{2}$ را بدست آورید؟ (مقاومت اصطکاکی آب کشتی ، با سرعت کشتی نسبت به آب متناسب است)

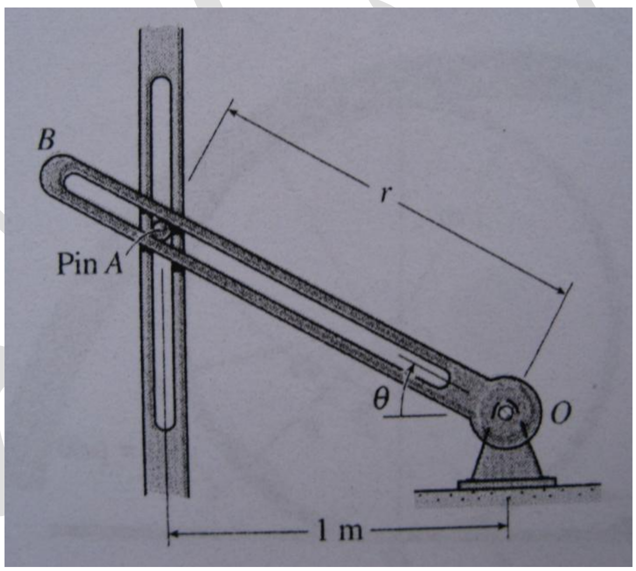


$$T_0 = Kv_0 \rightarrow K = \frac{T_0}{v_0}$$

$$K(v_0 - v) = m\dot{v} \rightarrow K(v_0 - v) = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v=0}^{\frac{v_0}{2}} \frac{dv}{v_0 - v} = \int_{t=0}^{t} \frac{T_0}{mv_0} dt \rightarrow t = \frac{mv_0}{T_0} ln2$$

مثال)حرکت پین A در جهت راهنمای شیار عمودی ثابت محدود شده است در حالی که بازوی OB حول نقطه ی O با مشخصات $\dot{\theta} = 1(\frac{rad}{s})$ و $\ddot{\theta} = -0.5(\frac{rad}{s^2})$ در وضعیت $\theta = 30°$ در حال دوران است نیرویی که بر روی پین مذکورعمال می شود را محاسبه نمایید.



$$r\cos\theta = 1 \rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta} = 1.5(m)$$

$$\dot{r} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0.67(\frac{m}{s})$$

$$r = \frac{1 + \sin^2\theta}{\cos^3\theta} = 1.59(\frac{m}{s^2})$$

$$if \quad \theta = 30^o \quad and \quad \dot{\theta} = 1\left(\frac{rad}{s}\right) \quad and \quad \ddot{\theta} = -0.5\frac{rad}{s^2}\, a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

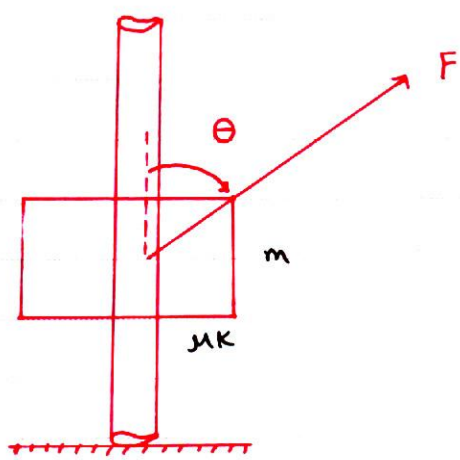
$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$F_A \cos\theta - mg\sin\theta = ma_r \;\rightarrow\; F_A = \frac{ma_r + mg\sin\theta}{\cos\theta} = 4.94(N)$$

$$F_B - F_A \sin\theta - mg\cos\theta = ma_\theta$$

$$\rightarrow F_B = ma_\theta + mg\cos\theta + F_A\sin\theta = 9.88(N)$$

مثال) نیروی ثابت F با جهت متغیر $\theta = kt$ به جرم M وارد می شود با فرض آنکه در شروع حرکت $\theta = 0^o$ باشد نیروی F را چنان بیابید که در $\theta = \frac{\pi}{2}$ جسم دوباره به حالت سکون دست یابد؟



$$F\cos\theta - mg - \mu_k N = mg$$

$$N = F\sin\theta$$

$$\rightarrow F\cos kt - mg - \mu_k F\sin kt = m\frac{dv}{dt} \rightarrow$$

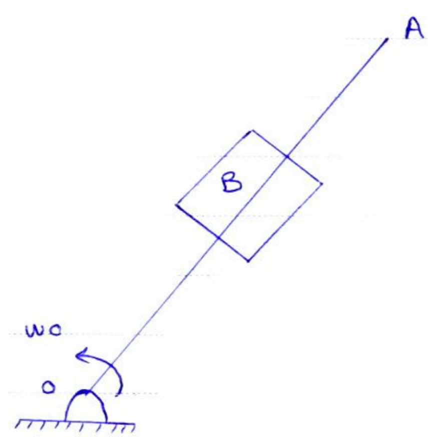
$$(F\cos kt - mg - \mu_k F\sin kt)dt = mdv \rightarrow$$

$$\int_0^t (F\cos kt - mg - \mu_k F \sin kt)dt = \int_0^v m dv \rightarrow$$

$$v = \frac{F}{mk}[\sin kt - \mu_k(\cos kt - 1)] - gt$$

$$if \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2k} \rightarrow \quad \left(if \quad t = \frac{\pi}{2k}\right) \longrightarrow v = 0 \ \rightarrow F = \frac{mg\pi}{2(1-\mu_k)}$$

مثال) میله ی OA با سرعت زاویه ی ثابت ω_0 در حال چرخش است جرم B از فاصله ی r_0 رها می گردد نیروی اعمالی ازمیله ی OA به جرم رها شده را بر حسب فاصله ی آن بنویسید.



$$\sum F_r = 0 \ \rightarrow \ a_r = 0 \ \rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \ \rightarrow N = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 2m\dot{r}\omega_0$$

$$\ddot{r} = r\omega_0^2 \ \rightarrow \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = r^2\omega_0^2 \rightarrow \frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{r^2}{2}\omega_0^2 + c$$

$$\rightarrow \dot{r}^2 = \omega_0^2(r^2 - r_0^2) \rightarrow N = 2m\omega_0^2\sqrt{r^2 - r_0^2}$$

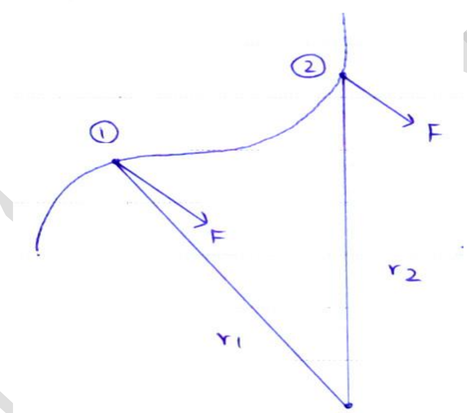
کار و انرژی :

تعریف کار : کار نیروی F از رابطه ی زیر بدست می آید :

$$U_{1-2} = \int \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

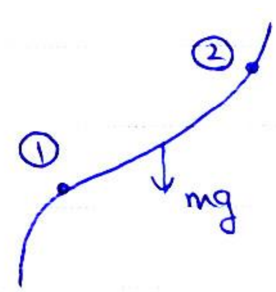
چند حالت مهم که باید بررسی شوند :

۱) کار انجام شده توسط یک نیروی ثابت :



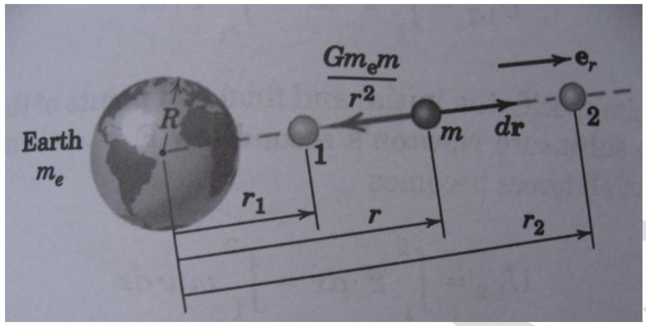
$$U_{1-2} = F\int_1^2 dr = F.(r_2 - r_1) = F_x(r_{2x} - r_{1x}) + F_y(r_{2y} - r_{1y}) + F_z(r_{2z} - r_{1z})$$

۲) کار انجام شده توسط نیروی وزن:



$$U_{1-2} = \int_1^2 F dr = (-mg\vec{k}).(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \int_{z_1}^{z_2} -mg\, dz = -mg(z_2 - z_1)$$

۳) کار انجام شده در ارتفاعات بسیار زیاد:



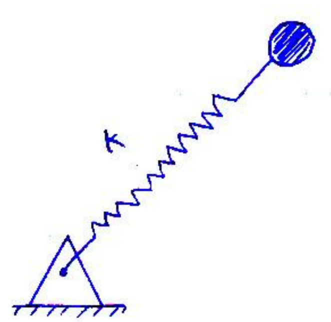
$$F=-\frac{mgR_E^2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

$$\vec{F}.d\vec{r}=\left(-\frac{mgR_E^2}{r^2}\overrightarrow{e_r}\right).(d\vec{r}\overrightarrow{e_r}+rd\theta\overrightarrow{e_\theta})$$

$$F\ dr=-\frac{mgR_E^2}{r^2}dr\rightarrow U=\int_1^2 F\ .dr$$

$$\rightarrow U=\int_{r_1}^{r_2}-\frac{mgR_E^2}{r^2}dr\rightarrow\ U=mgR_E^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

۴) کار انجام شده توسط یک فنر:



$$F=-k(r-r_0)e_r$$

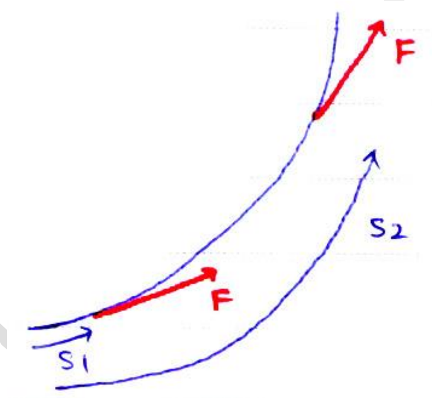
$$F.dr=[-k(r-r_0)\vec{e}_r].[dre_r+rd\theta\vec{e}_\theta]=-k(r-r_0)dr$$

$$s = r - r_0$$

$$Fdr = -ks\, ds$$

$$U_{1,2} = \int_{s_1}^{s_2} -ks\, ds = -\frac{1}{2}k(s_2^2 - s_1^2)$$

۵) کار انجام شده توسط یک نیروی مماسی ثابت:



$$\vec{F}.\overrightarrow{dr} = (F\,\vec{e}_t).(ds\,\vec{e}_t) = Fds$$

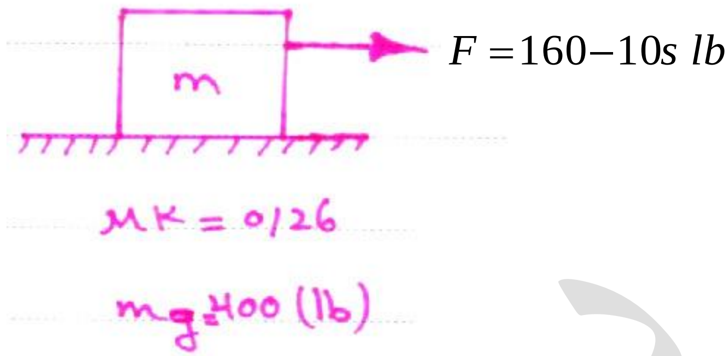
$$U_{1,2} = \int_1^2 F\, dr = F(s_2 - s_1)$$

رابطه کار و انرژی :

$$U_{1,2} = \int_1^2 \vec{F}\,.\overrightarrow{dr} = \int_1^2 m\vec{a}\,.\overrightarrow{dr} = \int_1^2 ma_t.\,ds = \int_1^2 mvdv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$= \begin{cases} T_2 - T_1 = \Delta T \\ T = \frac{1}{2}mv^2 \end{cases} \rightarrow T_2 = T_1 + U_{1-2} \quad or \quad U_{1-2} = \Delta T$$

مثال) در شکل زیر سرعت جرم m را هنگامی که به موقعیت S=4 ft می رسد را بیابید؟

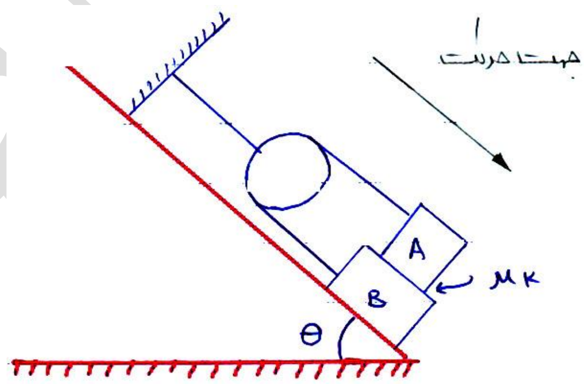


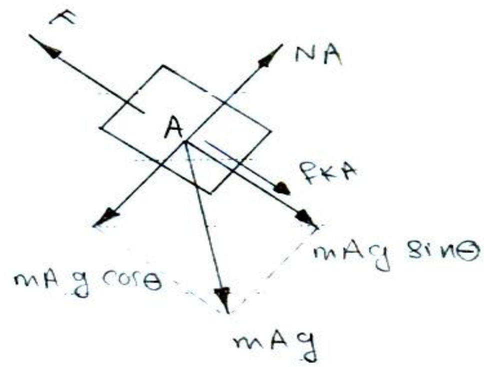
$$U_{1-2} = \Delta T$$

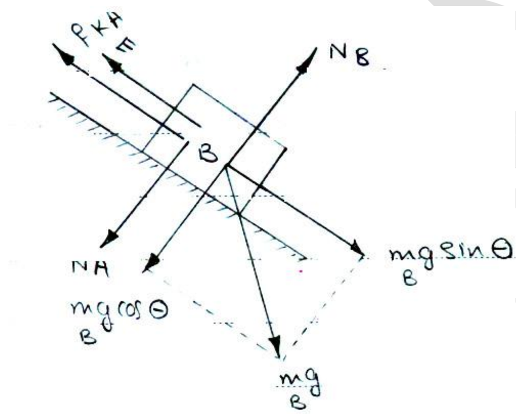
$$\int_{s_1}^{s_2} (F - \mu_k N).ds = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\rightarrow \int_{s=0}^{s=4} [(160 - 10s) - \mu_k mg].ds = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = 4.81\frac{ft}{s}$$

مثال) در شکل زیر با فرض اینکه ضریب اصطکاک بین دو جسم μ_k باشد سرعت مجموعه را وقتی که به اندازه ی s حرکت می نماید بدست آورید؟







$$N_B = N_A + m_B g \cos\theta$$

$$m_B g \sin\theta - T - f_{k_A} = m_B \times a$$

$$N_A = m_A g \cos\theta$$

$$T - f_{k_A} - m_A g \sin\theta = m_A a$$

$$f_{k_A} = \mu_k m_A g \cos\theta$$

$$\begin{cases} m_B g \sin\theta - T - \mu_K m_A g \cos\theta = m_B \times a \\ T - \mu_k m_A g \cos\theta - m_A g \sin\theta = m_A \times a \end{cases} +$$

$$(m_B - m_A) g \sin\theta - 2\mu_k m_A g \cos\theta = (m_A + m_B) \times a$$

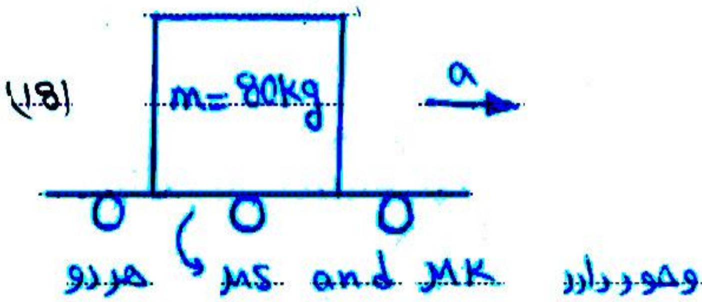
$$\rightarrow a = \frac{(m_B - m_A) g \sin\theta - 2\mu_k m_A g \cos\theta}{m_A + m_B}$$

$$\rightarrow U_{1-2} = \int m\,a\,ds = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$(m_A + m_B) \times \frac{(m_B - m_A)g\sin\theta - 2\mu_k m_A g\cos\theta}{m_A + m_B} S = \frac{1}{2}(m_A + m_B) \times v^2$$

$$v = \left[\frac{2s[(m_B - m_A)g\sin\theta - 2\mu_k m_a g\cos\theta]}{m_A + m_B}\right]^{\frac{1}{2}}$$

مثال) کامیونی از حالت سکون شروع به حرکت می نماید و پس از پیمودن 75 m سرعت آن به 72 km/h می رسد با فرض شتاب ثابت کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک بر روی وزنه ی m را بیابید؟



۱) $\mu_s = 0.28 \quad \text{and} \quad \mu_k = 0.28$

۲) $\mu_s = 0.25 \quad \text{and} \quad \mu_k = 0.2$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} \rightarrow a = \frac{400 - 0}{2 \times 75} \rightarrow a = 2.67\frac{m}{s^2}$$

الف)

$$a_{max} = \mu_s \times g \rightarrow a_{max} = 2.94 \rightarrow a_{max} > a \rightarrow No\ slip$$

$$\rightarrow F_f = m\,a \rightarrow F_f = 80 \times 2.67 \rightarrow F_s = 213\,N$$

کار انجام شده $\rightarrow W_f = F_f.s = 213 \times 75 \rightarrow W_f = 16\,kj$

√کار نیروی اصطکاک همواره منفی نمی باشد

ب)

$$F_f = \mu_k mg \rightarrow F_f = 157\ N$$

$$a_m = \mu_k g \rightarrow a_m = 1.962(\frac{m}{s^2})$$

$$W_f = F_f \times S_m \rightarrow W_f = 157 \times \left(\frac{a_m}{a_s}.s\right) \rightarrow W_f = 8.66\ kj$$

مثال) در شکل زیر یک وسیله ی آهنگری مشاهده می گردد. با فرض آنکه چکش دستگاه از حالت سکون رها شود سرعت آن را در هنگام برخورد آن به قطعه ی کار را تعیین نمایید؟ توان متوسط در۰.۰۲ ثانیه را تعیین کنید؟ (در وضعیتی که چکش روی قطعه ی کار قرار گرفته است کشش هر فنر ۱۵۰ نیوتون می باشد.)

K=1500 N/m

m=40 kg

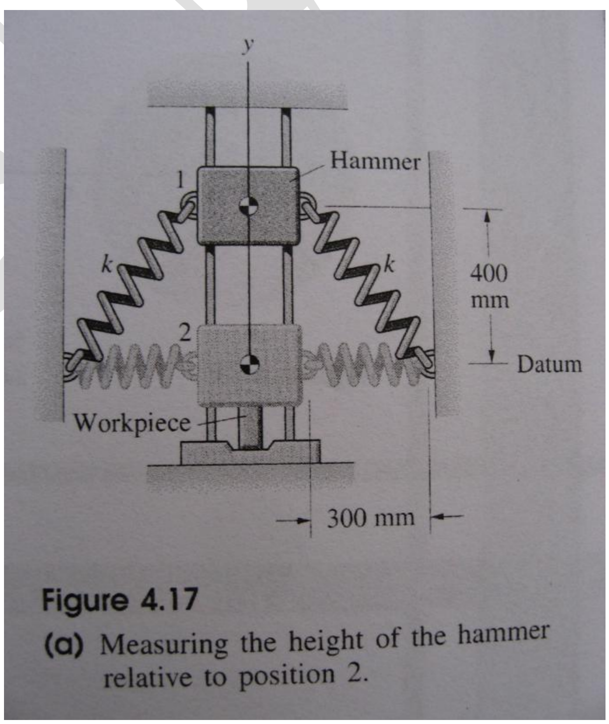


Figure 4.17
(a) Measuring the height of the hammer relative to position 2.

Forging device

$$F = K\Delta s$$

$$150(N) = 1500\left(\frac{N}{m}\right) \times \left((0.3 - s_0)(m)\right) \rightarrow s_0 = 0.2$$

$$(U_{1-2})_{springs} = 2\left[-\frac{1}{2}K(s_2^2 - s_2^2)\right] = 120\, j$$

$$s_2 = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

$$s_3 = 0.5 - 0.2 = 0.3$$

$$U_{mg} = mg\Delta z = 40 \times 9.81 \times 0.4 = 156.96\, j$$

$$U_{1-2} = \Delta T \rightarrow U_{spring} + U_{mg} = \Delta T = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = 3.72\,\frac{m}{s}$$

$$P_{ave} = \frac{U_{1-2}}{t} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{t} = 13.8\, Kw$$

میدان های نیروی پایستار و انرژی پتانسیل :

$$dU = F\,.\,dr = -dV$$

$$U_{1-2} = V_1 - V_2$$

$$Weight \rightarrow V = mgy$$

$$V = -\frac{mgR^2}{r}\,(R = R_E)$$

$$Spring \rightarrow V = \frac{1}{2}Ks^2$$

$$dU = -dV = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = -(\nabla V.\,dr)$$

$$\rightarrow F = -\nabla V = -grad(V)$$

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad and \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

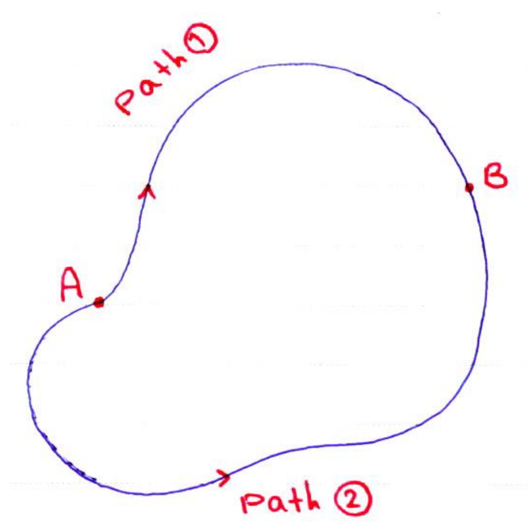
$$curl(grad\ V) = 0 \ \rightarrow \nabla \times F = 0$$

√شرط لازم و کافی برای اینکه نیرو پایستار باشد (انتگرال خط مستقل از مسیر باشد)

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

مختصات قطبی :

$$\nabla \times F = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} e_r & e_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$$



$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$
$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\oint F.dr = \int_s (\nabla \times F).n\ ds$$

(S = هر سطحی که به وسیله مسیر بسته C محدود شده باشد)

برای نیروی پایستار $\oint F.dr = 0$ است :

$$\int_{A_{path1}}^{B} F\,.\,dr + \int_{B_{path2}}^{A} F\,.\,dr = 0 \;\rightarrow\; \int_{A_{path1}}^{B} F\,.\,dr = -\int_{B_{path2}}^{A} F\,.\,dr$$

$$\rightarrow \int_{A_{path1}}^{B} F\,.\,dr = \int_{A_{path2}}^{B} F\,.\,dr$$

مثال) نشان دهید که نیروی $\vec{F} = xy\vec{\imath} + \frac{x^2}{2}\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ پایستار است سپس تابع پتانسیل میدان نیرو را تعیین کنید؟

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = x = \frac{\partial F_y}{\partial x} = x$$

$\nabla \times F = 0 \implies$ نیرو پایستار است

$$F = -\nabla V$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -xy \;\; and \;\; \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{x^2}{2} \; and \;\; \frac{\partial V}{\partial z} = -4$$

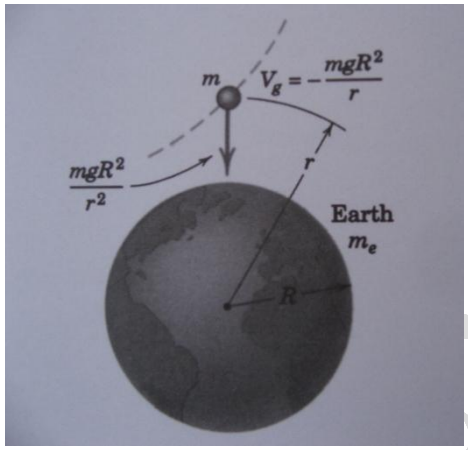
$$\rightarrow \frac{-x^2y}{2} + f(y,z) = V$$

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{2} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \rightarrow f(y\,,z) = f(z)$$

$$0 + \frac{\partial f(z)}{\partial z} = -4 \rightarrow f(z) = -4z + constant$$

$$V = \frac{-x^2y}{2} - 4z + constant$$

مثال) ثابت کنید که نیروی حاصل از میدان پتانسیل گرانشی ، پایستار است؟



$$V = -\frac{mgR_E^2}{r}$$

$$F = -\nabla V = \frac{mgR_E^2}{r^2} e_r + 0 + 0$$

$$\nabla \times F = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} e_r & e_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix} = 0$$

یادآوری : $\begin{cases} U_{1-2} = \Delta T \\ T_1 + U_{1-2} = T_2 \end{cases}$

کار تمام نیروهایی خارجی اعمال شده بر جسم:

$$U_{1-2} = \acute{U}_{1-2} + \left(-\Delta v_g\right) + (-\Delta v_e)$$

$$T_1 + V_1 + \acute{U}_{1-2} = T_2 + V_2$$

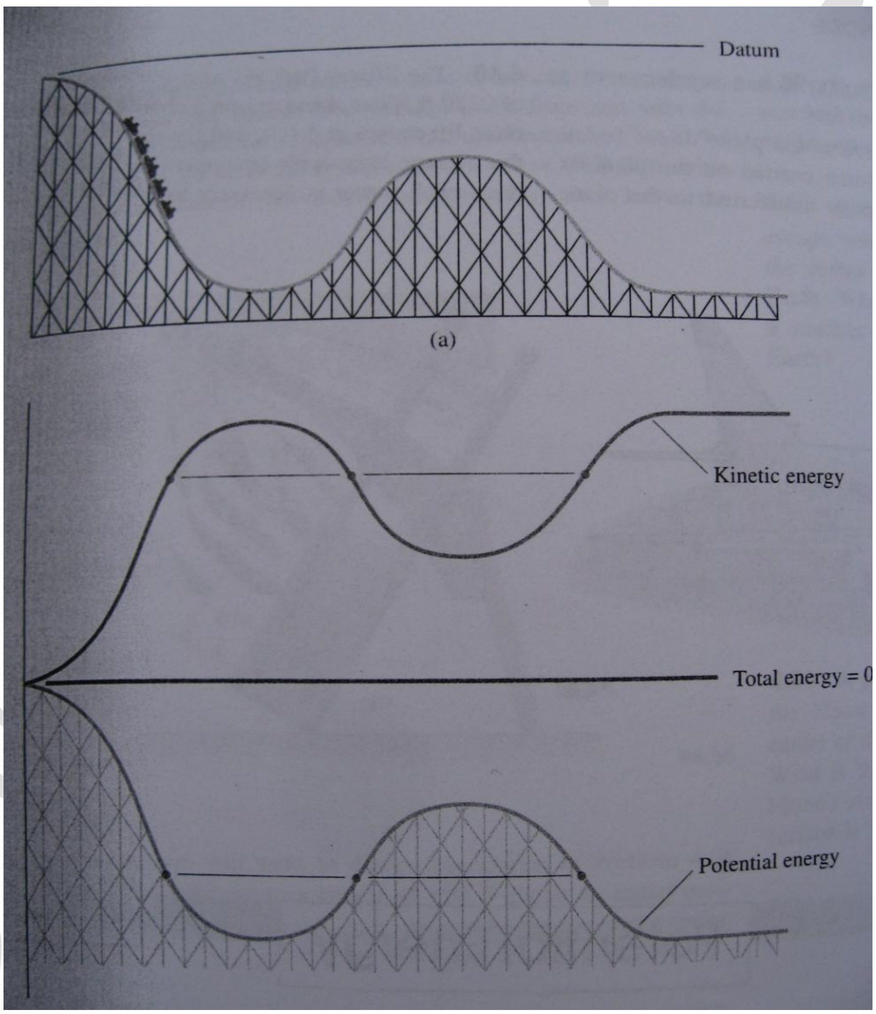
$$V = V_g + V_e$$

توضیح: برای مسائلی که فقط شامل نیروهای گرانشی و الاستیک هستند (نیروهای قیدی که کار انجام نمی دهند) معادله فوق به صورت زیر ساده می شود :

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\rightarrow E_1 = E_2$$

$$E = T + V$$



مثال) مطلوبست حل مسأله ی دستگاه آهنگری (Forging- device) با استفاده از قانون بقای انرژی؟

$$E_1 = E_2$$

$$(V_g)_1 + (V_e)_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = (V_g)_2 + (V_e)_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\rightarrow 2\left(\frac{1}{2}ks_1^2\right) + mgy_1 + 0 = 2\left(\frac{1}{2}ks_2^2\right) + 0 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\rightarrow (1500 \times 0.3^2) + (40 \times 9.81 \times 0.4) + 0 = (1500 \times 0.1^2) + 0 + \frac{1}{2} \times 40 \times v_2^2$$

$$\rightarrow v_2 = 3.72\frac{m}{s}$$

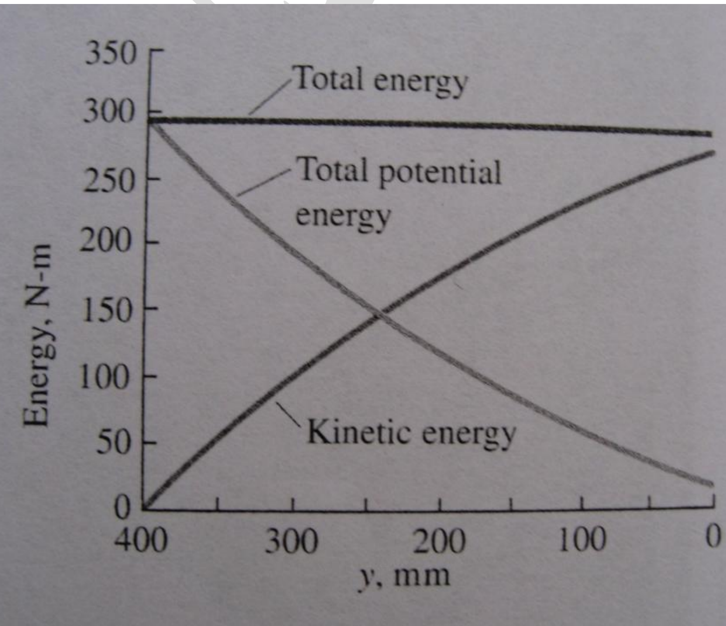
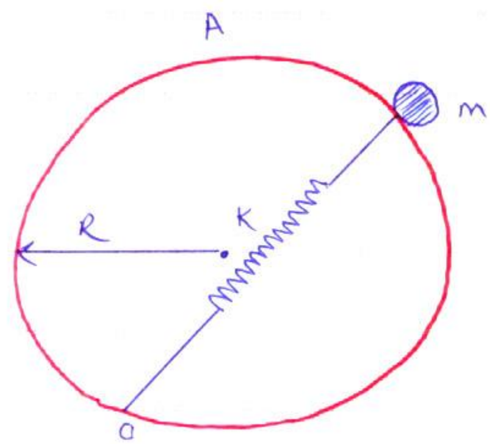


Figure 4.18
The potential and kinetic energies as functions of the y coordinate of the hammer.

مثال) جرم m از نقطه ی A رها می شود با فرض آنکه طول آزاد فنر صفر باشد سرعت جرم مذکور را هنگامی که به نقطه ی صفر می رسد محاسبه نمایید؟

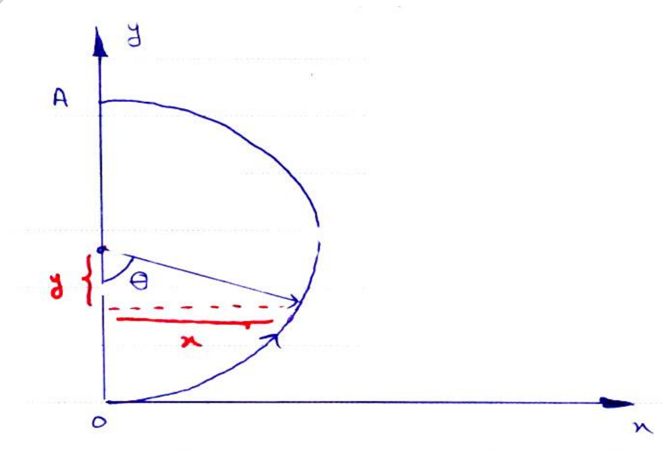


$$E_1 = E_2$$

$$T_1 + (V_g)_1 + (V_e)_1 = T_2 + (V_g)_2 + (V_e)_2$$

$$0 + 2mgR + \frac{1}{2}K(2R)^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 + 0 \rightarrow v_2 = 2\sqrt{Rg + \frac{kR^2}{m}}$$

مثال) مطلوبست محاسبه ی مقدار کار انجام شده توسط نیروی $F = A(x^3\vec{i} + xy^2\vec{j})$ در امتداد مسیر نیم دایره ای نشان داده شده در شکل زیر از نقطه ی o تا نقطه ی A. سپس در صورتی که نیروی F به صورت مماس بر مسیر وارد گردد مقدار کار انجام شده را محاسبه نمایید؟



$$if\ x = R\sin\theta\ \rightarrow dx = R\cos\theta\, d\theta$$

$$if\ y = R(1-\cos\theta)\ \rightarrow dy = R\sin\theta\, d\theta$$

$$U_{0-A} = \int F.dr = \int [A(x^3\vec{i} + xy^2\,\vec{j}).(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j})]$$

$$U_{0-A} = \int A\,x^3dx + Axy^2dy$$

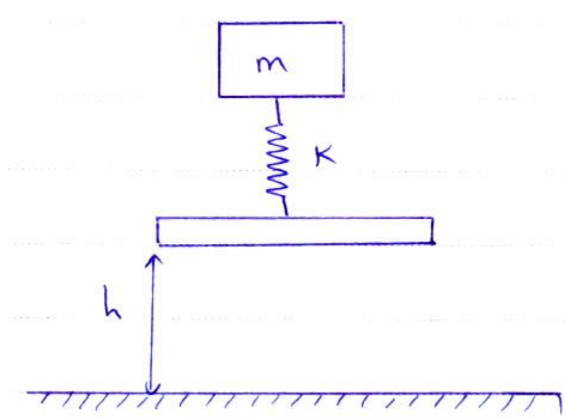
$$U_{0-A} = R^4\,A\int_0^{\pi}[\sin^3\theta\,\cos\theta + \sin^2\theta\,(1-\cos\theta)^2]\,d\theta$$

در حالت دوم داریم :

$$\vec{F} = F_0\vec{e}_\theta$$

$$U_{0-A} = \int_0^A F.dr = \int_0^A (F_0\vec{e}_\theta).(dr\vec{e}_r + Rd\theta\,\vec{e}_\theta) = \int_0^{\pi} F_0Rd\theta = \pi F_0R$$

مثال) سیستم جرم و فنر نشان داده شده در شکل زیر از ارتفاع h رها می شود . پس از برخورد پایه به زمین به آن می چسبد سرعت جرم m در موقعیتی که فنر به اندازه ی نصف فشردگی max یا بیشینه فشرده شده است با فرض $k = \frac{4mg}{h}$ را بدست آورید؟



$$E_1 = E_2$$

$$mg(h + \delta_{max}) = \frac{1}{2} k \delta_{max}^2$$

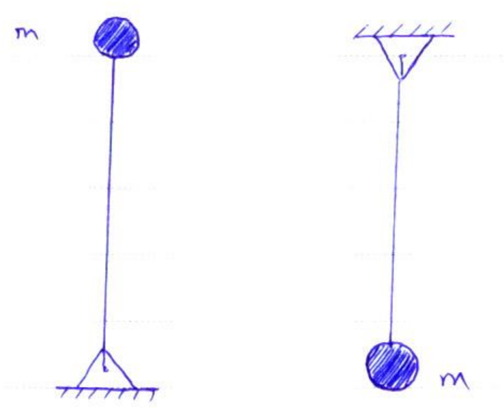
$$2\delta_{max}^2 - \delta_{max} h - h^2 = 0 \rightarrow \delta_{max} = h$$

$$E_1 = E_2$$

$$mg\left(h + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4mg}{h} \times (\frac{h}{2})^2 + \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

پایداری :

شرط تعادل : $\frac{dv}{dx} = o$



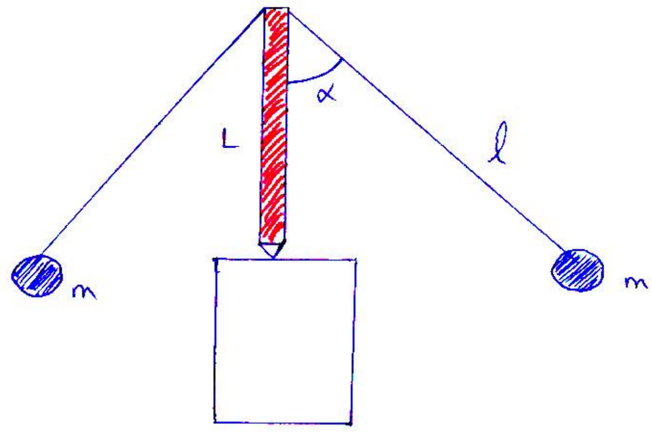
$$if \;\; v = mgl(1 - \cos\theta) \rightarrow \frac{dv}{d\theta} = mgl \sin\theta$$

$$if \;\; mg \;\sin\theta = 0 \rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

$$if \;\; \theta = 0 \rightarrow \frac{d^2 v}{d\theta^2} = mgl \cos\theta > 0$$

$$if \;\; \theta = \pi \rightarrow \frac{d^2 v}{d\theta^2} = mgl \cos\theta < 0$$

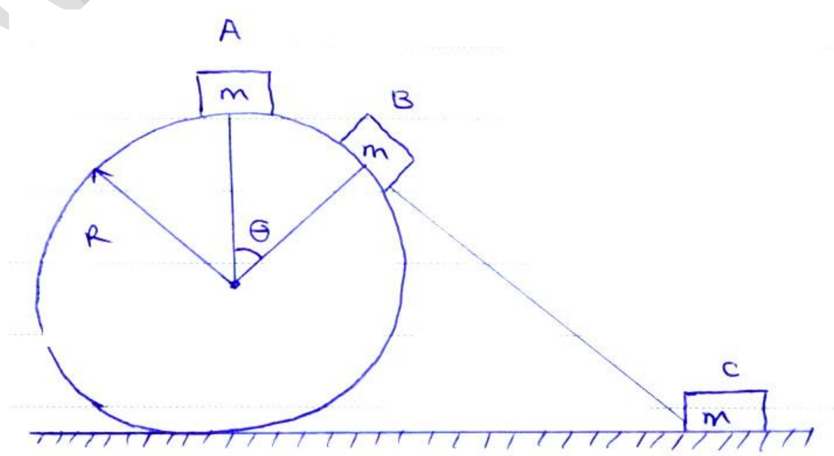
مثال) می خواهیم شرط پایداری را برای وسیله ی بازی نشان داده شده در شکل زیر بدست آوریم .



$$v(\theta) = mg[L\cos\theta - l\cos(\alpha+\theta)] + mg[L\,cos\,\theta - l\,cos(\alpha-\theta)] = 2mg\,cos\,\theta(L - l\cos\theta)$$

$$\rightarrow \frac{dv}{d\theta} = 0 \rightarrow\ -2mg\,sin\,\theta(L - l\,cos\,\alpha) = 0\ \rightarrow \left.\frac{d^2v}{d\theta^2}\right|\theta = -2mg(L - l\,cos\,\alpha) > 0\ \rightarrow L < l\,cos\,\alpha$$

مثال) ضریبی به جرم m از بالاترین سطح کروی بدون اصکاک به شعاع R از حال سکون شروع به حرکت می نماید نقطه ی جدایش آن از سطح ، سرعت ذره در آن لحظه (لحظه ی جدایش) و نیز سرعت برخورد ذره به زمین را بدست آورید؟



$$v_B^2 - v_A^2 = 2gR(1-\cos\theta) \rightarrow v_B = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

شرط جدایش :

$$N = 0$$

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv_B^2}{R} \rightarrow N = 0$$

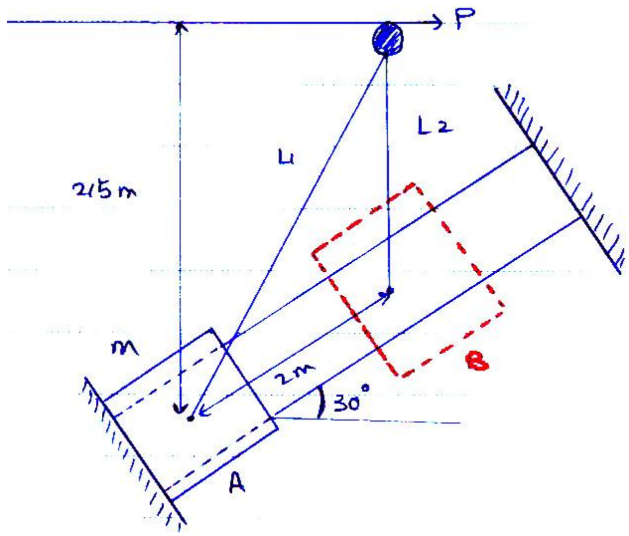
$$mg\cos\theta = 2mg(1-\cos\theta) \rightarrow \cos\theta = 2 - 2\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

سرعت برخورد در لحظه ی رسیدن به زمین :

$$v_C^2 - v_A^2 = 2g \times 2R \rightarrow v_c = 2\sqrt{Rg}$$

$$if\ \cos\theta = \frac{2}{3} \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

مثال) جرم [m= 1/8 kg] در نقطه ی A بر روی یک میله ی بدون اصطکاک رها می شود نخست سرعت آن را در موقعیت B برای نیروی P=20N محاسبه نمایید ؟ سپس کمترین مقدار نیروی P را چنان بیابید که جسم مذکور به موقعیت B برسد؟



$$U_{A-B} = T_B - T_A$$

$$-mgh + P(L_1 - L_2) = \frac{1}{2}mv_B^2 - 0$$

$$h = 2\,sin\,30 = 1$$

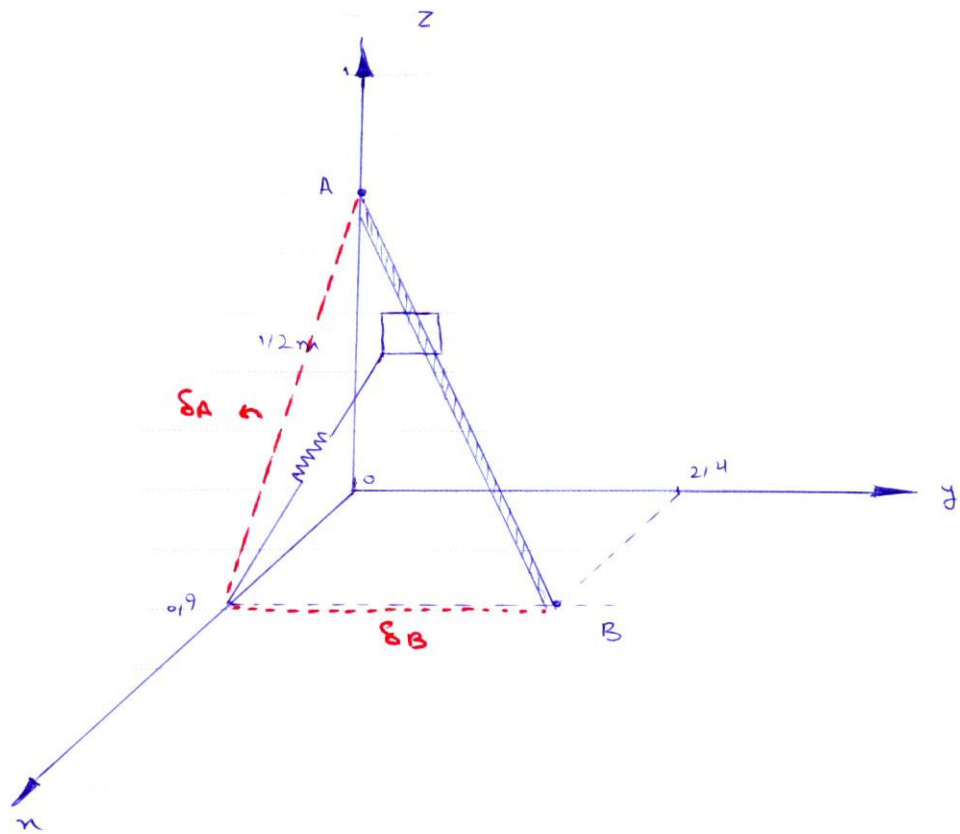
$$L_1 = ((2\,cos\,30)^2 + (2.5)^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow L_1 = 3.041$$

$$L_2 = 2.5 - 2\,sin\,30 = 1.5 \rightarrow v_B = 3.82\,\frac{m}{s}$$

$$-mgh + P_{min}\,(L_1 - L_2) = 0$$

$$P_{min} = \frac{mgh}{L_1 - L_2} = 11.46$$

مثال) در شکل زیر طول آزاد فنر 1.8 m و سختی آن $120\frac{N}{m}$ می باشد جرم m=0.9 kg با سرعت $3.6\frac{m}{s}$ از نقطه ی A بر روی یک میله ی بدون اصطکاک به سمت پایین می لغزد سرعت آن را در نقطه ی B محاسبه کنید؟



$$U_{A-B} = T_B - T_A$$

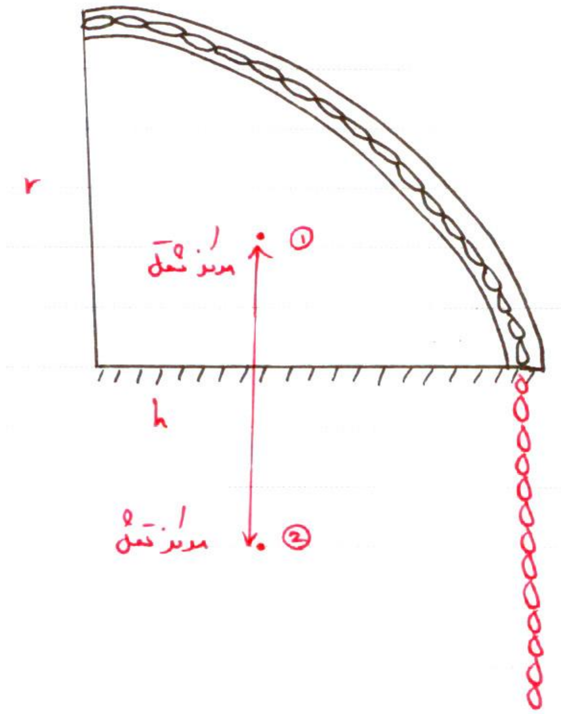
$$-mg(Z_B - Z_A) - \frac{1}{2}k(\delta_B^2 - \delta_A^2) = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$

$$Z_B - Z_A = -1.2m$$

$$\delta_A = \sqrt{1.2^2 + 0.9^2} - 1.8 = 0.3$$

$$\delta_B = 2.4 - 1.8 = 0.6$$

مثال) زنجیری مطابق شکل زیر رها می شود سرعت آن را در هنگام ترک آخرین حلقه ی آن از مسیر ربع دایره با فرض اصکاک ناچیز محاسبه نمایید؟

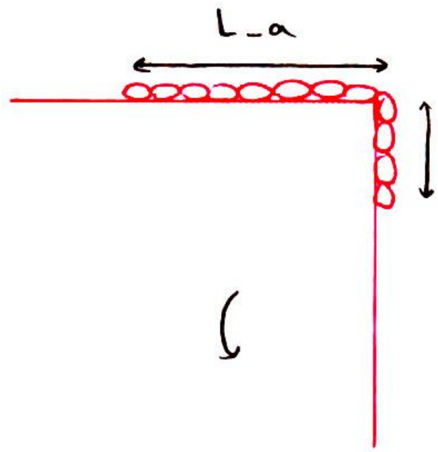


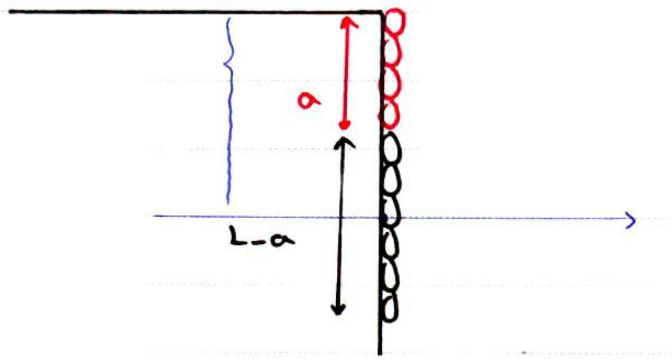
$$mg\left(\frac{2r}{\pi}+\frac{\pi r}{4}\right)=\frac{1}{2}mv^2$$

$$v=\sqrt{gr(\frac{4}{\pi}+\frac{\pi}{2})}$$

مثال) ذره ای به جرم m به طول L بر روی میز بدون اصطکاکی مطابق شکل زیر از وضعیت سکون رها می شود سرعت آن را در هنگام ترک آخرین حلقه ی آن از روی میز محاسبه کنید ؟

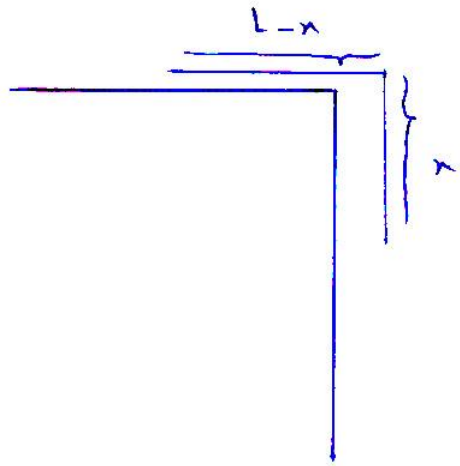
۱) روش کار و انرژی :





$$\left(\frac{L-a}{L}\right) g \left(\frac{L+a}{2}\right) = \frac{1}{2} m v^2 \ \rightarrow v = \left(\frac{g}{L}(L^2 - a^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

۲) روش دینامیکی :



$$\left(\frac{x}{L}m\right)g = m\frac{vdv}{dx} \rightarrow \int vdv = \int \frac{g}{L}xdx$$

ضربه و ممنتوم :

$$\sum F = ma \rightarrow \sum F = m\frac{dv}{dt} \rightarrow \sum F = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$G = mv \rightarrow \sum F = \dot{G}$$

$$\sum F_x = \dot{G}_x$$

$$\sum F_y = \dot{G}_y$$

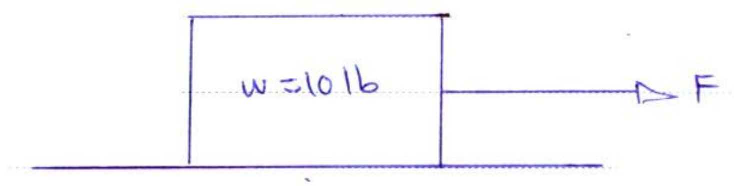
$$\sum F_z = \dot{G}_z$$

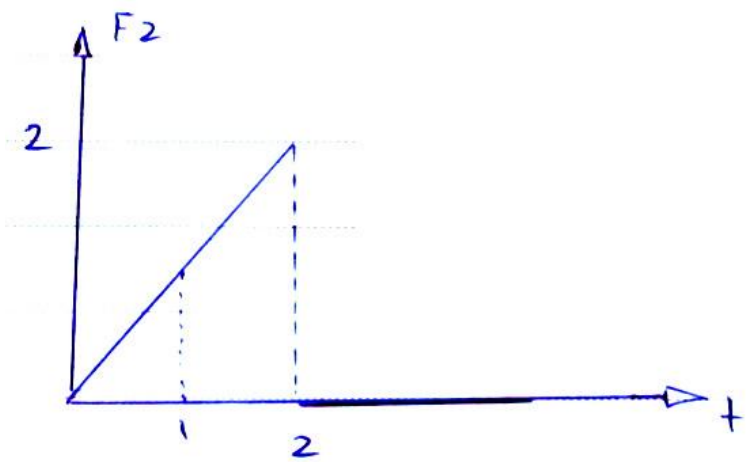
$$\int_{t_1}^{t_2} F.dt = G_2 - G_1 = \Delta G \rightarrow G_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum F.dt = G_2$$

$$if \sum F = 0 \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum F.dt = \Delta G = 0 \rightarrow G_2 - G_1 = 0 \rightarrow G_1 = G_2$$

√اگر برآیند نیروهای وارد بر یک ذره در یک دوره زمانی صفر باشد اندازه ی خطی آن ثابت خواهد ماند که به آن اصل پایستگی اندازه ی خطی گفته می شود.

مثال) قطعه ای به وزن 10lb روی سطحی به ضریب اصطکاک 0.1 تحت نیروی F با منحنی نمایش تغییرات زیر قرار گرفته است ، سرعت ذره را پس از زمان (S) 2 بدست آورید؟





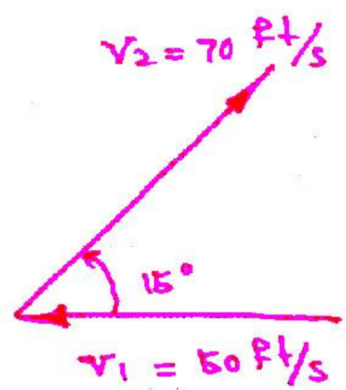
$$F = F_f = \mu . W$$

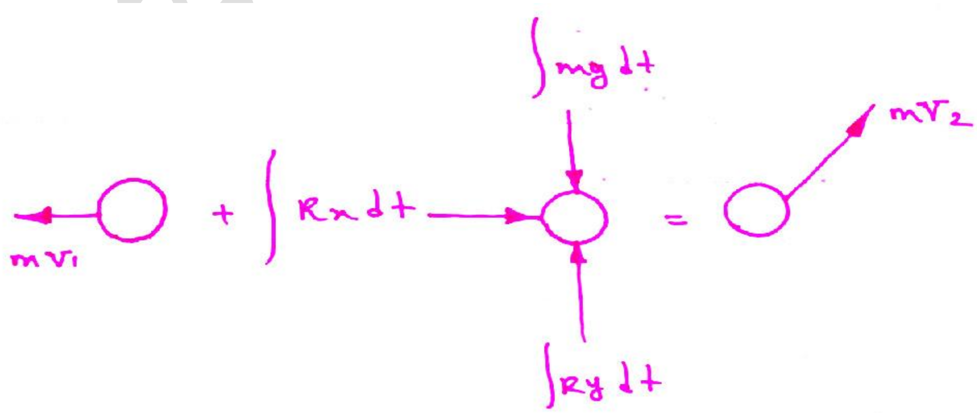
$$t = \mu . W = 1(s)$$

$$\rightarrow \int_{1}^{2} (F - F_f) dt = mv - mv_0 = mv$$

$$\int_{1}^{t}(t-0.1\times 10)dt = mv \;\rightarrow v = 1.61\;\frac{ft}{s}$$

مثال) یک بازیکن تنیس توپی را که با سرعت افقی با سرعت $50\dfrac{ft}{s}$ دریافت می نماید با سرعت $70\dfrac{ft}{s}$ در زاویه ی 15° بالای افق می زند در صورتیکه وزن توپ4(OZ) باشد و مدت زمان تماس توپ و راکت 02.0 ثانیه باشد مقدار و جهت نیروی متوسط اعمال شده توسط راکت بر روی توپ را محاسبه کنید ؟





$$m(v_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2}\sum F_x\,dt = m(v_x)_2$$

$$m(v_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum F_y \, dt = m(v_y)_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\dfrac{4/16}{32.2}(50) + R_x(0.02) = \dfrac{4/16}{32.2}(70\cos 15^o) \\ 0 + R_y(0.02) - \left(\dfrac{4}{16}\right) \times 0.02 = \dfrac{4/16}{32.2}(70 \sin 15^o) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} R_x = 45.7 \ 1b \\ R_y = 7.28 \ 1b \end{cases}$$

$$\rightarrow R = 46.28 \angle 9.06^o$$

مثال) یک گلوله ی 50 gr با سرعت $600\dfrac{m}{s}$ به یک بلوک 4 kg برخورد می کند و در آن می نشیند که در صفحه ی افقی با سرعت $12\dfrac{m}{s}$ زاویه ی ۳۰ بالای افق شروع به لغزش می نماید در نهایت سرعت مجموعه را بدست آورید ؟

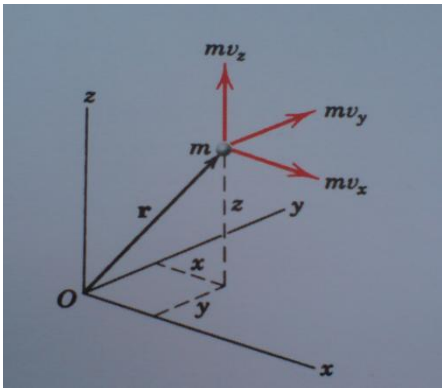
$$G_1 = G_2$$

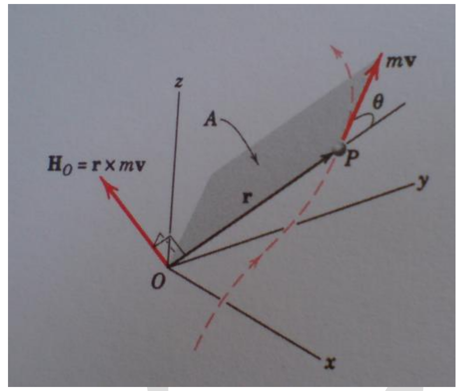
$$(0.05 \times 600\vec{j}) + [4 \times (12\cos 30\vec{i} + 12 \sin 30\vec{j})] = (0.05 + 4) \times v_f$$

$$\vec{v}_f = 10.26\vec{i} + 13.33\vec{j}$$

$$|\vec{V_f}| = 16.53 \angle 52.4^o$$

ضربه و اندازه حرکت زاویه ی :





$$H_o = r \times mv$$

$$H_o = m\begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

$$\sum M_o = r \times \sum F = r \times ma = r \times m\dot{v} \;\; (1)$$

$$\dot{H}_o = \dot{r} \times mv + r \times m\dot{v} \;\rightarrow\; \dot{H}_o = r \times m\dot{v} \xrightarrow{(1)} \dot{H}_o = \sum M_o$$

$$\left(\sum M_o\right)_x = (\dot{H}_o)_x$$

$$\left(\sum M_o\right)_y = (\dot{H}_o)_y$$

$$\left(\sum M_o\right)_z = (\dot{H}_o)_z$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_o dt = (H_0)_2 - (H_o)_1 = \Delta H_o$$

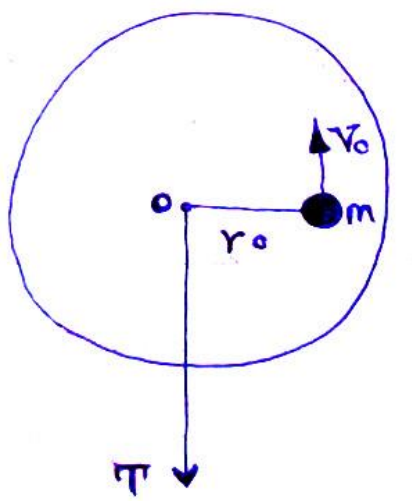
$$(H_o)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_o dt = (H_0)_2$$

$$if \sum M_o = 0 \rightarrow \dot{H}_o = 0 \rightarrow H_o = constant\ t \rightarrow H_{o_1} = H_{o_2}$$

اندازه حرکت زاویه ای ثابت می ماند ⟵

√در صورتیکه برایند گشتاورها حول نقطه ی ثابت o صفر باشد مومنتوم زاویه ی حول آن نقطه ثابت باقی خواهد ماند.

مثال) یک نقطه ی مادی به جرم m با سرعت مماسی V_0 در فاصله ی r_0 در حال دوران است. کار نیروی کشش نخ را هنگامی که فاصله ی جسم مذکور به r کاهش یابد را محاسبه نمایید ؟



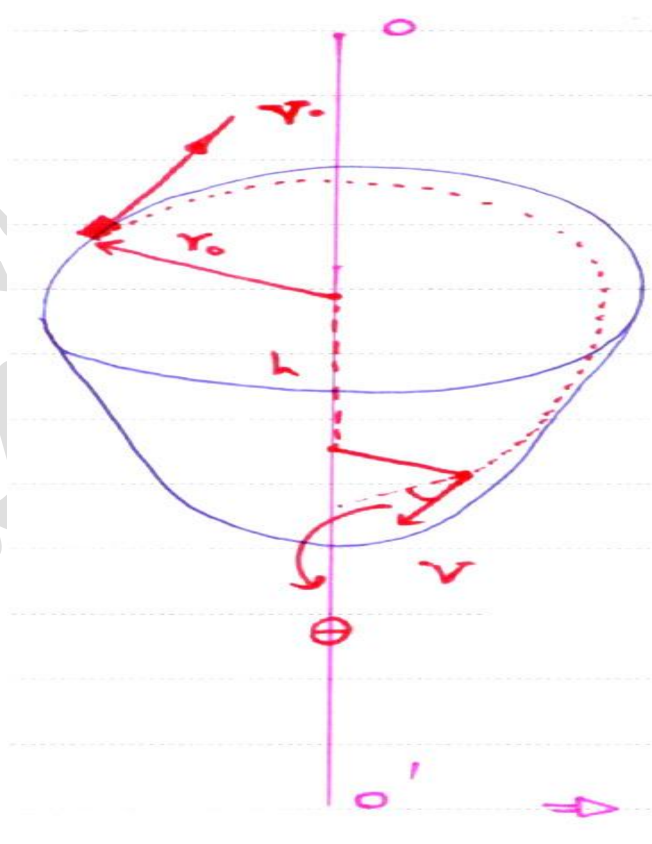
$$\int T.dr = \frac{1}{2}m(v^2 - {v_o}^2)$$

$$(H_0)_2 = (H_o)_1$$

$$(mv_o r_o) = (mvr) \rightarrow v = \frac{r_o}{r} v_o$$

$$\int T.dr = \frac{1}{2} m v_o^2 \left[\left(\frac{r_o}{r} \right)^2 - 1 \right]$$

مثال) به یک ذره با جرمی کوچک سرعت اولیه v_0 مماس بر لبه افقی یک ظرف صیقلی به شکل نیمکره در شعاع r_0 از محور تقارن قائم در نقطه A مطابق شکل داده می شود . در لحظه ای که ذره از نقطه B می گذرد که به اندازه h پایین تر از A بوده و در شعاع r از محور تقارن قائم قرار دارد ، سرعت v ذره ، زاویه θ را با خط افقی مماس بر ظرف در نقطه B می سازد . زاویه θ را تعیین کنید ؟



$$(H_0)_2 = (H_o)_1$$

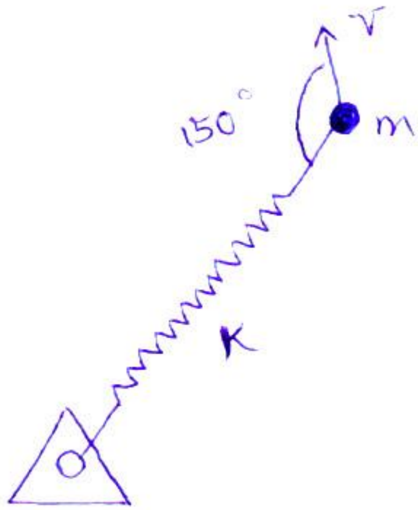
$$m v_o r_o = m v \cos\theta . r$$

از طرفی : $r = \sqrt{{r_o}^2 - h^2}$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh \rightarrow v = \sqrt{{v_o}^2 + 2gh}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2gh}{v_o^2}}\sqrt{1-\frac{h^2}{r_o^2}}}$$

مثال) جرم m بر روی یک میز گرد بدون اصکاک با سرعت v از طول آزاد فنر مطابق شکل زیر پرتاپ می شود مقدار v را چنان بیابید که حداکثر طول فنر به مقدار ۳ برابر طول اولیه اش برسد.



$$H_o = cons\ tan\, t$$

$$(H_0)_2 = (H_o)_1$$

$$mv\cos 60 \times L_o = mv_f\, 3L_o$$

$$v_f = \frac{v}{6}$$

$$v = v_\theta$$

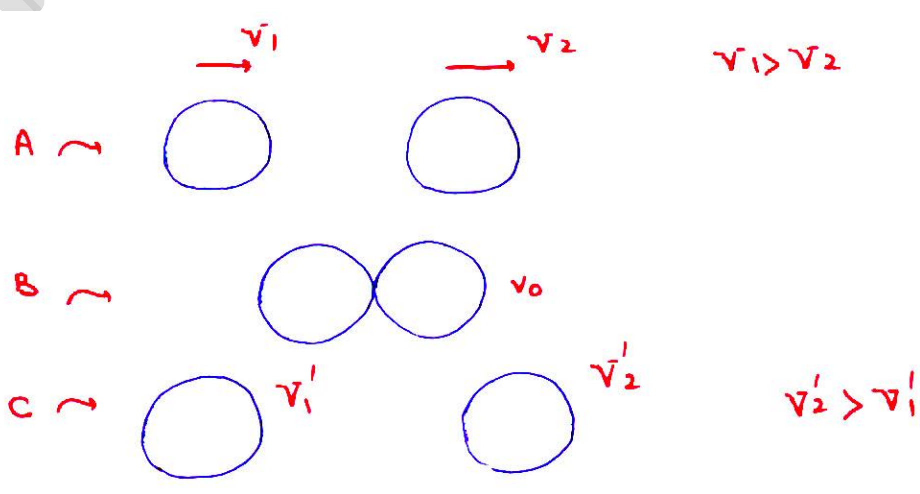
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}k[(3L_o - L_o)^2 - (L_0 - L_0)^2]$$

$$v = 12L_0\sqrt{\frac{k}{35m}}$$

برخورد :

۱) برخورد مرکزی
- الف) برخورد مستقیم
- ب) برخورد مایل

۲) برخورد غیر مرکزی



$$\begin{cases} m_1 v_1 - \int_0^{t_o} F_d dt = m_1 v_0 \\ m_2 v_2 - \int_0^{t_o} F_d dt = m_2 v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_o - \int_0^{t_o} F_d dt = m_1 \acute{v}_1 \\ m_2 v_o - \int_0^{t_o} F_d dt = m_2 \acute{v}_2 \end{cases}$$

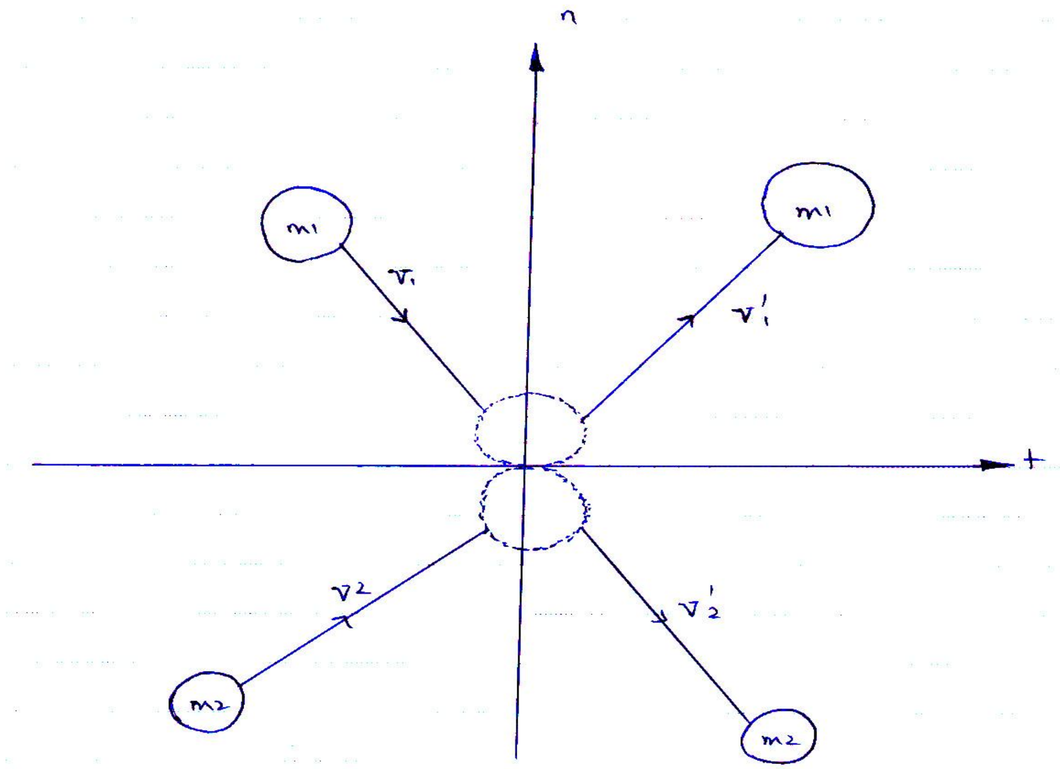
$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r dt}{\int_0^{t_o} F_d dt} = \frac{v_0 - \acute{v}_1}{v_1 - v_0} = \frac{v_0 - \acute{v}_2}{v_2 - v_0}$$

$$e = \frac{\acute{v}_2 - \acute{v}_1}{\acute{v}_1 - \acute{v}_2}$$

$$0 \leq e \leq 1$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \acute{v}_1 + m_2 \acute{v}_2$$

برخورد مایل :

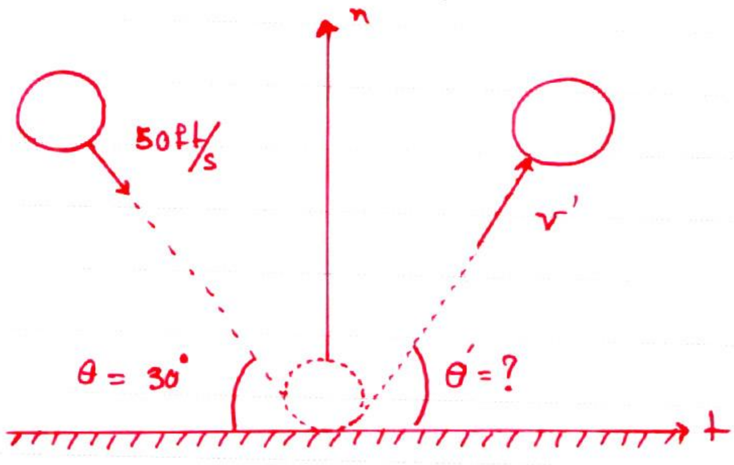


$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v_1')_n + m_2(v_2')_n$$

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1)_t = m_2(v_1')_t \\ m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t \end{cases}$$

مثال) توپی با سرعت $50\frac{ft}{s}$ و با زاویه ی $30°$ به سمت صفحه ای پرتاب می شود در صورتیکه ضریب برخورد۰.۵ باشد سرعت و زاویه ی توپ را بعد از برخورد محاسبه نمایید؟



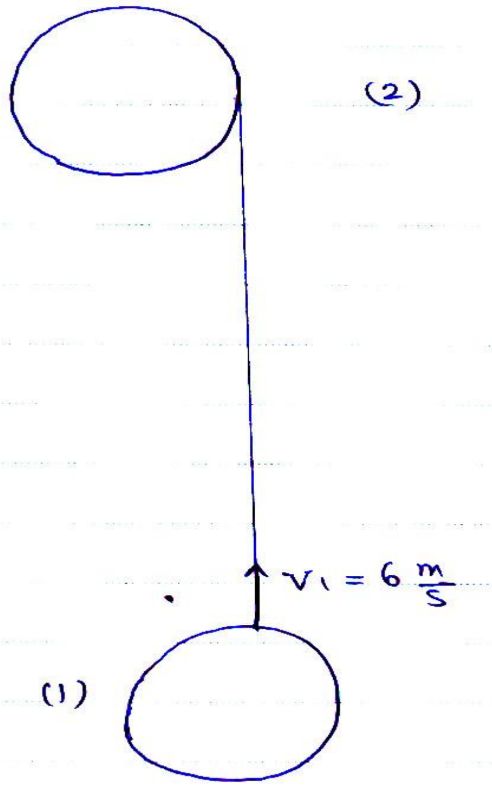
$$e = \frac{0 - (\acute{v}_1)_2}{-50\sin 30 - 0} \rightarrow (\acute{v}_1)_n = 12.5\ \frac{ft}{s}$$

$$(\acute{v}_1)_t = (v_1)_t \rightarrow (\acute{v}_1)_t = 50\cos 30 = 43.3\frac{ft}{s}$$

$$\acute{v} = \left[(\acute{v}_1)_n{}^2 + (\acute{v}_1)_t{}^2\right]^{\frac{1}{2}} = 45.1\frac{ft}{s}$$

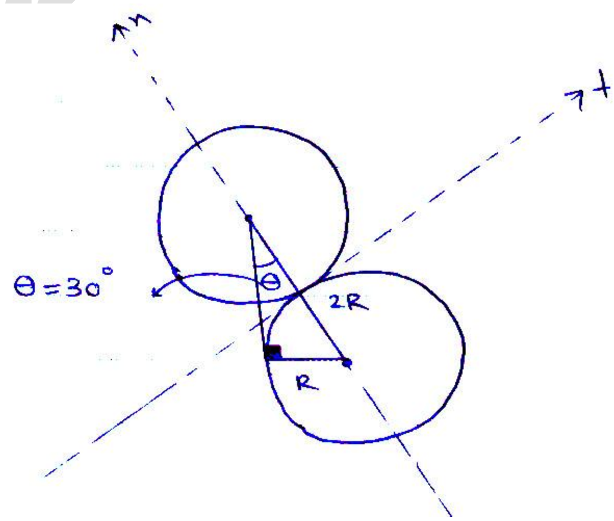
$$\theta = arc\tan\frac{(\acute{v}_1)_n}{(\acute{v}_1)_t} = 16.1^o$$

مثال) ذره ی کروی (۱) با سرعت $v_1 = 6\frac{m}{s}$ در جهت نشان داده شده با کره ی (۲) با جرم و قطر برابر که در حال سکون قرار گرفته است برخورد می نماید اگر ضریب برخورد۰.۶ باشد حرکت حاصله ی هر کره را بعد از برخورد بدست آورید ؟ همچنین میزان افت انرژی ناشی از برخورد را محاسبه نمایید؟



$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(\acute{v}_1)_n + m_2(\acute{v}_2)_n$$

$$\rightarrow 5.2 + 0 = (\acute{v}_1)_n + (\acute{v}_2)_n$$



$$e = \frac{(\acute{v}_2)_n - (\acute{v}_1)_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \rightarrow 0.6 = \frac{(\acute{v}_2)_n - (\acute{v}_1)_n}{5.2 - 0}$$

$$\begin{cases} (\acute{v}_1)_t = (v_1)_t = 3\dfrac{m}{s} \\ (\acute{v}_2)_t = (v_2)_t = 0\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

$$(\acute{v}_1)_n = 1.039\frac{m}{s} \quad and \quad (\acute{v}_2)_n = 4.16\frac{m}{s}$$

$$\acute{v}_1 = 3.17\frac{m}{s} \quad and \quad \acute{v}_2 = 4.16\frac{m}{s}$$

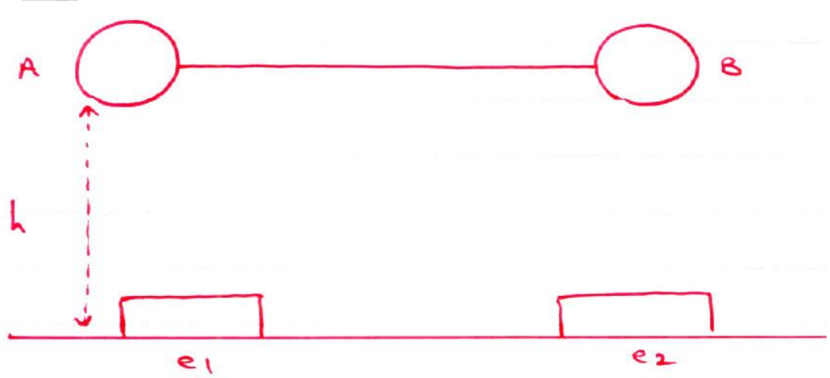
چون e <1 است بنابراین ما حتماً افت انرژی خواهیم داشت

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = 18\ m$$

$$\acute{T} = \frac{1}{2}m_1(\acute{v}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\acute{v}_2)^2 = 13.68\ m$$

$$\text{افت انرژی} = \frac{\Delta T}{T} \times 100 = \text{درصد اتلاف} = 24\%$$

مثال) در شکل زیر میله ی AB بر روی سطحی با ضرایب استرداد مختلف رها می شود سرعت زاویه ی میله را بعد از برخورد بدست آورید؟

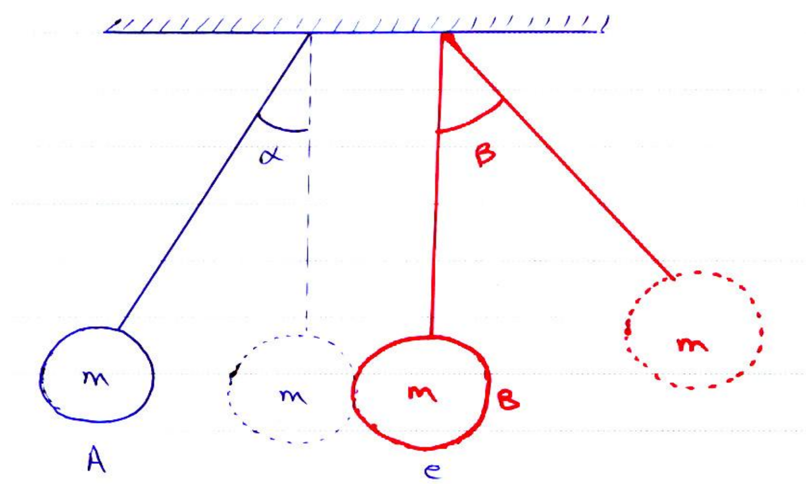


قبل از برخورد : $v_A = v_B = \sqrt{2gh}$

$$\acute{v}_A = e_1 v_A \ and \ \acute{v}_B = e_2 v_B$$

$$\omega = \frac{\acute{v}_B - \acute{v}_A}{L} \rightarrow \omega = \frac{(e_2 - e_1)\sqrt{2gh}}{L}$$

مثال) آونگ A از زاویه ی α رها می شود به آونگ B که در حال سکون است برخورد می نماید در صورتیکه ضریب استرداد e باشد پاندول B با چه زاویه ی بالا خواهد رفت؟



$$v_A = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$$

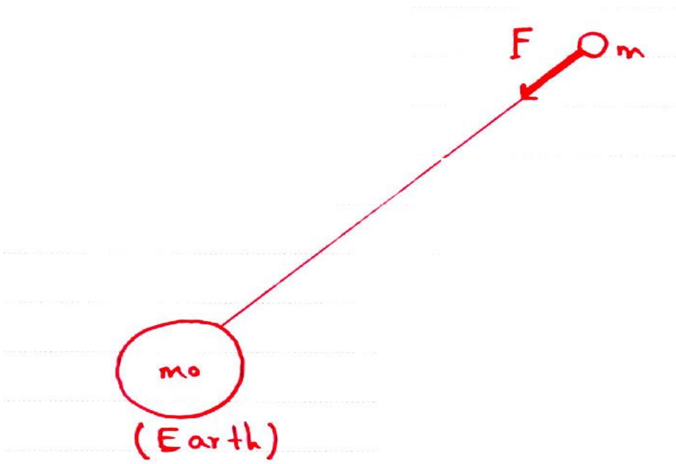
$$mv_A + 0 = m\acute{v}_A + m\acute{v}_B$$

$$e = \frac{\acute{v}_B - \acute{v}_A}{v_A} \rightarrow \acute{v}_B - \acute{v}_A = ev_A \rightarrow$$

$$\acute{v}_B = \frac{1+e}{2} v_A \quad and \quad v_B = \sqrt{2gl(1-\cos\beta)}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left[1 - \left(\frac{1+e}{2}\right)^2 (1-\cos\alpha)\right]$$

حرکت تحت نیروی مرکزی :



$$F(r) = F = G\frac{mm_o}{r^2}$$

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F(r) \\ \\ m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = 0 \end{cases} \rightarrow \dot{H}_o = 0 \rightarrow \dot{H}_o = mr^2\dot{\theta} = \text{constant}$$

$$\rightarrow r^2\dot{\theta} = constant = h$$

$$\left(u = \frac{1}{r}\right) \rightarrow \dot{\theta} = hu^2$$

$$\dot{r} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = hu^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$hu^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{mh^2u^2}$$

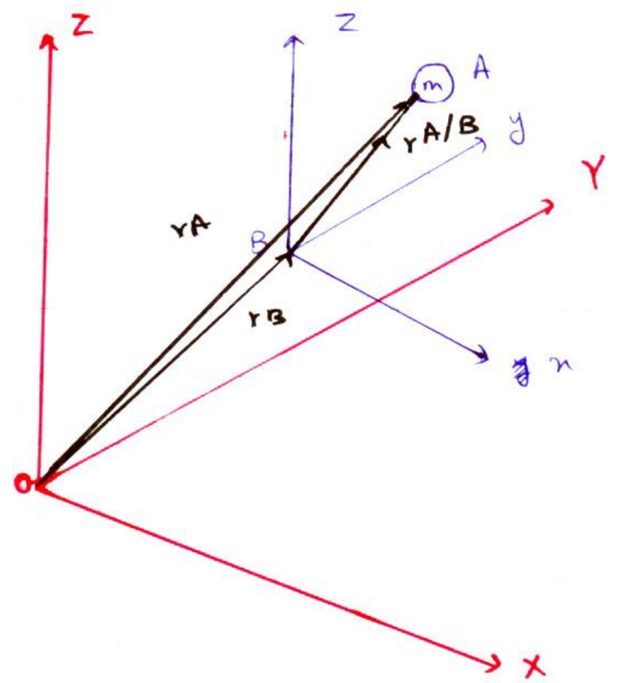
مسیر تحت نیروی جاذبه ی عمومی :

$$\begin{cases} F(r) = -\dfrac{k}{r^2} e_r \\ \dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\dfrac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{mh^2u^2} \end{cases} \rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mh^2}$$

$$r(\theta) = \frac{\frac{mh^2}{k}}{\frac{mh^2}{k} A\cos(\theta-\theta_0) + 1} = \frac{a}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

$$\begin{cases} \varepsilon < 1 \quad if & \text{انتهای مسیر یک بیضی را طی می کند.} \\ \varepsilon = 1 \quad if & \text{انتهای مسیر یک سهمی را طی می کند .} \\ \varepsilon > 1 \quad if & \text{انتهای مسیر یک هندسی را طی می کند.} \\ \varepsilon = 0 \quad if & \text{انتهای مسیر یک دایره را طی می کند.} \end{cases}$$

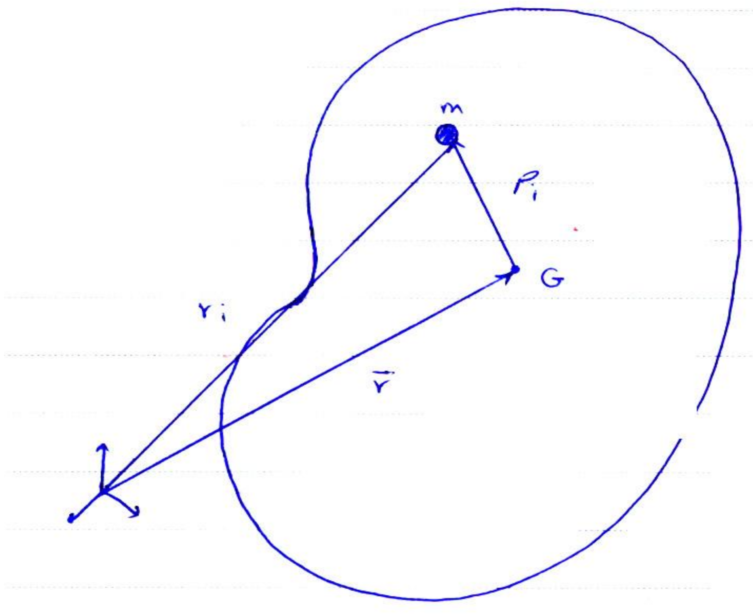
حرکت نسبی:



$$a_A = a_B + a_{A/B}(a_{rel})$$

$$if\ \ a_B = 0 \ \rightarrow \sum F = \mathrm{m}a_{rel}$$

$$if\ \ a_B \neq 0 \ \rightarrow \sum F = \mathrm{m}(a_B + a_{rel}) \rightarrow \sum F \neq \mathrm{m}a_{rel}$$



$$\bar{r} = \frac{\sum m_i r_i}{m}$$

$$F_i + \sum_{j=1}^{n} F_{ij} = \frac{d}{dt}(m_i v_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i v_i) \quad ,(f_{ij} = -f_{ji})$$

$$\sum F = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \dot{G}$$

$$G = \sum m_i v_i = m\bar{v}$$

$$\dot{G} = m\bar{a}$$

$$G_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum F \, dt = G_2$$

$$G_1 = G_2$$

$$r_i(F_i + \sum_{j=1}^{n} F_{ij} = \frac{d}{dt}(m_i v_i))$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_i \times F_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(r_i \times m_i v_i)$$

$$\sum M_o = \dot{H_o} \rightarrow H_o = \sum_{i=1}^{n}(r_i \times m_i v_i)$$

$$\dot{H_o} = \sum_{i=1}^{n}[(v_i \times m_i v_i) + (r_i \times m_i v_i)] = \sum r_i \times m_i a_i$$

$$(H_o)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_o \, dt = (H_o)_2 \quad , \quad (H_o)_1 = (H_o)_2$$

$$H_G = (H_G)_{abs} = (H_G)_{rel}$$

$$(H_G)_{rel} = \sum \rho_i \times m_i \dot{\rho}_i$$

$$(H_G)_{abs} = \sum \rho_i \times m_i\left(\overline{(\dot{r})} + \dot{\rho}_i\right) = \sum \rho_i \times m_i \dot{\rho}_i = (H_G)_{rel}$$

طبق تعریف مرکز ثقل $\rightarrow \sum m_i \rho_i = 0$

اثبات می شود که : $(H_G)_{abs} = (H_G)_{rel}$

$$(\dot{H}_G)_{rel} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\rho}_i \times m_i \dot{\rho}_i + \sum_{i=1}^{n} \rho_i \times m_i \ddot{\rho}_i$$

$$\rightarrow (\dot{H}_G)_{rel} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \times m_i \ddot{\rho}_i = \sum M_G$$

$$\rightarrow (\dot{H}_G)_{abs} = \sum \rho_i \times m_i\left(\overline{(\dot{r})} + \dot{\rho}_i\right) + \sum \rho_i \times m_i\ (\ddot{r}_i)$$

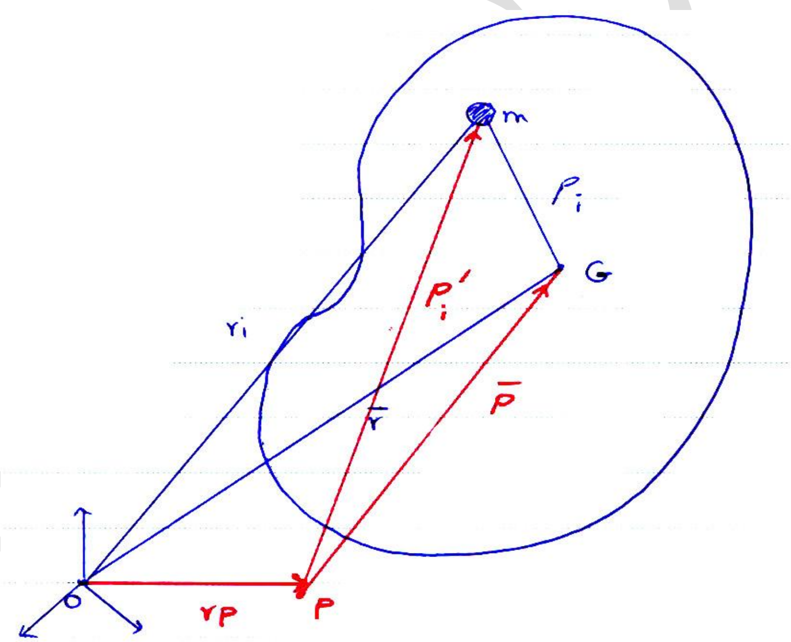
$$(\dot{H}_G)_{abs} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\rho}_i \times m_i r_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{\rho}_i \times m_i \ddot{r}_i = \sum \rho_i \times F_i = \sum M_G$$

$$\sum m_i \rho_i = 0 \rightarrow \sum m_i \dot{\rho}_i = 0$$

$$\sum \dot{\rho}_i \times m_i \dot{\rho}_i = 0$$

ما اثبات کردیم : $(\dot{H}_G)_{abs} = (\dot{H}_G)_{rel} = \sum M_G = \dot{H}_G$

$$(H_G)_1 = (H_G)_2$$



$$H_P = (H_P)_{abs} = \sum \acute{\rho}_i \times m_i \dot{r}_i$$

$$(H_P)_{rel} = \sum \rho'_i \times m_i \dot{\rho}'_i$$

$$H_P = \sum(\bar{\rho} + \rho_i) \times m_i \dot{r}_i = H_G + \bar{\rho} \times m\bar{v} \rightarrow H_P = H_G + \bar{\rho} \times m\bar{v}$$

We know from the statics that $\sum M_P = \sum M_G + \bar{\rho} \times \sum F$

$$\sum M_P = \dot{H}_G + \bar{\rho} \times m\bar{a}$$

$$(H_P)_{rel} = \sum(\bar{\rho} + \rho_i) \times m_i\left(\overline{(\dot{\rho})} + \dot{\rho}_i\right)$$

$$\sum \bar{\rho} \times m_i\,\dot{\bar{\rho}} + \sum \bar{\rho} \times m_i\,\dot{\rho}_i + \sum \rho_i \times m_i\,\dot{\bar{\rho}} + \sum \rho_i \times m_i\,\dot{\rho}_i = \sum \bar{\rho} \times m_i\,\dot{\bar{\rho}} +$$

$$+\sum \rho_i \times m_i\,\dot{\rho}_i$$

$$(H_P)_{rel} = (H_G)_{rel} + \bar{\rho} \times m\bar{v}_{rel}$$

مشتق می گیریم : $(\dot{H}_P)_{rel} = \sum \acute{\rho}_i \times m_i \ddot{\rho}'_i = \sum \rho'_i \times m_i(\ddot{r}_i - \ddot{r}_p)$

$$= \sum M_P + a_P \times m\bar{\rho}$$

$$\sum M_P = (\dot{H}_P)_{rel} - a_P \times m\bar{\rho}$$

$$F_i + \sum_{i=1}^{n} f_{ij} = m_i \frac{v_i dv_i}{dr_i}$$

$$F_i dr_i + \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\, dr_i = m_i v_i dv_i$$

$$U_{i(1-2)} + 0 = (T_i)_2 - (T_i)_1 = \Delta T_i$$

$$(T_i)_1 + U_{i(1-2)} = (T_i)_2$$

رابطه ی بالا را برای تمام ذرات تعمیم می دهیم

$$\sum_{i=1}^{n} (T_i)_1 + U_{i(1-2)} = (T_i)_2$$

$$T_1 + U_{1-2} = T_2$$

کار تمام نیروهای خارجی وارد بر سیستم ذرات : $U_{1-2} = \int_1^2 F_i dr_i = 0$

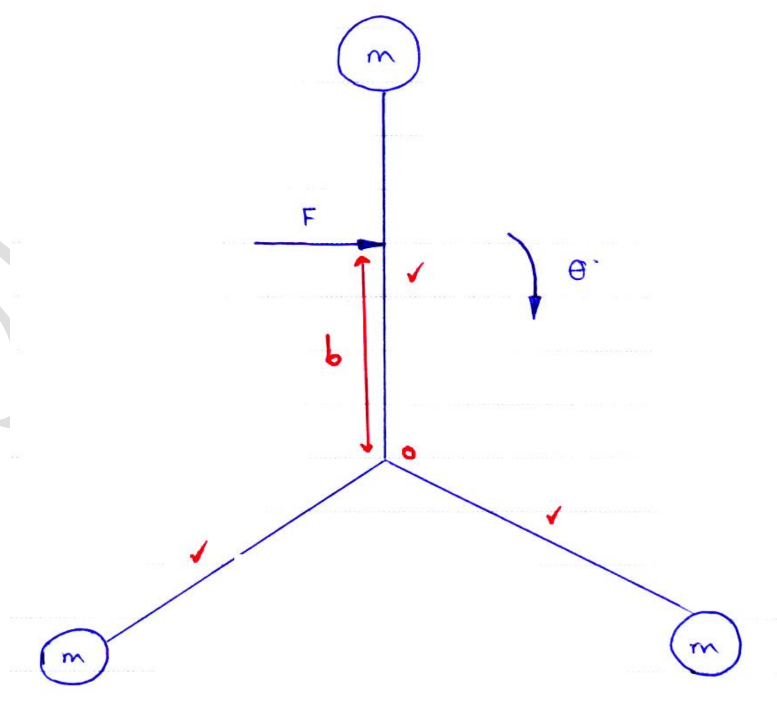
$$T = \sum T_i = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i(\vec{v}_i.\vec{v}_i)$$

$$\vec{v}_i = \vec{\bar{v}} + \vec{\dot{\rho}_i} \rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i \bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i \dot{\rho}_i^2 + \sum m_i\, (\bar{v} \times \vec{\dot{\rho}}_i)$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2}\sum m_i \bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i \dot{\rho}_i^2$$

مثال) مطابق شکل زیر نیروی F به مجموعه ی نشان داده شده وارد می شود این مجموعه بر روی سطح افقی بدون اصکاک قرار دارد شتاب نقطه ی جوش داده شده و شتاب زاویه ای قاب را بدست آورید؟

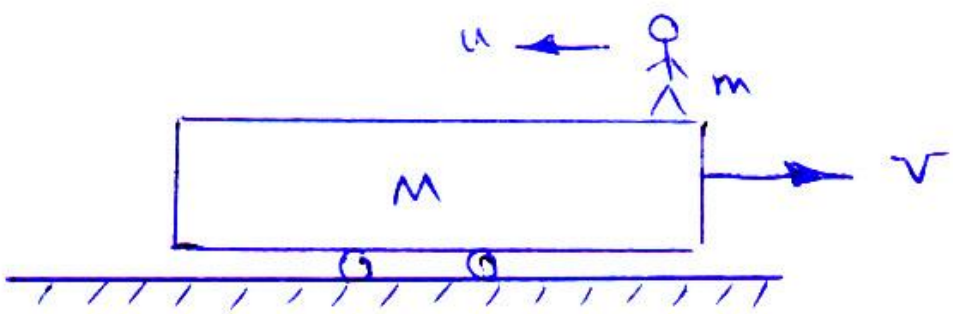


تمام جرم را روی مرکز ثقل می آوریم $\rightarrow F\vec{i} = 3m\bar{a} \rightarrow \bar{a} = a_0 = \frac{F}{3m}\vec{i}$

$$\sum M_G = \dot{H}_G \ , \qquad H_G = 3mr\dot{\theta} \times r = 3mr^2\dot{\theta}$$

$$F_b = 3mr^2\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{F_b}{3mr^2}$$

مثال) در شکل زیر شخص و ارابه با سرعت ثابت **v** در حال حرکت هستند حال اگر شخص با سرعت ثابت **v** نسبت به ارابه در جهت مخالف شروع به حرکت نماید سرعت ارابه را تعیین نمایید ؟ از اصطکاک بین ارابه و زمین صرفنظر نمایید ؟



$$\sum F = \dot{G}$$

$$\dot{G} = 0$$

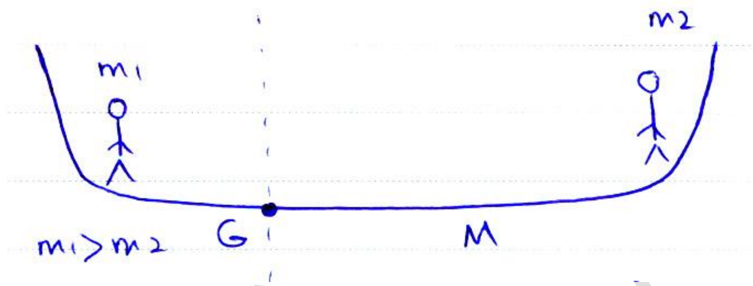
$$G_1 = G_2$$

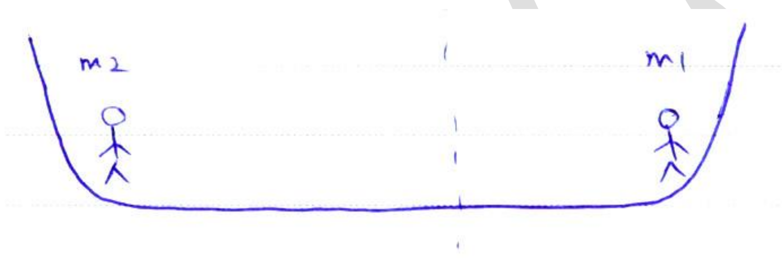
$$G = \sum m_i v_i$$

$$(m + M)v = M\acute{v} + m(\acute{v} - u)$$

$$\acute{v} = v + \frac{m}{m + M}u$$

مثال) قایقی به جرم m به طول L بر روی دریاچه ای ساکن قرار دارد در صورتیکه دو نفر به جرم های m_1 و m_2 که دردوانتهای قایق ایستاده اند جایشان را عوض کنند قایق چه اندازه و در چه جهتی جابجا می شود ؟





$$\sum F = \dot{G} \rightarrow \dot{G} = 0 \rightarrow G = constant = 0$$

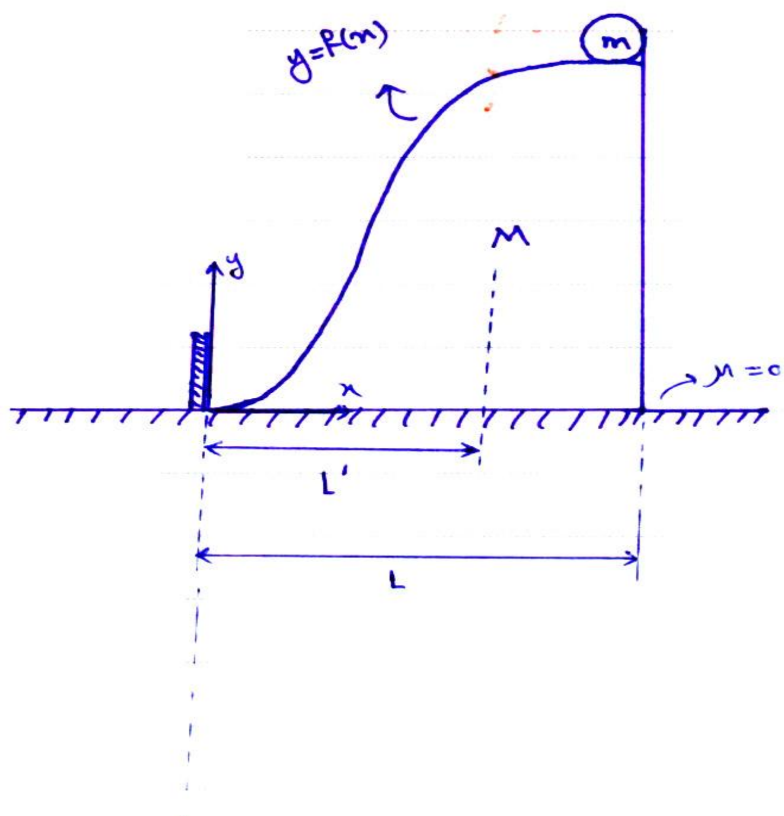
$$\sum m_i v_i = 0 \rightarrow m\acute{v} = 0 \rightarrow \overline{X} = constant$$

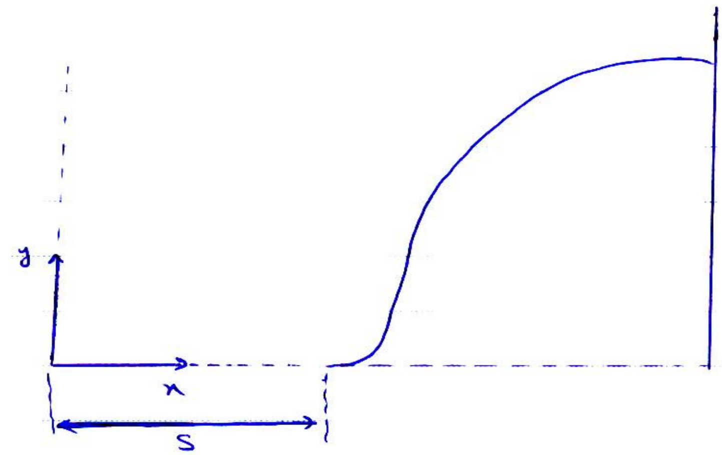
$$\overline{X_1} = \frac{m_1 \times 0 + M \times \frac{L}{2} + m_2 \times L}{m_1 + m_2 + M}$$

$$\overline{X_2} = \frac{m_2 \times 0 + M \times \frac{L}{2} + m_1 \times L}{m_1 + m_2 + M}$$

جابجایی قایق را با S نمایش می دهیم $= (\overline{X_2}) - (\overline{X_1}) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M} L$

مثال) ذره ای به جرم M از بالای سطح شیب داری با منحنی دلخواه $y = f(x)$ رها می شود جابجایی سطح شیب دار قبل از برخورد ذره مذکور به مانعی که در انتهای آن قرار دارد و سرعت آن را بعد از برخورد و چسبیدن به مانع بدست آورید ؟





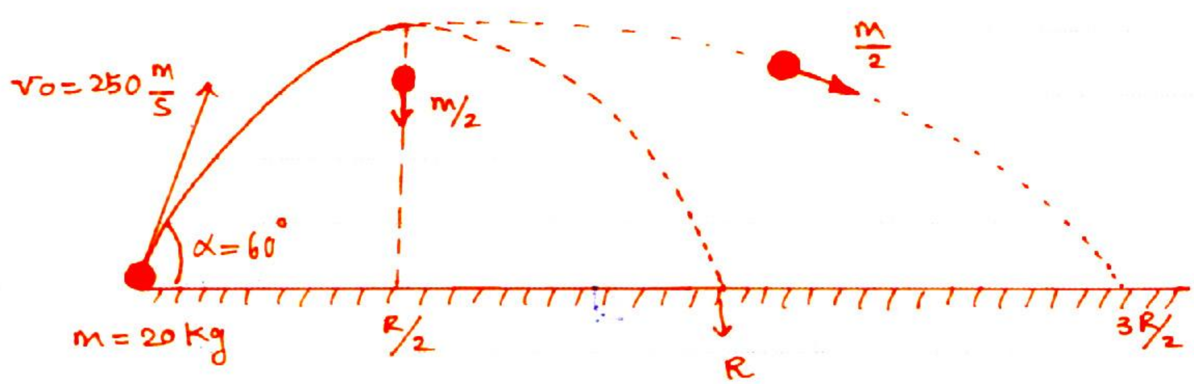
$$\sum F = 0 \rightarrow \dot{G} = 0 \rightarrow G = constant$$

$$\sum \mathrm{m_i v_i} = constant = 0 \rightarrow \sum \mathrm{m_i v_i} = constant$$

$$mL + M\acute{L} = ms + M(s + \acute{L}) \rightarrow s = \frac{m}{m+M} L$$

$$\rightarrow (\mathrm{m} + \mathrm{M})\mathrm{v} = 0 \rightarrow \mathrm{v} = 0$$

مثال) پرتابه ای به جرم m =20 در امتداد زاویه ی α=60 با سرعت اولیه ی 250= V_0 پرتاب می شود با انفجار پرتابه در نقطه ی اوج به دو قسمت مساوی ، بخشی از آن بدون سرعت اولیه در امتداد قائم سقوط آزاد می نماید محل پرتاپ بخش دوم و انرژی آزاد شده در هنگام انفجار را بدست آورید ؟



$$\sum F = 0 \rightarrow \dot{G} = 0 \rightarrow G = \text{constant}$$

$$(mR) = \left(\frac{m}{2} \times \frac{R}{2}\right) + \left(\frac{m}{2} \times x\right) \rightarrow x = \frac{3R}{2}$$

$$\rightarrow m v_0 \cos\alpha = \frac{m}{2}\acute{v} \rightarrow \acute{v} = 2v_0 \cos\alpha$$

$$\text{if } \alpha = 60^o \rightarrow \acute{v} = v_0 = 250 \frac{m}{s}$$

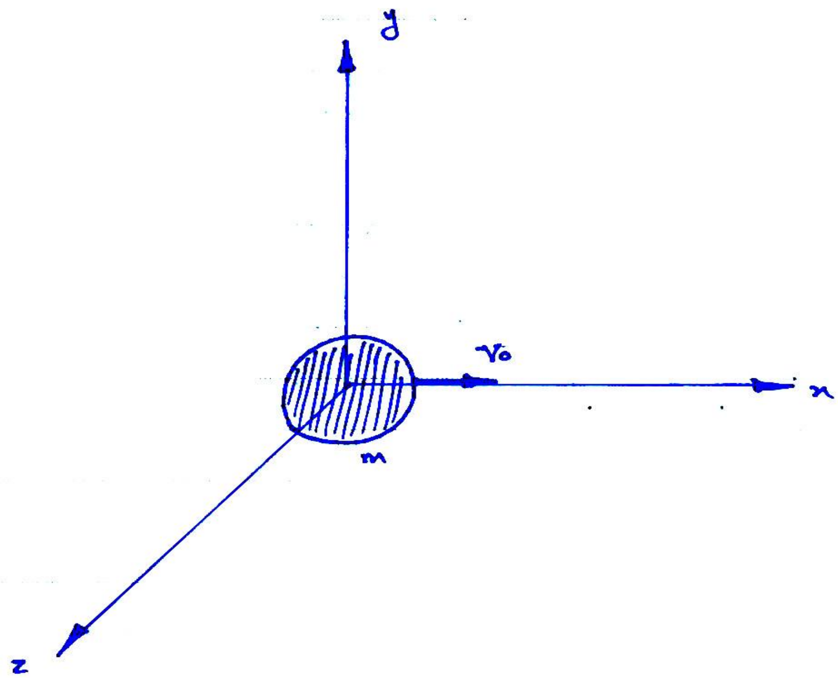
$$k = \Delta T = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\acute{v}^2 = 156\,KJ$$

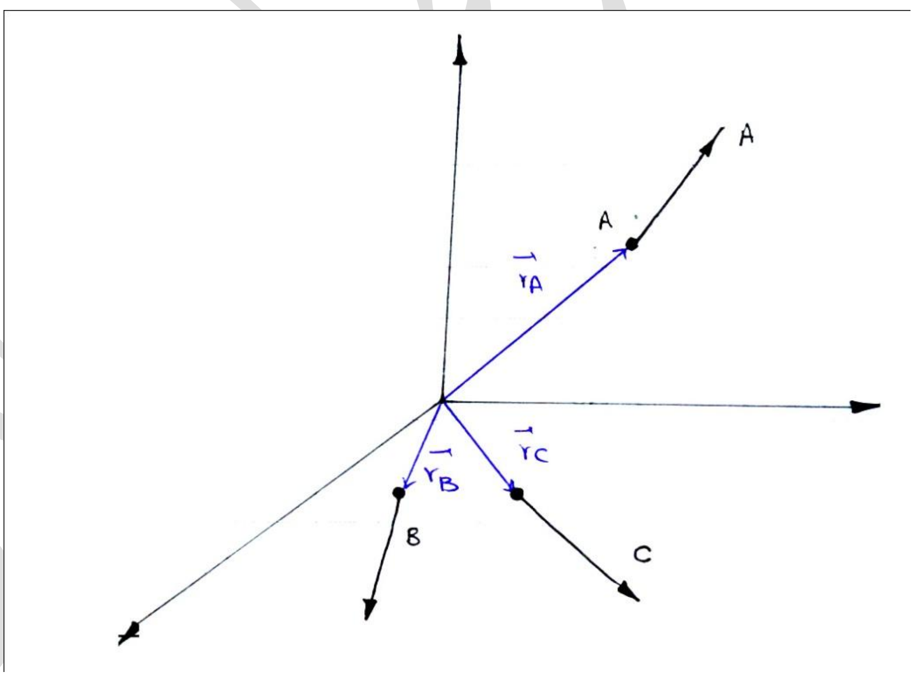
مثال) پرتابه ای به جرم200kg بعد از انفجار به سه تکه به جرم های $m_A=100$ ، $m_B=60$، $m_c=40$

تقسیم می شود در لحظه ی که ذرات مذکور در موقعیت های $A = \begin{vmatrix} 555 \\ -180 \\ 240 \end{vmatrix}$ و $B = \begin{vmatrix} 255 \\ 0 \\ -120 \end{vmatrix}$ و

$C = \begin{vmatrix} 105 \\ 450 \\ -420 \end{vmatrix}$ (آحاد بر حسب m است) قرار گیرند و سرعت ذره ی $v_A = 270\vec{i} - 120\vec{j} + 160\vec{k}$

و نیز سرعت ذره ی V_B موازی صفحه ی XZ باشد ، سرعت ذره ی C را بدست آورید ؟





$G_1 = G_2$

$m\vec{v}_0 = m_A\overrightarrow{v_A} + m_B\overrightarrow{v_B} + m_c\overrightarrow{v_c}$

به علت اینکه گشتاور نیز به جسم اعمال نمی شود نتیجه خواهیم گرفت که بقای مومنتوم زاویه ای نیز خواهیم داشت

$$200 \times 150\vec{i} = 100(270\vec{i} - 120\vec{j} + 160\vec{k}) + 60(v_{Bx}\vec{i} + v_{Bz}\vec{k}) + 40(v_{Cx}\vec{i} + v_{Cy}\vec{j} + v_{Cz}\vec{k})$$

$$(H_o)_1 = (H_o)_2 \rightarrow 0 = r_A \times m_A v_A + r_B \times m_B v_B + r_C \times m_C v_C$$

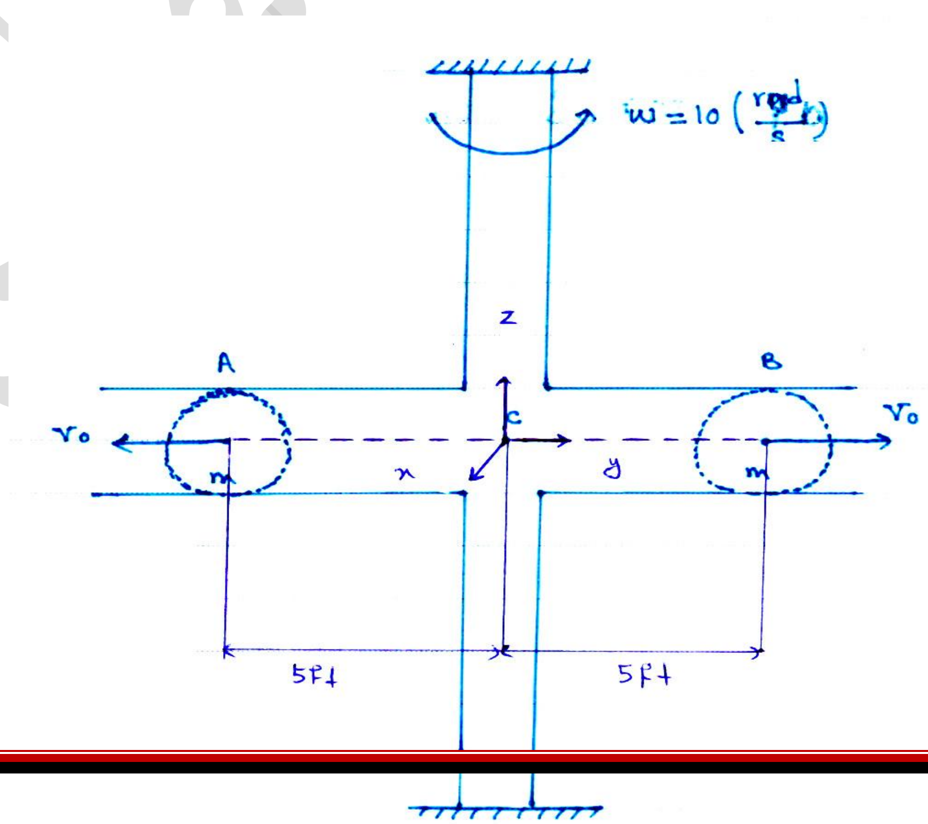
$$= 100\begin{vmatrix} i & j & k \\ 555 & -180 & 240 \\ 270 & -120 & 160 \end{vmatrix} + 60\begin{vmatrix} i & j & k \\ 255 & 0 & -120 \\ v_{Bx} & 0 & v_{Bz} \end{vmatrix} + 40\begin{vmatrix} i & j & k \\ 105 & 450 & -420 \\ v_{Cx} & v_{Cy} & v_{Cz} \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow v_{Cx=-30}\ ,v_{Cy=300}\ \ ,v_{Cz=-280}$$

$$v_c = -30\,\vec{i} + 300\vec{j} - 280\,\vec{k}$$

$$|\vec{v_c}| = 411.46\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

مثال) دو ذره به جرم های مساوی m=5(lb) می باشد با سرعت ثابت $V_0 = 5$ در حال حرکت هستند در صورتیکه سیستم بتواند آزادانه دوران نماید شتاب زاویه ای آن را در این لحظه محاسبه نمایید .



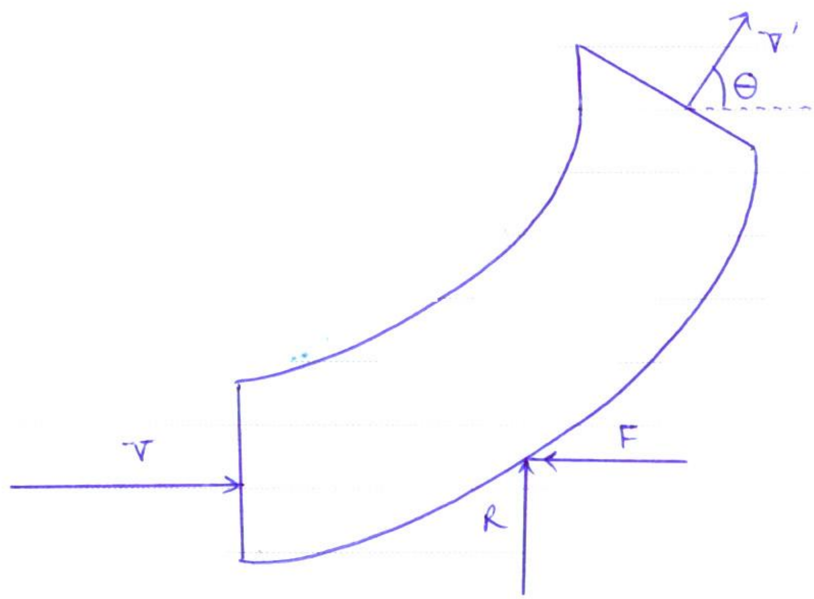
$$\sum \mathrm{M_C} = \dot{\mathrm{H}}_\mathrm{C} \;, \dot{\mathrm{H}}_\mathrm{C} = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{H_C} = \sum r_i \times m_i v_i$$

$$\mathrm{H_C} = (\mathrm{r}\,\vec{\mathrm{j}}) \times \mathrm{m}(\mathrm{v_0}\vec{\mathrm{j}} - \mathrm{r}\omega\,\vec{\mathrm{i}}) + \;(-\mathrm{r}\vec{\mathrm{j}}) \times \mathrm{m}(-\mathrm{v_0}\,\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{r}\omega\,\vec{\mathrm{i}}) = 2mr^2\omega\vec{k}$$

$$\mathrm{H_C} = 2mr^2\omega$$

$$\dot{\mathrm{H}}_\mathrm{C} = 2m(2rv_0)\omega + 2mr^2\dot{\omega} \xrightarrow{,\dot{\mathrm{H}}_\mathrm{C}=0} \dot{\omega} = \frac{-2\omega v_0}{r} \rightarrow \dot{\omega} = -20\,\frac{rad}{s}$$

جریان جرم در نرخ تغییرات جریان :



$$m' = \rho A v$$

$$m' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{m}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}}$$

$$\sum \mathrm{F} = m'\Delta v$$

$\rho A v = \rho' A' v$

$if\ A = constant\ \rightarrow v' = v$

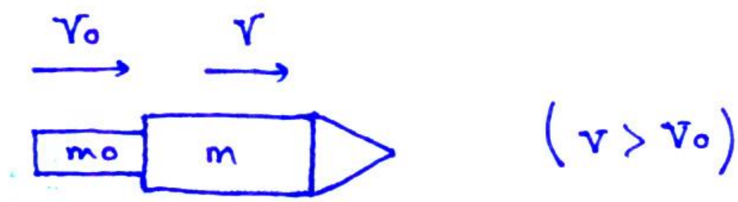
$\Delta v_x = v' \cos\theta - v = v(\cos\theta - 1)$

$\Delta v_y = v' \sin\theta - 0 = v \sin\theta$

$-\mathrm{F} = \rho A v(v(-1 + \cos\theta)) \rightarrow F = \rho A v^2 (1 - \cos\theta)$

$\mathrm{R} = \rho A v(v \sin\theta) \rightarrow R = \rho A v^2 \sin\theta$

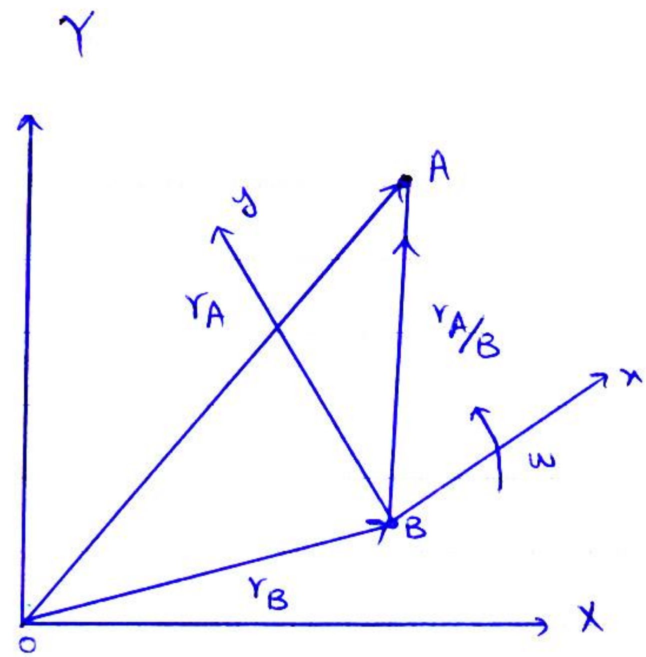
سیستم ها ی با جرم متغیر :



$\sum F = \dot{\mathrm{G}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(mv) \rightarrow \sum F = m\dot{v} + \dot{m}v$

$\dot{\mathrm{m}} \neq 0$

سینماتیک و سنتیک اجسام صلب :



$$r_A = r_B + r_{\frac{A}{B}}$$

$$r_{\frac{A}{B}} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

$$\dot{r} = (\dot{x}i + \dot{y}j) + (x\dot{i} + y\dot{j}) \longrightarrow \dot{r} = v_{rel} + \omega \times r$$

$$r_A = r_B + r_{\frac{A}{B}} \longrightarrow \dot{r_A} = \dot{r_B} + \dot{r}_{\frac{A}{B}}$$

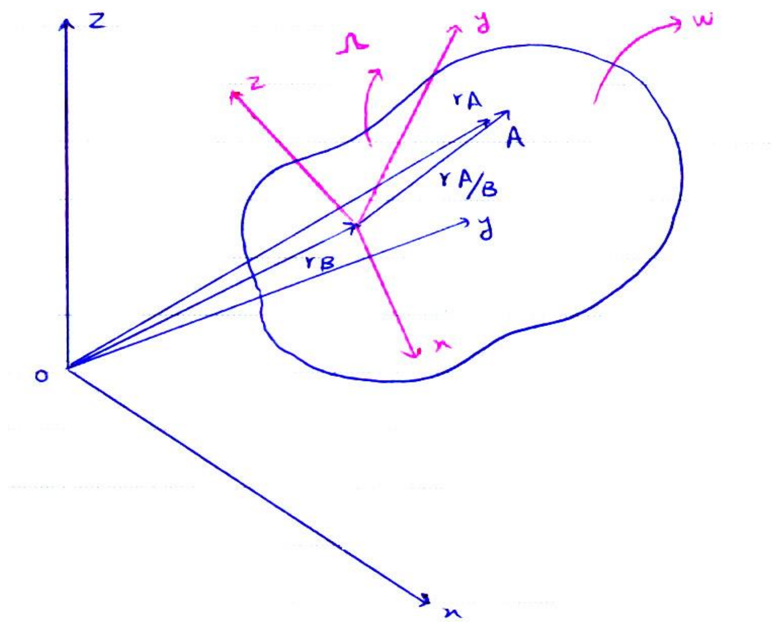
$$v_A = v_B + \omega \times r + v_{rel}$$

$$a_A = a_B + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times v_{rel} + a_{rel}$$

$$V_{rel} = (\dot{x}i + \dot{y}j)$$

$$\dot{v}_{rel} = (\ddot{x}i + \ddot{y}j) + \left(\dot{x}\dot{i} + \dot{y}\dot{j}\right)$$

$$\dot{V}_{rel} = a_{rel} + \omega \times v_{rel}$$



$$\dot{\vec{i}} = \Omega \times \vec{i}$$

$$\dot{\vec{j}} = \Omega \times \vec{j}$$

$$\dot{k} = \Omega \times \vec{k}$$

$$r_A = r_B + r_{\frac{A}{B}}$$

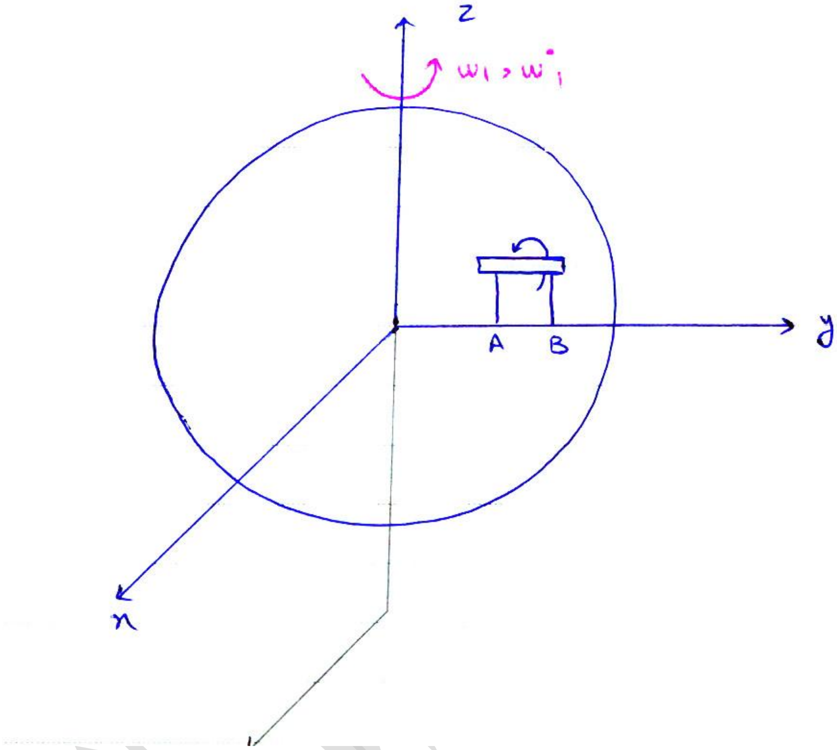
$$v_A = v_B + \Omega \times r_{\frac{A}{B}} + v_{rel}$$

$$\left(\frac{d}{dt}[\,]\right)_{XYZ} = \left(\frac{d}{dt}[\,]\right)_{XYZ} + \Omega \times [\,]$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}[\,]\right)_{XYZ} = \left(\frac{d^2}{dt^2}[\,]\right)_{XYZ} + \dot{\Omega} \times [\,] + \Omega(\Omega \times [\,]) + 2\Omega \times \left(\frac{\mathrm{d}[\,]}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathrm{XYZ}}$$

$$a_A = a_B + \dot{\Omega} \times \mathrm{r}_{\frac{A}{B}} + \Omega \times \left(\Omega \times \mathrm{r}_{\frac{A}{B}}\right) + 2\Omega \times \mathrm{v}_{\mathrm{rel}} + \mathrm{a}_{\mathrm{rel}}$$

مثال) مطلوبست تعیین سرعت و شتاب زاویه ای میله ی AB ؟



$$\vec{\Omega}_{AB} = \omega_2\vec{j} + \omega_1\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\alpha_{AB}} = 0 \times \vec{j} + \omega_1\vec{k} \times \omega_2\vec{j} + \dot{\omega}_1\vec{k} + 0 = -\omega_1\omega_2\vec{i} + \dot{\omega}_1\vec{k}$$

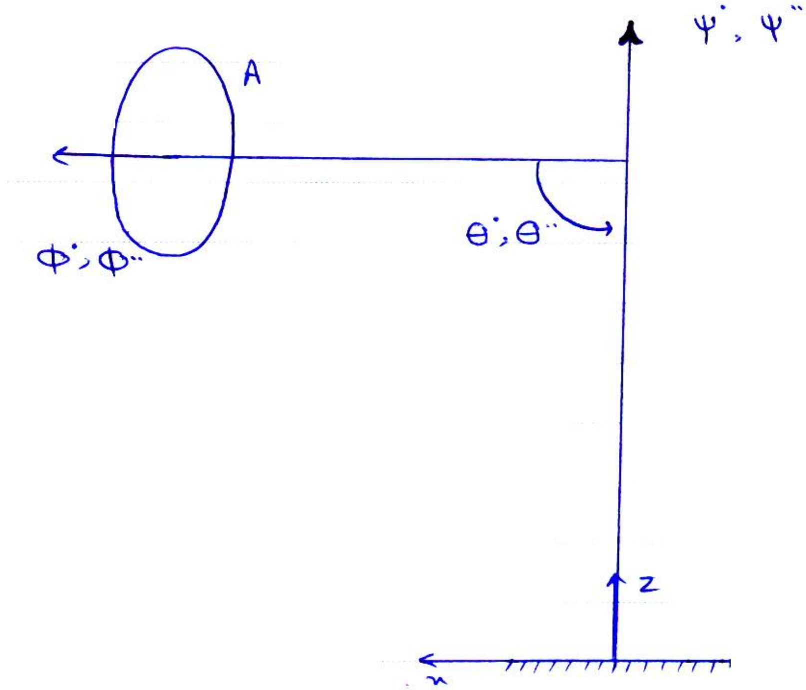
حال فرض می کنیم که ω وجود دارد و یک ω جدید به مجموعه سیتم در جهت i وارد می کنیم.

$$\overrightarrow{\Omega_{AB}} = \omega_2\vec{j} + \omega_1\vec{k} + \omega\vec{i}$$

$$\overrightarrow{\alpha_{AB}} = \dot{\omega}_2\vec{j} + \left(\omega_1\vec{k} + \omega\vec{i}\right) \times (\omega_2\vec{j}) + \dot{\omega}_1\vec{k} + \omega\vec{i} \times \left(\omega_1\vec{k}\right) + \dot{\omega}\vec{i} + 0$$

$$\overrightarrow{\alpha_{AB}} = (\dot{\omega} - \omega_1\omega_2)\vec{i} + (\dot{\omega}_2 - \omega_1\omega)\vec{j} + (\dot{\omega}_1 + \omega\omega_2)\vec{k}$$

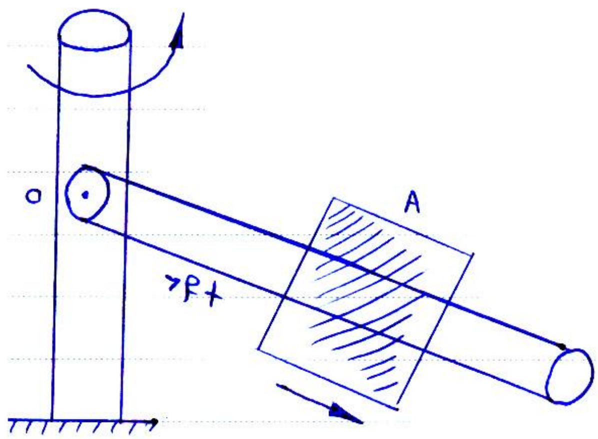
مثال) سرعت و شتاب زاویه ای دیسک A را محاسبه کنید ؟



$$\overrightarrow{\Omega_A} = \dot\varphi\vec{\mathrm{i}} + \dot\theta\vec{\mathrm{j}} + \dot\psi\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\alpha_A} = \ddot\varphi\vec{\imath} + (\dot\theta\vec{\jmath} + \dot\psi\vec{k}) \times \dot\varphi\vec{\imath} + \ddot\theta\vec{\jmath} + (\dot\psi\vec{k}) \times \dot\theta\vec{\jmath} + \ddot\psi\vec{k} + 0$$

مثال) سرعت و شتاب لغزنده ی A را محاسبه کنید ؟



$v_A = v_o + \omega \times oA + v_{rel}$

$v_o = 0$

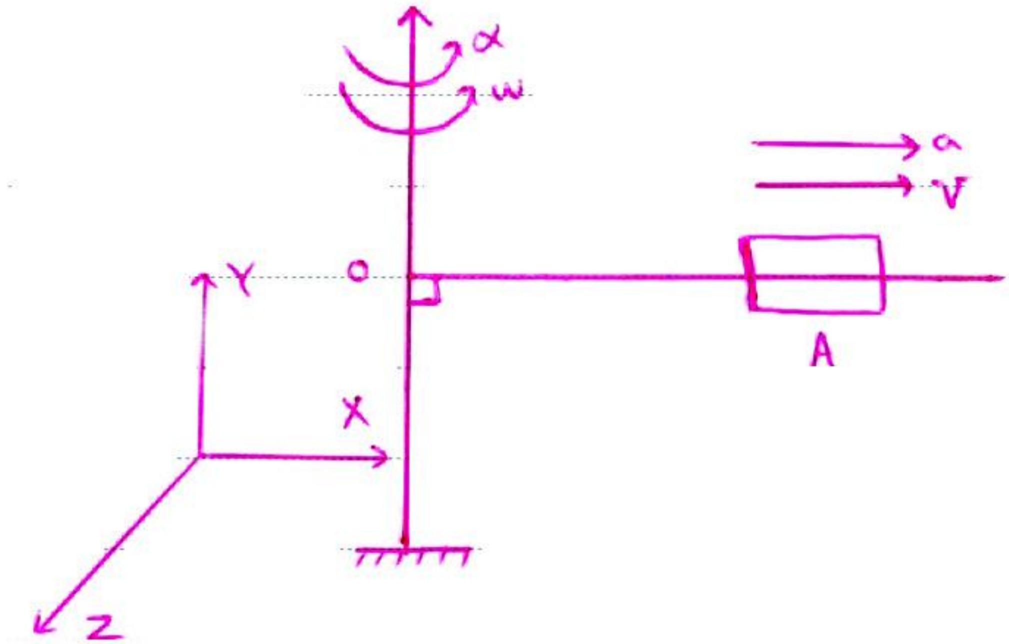
$\omega = 5j$

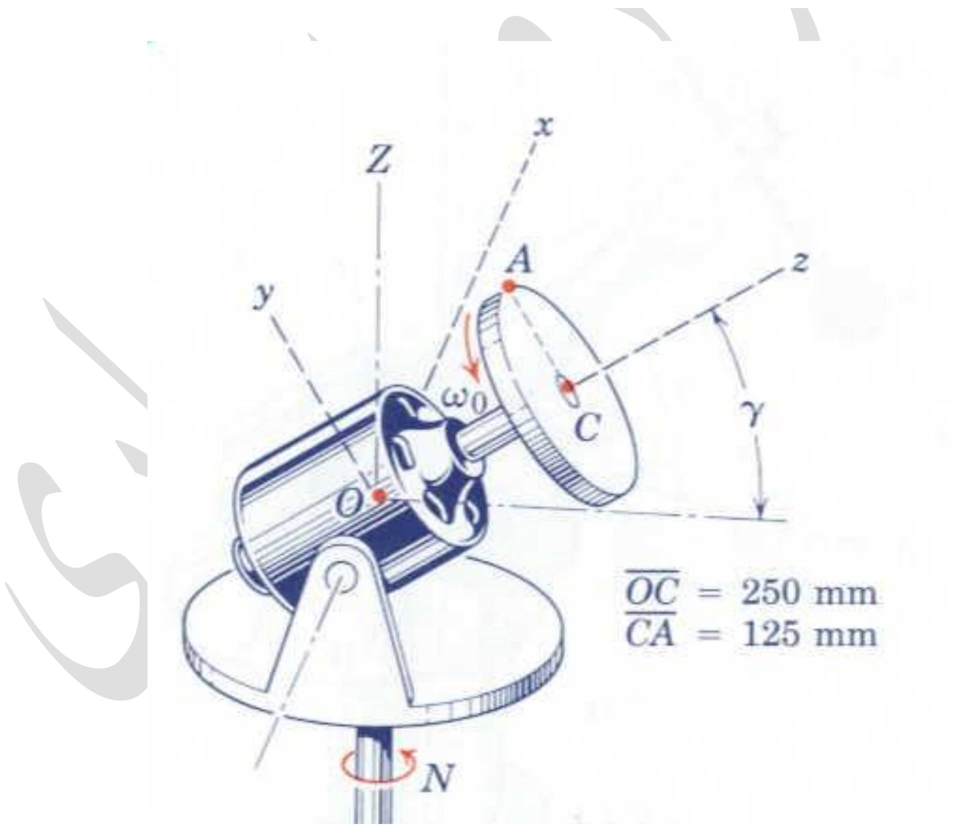
$oA = 7\vec{i}$

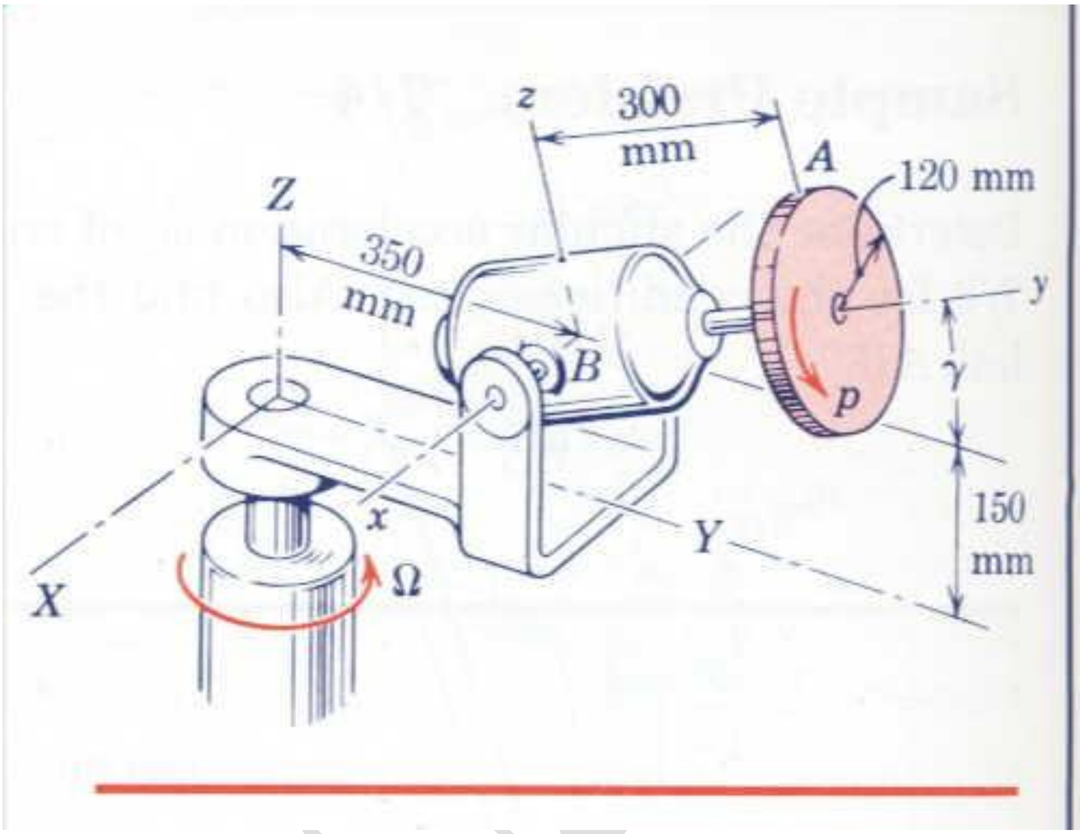
$v_{rel} = 10\vec{i}$

$a_A = a_O + \dot{\omega} \times oA + \omega \times (\omega \times oA) + 2\omega \times v_{rel} + a_{rel}$

$\vec{\dot{\omega}} = 5\vec{j} \quad , \overrightarrow{a_{rel}} = 4\vec{i}$


α
ω
a
V
Y
o
A
X
Z


x
Z
A
z
y
ω_0
C
γ
O
N
$\overline{OC}$ = 250 mm
$\overline{CA}$ = 125 mm



$$\overrightarrow{H_G} = \sum \overrightarrow{\rho_i} \times m_i \overrightarrow{\dot{\rho_i}} = \int \vec{\rho} \times (\omega \times \rho) dm$$

$$H_G = \left(\int r^2 dm \right) \vec{\omega}$$

$$H_G = I\, \omega$$

$$I = \int \rho^2 dm$$

$$\sum M_G = \dot{H}_G = I\alpha$$

$$G = m\bar{v}$$

$$H_G = (H_G)_{abs} = (H_G)_{rel} = \sum \rho_i \times m_i \dot{\rho}_i$$

$$H_o = \sum r_i \times m_i v_i$$

$$(H_p)_{rel} = H_G + \bar{\rho} \times m\bar{v}_{rel}$$

$$\sum F = \dot{G} = m\bar{a}$$

$$\sum M_G = \dot{H}_G$$

$$\sum M_O = \dot{H}_O$$

$$\sum M_p = \dot{H}_G + \bar{\rho} \times m\bar{a} = (\dot{H}_p)_{rel} + \bar{\rho} \times m a_p = (\dot{H}_p)_{rel} - a_p \times m\bar{\rho}$$

$$H_G = \sum \rho_i \times m\dot{\rho}_i = \int \rho \times (\omega \times \rho) dm$$

$$H_O = \sum r_I \times m\dot{r}_i = \int r \times (\omega \times r) dm$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$dH = \vec{i}\left[(y^2 + z^2)\omega_x - (xy)\omega_y - (xz)\omega_z\right]dm + \vec{j}\left[-(yx)\omega_x + (z^2 + x^2)\omega_y - (yz)\omega_z\right]dm + k[-(zx)\omega_x - (zy)\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z]dm$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm\,,\ I_{yy} = \int (z^2 + x^2) dm\,, I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$I_{xy} = \int xy\, dm\ , \qquad I_{xz} = \int xz\, dm\ ,\ I_{yz} = \int yz\, dm$$

$$H = (I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\vec{i} + (-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\vec{j} + (-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\vec{k}$$

$$\{H\} = [I]\{\omega\} \quad , \quad [I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\{H\} = \lambda\{\omega\}$$

$$[I]\{\omega\} = \lambda\{\omega\}$$

$$([I] - \lambda[I]_d)\{\omega\} = 0$$

$$|([I] - \lambda[I])| = 0$$

$$H_z = I_{zz}\omega_z$$

$$H = I\omega$$

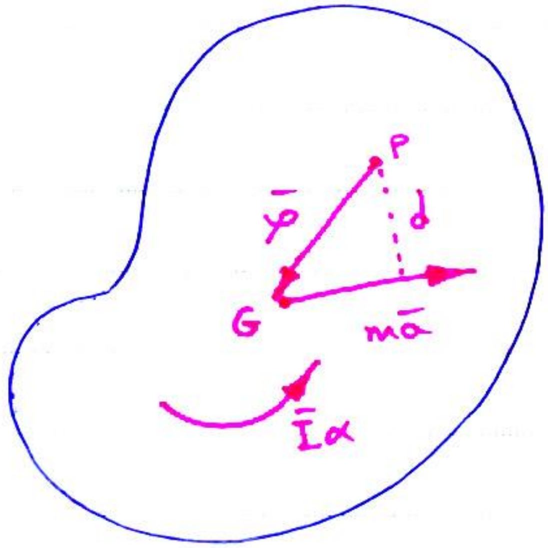
$$H_G = \bar{I}\omega$$

$$\dot{H}_G = \bar{I}\alpha$$

$$\begin{cases} \sum F = m\bar{a} \\ \sum M_G = \bar{I}\alpha \end{cases}$$

$$\sum M_O = I_O\alpha$$

$$\sum M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$



برای انتقال کامل (جابجایی محض) $\begin{cases}\sum F = m\bar{a} \\ \sum M_G = I\alpha\end{cases}$ و برای زمانی که چرخش حول یک نقطه داریم :

$$\sum M_O = \bar{I}\alpha + m(\bar{r}\alpha)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\alpha = I_O\alpha$$

$$\sum F = \dot{G}$$

$$\sum M = \dot{H}$$

$$\sum M = \left(\frac{dH}{dt}\right)_{xyz} = \left(\frac{dH}{dt}\right)_{xyz} + \Omega \times H = \left(\dot{H}_x i + \dot{H}_y j + \dot{H}_z k\right) + \Omega \times H$$

$$\Omega \times H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \sum M_x = \dot{H}_x - H_y \mathrm{\omega_z} + \mathrm{H_z \omega_y} \\ \sum M_y = \dot{H}_y - H_z \mathrm{\omega_x} + \mathrm{H_x \omega_z} \\ \sum M_z = \dot{H}_z - H_x \mathrm{\omega_y} + \mathrm{H_y \omega_x} \end{cases}$$

$if \quad \omega = \Omega$

$$\sum M_x = \dot{\omega}_x I_{xx} + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy}) + I_{xy} (\dot{\omega}_z \omega_x - \dot{\omega}_y) - I_{xz} (\dot{\omega}_z + \omega_y \omega_z) - I_{yz} ({\omega_y}^2 - \omega^2{}_z)$$

$$\begin{cases} \sum M_x = I_{xx} \dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z \\ \sum M_y = I_{yy} \dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx}) \omega_z \omega_x \\ \sum M_z = I_{zz} \dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy}) \omega_x \omega_y \end{cases}$$

برای حرکت صفحه ای داریم :

$$\begin{cases} H_x = -I_{xz} \omega_z \\ H_y = -I_{yz} \omega_z \\ H_z = -I_{zz} \omega_z \end{cases}$$

$$\sum M_x = -I_{xz} \dot{\omega}_z + I_{yz} \omega^2{}_z$$

$$\sum M_y = -I_{yz} \dot{\omega}_z + I_{xz} \omega^2{}_z$$

$$\sum M_z = I_{zz} \dot{\omega}_z$$

هنگامی که در معادلات فوق بعد z نیز قابل اغماض باشد داریم :

$$H_x = 0$$

$$H_y = 0$$

$$H_z = -I_{zz}\omega_z$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z$$

$$T = \frac{1}{2}m\overline{v^2} + \frac{1}{2}m_i\dot{\rho}_i.\dot{\rho}_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i\,(\vec{\omega}\times\overrightarrow{\rho_i}).(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i)$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i\,\vec{\omega}.\vec{\rho}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i)$$

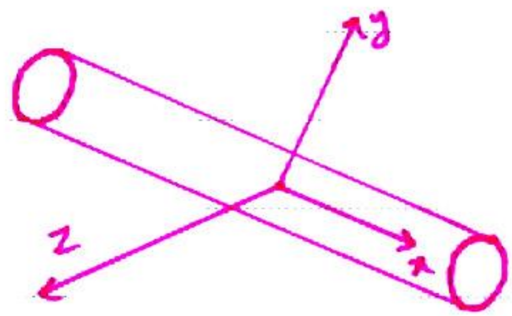
$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}\sum m_i\,.\vec{\rho}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}\sum \rho\times(\omega\times\rho) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\overrightarrow{H_G}$$

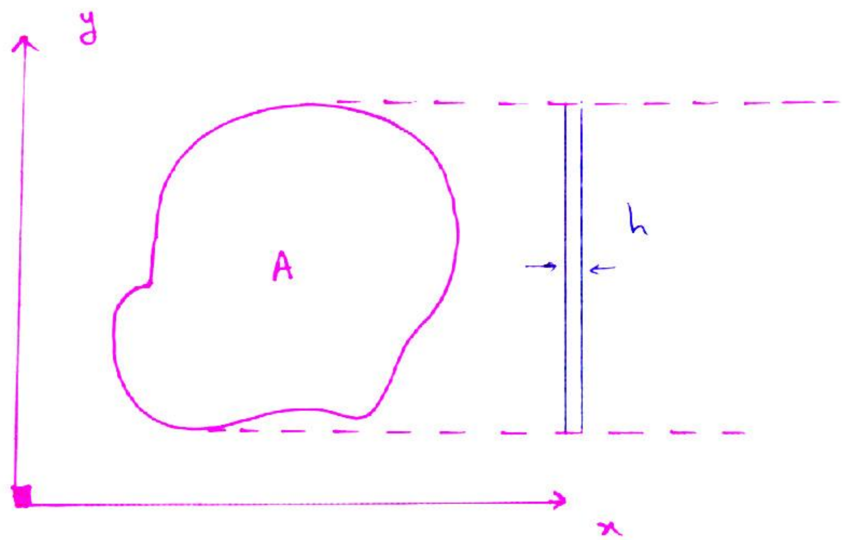
$$\longrightarrow T = \frac{1}{2}\bar{v}.G + \frac{1}{2}\omega H_G$$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\overrightarrow{H_G}$$

$$\text{دو بعدی} \longrightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{2}m\overline{v^2} + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \\ T = \frac{1}{2}I_0\omega^2 \end{cases}$$



$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{bmatrix}$$



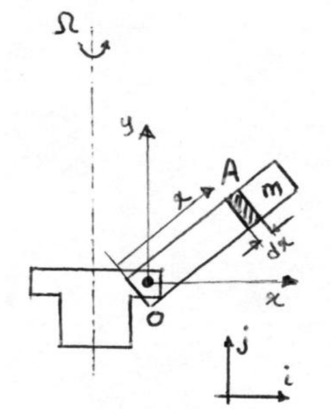
$m = \rho A h$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)dm = \rho h \int y^2 dA = \rho h I_x^A = \frac{m}{A} I_x^A$$

$$I = \frac{m}{A}\begin{vmatrix} I_x^A & -I_x^A & 0 \\ -I_x^A & I_x^A & 0 \\ 0 & 0 & J_O \end{vmatrix}$$

$$I_o = I_x + I_y$$

مثال) معادله حرکت پره هلیکوپتر را برای حرکت بالی آن تعیین نمائید. پره را بعنوان یک میله متناجس به جرم m در نظر گرفته واز وزن آن صرف نظر کنید.



$$a_A = a_o + \Omega \times \Omega + OA + \dot{\Omega} \times OA + 2 \times \Omega \times V_{rel} + a_{rel}$$

$$a_o = -R\Omega^2 i \quad , \Omega = \Omega j$$

$$OA = x\cos\theta i + x\sin\theta j \ \ , \dot{\Omega} = 0$$

$$V_{rel} = -x\dot{\theta}\sin\theta i + x\dot{\theta}\cos\theta j$$

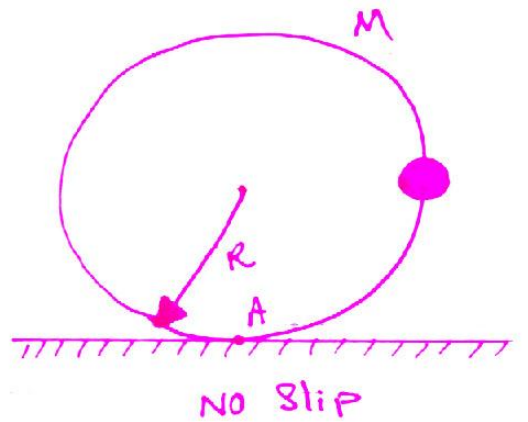
$$a_{rel} = -x\ddot{\theta}\sin\theta i + x\ddot{\theta}\cos\theta j - x\dot{\theta}^2\cos\theta i - x\dot{\theta}^2\sin\theta j$$

$$\Rightarrow a_A = -\left(R\Omega^2 + x\Omega^2\cos\theta + x\ddot{\theta}\sin\theta + x\dot{\theta}^2\cos\theta\right)i + \left(x\ddot{\theta}\cos\theta - x\dot{\theta}^2\sin\theta\right)j + 2\Omega\dot{\theta}x\sin\theta\, k$$

$$dF = \rho dx a_S \quad M_{oz} = 0$$

$$M_{oz} = \int OA \times d F_A \ \Rightarrow \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2}mRL\Omega^2 + \frac{1}{3}mL^2\Omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0$$

مثال) شتاب زاویه ی حلقه ای به جرم m در لحظه ی رها شدن نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید؟

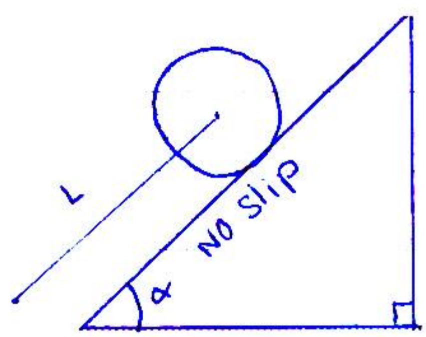


$$\sum M_A = I_A \alpha$$

$$I = \bar{I} + m_d^2$$

$$mgR = \left[(mR^2 + MR^2) + m\left(\sqrt{2}R\right)^2\right]\alpha \rightarrow \alpha = \frac{mg}{2(M+m)R}$$

مثال) دیسکی به جرم m که از بالای یک سطح شیب دار رها می شود سرعت آن را در انتهای آن با فرض غلط بدون لغزش بدست آورید ؟



راه حل اول :

$$mgsin\alpha - f = ma$$

$$f\ r = I\alpha = \left(\frac{1}{2}mr^2\right)\alpha \to f = \frac{1}{2}m\alpha$$

$$a = \frac{2}{3}gsin\alpha \ \to v = \sqrt{2aL} = 2\sqrt{\frac{gLsin\alpha}{3}}$$

راه حل دوم :

$$mgsin\alpha.r = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\alpha \to a = \frac{2}{3}gsin\alpha$$

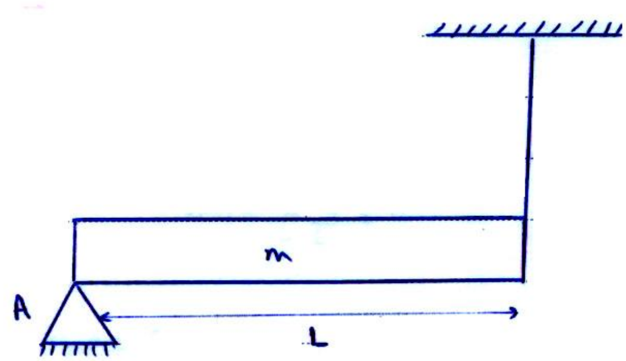
راه حل سوم :

$$v = r\omega$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

$$if\ \ T = U \ \ \to \ \ \frac{3}{4}mv^2 = mglsin\alpha \ \ \to \ \ v = 2\sqrt{\frac{gLsin\alpha}{3}}$$

مثال) در شکل زیر نیروی تکیه گاه A را در لحظه ی بریده شدن طناب بدست آورید ؟



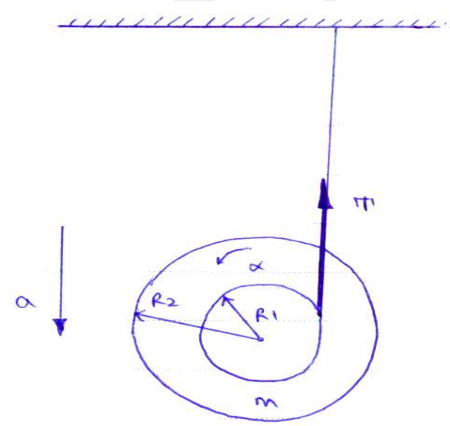
$$R_A = \frac{mg}{2}(static)$$

$$\sum M_A = I\alpha$$

$$\rightarrow \quad mg\frac{L}{2} = \left[\frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{3g}{2L}$$

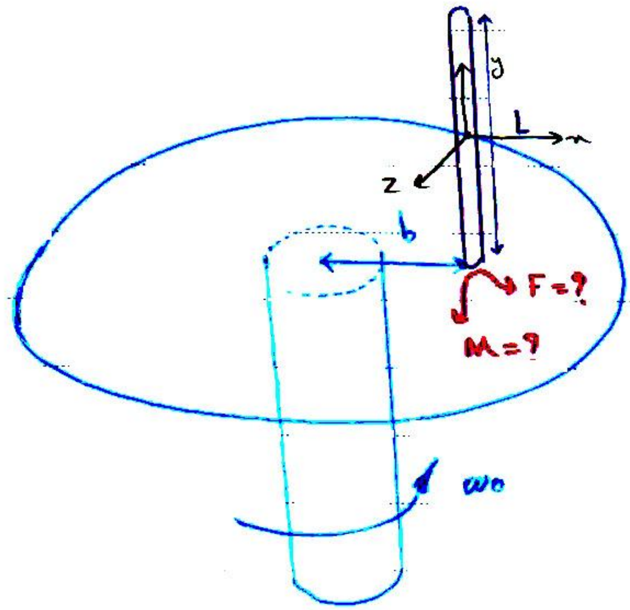
$$\begin{cases} mg - R_A = ma \\ \\ a = \frac{L}{2}\alpha \end{cases} \rightarrow R_A = \frac{mg}{4}$$

مثال) مطلوبست تعیین شتاب زاویه ای در قرقره نشان داده ؟



$$\begin{cases} mg - T = ma \\ TR_1 = I\alpha \\ \\ a = R_1\alpha \end{cases} \rightarrow \quad \alpha = \frac{g}{R_1}.\frac{1}{1 + \frac{I}{mR_1^2}}$$

مثال) نیرو و کوپل اعمالی از طرف دیسک به میله را در شکل زیر محاسبه نمایید ؟



$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ & I_{yy} & -I_{yz} \\ & & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\omega_x} \\ \dot{\omega_y} \\ \dot{\omega_z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} [I] \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} mL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} mL^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = 0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [I] \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

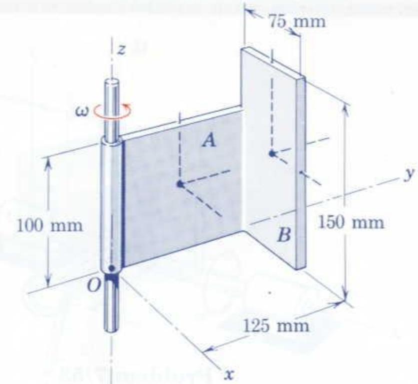
$$\begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \rightarrow \qquad \begin{aligned} &F - mg\vec{j} = m(-b\omega_0^2)\vec{i} \\ &F = mg\vec{j} - m\omega_0^2\vec{i} \\ &M = M_0 + \left(-\frac{L}{2}\vec{j}\right) \times (mg\vec{j} - mb\omega^2{}_0\vec{i}) \end{aligned}$$

$$M = (M_o)_x\vec{i} + (M_o)_y\vec{j} + \left((M_o)_z - \frac{1}{2}mLb\omega_0^2\right)\vec{k}$$

$$\begin{cases} M_x = 0 & \rightarrow (M_o)_x = 0 \\ M_y = 0 & \rightarrow (M_o)_y = 0 \\ M_z = 0 & \rightarrow (M_o)_z = \dfrac{1}{2}mbL\omega_0^2 \end{cases}$$

Sample Problem 7/6

The bent plate has a mass of 70 kg per square meter of surface area and revolves about the z-axis at the rate $\omega = 30$ rad/s. Determine (a) the angular momentum $\mathbf{H}$ of the plate about point O and (b) the kinetic energy T of the plate. Neglect the mass of the hub and the thickness of the plate compared with its surface dimensions.



Solution. The moments and products of inertia are written with the aid of Eqs. B/3 and B/9 in Appendix B by transfer from the parallel ① centroidal axes for each part. First, the mass of each part is $m_A = (0.100)(0.125)(70) = 0.875$ kg, $m_B = (0.075)(0.150)(70) = 0.788$ kg.

Part A

$$[I_{xx} = \bar{I}_{xx} + md^2] \quad I_{xx} = \frac{0.875}{12}[(0.100)^2 + (0.125)^2] + 0.875[(0.050)^2 + (0.0625)^2] = 0.007\,47\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{yy} = \tfrac{1}{3}ml^2] \quad I_{yy} = \frac{0.875}{3}(0.100)^2 = 0.002\,92\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{zz} = \tfrac{1}{3}ml^2] \quad I_{zz} = \frac{0.875}{3}(0.125)^2 = 0.004\,56\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\left[I_{xy} = \int xy\,dm, \quad I_{xz} = \int xz\,dm\right] \quad I_{xy} = 0 \quad I_{xz} = 0$$

$$[I_{yz} = \bar{I}_{yz} + md_yd_z] \quad I_{yz} = 0 + 0.875(0.0625)(0.050) = 0.002\,73\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Part B

$$[I_{xx} = \bar{I}_{xx} + md^2] \quad I_{xx} = \frac{0.788}{12}(0.150)^2 + 0.788[(0.125)^2 + (0.075)^2] = 0.018\,21\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{yy} = \bar{I}_{yy} + md^2] \quad I_{yy} = \frac{0.788}{12}[(0.075)^2 + (0.150)^2] + 0.788[(0.0375)^2 + (0.075)^2] = 0.007\,38\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{zz} = \bar{I}_{zz} + md^2] \quad I_{zz} = \frac{0.788}{12}(0.075)^2 + 0.788[(0.125)^2 + (0.0375)^2] = 0.013\,78\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + md_xd_y] \quad I_{xy} = 0 + 0.788(0.0375)(0.125) = 0.003\,69\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{xz} = \bar{I}_{xz} + md_xd_z] \quad I_{xz} = 0 + 0.788(0.0375)(0.075) = 0.002\,21\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$[I_{yz} = \bar{I}_{yz} + md_yd_z] \quad I_{yz} = 0 + 0.788(0.125)(0.075) = 0.007\,38\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

The sum of the respective inertia terms gives for the two plates together

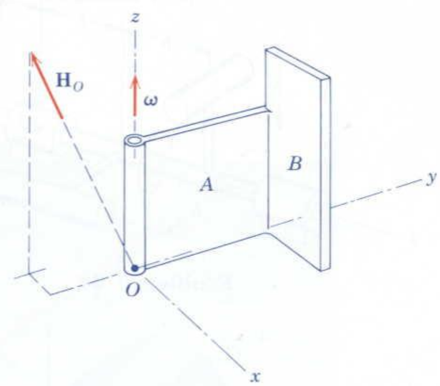
$$I_{xx} = 0.0257\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_{xy} = 0.003\,69\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_{yy} = 0.010\,30\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_{xz} = 0.002\,21\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_{zz} = 0.018\,34\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_{yz} = 0.010\,12\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

(a) The angular momentum of the body is given by Eq. 7/11, where $\omega_z = 30$ rad/s and ω_x and ω_y are zero. Thus,

② $\mathbf{H}_O = 30(-0.002\,21\mathbf{i} - 0.010\,12\mathbf{j} + 0.018\,34\mathbf{k})$ N·m·s *Ans.*

(b) The kinetic energy from Eq. 7/18 becomes

$$T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}_O = \tfrac{1}{2}(30\mathbf{k})\cdot 30(-0.002\,21\mathbf{i} - 0.010\,12\mathbf{j} + 0.018\,34\mathbf{k}) = 8.25\text{ J}$$

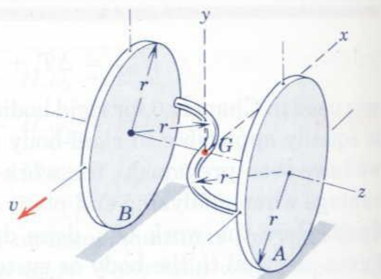


① The parallel-axis theorems for transferring moments and products of inertia from centroidal axes to parallel axes are explained in Appendix B and are most useful relations.

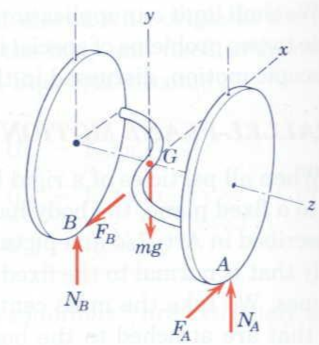
② Recall that the units of angular momentum may also be written in the base units as kg·m²/s.

Sample Problem 7/7

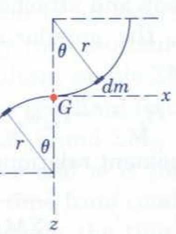
The two circular disks, each of mass m_1, are connected by the curved bar bent into quarter-circular arcs and welded to the disks. The bar has a mass m_2. The total mass of the assembly is $m = 2m_1 + m_2$. If the disks roll without slipping on a horizontal plane with a constant velocity v of the disk centers, determine the value of the friction force under each disk at the instant represented when the plane of the curved bar is horizontal.



Solution. The motion is identified as parallel-plane motion since the planes of motion of all parts of the system are parallel. The free-body diagram shows the normal forces and friction forces at A and B and the total weight mg acting through the mass center G, which we take as the origin of coordinates that rotate with the body.



We now apply Eqs. 7/23, where $I_{yz} = 0$ and $\dot{\omega}_z = 0$. The moment equation about the y-axis requires determination of I_{xz}. From the diagram showing the geometry of the curved rod and with ρ standing for the mass of the rod per unit length, we have



① $\left[I_{xz} = \int xz\, dm\right] \qquad I_{xz} = \int_0^{\pi/2} (r \sin\theta)(-r + r\cos\theta)\rho r\, d\theta$

$$+ \int_0^{\pi/2} (-r\sin\theta)(r - r\cos\theta)\rho r\, d\theta$$

Evaluating the integrals gives

$$I_{xz} = -\rho r^3/2 - \rho r^3/2 = -\rho r^3 = -\frac{m_2 r^2}{\pi}$$

The second of Eqs. 7/23 with $\omega_z = v/r$ and $\dot{\omega}_z = 0$ gives

$[\Sigma M_y = -I_{xz}\omega_z^2] \qquad F_A r + F_B r = -\left(-\dfrac{m_2 r^2}{\pi}\right)\dfrac{v^2}{r^2}$

$$F_A + F_B = \frac{m_2 v^2}{\pi r}$$

But with $\bar{v} = v$ constant, $\bar{a}_x = 0$ so that

$[\Sigma F_x = 0] \qquad F_A - F_B = 0 \qquad F_A = F_B$

Thus,

$$F_A = F_B = \frac{m_2 v^2}{2\pi r} \qquad \textit{Ans.}$$

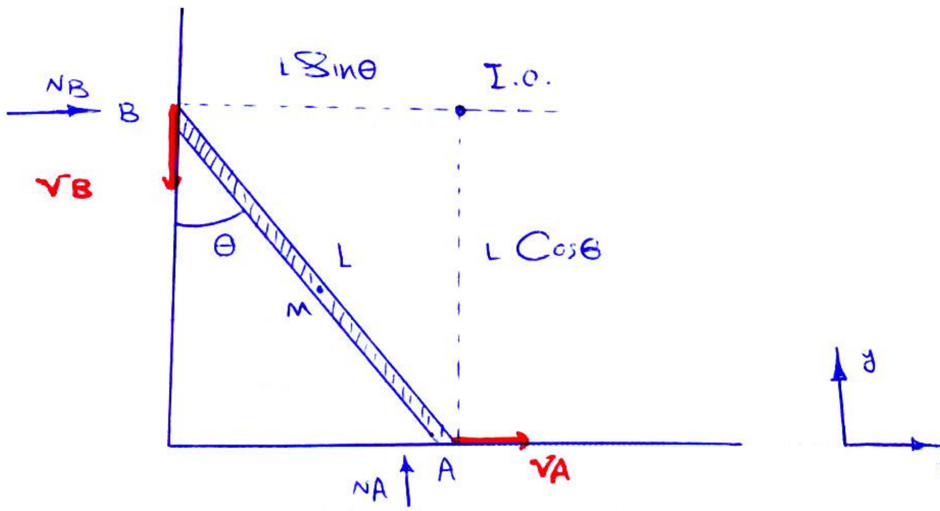
We also note for the given position that with $I_{yz} = 0$ and $\dot{\omega}_z = 0$, the moment equation about the x-axis gives

② $[\Sigma M_x = 0] \qquad -N_A r + N_B r = 0 \qquad N_A = N_B = mg/2$

① We must be very careful to observe the correct signs for each of the coordinates of the mass element dm that make up the product xz.

② When the plane of the curved bar is not horizontal, the normal forces under the disks are no longer equal.

مثال) میله ی AB به طول L بر روی کف و دیوار صافی می لغزد مطلوبست تعیین رابطه ی سرعت زاویه ای میله با سرعت دو انتهای آن ، شتاب زاویه ای میله و زاویه ای که میله دیوار را ترک می نماید و قتی میله از زاویه ی $\theta = \theta_0$ رها شده باشد ؟



$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{\frac{B}{A}}}$$

$$-v_B\vec{j} = v_A\vec{i} + \omega\vec{k} \times (-Lsin\theta\vec{i} + Lcos\theta\vec{j})$$

$$v_A = \omega Lcos\theta$$

$$v_B = \omega Lsin\theta$$

$$\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{v_A} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{AM}} = v_A\vec{i} + \omega\vec{k} \times \left(-\frac{L}{2}sin\theta\vec{i} + \frac{L}{2}cos\theta\vec{j}\right)$$

$$\rightarrow \quad v_M = \frac{v_A}{2}(\vec{i} - tan\theta\vec{j})$$

راه حل دوم از طریق خود مرکز آن :

$$v_M = \frac{L\omega}{2}(cos\theta\vec{i} - sin\theta\vec{j}) = \frac{v_A}{2}(\vec{i} - tan\theta\vec{j})$$

$$\overrightarrow{a_M} = \overrightarrow{a_A} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{r_{AM}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{AB}})$$

$$a_{M_x}\vec{i} + a_{M_y}\vec{j} = a_A\vec{i} + \alpha\vec{k} \times \left(-\frac{L}{2}sin\theta\vec{i} + \frac{L}{2}cos\theta\vec{j}\right)$$

$$-\omega^2\left(-\frac{L}{2}sin\theta\vec{i} + \frac{L}{2}cos\theta\vec{j}\right)$$

$$a_{M_x} = \frac{L}{2}(\alpha sin\theta + \omega^2 cos\theta)$$

$$a_{M_y} = \frac{L}{2}(\alpha cos\theta - \omega^2 sin\theta)$$

$$N_B = m_{a_x}$$

$$mg - N_A = m_{a_y}$$

$$N_A\frac{L}{2}sin\theta - N_B\frac{L}{2}cos\theta = \left(\frac{1}{12}mL^2\right)\alpha$$

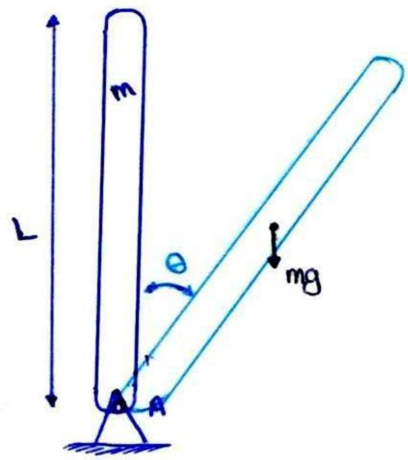
$$\alpha = \frac{3g}{2L}sin\theta$$

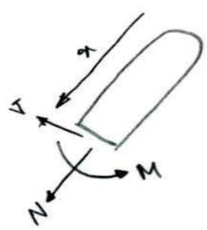
$$\int_0^\omega \frac{\omega d\omega}{d\theta} = \int_\theta^\theta \frac{3g}{2l}sin\theta$$

$$\omega = \frac{3g}{L}(cos\theta - cos\theta_0)$$

$$if\ \ N_B = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}cos\theta_0\right)$$

مثال :





$$\sum M_A = I_A \alpha$$

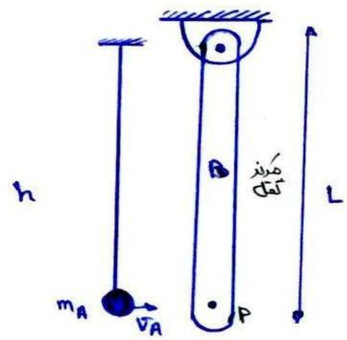
$$mg\sin\theta \times \frac{L}{2} = \frac{1}{3} mL^2 \alpha$$

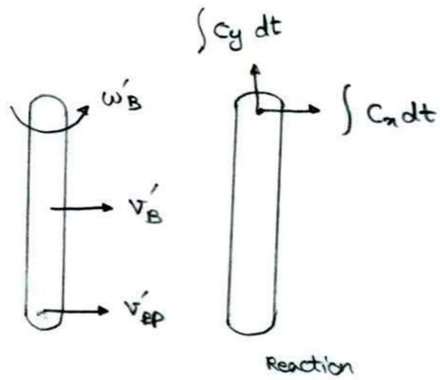
$$\alpha = \frac{3g}{2L}\sin\theta$$

$$M = \frac{mgL}{4}\sin\theta \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{2}{3}L$$

مثال :





اینکه نیروی بعد از برخورد به چپ است یا راست معلوم نیست.

از علامت پریم برای بعد از برخورد استفاده می کنیم.

برای مجموعه می توان نوشت : $\sum M_o = 0$

$$e = \frac{v'_{BP} - v'_A}{v_A - 0}$$

قانون بقا را برای کل مجموعه می توان نوشت.

اندازه حرکت کل مجموعه ثابت است.

$$hm_A v_A = hm_A v_A' + \frac{1}{2} L m_B v_B{}' + \bar{I}_B w_B$$

$$v_B' = \frac{L}{2} w_B'$$

$$v_{BP}' = h w_B'$$

$$w_B' = \frac{(1+e) h m_A v_A}{h^2 m_A + \frac{1}{3} m_B L^2}$$

$$-h \int C_X \, dt = -\left(h - \frac{L}{2}\right) m_B v_B' + \bar{I}_B w'{}_B$$

$$\int C_x dt = \frac{\left(h - \frac{L}{2}\right) m_B v_B' - \bar{I}_B w'{}_B}{h} = C_{x(ave)} \Delta t$$

$$C_{X(ave)} = \frac{(1+e)\left(\frac{h}{2} - \frac{L}{3}\right) m_A m_B v}{\left(h^2 m_A + \frac{1}{3} m_B L^2\right) \Delta t}$$

C=0

$$h = \frac{2}{3} L$$

مرکز ضربه جایی است که در آن هیچ عکس ا لعملی نداریم.