Subject:
Year. Month. Date. ( )

دینامیک

منبع آموزشی) دینامیک مریام چاپ ششم ، 1986،

امتحان میان ترم) ۲۵ ، ۸ ، ۸۴

ارزشیابی) میان ترم ۷ پایان ترم ۸ تکلیف ۳ حضور و غیاب ۲

تا پایان فصل دوم + کار انرژی + ممان دوم

دینامیک) حرکت اجسام تحت تاثیر نیروهای وارده را بررسی می‌کند

دینامیک:
- سینماتیک) بررسی حرکت بدون در نظر گرفتن عامل حرکت
- سینتیک) در تحلیل حرکت از عامل حرکت (نیرو) صحبت می‌شود

دینامیک:
- ذره) جسمی است که در حین حرکت از ابعاد آن صرف نظر می‌کنیم
- جسم صلب) ابعاد جسم در بررسی حرکت مهم هستند ابعاد جسم صلب در حین حرکت ثابت است

جلسه پنجم

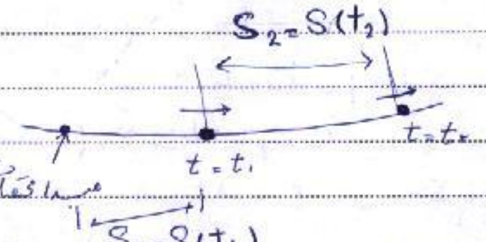
PAPNO

Subject:
Year. Month. Date.

فصل دوم) دینامیک ذره

* حرکت ذره: مستقیم الخط / منحنی الخط (در صفحه / در فضا)

حرکت مستقیم الخط ذره)



جهت مثبت ذره در هر لحظه

- سرعت متوسط: $v_{ave} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$ سرعت متوسط در فاصله زمانی t_1, t_2 واحد m/s
- سرعت لحظه ای: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{d(t)} S(t) = \dot{S}(t)$ (اسلات t)
- شتاب متوسط: $a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ شتاب متوسط در بازه زمانی t_1, t_2 واحد m/s^2
- شتاب لحظه ای: $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ (دو حالت t)

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt} S\right] = \frac{d^2 S}{dt^2} = \ddot{S}$$

فرمولها: $v = \frac{dS}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$ $\Longrightarrow$ حذف زمان

$$\begin{cases} v\,dt = dS \\ a\,dt = dv \end{cases} = \begin{cases} av\,dt = a\,dS \\ va\,dt = v\,dv \end{cases}$$

$\Rightarrow v\,dv = a\,dS$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$2P = (m_A + m_B)a \Rightarrow a = \frac{80}{100+20} = 0.66\ m/s^2$

وضع دوم : $P = 60 \quad 2P = 120 > f_{s\,max}$ دو جسم دست به هم حرکت دارند

$f = \mu_k N_A = \mu_k m_A g = (0.5)(20)(9.81) = 98.1$

$a_A = \frac{1}{20}(120 - 98.1) \qquad a_B = \frac{98.1}{200}$

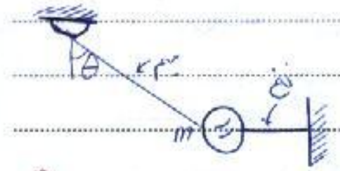
اصطکاک استاتیکی و اصطکاک دینامیکی

اصطکاک استاتیکی $f_s \leq \mu_s N$ برای آستانه حرکت $f_s = \mu_s N$

$f_s = f_{s\,max} = \mu_s N$ ضریب اصطکاک استاتیکی

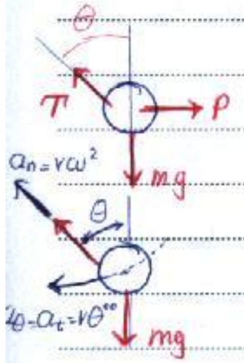
اصطکاک دینامیکی $f_k = \mu_k N$

مثال: مطلوب است نسبت کشش در سیم بلافاصله پس از پاره شدن نخ
به کشش در سیم قبل از پاره شدن نخ



$\Sigma F_y = ma_y \quad T_0\cos\theta - mg = 0 \quad T_0\cos\theta = mg$

$T = \frac{mg}{\cos\theta}$



وقتی سیستم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند $a_n = r\omega^2 = 0$ می‌گردد

$\omega = 0 \rightarrow a_n = r\omega^2 = 0$

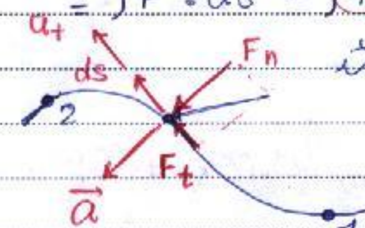
$\Sigma F_n = ma_n$

$T - mg\cos\theta = m(0) \qquad T = \frac{mg}{\cos\theta} \Rightarrow \qquad \frac{T}{T_0} = \cos^2\theta$

قانون کار و انرژی)

جابجایی × نیرو = کار

$= \int \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int \vec{F}\, ds \cos\alpha = \int F_t\, ds$



حاصلضرب آن مؤلفه‌ای از نیرو که در راستای جابجایی باشد

حاصلضرب نیرو در نقطه اثر نیرو در امتداد جابجایی

$\Delta U = \int F_t\, ds = \int m a_t\, ds \quad , \quad a_t = \frac{dv}{dt}$

$a\,ds = v\,dv \Leftarrow dv\frac{ds}{dt}$

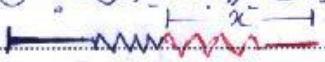
$\Delta U = \int_1^2 m v\, dv = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \Delta T$

کار حاصل از نیروها از 1 به 2 برابر است با تغییر در انرژی جنبشی

$\Delta U = \Delta T$

تعریف) نیروی کنسرواتیو نیرویی است که کار حاصل از آن نیرو به مسیر حرکت بستگی ندارد

مانند نیروی وزن و نیروی فنر



کار نیروی فنر $= \frac{1}{2} k x^2$ نیروی فنر $F = kx$

$\frac{1}{2}$ در فرمول برای آن است که به صورت نیروی فنر کار انجام می‌دهد و متوسط کار را در نظر بگیریم

کار نیروی فنر همیشه منفی است (چه جمع شود و چه کشیده شود) ولی فنر چه جمع شود و چه کشیده شود انرژی ذخیره شده در فنر همواره مثبت است

کار همه نیروها به غیر از نیروی وزن و فنر + کار نیروی وزن + کار نیروی فنر = ΔU کار کل نیروها

$\Delta U = \Delta T$

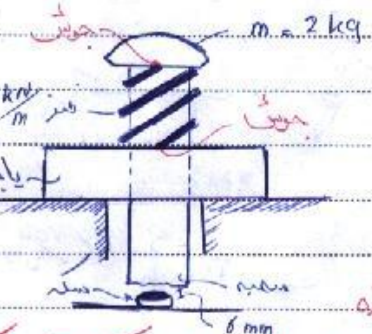
تغییر انرژی ارتفاعی یا فنر ← $\Delta U_e + \Delta U_g + \Delta T = \Delta U$ کار کل نیروها به غیر از وزن و فنر

تغییر انرژی پتانسیل کل — تغییر انرژی جنبشی سیستم

در قانون کار و انرژی همیشه مجاز به استفاده از سرعت نسبی نیستیم زیرا این قانون بر اساس قانون دوم نیوتن که در آن شتاب مطلق است ثابت شده

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای محاسبه انرژی پتانسیل فنر مبدأ مختصات تعادل استاتیکی فنر هستند. تعادل استاتیک یعنی جایی که فنر نه کشیده شده و نه فشرده



مثال ۱) در حال تعادل استاتیک سیستم صفحه در فاصله ۶ میلی متری از سکه قرار دارد صفحه را به اندازه 40 mm از وضعیت تعادل پایین برده رها می کنیم صفحه با چه سرعتی به سکه برخورد می کند

وضعیت 1) وضعیتی که صفحه از تعادل استاتیک سیستم به اندازه 40 mm پایین برده شده وضعیت 2) وضعیتی که صفحه با سرعت با سکه برخورد می کند

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

به این دلیل که نیروی جوش در سیستم داخلی است از کار آن صرف نظر می کنیم و فقط به محاسبه انرژی های جرم و فنر می پردازیم $\Leftarrow$ $\Delta U = 0$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - \cancel{v_1^2}) = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$\delta_{ST} = \frac{mg}{k} = \frac{2 \times 9.81}{1.6 \times 10^3} \times 10^3$$

$$\Delta V_g = -mg(40+6) \times 10^{-3}$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} \overset{1.6\times10^3}{k} (\underbrace{x_2}_{(6+\delta_{ST})\times10^{-3}}{}^2 - \underbrace{x_1}_{(40-\delta_{ST})\times10^{-3}}{}^2) \Rightarrow v_2 \checkmark$$

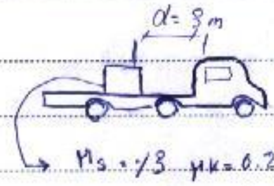
مسائل های فصل 2 ، 209 ، 217 ، 222 ، 220 ، 237

فصل 3 مسائل ، 9 ، 10 ، 25 ، 35 ، 45 ، 44

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله 14 فصل 3)



کامیونی از سرعت $70 \frac{km}{h}$ در اثر ترمز کردن با شتاب ثابت، در فاصله مسافت 50 متری ایستد.

$\mu_s = 0.3 \quad \mu_k = 0.25$

آیا بسته از روی کف کامیون سر می‌خورد. اگر سر می‌خورد سرعتش در جعبه چقدر است.

پاسخ

$v\,dv = a\,ds \qquad \int v\,dv = \int a\,ds \qquad \int_{70\times\frac{5}{18}}^{0} v\,dv = a\int_0^{50} ds$

$\frac{1}{2}\left[0-\left(70 \times \frac{5}{18}\right)^2\right] = a \times 50 \qquad a_{Truck} = -3.78 \, m/s^2$ شتاب کامیون

کامیون

$-f = ma$

$-\mu_s mg = ma$

فرض: بسته در آستانه لغزش است

حداقل ضریب اصطکاک بسته $\mu_s = -\frac{a}{g}$

و کامیون برای آنکه بسته سر نخورد

$\mu_s = \frac{-3.78}{9.81} = 0.385 \qquad \mu_s = 0.3 < 0.385 \qquad f = \mu_k N = \mu_k mg$

$-f = ma \qquad -\mu_k mg = ma \qquad a = -\mu_k g \qquad a_{box} = -0.25 \times 9.81 = -2.45 \, \frac{m}{s^2}$

جعبه

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \qquad a_b = a_T + a_{b/T}$ شتاب نسبی کامیون نسبت به هم

$-2.45 = -3.78 + a_{b,T} \Rightarrow a_{b/T} = 1.33 \, \frac{m}{s^2}$

نسبی $\int_0^{v_{B/T}} v_{b,T}\,dv = \int_0^{d} a_{b/T}\,ds \qquad \Rightarrow \frac{1}{2}(v_{B/T})^2 - 0 = a_{b/T} \times d$

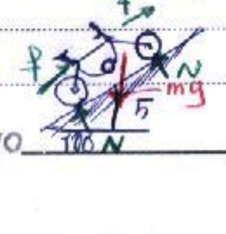
$v_{B/T} = \sqrt{2 \times 1.33 \times 3} = 2.82 \, m/s$

تعریف توان یا قدرت (P, power)

$P = \frac{\text{کار نیروهای جاری}}{\text{زمان}}$ توان یا قدرت $= \frac{\sum \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}}{\Delta t} = \sum \vec{F} \cdot \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \qquad P = F \cdot v$

مثال) دوچرخه سواری با سرعت $20 \frac{km}{h}$ از سطح شیب‌داری با شیب 5% به سمت بالا حرکت می‌کند

توان دوچرخه سوار چقدر است $m = 95$



توان $= (mg \sin\alpha)\, v = 95 \times 9.81 \times \sin\alpha \times 20 \times \frac{5}{18}$

توان $P = 259$ وات

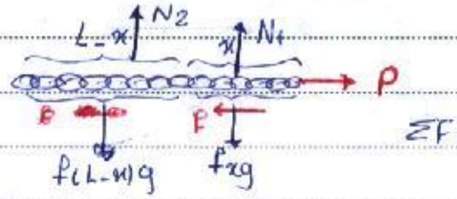
PAPNO

Subject:
Year. Month Date. ( )

در حلقه‌ش ... کار نیروی اصطکاک صفر است زیرا نیروی اصطکاک به نقطه‌ای اعمال می‌شود که سرعت آن نقطه صفر است

مسأله 31 فصل 3)

اگر ρ جرم واحد طول زنجیر باشد و زنجیر در ابتدا در وضعیت $x=0$ باشد، سرعت زنجیر را وقتی که تمام آن روی سطح زبر قرار گیرد تعیین کنید.



$$\Sigma F_x = ma_x \rightarrow -\mu_k N_1 + P = ma$$

$N_1 = \rho x g$, $m = \rho L$

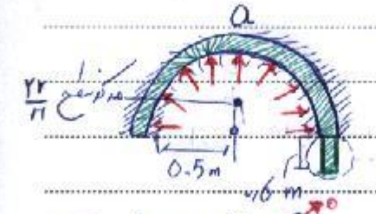
$$-\mu_k \rho x g + P = \rho L a$$

$$u\,du = a\,ds \quad \int_0^u u\,du = \int_0^L \frac{-\mu_k \rho x g + P}{\rho L}\,dx$$

$$\frac{1}{2}u^2 - 0 = \left[-\mu_k \rho g \frac{L^2}{2} + PL\right] \Rightarrow u = \checkmark$$

طناب همانند وضعیت a از حال سکون رها می‌شود. سطح صاف و بدون اصطکاک است. مطلوب است سرعت طناب در وضعیت b

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$



(1) وضعیت a

(2) وضعیت b

کار نیروی N صفر است $\Delta U = 0$

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(u^2 - \cancel{u_0^2})$$

جابجایی $0/6 + \frac{L-0/6}{2}$

$$\Delta V_g = -mg\left(y_1 + 0/6 + \frac{(L-0/6)}{2}\right) \qquad \Delta V_e = 0$$

$\frac{m}{L}(L-0/6)$

$$0 = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{m}{L}(L-0/6)g\left(\frac{2r}{\pi} + 0/6 + \frac{L-0/6}{2}\right)$$

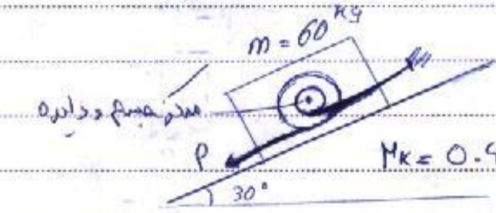
$$L = 2\pi \times 0/5 \times \frac{1}{2} + 0/6$$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date.

مثال ۲

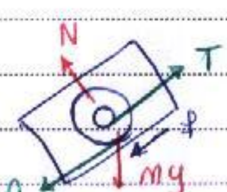
جسم از حالت سکون روی سطح شیب دار
در نتیجه اعمال نیروی P به طناب شروع به
حرکت می کند پس از طی 1.4 متر در امتداد
سطح شیب دار سرعت جسم چقدر است
P=600 N نسبت قطرها 1 به 2
از اصطکاک های داخلی قرقره ها صرف نظر می کنیم



چون با اینکه نیرو به سمت پایین است جسم بالا می رود
چرا اگر طناب 5 متر جابه جا شود جسم هم 5 متر جابه جا می شود
که مرکز جرم در تحلیل حرکت برای ما مهم است نه طناب

$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

① وضعیت اول سیستم
② سیستم 1.4 متر به سمت بالا جابه جا شده است



کار نیروی کشش چون حرکت ندارد چون جابه جا نمی شود

$\Delta U = -\mu_k mg \times 1.4 + T \times 0 + P \times 1.4$ نیرو و جابه جایی های هم جهت هستند

مسافتی که اصطکاک وارد می شود

$\Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$

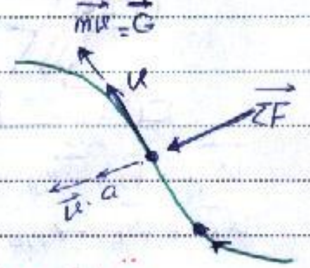
$\Delta V_g = +mg \times 1.4 \sin 30 \rightarrow v = 2.18$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ضربه و مومنتوم خطی)

زمان × نیرو = ضربه

سرعت × جرم = مومنتم خطی



$$\vec{\Sigma F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{\Sigma F} \cdot dt = m\,d\vec{v} \quad \text{انتگرال} \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{\Sigma F}\,dt = \int_{v_1}^{v_2} m\,dv$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F\,dt = mv_2 - mv_1 = G_2 - G_1$$

تغییرات مومنتم خطی

جسم در بازه

ضربه نیروهای وارد شده به جسم در بازه زمانی $t_2 - t_1$

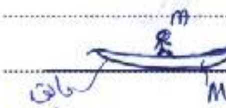
بنابراین ضربه نیروهای وارد بر جسم برابر است با تغییرات مومنتم خطی

سرعت‌ها حتماً سرعت‌های مطلق هستند (در قانون مومنتم)

قانون بقاء مومنتم خطی) اگر برایند ضربه نیروهای وارد بر جسم صفر باشد بقاء مومنتم خطی را خواهیم داشت

$$G_2 - G_1 = \Delta G = 0 \qquad G_2 = G_1$$

$$\int \Sigma F_x\,dt = \Delta G_x \qquad \int \Sigma F_y\,dt = \Delta G_y \qquad \int \Sigma F_z\,dt = \Delta G_z$$



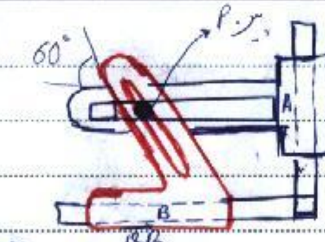
$$\Delta G_x = 0 \Rightarrow G_2 - G_1 = 0 \quad mv_1 = Mv_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m}{M} v_1$$

بقای مومنتم خطی در راستای افق

بقای مومنتم در راستای افق صادق است و در راستای قائم صادق نیست به خاطر وجود نیروی وزن

Subject:
Year. Month. Date.

مثال) $v_B = 3\ m/s$ $\quad v_A = 2\ m/s$ $\rightarrow v_P = ?$



$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A}$

$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{v}_{P/B}$

$v_A = v_{P/B}\sin 60 \qquad 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{P/B} \qquad v_{P/B} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$v_{P/A} = -\frac{4}{\sqrt{3}}\cos 60 + 3 \qquad v_{P/B} = 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}$

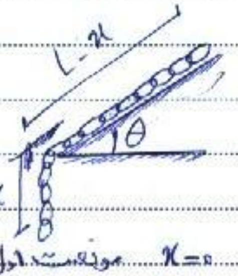
$v_P = \sqrt{(v_A)^2 + (v_{P/A})^2}$

مثال)

زنجیر از حال سکون در موقعیت $x = 0$ رها می‌شود

سطح صاف و بدون اصطکاک، سرعت

حلقه‌های زنجیر بر حسب x



$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$\Delta U = 0$ چون N عمود بر مسیر حرکت است

موقعیت اول $x = 0$ $\qquad \Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - \cancel{v_1^2}^{\,0}) \qquad \Delta V_e = 0$

موقعیت نشان داده شده: موقعیت دوم $\qquad$ جابجایی مرکز ثقل

$\Delta V_g = -mg\,(\Delta h)$

$\rightarrow \left[(L - x) + \frac{x}{2} \right] \sin\theta + \frac{x}{2}$

$\Delta V_g = -\frac{m}{L} x g \left(\left[(L - x) + \frac{x}{2} \right] \sin\theta + \frac{x}{2} \right)$

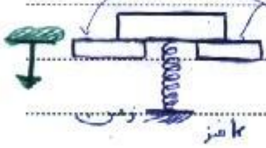
$v = \sqrt{\frac{g}{\ell} x^2 (1 - \sin\theta) + 2 g x \sin\theta}$

$\rightarrow \left[[L - x] + \frac{x}{2} \right] \sin\theta + \frac{x}{2}$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date.

مسأله ۱) در وضعیت نشان داده شده فنر تماس با جرم m هیچ فشردگی در فنر وجود ندارد در صورتی که قیدهای نگهدارنده ناگهان کشیده شوند مطلوب است حداکثر سرعتی که جرم m به آن می‌رسد
حداکثر فشردگی فنر
حداکثر نیرویی که فنر به زمین اعمال می‌کند



$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

① وضعیت نشان داده شده

② جرم به اندازه x پایین آمده و سرعت آن $\dot{x}$ است

$\Delta U = 0 \qquad \Delta T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad \Delta V_g = -mgx \qquad \Delta V_e = \frac{1}{2} K (x_2^2 - \cancel{x_1^2}) = \frac{1}{2} kx^2$

$-mgx + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 = 0$

$\frac{1}{2} m v_{(x)}^2 - mgx + \frac{1}{2} kx^2 = 0 \qquad \frac{dv}{dx} = 0 \rightarrow x_0$ در این وضعیت سرعت حداکثر است

$mv \cancel{\frac{dv}{dx}} - mg + kx_0 = 0 \Rightarrow mg = kx_0 \qquad x_0 = \frac{mg}{k}$

$v_{max} \Rightarrow$ [redacted] $\frac{1}{2} m v_{max}^2 - mg\left(\frac{mg}{k}\right) + \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k}\right)^2 = 0$

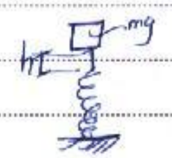
$v_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}}\, g$

ب) $x_{max} \Rightarrow v = 0 \qquad -mgx + \frac{1}{2} kx^2 = 0 \qquad x = \frac{2mg}{k}$

ج) $F_{max} = kx_{max} = 2mg$ چون بارگذاری ناگهانی است

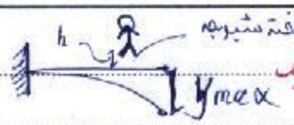
اگر بارگذاری تدریجی باشد $F_{max} = mg$ می‌شود

نیروی معادل بارگذاری استاتیک $F_{dyn} = mg \underbrace{\left(1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}\right)}_{\text{ضریب ضربه}}$ تغییر طول فنر در بارگذاری تدریجی

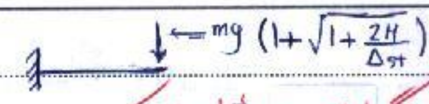


PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

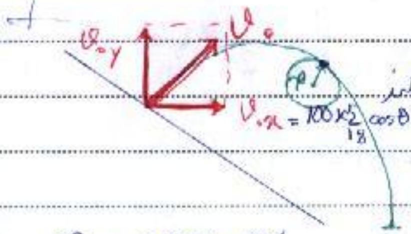


بارگذاری دینامیک



بارگذاری به صورت استاتیک

مثال) سرعت خروج گلوله از لوله تفنگ 500 m/s است
در صورتی که شیب جاده 20% و سرعت خودرو 100 km/h
باشد مطلوب است
الف) شعاع انحناء مسیر حرکت گلوله در ارتفاع حداکثر
ب) دوری یا مسافتی که گلوله در امتداد سطح شیب دار طی می کند



سرعت گلوله نسبت به ماشین
مطلق

سرعت مطلق گلوله $v = \vec{v} + \vec{v}$ $\qquad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

$v_{0x} = 27.24 \ m/s$ $\qquad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{5}$

$v_{0y} = 500 - 100 \times \frac{5}{18} \times \sin\theta = 494.54$

در نقطه اوج $a_n = g$

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$ $\qquad$ از مولفه های سرعت گلوله در نقطه اوج $v_y = 0$

$\Sigma F_x = 0 \quad a_x = 0 \Rightarrow v_x =$ ثابت

چون v_x ثابت است v_x گلوله برابر 27.24 است

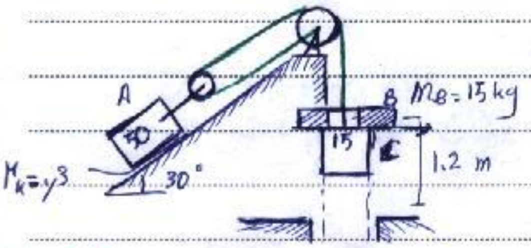
در نقطه اوج چون v_y صفر است v برابر با مقدار v_x است $\qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$g = \frac{(v_x)^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{(27.84)^2}{9.81} = 75.63$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) سیستم از حال سکون و از وضعیت نشان داده شده رها می‌شود. مطلوب است مسافتی که جرم A روی سطح شیب‌دار تا توقف کامل طی می‌کند.

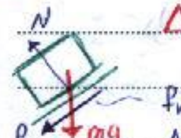


وضعیت نشان داده شده ① سیستم در حال سکون

② جرم B در آستانه تماس با تکیه‌گاه

③ سیستم حالت موقعیت شده

2،1 بین $\Delta U = -\mu_k m_A g \cos\theta \cdot \frac{1.2}{2}$



$f_k = \mu_k N$

$N = mg\cos\theta$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - \cancel{v_1^2}) = \frac{1}{2} m_A v_{2A}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{2B}^2 + \frac{1}{2} m_C v_{2C}^2$$

$$\Delta V_g = + mg \frac{1.2}{2} \sin\theta - (m_C - m_B) g \cdot 1.2$$

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

سرعت A نصف سرعت v_B و v_C است (به دلیل وجود قرقره‌ها)

از معادله $v_{2C} = 2.469$ m/s $v_{2A} = 1.234$ m/s

3،2 بین فرض جرم A روی سطح شیب‌دار از 2 به 3 به اندازه x جابجا شده است

$$\Delta U = -\mu_k m_A g \cos\theta \cdot x$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (\cancel{v_3^2} - v_2^2) = -\frac{1}{2} m_A v_{2A}^2 - \frac{1}{2} m_C v_{2C}^2$$

$$v_{2A} = \frac{1}{2} v_{2C}$$

$$\Delta V_g = + m_A g x \sin\theta - m_C g (2x) \Rightarrow x = 1.0689 \text{ m}$$

کل جابجایی جرم A برابر است با 1.6689 متر

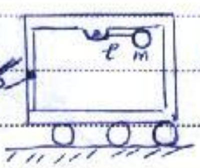
$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\int \sum \vec{F} \cdot dt = \Delta\vec{G} = \vec{G}_2 - \vec{G}_1$ مومنتم خطی $G = mv$

سوال) سیستم از حال سکون در وضعیت نشان داده شده رها می‌شود مطلوب است سرعت نسبی گلوله وقتی گلوله در حالت قائم قرار می‌گیرد.

6m 

وضعیت 1 : وضعیت نشان داده شده

وضعیت 2 : وقتی گلوله در راستای قائم قرار می‌گیرد

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

کشش کابل و نیروی مفصل ها داخلی هستند و نیروی N هم بر مسیر حرکت عمود است پس کار آنها صفر است

$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$\Delta U = 0$

$\Delta T = \frac{1}{2}(6m)(v_{2M}^2 - v_{1M}^2) + \frac{1}{2} m (v_{2m}^2 - v_{1m}^2) \Leftarrow \Delta KT$

$\Delta V_g = -mgh = -mgl$

$+ \quad \frac{1}{2}(6m)(v_{2m}^2) + \frac{1}{2} m (v_{2m}^2)^2 - mgl = 0$

بقای مومنتم خطی در راستای افق داریم یعنی هیچ نیروی خارجی افقی به سیستم وارد نمی‌شود

$\int \sum F_x \, dt = G_{2x} - G_{1x}$

$G_{2x} = G_{1x}$

$G_1 = 6m \cancel{v_{1M}} + m\cancel{v_{1m}} \Rightarrow G_{1x} = 0 \qquad G_2 = 6mv_{2M} + mv_{2m}$

$\Rightarrow 6mv_{2M} + mv_{2m} = 0$

$v_{2M} = -\frac{1}{6} v_{2m}$

سرعت ها مطلق است و جهت آنها خلاف هم هستند

$6 v_{2M}^2 + (-6 v_{2m})^2 - 2gl = 0 \qquad v_{2M} = \sqrt{\frac{gl}{21}}, \Rightarrow v_{2m} = -6\sqrt{\frac{gl}{21}}$

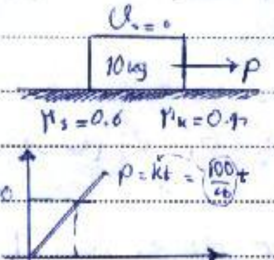
$v_{2m} = v_{2M} + v_{2m/M} \qquad -6\sqrt{\frac{gl}{21}} = \sqrt{\frac{gl}{21}} + v_{m/M}$

$v_{m/M} = -7\sqrt{\frac{gl}{21}}$ چون هر دو سرعت در یک راستا هستند جمع برداری ساده داریم

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

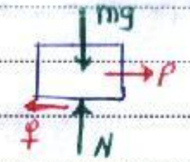
مثال 3/178)



نیروی P از صفر مانند منحنی روبه‌رو افزایش می‌یابد مطلوب است
سرعت بسته پس از 4 ثانیه

تنها رابطه‌ای که در آن زمان و سرعت وجود دارد ضربه و مومنتوم خطی است

$$\int \Sigma \vec{F}\, dt = \Delta \vec{G} \rightarrow \int \Sigma \vec{F}_x\, dt = \Delta \vec{G}_x = \vec{G}_{2x} - \vec{G}_{1x}$$



$$\int_{t=t^*}^{t=4} \Sigma F_x\, dt = G_{3x} - G_{2x}$$

$t = 0$ ①
استارت حرکت $t = t^*$ ②
$t = 4$ ③

جسم وقتی شروع به حرکت می‌کند که f_{max} و $F_{s\,max}$ برابر باشند $f = f_{s\,max} = \mu_s N = \mu_s mg$

$f_{max} = (0.6)(10)(9.8) = 58.86\ N$

$\frac{100}{4} t^* = 58.86 \Rightarrow t^* = 2.354\ (s)$

$$\int_{2.354}^{4} \Sigma F_x\, dt = \int_{2.354}^{4} \left(\frac{100}{4} t - \overset{\mu_k mg}{f}\right) dt = G_{3x} - \cancel{G_{2x}}^{\,0} = m v_3$$

استارت حرکت

$$\int_{2.354}^{4} \left(\frac{100}{4} t - 0.4 \times 10 \times 9.81\right) dt = 10\, v_3 \Rightarrow v_3 = 6.6121\ (m/s)$$

مثال 3/183) هاکی روی یخ

جرم توپ = 0.20

زمان تماس چوب با توپ = 0.04

مطلوب است نیروی متوسط اعمالی از طرف چوب به توپ

چون از قبیل زمان، سرعت، نیرو صحبت شده از مومنتوم خطی استفاده می‌کنیم بعد از برخورد

برای اینکه بتوانیم dt را از انتگرال بیرون بیاوریم متوسط ΣF را در نظر
می‌گیریم چون زمان برخورد 0.04 بسیار کم است

$$\int \Sigma \vec{F}\, dt = \Delta \vec{G}$$

$$\vec{F}\, \Delta t = \Delta \vec{G} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \rightarrow \vec{F} = 144.55\,\vec{i} + 30.8\,\vec{j}$$

$F = 147.8\,N$

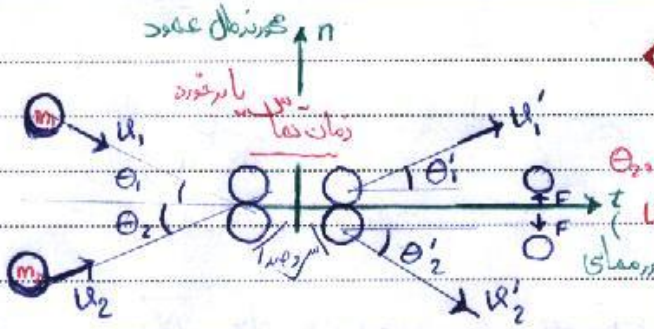
PAPNO

$$F \times 0.04 = 0.20\left[\left[18\cos 20\, i \mp 18 \sin 20\, j\right] - (-12\, i)\right]$$

خلاف جهت محور x

Subject:
Year. Month. Date.

برخورد Impact

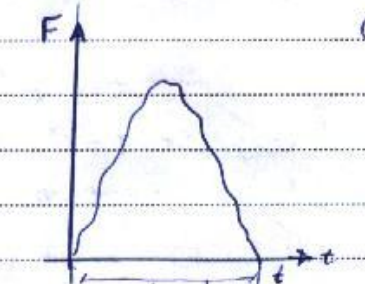


معلومات: $m_1, m_2, u_1, u_2, \theta_1, \theta_2$

مجهولات: $u_1', u_2', \theta_1', \theta_2'$

۱ـ انتخاب محورهای t و n

نیرویی که دو جسم به هم وارد می‌کنند F در راستای n است



هیچ نیرویی به تک تک ذرات در راستای محور t وارد نمی‌شود
به عبارت دیگر برای تک تک ذرات در راستای t
بقای مومنتم خطی را داریم ولی در راستای n
برای کل سیستم بقای مومنتم خطی را داریم

$\int \sum F\, dt = \Delta G$

1 بقای مومنتم خطی برای جرم m_1 در راستای t

$m_1 u_1 \cos\theta_1 = m_1 u_1' \cos\theta_1'$ $\quad$ $u_1 \cos\theta_1 = u_1' \cos\theta_1'$

2 بقای مومنتم خطی برای جرم m_2 در راستای t

$m_2 u_2 \cos\theta_2 = m_2 u_2' \cos\theta_2'$ $\quad$ $u_2 \cos\theta_2 = u_2' \cos\theta_2'$

3 بقای مومنتم خطی برای کل سیستم در راستای n

$m_2 u_2 \sin\theta_2 - m_1 u_1 \sin\theta_1 = m_1 u_1' \sin\theta_1' - m_2 u_2' \sin\theta_2'$

e ضریب استرداد یا بازگشت پذیری (تجربی)

$e = \dfrac{\text{سرعت نسبی دور شدن در راستای } n}{\text{سرعت نسبی نزدیک شدن در راستای } n}$ $\quad 0 < e < 1$

e به جنس و شکل هندسی اجسام بستگی دارد

$e = 1$ الاستیک کامل ، یعنی تلفات انرژی نداریم . قانون بقای انرژی جنبشی داریم

$0 < e < 1$ غیر الاستیک ، تلفات انرژی در نتیجه گرما ، صدا ، تغییر شکل دو جسم در هم اثر می‌کند است ، قانون بقای انرژی جنبشی صادق نیست

PAPNO

$e = 0$ غیر الاستیک کامل ، دو جسم پس از برخورد کاملاً به هم می‌چسبند ، تلفات انرژی داشته و قانون بقای انرژی جنبشی صادق نیست

Subject:

Year. Month. Date. / /

4. $e = \dfrac{v_1' \sin\theta_1' + v_2' \sin\theta_2'}{v_1 \sin\theta_1 + v_2 \sin\theta_2}$

مثال)

مطلوب است سرعت مانع پس از برخورد، درصد انرژی تلف شده.

پاسخ

* برای کل سیستم در راستای افق $\Sigma F_x = 0$
* برای کل سیستم در راستای افق بقاء مومنتم خطی داریم *

$\Delta G_x = 0$

$m v_1 + M \cancel{v_2} = m v_1' + M v_2'$

$180 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^3 = 180 \times 10^{-3} \times 1.5 \times 10^3 + 0.96 \times v_2' \qquad v_2' = 281 \ km/h$

درصد انرژی تلف شده $= \dfrac{\text{تغییر در انرژی جنبشی}}{\text{انرژی جنبشی اولیه}} = \dfrac{(\frac{1}{2} m v_1^2) - (\frac{1}{2} m v_1' - \frac{1}{2} M v_2')^2}{\frac{1}{2} m v_1^2} \times 100 = 70\%$

جرم 1 با سرعت 6 m/s در جهت نشان داده شده پرتاب می‌شود جرم 2 در حال سکون است هر دو جرم کره‌ها مشابه و صیقلی است، $e = 0.6$ است

مطلوب است سرعت و جهت هر یک از جرم‌ها پس از برخورد و انرژی جنبشی استهلاک شده در نتیجه برخورد

$v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$

$v_1', \theta_1', v_2', \theta_2'$

$v_1 \Rightarrow \theta_1 = 60 \qquad v_1 = 6 \ m/s \quad \theta_1' = ? \quad v_1' = ? \quad v_2' = ? \quad \theta_2' = 90$

① در راستای t برای m_1: $m_1 v_1 \cos\theta_1 = m_1 v_1' \cos\theta_1'$

② در راستای t برای m_2: $\underset{\text{ساکن}}{0} = m_2 v_2' \cos 90 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

③ در راستای n برای m_2, m_1: $m_1 v_1 \sin\theta_1 + 0 = m_1 v_1' \sin\theta_1' + m_2 v_2'$

دو معادله و سه مجهول

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$e = \frac{n \text{ سرعت نسبی دور شدن ذرات در راستای}}{n \text{ سرعت نسبی نزدیک شدن ذرات در راستای}} \qquad e = \frac{v_2' - v_1' \sin\theta_1'}{v_1 \sin\theta_1}$$

$$v_2' - v_1' \sin\theta_1' = e\, v_1 \sin\theta_1 \qquad (3)$$

$(1) = 6 * \cos 60 = v_1' \cos\theta_1'$ $\qquad v_1' = 3.17 \ m/s$

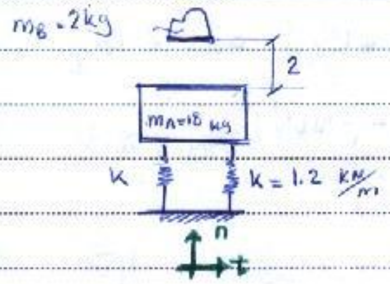
$(2) \Rightarrow 6 * \sin 60 = v_1' \sin\theta_1' + v_2'$ $\qquad v_2' = 4.16 \ m/s$

$(3) = 0.6 \times 6 \sin 60 = v_2' - v_1' \sin\theta_1'$ $\qquad \theta_1' = 19.1°$

T_1 انرژی جنبشی قبل از برخورد $\qquad$ T_2 انرژی بعد از برخورد

درصد اتلاف انرژی $= \frac{T_1 - T_2}{T_1} * 100$

$$= \frac{\frac{1}{2} m_1 (6)^2 - \left[\frac{1}{2} m_1 (3.17)^2 + \frac{1}{2} m_2 (4.16)^2\right]}{\frac{1}{2} m_1 6^2} = 24\%$$



3/226) جسم B پس از سقوط آزاد به جسم A می‌چسبد.
مطلوب است مقدار فشردگی فنر.

1) وضعیت نشان داده شده (دقیقاً قبل از برخورد B به A)

زاویه برخورد — 2) دو جسم به هم برخورد کرده به هم چسبیده و هر دو دارای یک سرعت می‌باشند

از 1 به 2 قانون بقای انرژی صادق نیست

از رابطه کار و انرژی → 3) حداکثر فشردگی فنر

از 2 به 3 بقای انرژی داریم

$m_A * 0 + m_B \sqrt{2gh} = (m_A + m_B)\, v$ دو جسم به هم چسبیده و دارای یک سرعت با هم شده

$$v = \frac{2}{18+2} \sqrt{2 * 9.81 * 2} = 0.626 \ m/s$$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\cancel{\Delta U} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ — بین 2و3

$\Delta T = \frac{1}{2}\underbrace{(m_A + m_B)}_{20}(0 - \overset{0{,}626}{v_2^2})$

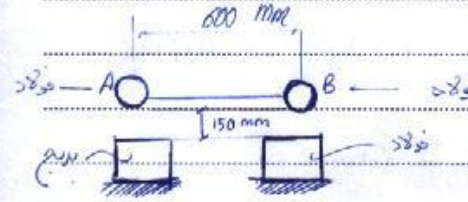
فشردگی فنر

$\Delta V_g = -\underbrace{(m_A + m_B)}_{20}\,\overset{9{,}81}{g}\,\delta$

$18 \times 9{,}81$ — نشانگر پس از Max

$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(x_3^2 - x_2^2) \quad x_2 = \frac{m_A g}{k \times 2} \quad x_3 = x_2 + \delta$

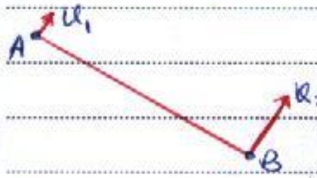
پیش‌فشردگی ✓ $2 \times 1{,}2 \times 10^3$

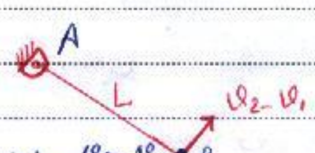


$e = 0.4$ فولاد و برنج

$e = 0.6$ فولاد و فولاد

سرعت زاویه میله AB پس از برخورد





$v_B = v_A + v_{B/A} \qquad \omega = \frac{v_2 - v_1}{L}$

$v_{1A} = \sqrt{2gh} = v_{2B} \qquad v_{2A} = ? \quad 0.4\sqrt{2gh} \qquad v_{2B} = ?$

$e_{\text{فولاد و برنج}} = \frac{v_{2A}}{\sqrt{2gh}} \qquad \omega = \frac{v_{2B} - v_{2A}}{L} = \frac{(0.6 - 0.4)\sqrt{2gh}}{0.6000} = /5718$

مسائل:

فصل 3، 184 , 215 , 212 , 244 , 253 , 255

PAPNO

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

فصل چهارم :

سینتیک سیستم ذرات :

$(\Sigma m_i)\vec{\bar{r}} = \Sigma m_i \vec{r}_i \quad = \quad \bar{r} = \dfrac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i}$

$\Sigma m_i \vec{\rho}_i = 0$

قانون دوم نیوتن

$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

$m_i \Rightarrow F_1 + F_2 + \cdots + f_1 + f_2 + \cdots = m_i \vec{a}_i$

$m_i \cdots m_2, m_1$ برای کل سیستم $= \quad \Sigma \vec{F} + \cancel{\Sigma \vec{f}} = \Sigma m_i \vec{a}_i$

برایند کل نیروهای داخلی برای کل سیستم صفر است

$\Sigma \vec{F} = \Sigma m_i \vec{a}_i$ برایند کل نیروهای خارجی

$\Sigma m_i \vec{\bar{r}} = \Sigma m_i \vec{r}_i \xrightarrow{\text{2 بار مشتق}} (\Sigma m_i)\vec{\bar{a}} = \Sigma m_i \vec{a}_i$

$\Sigma F = \Sigma m_i a_i = (\Sigma m_i)\vec{\bar{a}}$

برایند نیروهای خارجی وارد بر سیستم ذرات برابر است با جرم کل سیستم ضرب در شتاب مرکز ثقل

~~اگر برایند وارد بر سیستم ذرات از مرکز ثقل گذر نکند سیستم ذرات هم حرکت~~
انتقالی دارد هم حرکت دورانی

انرژی جنبشی سیستم ذرات :

$m_1 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

کل سیستم ذرات $T = \sum T_i = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$

سرعت ذره iام نسبت به مرکز ثقل

$\vec{r}_i = \bar{\vec{r}} + \vec{\rho}_i \xrightarrow{\text{مشتق}} \vec{v}_i = \bar{\vec{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i$

سرعت مطلق ذره iام — سرعت مرکز ثقل

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i (\bar{\vec{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i)(\bar{\vec{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i \left[\bar{v}^2 + 2\bar{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{\rho}} + \dot{\rho}_i^2 \right]$$

$$T = \bar{v}^2 \underbrace{\left(\sum \frac{1}{2} m_i\right)}_{\frac{1}{2}m} + 2\bar{\vec{v}} \cdot \cancel{\sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i} + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_i^2$$

$\sum m_i \rho_i = 0 \qquad \sum m_i \dot{\rho}_i = 0$

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_i^2$$

انرژی جنبشی سیستم ذرات برابر است با انرژی جنبشی مرکز ثقل به علاوه انرژی جنبشی تک تک ذرات نسبت به مرکز ثقل.

اگر ذرات نسبت به هم حرکت نداشته باشند $\dot{\rho}_i = 0$ بوده.

$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$

به عبارت دیگر انرژی جنبشی کل سیستم برابر است با انرژی جنبشی مرکز ثقل

مومنتم خطی سیستم ذرات)

$\vec{G}_i = m_i \vec{v}_i$

$\boxed{\vec{G} = \sum G_i = \sum m_i \vec{v}_i = m\bar{\vec{v}}}$

مومنتم خطی سیستم ذرات برابر است با مومنتم خطی مرکز ثقل

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{d}{dt}\vec{G} = \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{v}_i$$ قانون ضربه و مومنتم خطی سیستم ذرات)

$$= \sum m_i \vec{a}_i$$

$$\int dG = \int \sum m_i \vec{a}_i \, dt = \vec{G}_2 - \vec{G}_1$$

$\Delta G =$ ضربه نیروهای اعمالی به سیستم ذرات

برایند ضربه نیروهای اعمالی به سیستم ذرات برابر است با تغییرات مومنتم خطی مرکز ثقل سیستم

سه گلوله مشابه
از وزن میله‌های رابط صرف نظر می‌کنیم
سیستم از وضعیت نشان داده شده رها می‌شود
مطلوب است سرعت سیستم ذرات وقتی افقی می‌شود

1) وضعیت نشان داده شده

2) وقتی سیستم ذرات افقی

$\Delta U = 0$ کار نیروی N عمود بر مسیر حرکت است

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_i^2$$

ذره ام ρ_i

ρ_i کوچک است و ثابت و $\dot{\rho}$ صفر است

$v_1 = v_2 = v_3 = \bar{v}$

$$\Delta T = \sum \Delta T_i = 3 \times \frac{1}{2} m (v^2 - 0)$$

سرعت در وضعیت 2 — سرعت در وضعیت 1

$$\Delta V_g = \sum \Delta V_{gi} = -mg(b \sin 45) - mg(2b \sin 45)$$

ارتفاع مرکز ثقل‌ها

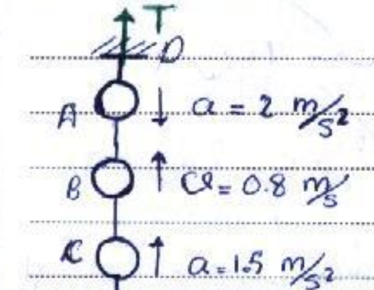
$$\Delta V_e = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{3}{2}} \cancel{m} v^2 = -\cancel{3} \cancel{m} g \, b \sin 45 \qquad v = \sqrt{2gb \sin 45}$$

PAPNO

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

مثال 1)



$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y = \Sigma m_i a_{iy}$$

$$T - m_A g - m_B g - m_C g = \Sigma m_i a_i$$
$$= m_A a_A + m_B a_B + m_C a_C$$

مطلوبست کشش طناب در نقطه D

$$T - (10 + 15 + 18) * 9.81 = 10 \times (+2) + 18\,(1.5)$$

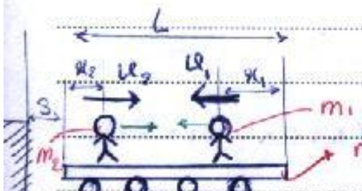
$m_A = 10\,kg \quad m_B = 15\,kg \quad m_C = 18\,kg$

$$T = 316\ N$$

2 سیستم در حال سکون

دونفر شروع به حرکت کرده تا یکدیگر را ملاقات کنند

مطلوبست فاصله S برحسب x_1 در لحظه تلاقی دونفر



$x_2 = 0 \leftarrow x_1 = 0 \leftarrow S = 0 \leftarrow t = 0$

برای سیستم ذرات $\Sigma F_x = 0$

بقاء مومنتم خطی برای سیستم ذرات

$$\int \Sigma F_x\, dt = \Delta G_x$$
$$\Sigma G_{1i} = 0 = \Sigma G_{2i}$$

① سیستم در حال سکون $S = x_1 = x_2 = 0$

② وقتی دونفر یکدیگر را ملاقات می‌کنند

u_2 و u_1 سرعت نسبت به ارابه (سرعت‌ها نسبی هستند).

$$\Sigma G_{2i} = m_0 \overset{S/t}{u} + m_2 (\underset{S/t}{u} + \overset{x_2/t}{u_2}) + m_1 (\underset{S/t}{u} - \overset{x_1/t}{u_1}) = 0$$

$$m_0 S + m_2 (S + x_2) + m_1 (S - x_1) = 0$$

وقتی دونفر یکدیگر را ملاقات می‌کنند $x_2 = L - x_1$

$$(m_0 + m_2 + m_1) S + m_2 (L - x_1) - m_1 x_1 = 0$$

$$S = \frac{(m_1 + m_2) x_1 - m_2 L}{m_0 + m_1 + m_2}$$

چک کردن درستی فرمول $\left.\begin{matrix} m_1 = m_2 \\ x_1 = \frac{L}{2} \end{matrix}\right\} S = 0$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

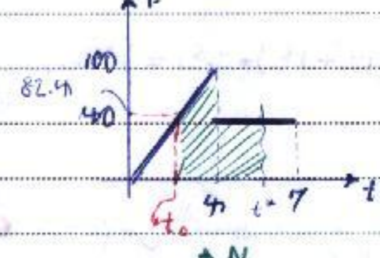
مثال) سیستم در $t=0$ ساکن است

t_0 زمانی که نیروی F بر اصطکاک استاتیک غلبه کند

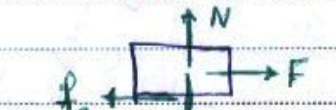
$\mu_s = 0.7 \quad \mu_k = 0.5 \qquad f_{s-max} = \mu_s N \qquad P \geq \mu_s N$

1) مطلوب است سرعت Max جسم

2) کل زمان حرکت جسم



$$\int_{t_0}^{t} \Sigma F_x dt = \Delta G_x$$



$$f_{s-max} = \mu_s N = \mu_s mg = 0.7 \times 12 \times 9.81 = 82.4 N$$

$$0 < t < 4 \qquad P(t) = \frac{100}{4} t \qquad 82{,}4 = \frac{100}{4} t_0 \Rightarrow t_0 = 3{,}296$$

وقتی $P = P_{max}$ $(t=4)$ سرعت نیز حداکثر خواهد شد

$$\int \Sigma F_x \Delta T = \Delta G_x$$

1) $t=t_0$ سرعت جسم صفر

2) $t=4$ سرعت جسم Max

$$\int_{t=3{,}296}^{4} (\underbrace{P}_{\frac{100}{4}t} - \mu_k mg) dt = \Delta G_x = m(v_2 - \cancel{v_1})$$

$$\frac{100}{8} t^2 \Big|_{3{,}296}^{4} - (0.5)(12)(9.81)(t) \Big|_{3{,}296}^{4} = 12 v_{max}$$

$$v_{max} = 1{,}896 \ m/s$$

راه اول $\int_4^{t^*} \Sigma F_x dt = -m v_{max}$

2) توقف جسم در $4 < t^* < 7$

راه دوم $\int_{t_0}^{t^*} \Sigma F_x dt = 0$

1) $t = t_0$

2) $t = t^*$ جسم متوقف شده است

$$\int (P - \mu_k mg) dt = 0$$

PAPNO

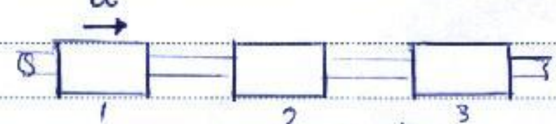
سطح زیر منحنی $\int_{t_0}^{t^*} P \, dt - \int_{t_0}^{t^*} \mu_k mg \, dt = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{100+82.4}{2} * (4-3.296) + 4.2(t^* - 4) - .5 \times 12 \times 9.81 \; (t^* - 3.296) = 0$$

$$t^* = 5.2$$

مثال) سه استوانه فولادی کاملاً مشابه نشان داده شده می‌توانند بدون اصطکاک بر روی محور افقی حرکت کنند، استوانه 2 و 3 ساکن و استوانه 1 با سرعت u به آنها نزدیک می‌شود
رابطه‌ای برای سرعت استوانه 3 پس از برخورد برحسب u و ضریب استرداد e بنویسید.



استوانه 1
- u قبل از برخورد به 2
- u'_1 پس از برخورد به 2

استوانه 2
- 0 قبل از برخورد به 1
- u'_2 پس از برخورد به 1

استوانه 3
- 0 قبل از برخورد با 2
- u پس از برخورد با 2

برای هر دو عضو در راستای محور استوانه‌ها قانون ضربه و مومنتوم خطی را می‌نویسیم

$$m u_1 = m u'_1 + m u'_2 \qquad m u'_2 = m u''_2 + m u$$

$$e = \frac{u'_2 - u'_1}{u_2} \qquad e = \frac{u - u''_2}{u'_2}$$

$$u = u'_1 + u'_2$$

$$u'_2 - u'_1 = eu \rightarrow u'_2 - (u - u'_2) = eu \rightsquigarrow u'_2 = \frac{1}{2}(1+e)u$$

$$u'_2 = u''_2 + u$$

$$e u'_2 = u - u''_2 \qquad u = \frac{1}{2}(1+e)(u'_2) = \frac{1}{4}(1+e)^2 u - u$$

PAPNO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حل مسائل (

۱) اگر $S(t)=\sqrt{t}$ ⇐ $v(t)=?$ $a(t)=?$

پاسخ) $v=\frac{ds}{dt}=s'$ $a=\frac{d^2s}{dt^2}=s''$

در یک حرکت مستقیم الخط موقعیت ذره نسبت به مبدا مختصات بصورت $S(t)=2t^3-3t^2+1$ داده شده مطلوب است) الف) سرعت و شتاب لحظه‌ای در زمانهای $t_1=1$ و $t_2=2$

پاسخ) $t=0 \rightarrow S=1$ $t=1 \rightarrow S=1$ $t=2 \rightarrow S=5$

سرعت لحظه‌ای ⇐ مشتق ⇒ $6t^2-6t=S'$ $v_{(2)}=12$ $v_{(1)}=0\ m/s$

شتاب لحظه‌ای ⇐ مشتق ⇒ $12t-6=S''$ $a_{(2)}=18$ $a_{(1)}=6\ m/s^2$

سرعت متوسط ⇒ $v_{ave}=\frac{S_{(2)}-S_{(1)}}{t_2-t_1}$

ب) سرعت و شتاب متوسط در فاصله زمانی $t=0$ و $t=2$ پاسخ)

سرعت متوسط ⇒ $v_{ave}=\frac{S_{(2)}-S_{(1)}}{t_2-t_1}=\frac{\cancel{12-8}\ 5-1}{2}=2\ m/s$

شتاب متوسط ⇒ $a_{ave}=\frac{v_{(2)}-v_{(1)}}{t_2-t_1}=\frac{12}{2}=6$

ج) کل مسافت طی شده پس از ۲ ثانیه پاسخ)

$v=0 \Rightarrow 6t^2-6t=0 \Rightarrow t=0 \quad t=1$

$\Delta S=|\Delta s(t_1,t_0)|+|\Delta S(t_2,t_1)|=|S(1)-S(0)|+|S(2)-S(1)|=6$

چون متحرک در بازه‌ای از مسیر تغییر مسیر داده یعنی سرعت صفر گردیده

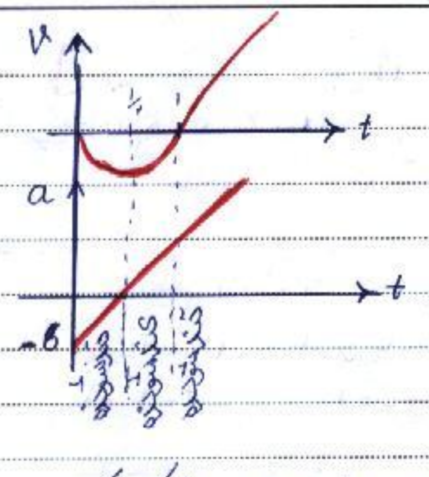
د) زمانی که متحرک مجدداً به مبدا مختصات برمی‌گردد. پاسخ)

$S(t)=0 \Rightarrow 2t^3-3t^2+1=0 \Rightarrow (t-1)(2t^2-t-1)=0$ $\begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$t=1$ غ ق ق

Subject:

Year. Month. Date. / /



$a \times v > 0$ حرکت تندشونده

$a \times v < 0$ حرکت کندشونده

۱۲) متحرکی با شتاب ثابت ۲ $\frac{m}{s^2}$ از حال سکون و از نقطه‌ای به فاصله ۱ متری مبدا در یک حرکت مسیر مستقیم حرکت می‌کند مطلوب است معادلات سرعت و موقعیت نسبت به زمان و مسافت طی شده پس از 10 ثانیه)

$a = 2$ ثابت

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \quad dv = a\,dt \quad \int_{v=v_0}^{v} dv = \int_{t=0}^{t} a\,dt \Rightarrow v(t) - v(0) = \int_0^t a(t)\,dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \int_{S_0}^{S} ds = \int_{t=0}^{t} v(t)\,dt \Rightarrow S(t) - S(0) = \int_0^t v(t)\,dt$$

$$S(t) = S_0 + \int_0^t v\,dt$$

پاسخ ⇐

$$v(t) = \int_0^t 2\,dt = 2t \qquad S(t) = 1 + \int_0^t 2t\,dt = 1 + t^2$$

$$v(t) = 0 \rightarrow 2t = 0 \rightarrow t = 0$$

$S=0$ $S=1$ $S=0$

$$\Delta S = \Delta S(t = 10, 0) = S(10) - S(0) = 100$$

PAPNO

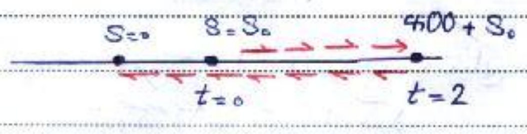
Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳) در یک حرکت مستقیم الخط $v = 300 - 75t^2$ است. مطلوب است مسافت طی شده پس از 3 ثانیه

پاسخ

$$S = S_0 + \int_0^t v\,dt = S(t) = S(0) + \int_0^t 300 - 75t^2\, dt = S_0 - 25t^3 + 300t$$

$$v = 0 \rightarrow 300 - 75t^2 = 0 \qquad t = 2$$



$$\Delta S = |\Delta S(t=2,0)| + |\Delta S(t=3,2)| = |S(2) - S(0)| + |S(3) - S(2)| =$$
$$= |400 + S_0 - S_0| + |225 + S_0 - 400 - S_0|$$
$$= 575$$

۴) اگر $a(s) = \checkmark \Leftarrow \quad a(t) = ? \quad v(t) = ? \quad s(t) = ?$

پاسخ) $a\,ds = v\,dv$

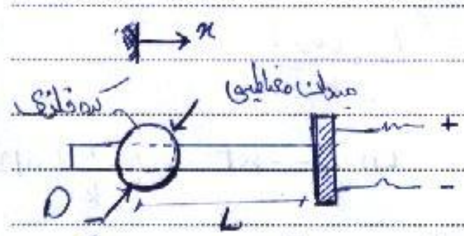
$$\int_{S_0}^{S} a\,ds = \int_{v_0}^{v} v\,dv \Rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \quad v(S) = f(S)$$ برحسب v ، S

$$v = \frac{ds}{dt} = f(s) \qquad \int_{S_0}^{S} \frac{d(s)}{f(s)} = \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow g(s) = t \leftarrow$$ تغییرمتغیر

درنتیجه $S(t) = \checkmark$ یعنی S برحسب t به دست آمد

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \qquad a(t) = \frac{d^2s}{d^2t}$$

۵)



$$a = \frac{K}{(L-x)^2}$$ (ثابت k)

در شیر برقی بالا پس از وصل سیم به برق میدان مغناطیسی ایجاد شده کره فلزی را جذب می کند شتاب کره فلزی متناسب است با عکس مجذور فاصله. مطلوب است سرعت کره فلزی در هنگام برخورد با صفحه مغناطیسی.

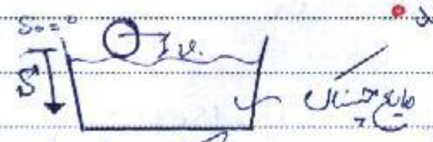
$v = ?$

$$a\,dx = v\,dv$$

$$\frac{k}{(L-x)^2}\,dx = v\,dv \qquad \int_0^{L-\frac{D}{2}} \frac{k}{(L-x)^2}\,dx = \int_{v=0}^{v} v\,dv$$

$$\frac{kx}{L(L-x)}\Bigg|_0^{L-\frac{D}{2}} = \frac{1}{2}v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{k(2L-D)}{LD}}$$

16) گلوله‌ای با سرعت اولیه v_0 در مایع چسبناکی سقوط می‌کند.



الف) مسافتی که گلوله طی می‌کند تا بایستد

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد تا سرعت گلوله نصف شود

توضیح) آزمایشات نشان می‌دهد هرچه سرعت گلوله بیشتر باشد مقاومت مایع چسبناک بیشتر است

$a = -kv \qquad a(v) = \checkmark$

پاسخ) $S(t) = ? \qquad v(t) = ? \qquad a(t) = ?$

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{-kv} = \int_{t=0}^{t} dt \qquad -\frac{1}{k}\ln\frac{v}{v_0} = t$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kt \qquad \frac{v}{v_0} = e^{-kt} \qquad v = v_0\,e^{-kt}$$

$$S = \cancel{S_0} + \int_0^t v\,dt \Rightarrow S = \int v_0 e^{-kt}\,dt = v_0\left(-\frac{1}{k}e^{-kt}\right)\Bigg|_0^t$$

$$= v_0\left(-\frac{1}{k}e^{-kt} + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\left(-\cancel{v_0 e^{-kt}}^{\,v} + v_0\right) \Rightarrow$$

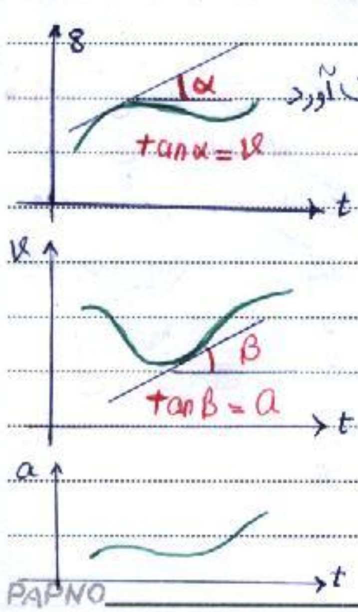
الف) $S = \frac{1}{k}(-\cancel{v_0} + \cancel{v_0}) = \frac{v}{k} \qquad L = \frac{v_0}{k}$

$$v = v_0 e^{-kt} \Rightarrow \frac{v_0}{2} = v_0 e^{-kt} \qquad \ln\frac{1}{2} = -kt \qquad t = \frac{1}{k}\ln(2)$$

PAPNO

بجای فرم تحلیلی منحنی تغییرمکان‌ها را داریم)

از روی منحنی چگونه می‌توان سرعت و شتاب لحظه‌ای را به دست آورد



شیب منحنی در هر لحظه ← مشتق ← $v = \frac{ds}{dt}$

شیب منحنی سرعت در هر لحظه ← مشتق ← $a = \frac{dv}{dt}$

منحنی شتاب

۱ اگر منحنی (a-t) را داشته باشیم v و S را چگونه به دست آوریم

$v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt$ — سطح زیر منحنی a-t

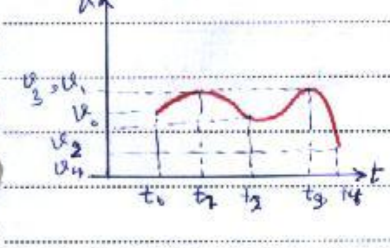
$v(t_0 + \Delta t) = v(t_1) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} a\,dt$

Δt بسیار کوچک $v(t_1) = v_0 + a_0 \Delta t$

$v(t_2) = v(t_1 + \Delta t) = v(t_0 + 2\Delta t)$

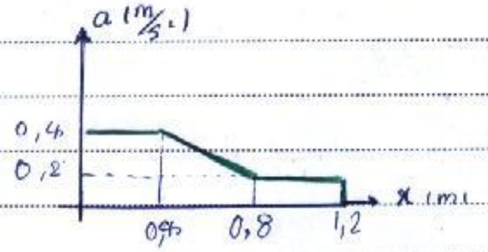
$= v(t_1) + a_1 \Delta t$

$\vdots$



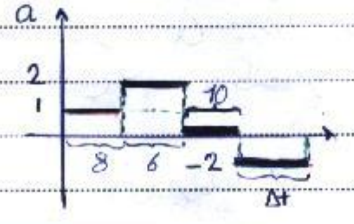
مثال)

در حرکت مستقیم الخطی یک متحرک سرعت متحرک در مبدأ مختصات برابر $0.8\ m/s$ است. سرعت ذره را در انتهای مسیر $x = 1.5\,m$ بیابید.



پاسخ ۱) $\int_{s=0}^{s=1.2} a\,ds = \int_{v=v_0}^{v} v\,dv \Rightarrow 0.4 \times 0.4 + \frac{0.4 + 0.2}{2} \times 0.4 + 0.2 \times 0.4$

$= \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}(v^2 - 0.8^2) \Rightarrow v = 1.2\ m/s$



مثال) ترنی فاصله بین دو ایستگاه را با شتاب های روبرو حرکت می کند مطلوب است Δt زمان ترمز کردن

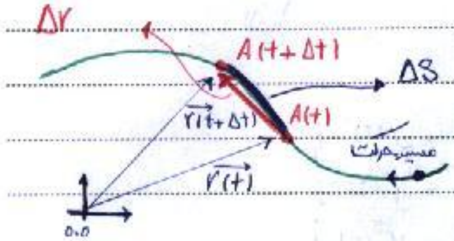
ترن مثل اول برسد به ایستگاه دوم

* آیا می توان فاصله دو ایستگاه را تأمین نمود (تکلیف)

پاسخ) $t = 0 \rightarrow v_0 = 0$, $v = 0$ سرعت در انتهای مسیر

$a = \frac{dv}{dt}$ $\quad a\,dt = dv$ $\quad \underbrace{\int_{t=0}^{t} a\,dt}_{\text{سطح زیر منحنی}} = \int_0^0 dv = 0$ $\Rightarrow$ سطح زیر منحنی $= 0$

$1 * 8 + 2 * 6 + 0 * 10 - 2 * \Delta t = 0 \qquad \Delta t = 10$



حرکت منحنی الخط ذره در صفحه)

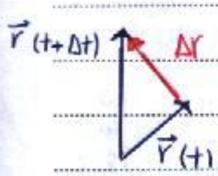
$r(t)$ بردار موقعیت لحظه‌ای ذره نسبت به مبدا

$\Delta(r)$ تغییرات بردار موقعیت

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

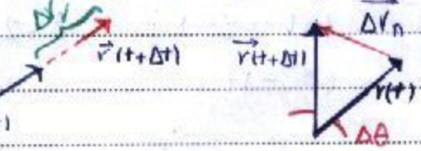
اگر $\Delta t \to 0$ باشد Δr مماس بر مسیر حرکت ای گردد

بردار سرعت لحظه‌ای = $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{dr}}{dt} = \dot{\vec{r}}$



تغییرات هم در اندازه و هم در جهت $\vec{r}(t)$ ایجاد شده است

= تغییرات در اندازه (فقط) + تغییرات در جهت (فقط)



$\Delta r = \Delta r_r + \Delta r_n$

تغییرات جهت   تغییرات اندازه

در حرکت ذره به دور یک مسیر دایره‌ای با r ثابت تغییرات فقط در راستای جهت است

بردار سرعت لحظه‌ای) یک بردار آزاد بوده (برای تعریف آن نیازی به مبدأ مختصات نیست) بردار سرعت همواره بر مسیر حرکت مماس است .

بردار شتاب لحظه‌ای = $a = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

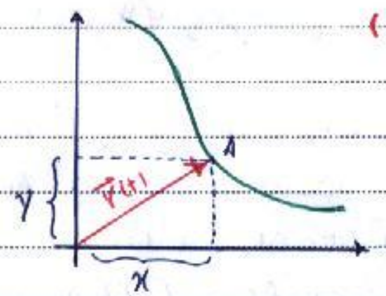
مطابق کیلومترشمار ماشین $\Rightarrow \dot{S} = \frac{ds}{dt} =$ اندازه بردار سرعت (تندی) $|v| = v$

* $\ddot{S}$ مشتق v براساس تغییرات فقط اندازه v است و نه جهت $|a| = a \neq \ddot{S}$

محورهای مختصات مرجع) 1) دکارتی 2) قطبی (استوانه‌ای) $r-\theta$ 3) مماس و عمود بر مسیر حرکت

n-t گویند

درس حرکت منحنی الخط ذره در محورهای مختصات دکارتی :



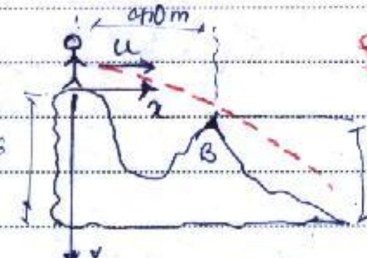
$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$
$$\vec{v}(t) = x^{\circ}(t)\,\vec{i} + y^{\circ}(t)\,\vec{j}$$
$$\vec{a}(t) = x''(t)\,\vec{i} + y''(t)\,\vec{j}$$

مثال 2/57 : در حرکت یک ذره در صفحه $x(t)=3t^2-4t$, $y(t)=4t^2-\frac{1}{3}t^3$
مطلوب است سرعت و شتاب لحظه‌ای در $t=2$

پاسخ : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$
$= (3t^2-4t)\,\vec{i} + (4t^2-\frac{1}{3}t^3)\,\vec{j}$ $\qquad \vec{r} = 4\vec{i} + \frac{40}{3}\vec{j}$
$\vec{v} = (6t-4)\,\vec{i} + (8t-t^2)\,\vec{j}$ $\qquad t=2 \quad \vec{v} = 8\vec{i} + 12\vec{j}$
$\vec{a} = (6)\,\vec{i} + (8-2t)\,\vec{j}$ $\qquad \vec{a} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$

جهت بردار $= \tan^{-1}\frac{y}{x} = \alpha \Rightarrow \text{Arc}\tan\frac{12}{8} = \alpha$

مثال 2/67 : حداقل u چقدر باشد تا شناگر به آب برخورد کند؟



پاسخ : $t=0 \begin{cases} x^{\cdot} = u \\ y^{\cdot} = 0 \end{cases}$ همواره $\begin{cases} x'' = a_x = 0 \quad \cancel{F_x} = m\cancel{a_x} \\ y'' = a_y = g \quad F_y = m a_y \\ \cancel{m}g = \cancel{m}a_y \end{cases}$

انتگرال گیری $\begin{cases} x^{\circ} = C_1 \\ y^{\cdot} = gt + C_2 \end{cases}$ $t=0 \begin{cases} C_1 = u \\ C_2 = 0 \end{cases}$ انتگرال $\Rightarrow \begin{cases} x = ut + C_3 \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + C_4 \end{cases} \xRightarrow{t=0}$

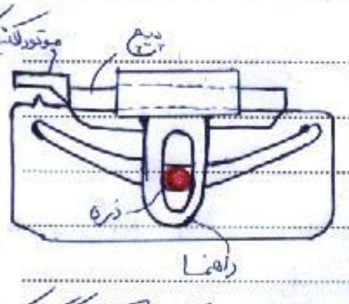
$\Rightarrow C_3 = 0 \quad C_4 = 0$

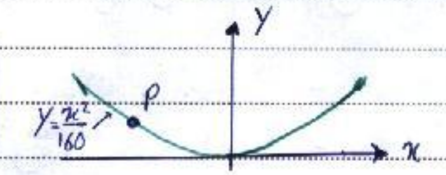
$\begin{cases} x = ut \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ شرط گذشتن از B عبور از B صدق کردن B در روابط متقابل است $= \text{Min}\ u$

$\begin{cases} 40 = ut \\ 10 = \frac{1}{2}g(t)^2 \end{cases} \Rightarrow t = ? \Rightarrow u = 28\ \frac{m}{s}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال 2/70)





با راه اندازی موتورالکتریکی و چرخش پیچ pin P مقید است در داخل شیار حرکت کند اگر حرکت موتور به نحوی باشد که راهنما با سرعت ۲۰ mm/s حرکت خطی داشته باشد (بصورت ثابت) در $x=60$ شتاب و سرعت لحظه ای pin P را پیدا کنید

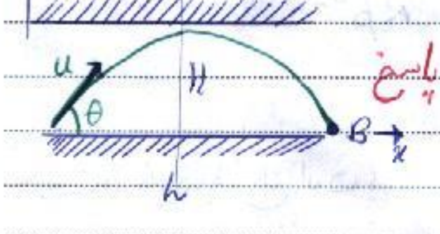
پاسخ) $\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}$ $\quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ $\qquad \dot{x} = ۲۰ \ \frac{mm}{s}$ ثابت

$\frac{dy}{dx} = \frac{۲x}{160}$ $\qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\dot{x}} = \frac{x}{80}\,\dot{x}$ $\qquad \dot{y} = \frac{۲x\dot{x}}{160}$

$y'' = \frac{x'^2 + x x''}{80}$ $\quad , \quad x'' = 0$ چون

$v = \sqrt{\dot{x}^2 + (\frac{x\dot{x}}{80})^2} \Rightarrow \sqrt{(۲۰\times ۱۰^{-۳})^2 + (\frac{60\times 20\times 10^{-3}}{80})^2}$

مثال پرتابه ای با سرعت u در امتداد یک طول پرتابی شود مطلوب است حداقل مقدار u و زاویه θ مربوطه به نحوی که پرتابه بدون برخورد به سقف به نقطه B برسد



پاسخ) $v_x = u\cos\theta$ همواره در طول مسیر ثابت است

$v_y =$ متغیر

$F_x = ma_x \Rightarrow v_x =$ ثابت

$F_y = ma_y = mg \neq 0$

$\boxed{L = (u\cos\theta)\,t}$ $\quad t = \frac{L}{u\cos\theta}$ $\quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \int_0^t a_y = \int_{u\sin\theta}^{v_y} dv_y$

$-gt = v_y - u\sin\theta$

$v_y(t) = -gt + u\sin\theta$ $\qquad$ در اوج $\boxed{0 = -\frac{gt}{2} + u\sin\theta}$

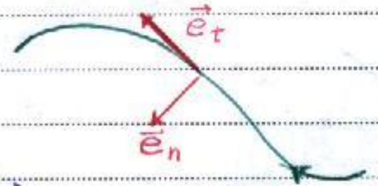
جواب: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $u = \infty$; $u_{min} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$; $u_{min} = \sqrt{gL}$

PAPNO

$0 = -g\frac{L}{2u\cos\theta} + u\sin\theta$ $\qquad \cancel{2}u^2 = \frac{gL}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{gL}{\sin ۲\theta}$ $\qquad u = \sqrt{\frac{gL}{\sin ۲\theta}}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

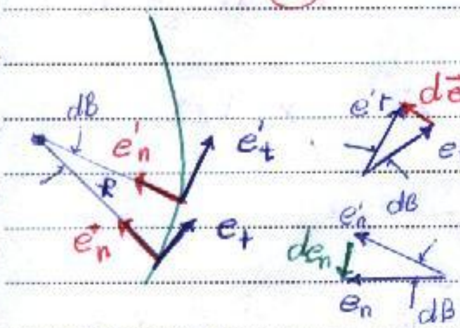
حرکت منحنی الخط ذره در صفحه در دستگاه مختصات مماس و عمود بر مسیر حرکت (n-t)



- بردار یکه v_t همواره مماس بر مسیر حرکت و در امتداد حرکت و بردار یکه v_n همواره عمود بر مسیر حرکت و به سمت مرکز انحنا است

$\vec{v} = v e_t \qquad |\vec{e_t}| = |\vec{e_n}| = 1$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} e_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt} \qquad \left(\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\right)$$



$de_t = |\vec{e}_t|\, d\beta\, \vec{e}_n \qquad \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\beta}{dt} \vec{e}_n = \dot{\beta} e_n$

$de_n = -\dot{\beta} e_t$

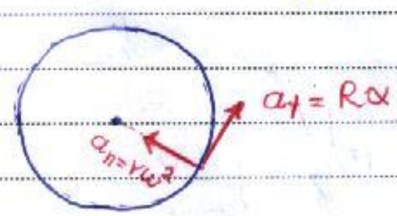
$\vec{v} = v\vec{e}_t \qquad \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\beta}\vec{e}_n$

$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$

$a_t = \dot{v}$, $R\ddot{\beta} = \ddot{s}$ ناشی از تغییر اندازه بردار سرعت و $a_n = v\dot{\beta}$, $R\dot{\beta}^2$ ناشی از تغییر جهت بردار سرعت

$ds = R\, d\beta \qquad \dot{v} = \frac{ds}{dt} = R\dot{\beta}$

حرکت روی دایره با شعاع ثابت:

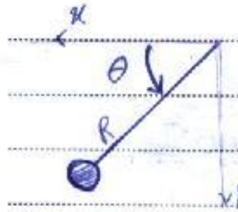


$a_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$

(ω : سرعت زاویه‌ای)

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال ۱ در $\theta=60$ مقادیر ذیل موجود است $\dot{\theta}=2\ \frac{Rad}{s}$ $\ddot{\theta}=2.045\ \frac{Rad}{s}$ $R=2\,m$
رابطه‌ای برای موقعیت جرم در زمان‌های مختلف بنویسید.

حل به روش محورهای دکارتی

پاسخ) $x=R\cos\theta \qquad y=R\sin\theta$

$$\vec{r}(t)=x\vec{i}+y\vec{j}=(R\cos\theta)\vec{i}+(R\sin\theta)\vec{j}$$

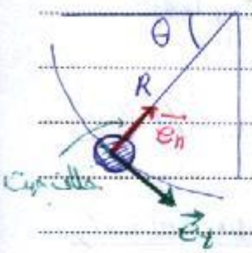
یادآوری) $$\frac{d}{dt}\cos\theta=\overbrace{\frac{d}{d\theta}\cos\theta}^{(-\sin\theta)\dot{\theta}}\times\frac{d\theta}{dt}$$

مشتق $r(t)$: $$v(t)=\dot{r}(t)=R(-\dot{\theta}\sin\theta)\vec{i}+R(\dot{\theta}\cos\theta)\vec{j}$$

$$a(t)=\ddot{r}(t)=R[(-\ddot{\theta}\sin\theta)-\dot{\theta}^2\cos\theta]\vec{i}+R[(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta)]\vec{j}$$

$$if=\theta=60\Rightarrow\begin{cases}a_x=-4.09\,\frac{\sqrt{3}}{2}-4\\ a_y=\frac{4.09}{2}-\frac{4\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

حل به روش محورهای مماسی و عمودی

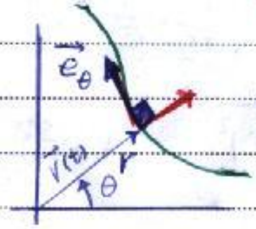


$$\vec{r}(t)=-R\vec{e}_n=-R(-\dot{\theta}\vec{e}_t)=R\theta\vec{e}_t$$

$$v(t)=-R(-\dot{\theta}\vec{e}_t)=R\dot{\theta}\vec{e}_t$$

$$a(t)=R\ddot{\theta}\vec{e}_t+R\dot{\theta}^2\vec{e}_n$$

• بررسی حرکت صفحه‌ای المان (ذره) در صفحه در محورهای مختصات قطبی ($r-\theta$)



دو بردار یکه e_θ و $\vec{e}_r$ را داریم که $\vec{e}_r$ در امتداد R و $\vec{e}_\theta$ در راستای افزایش زاویه θ و عمود بر e_r

لزوماً e_θ بر مسیر حرکت مماس نیست (مهم)

$|e_r|=|e_\theta|=1$

$\vec{r}(t)=r\vec{e}_r$ مشتق $\dot{r}(t)=\dot{r}\vec{e}_r+r\,e_r(\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$

PAPNO

نکته $=\begin{cases}\dot{e}_r=\dot{\theta}e_\theta\\ \dot{e}_\theta=-\dot{\theta}e_r\end{cases}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r$$

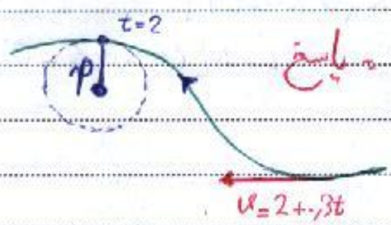
$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}e_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

$$= (\ddot{r} + r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \quad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases} \quad a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

مسئله) ذره P در حرکت منحنی الخط در صفحه با سرعت $v = 2+0.3t$ در حرکت است در $t=2$ شتاب کل ذره $2.4\ m/s^2$ است مطلوب است شعاع انحنای مسیر حرکت در $t=2$



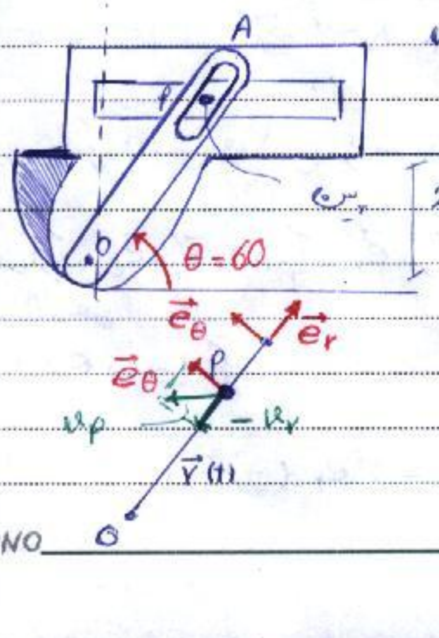
پاسخ: $\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$

$a_t = \dot{v} = \rho\ddot{\beta}$ شتاب کل $= \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$

$a_n = \rho\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{\rho}$ $\dot{v} = 0.3$

شتاب کل $= 2.4\ \frac{m}{s^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + (\dot{v})^2} \Rightarrow 2.4 = \sqrt{\left(\frac{2.6}{\rho}\right)^2 + (0.3)^2}$

مثال 2/137)



$\omega_{OA} = \dot{\theta} = 2\frac{Rad}{s}$

در $\theta = 60$ مقادیر v_p و a_p را بیابید؟

پاسخ) $\vec{v} = \underbrace{\dot{r}}_{v_r}\vec{e}_r + \underbrace{r\dot{\theta}}_{v_\theta}\vec{e}_\theta$

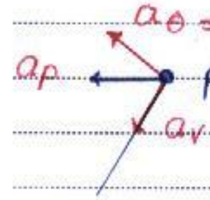
$v_p = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$ $r = \frac{200}{\sin\theta}$

حرکت مقید $\begin{cases} v_p\cos\theta = \dot{r} \\ v_p\sin\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$

$v_p = \frac{r\dot{\theta}}{\sin\theta} = \frac{\frac{200}{\sin\theta}\times 2}{\sin\theta} \Rightarrow \theta = 60 = \frac{1600}{\sqrt{3}}\ m/s$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

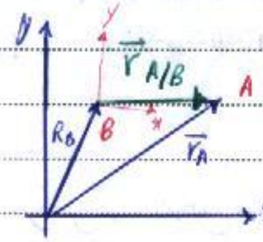
$a_r = -(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

حرکت منحنی
$$\begin{cases} a_p\cos\theta = -\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 \\ a_p\sin\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

$2\left(\frac{-800}{3}\right)\times 2 = \frac{3200}{3} \Rightarrow a_p = \frac{-6400}{3\sqrt{3}}$

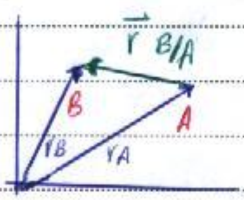
از رابطه قبلی $\dot{r} = -\frac{1600}{\sqrt{3}}\cos 60 = -\frac{800}{\sqrt{3}}$

• حرکت نسبی ذره در صفحه)



$r_A = r_B + r_{A/B}$ → موقعیت ذره A نسبت به B

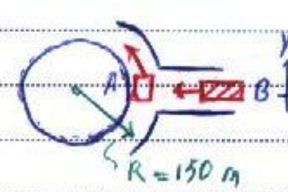
$$\begin{cases} \vec{a}_A = \vec{a}_B + a_{A/B} \\ \vec{v}_A = \vec{v}_B + v_{A/B} \end{cases}$$



$$\begin{cases} r_B = r_A + r_{B/A} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + a_{B/A} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_A + v_{B/A} \end{cases}$$

➜ $\vec{r}_{B/A} = -\vec{r}_{A/B}$ $\quad \vec{v}_{B/A} = -\vec{v}_{A/B}$ $\quad \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{A/B}$

مثال 2/183)



$v_B = 81 \frac{km}{h}$ ثابت، $a_B = -3 \frac{m}{s^2}$

$v_A = 54 \frac{km}{h}$ ثابت،

سرعت و شتاب خودرو B نسبت به راننده A

$v_{B/A} = ?$ $\quad a_{B/A} = ?$

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$ $\quad \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

$\vec{v}_{B/A} = -\left(81 \times \frac{5}{18}\right)\vec{i} - 54 \times \frac{5}{18}\,\vec{j}$ $\quad v_{B/A} = \sqrt{\left(81 \times \frac{5}{18}\right)^2 + \left(54 \times \frac{5}{18}\right)^2}$

$= 97 \times \frac{5}{18} \ m/s$

PAPNO

Subject:
Year: Month: Date:

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \qquad a_{B/A} = a_B - a_A \qquad \frac{v^2}{R}$

$= -(-3\,\vec{i}) - \left(\frac{(54 + \frac{5}{18})^2}{150}\right)\vec{i}$

$a_{B/A} = \sqrt{}$

مسائل $97 - 83 - 75 - 72 - 71 - 62 - 51 - 39 - 22 - 20 - 19$

$200 - 155 - 147 - 142 - 139 - 138 - 124 - 117 - 110$

مثال) در تعیین حرکت راکتی به وسیله رادار در لحظه مورد نظر نتایج زیر ثبت شده است

شعاع انحنای مسیر حرکت در لحظه ثبت نتایج

$r = 10.5$ km

$\dot{r} = 480$ m/s

$\dot{\theta} = 0$

$\ddot{\theta} = 0.00720$

$\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r$

$\vec{r}^{\circ} = v = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$ اندازه $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

$\vec{v} = v\vec{e}_t$

$\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\beta}\,\vec{e}_n \rightarrow \frac{v^2}{\rho}$

$\rho\, d\beta = ds$

$\rho\dot{\beta} = v$

$\dot{\beta} = \frac{v}{\rho}$ شعاع انحنای مسیر

$v \rightarrow \frac{dv}{dt} = a_t \qquad v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$ اندازه v

$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2\dot{r}\ddot{r} + 2(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})(r\dot{\theta})}{2\sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}}$ در لحظه ثبت نتایج $a_t = \frac{2\dot{r}\ddot{r}}{2\dot{r}} = \ddot{r}$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}$$

$a_t = \ddot r$, $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, $a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = \ddot r$, $a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = r\ddot\theta$

$$a=\sqrt{(\ddot r)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}=\sqrt{(\ddot r)^2+(r\ddot\theta)^2}$$

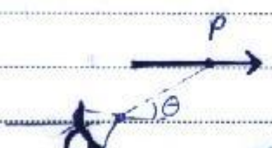
$$\frac{v^2}{\rho}=r\ddot\theta \qquad \frac{\dot r^2}{\rho}=r\ddot\theta \Rightarrow \rho=\frac{\dot r^2}{r\ddot\theta}=\frac{(480)^2}{(10.5\times10^3)(0.0012)}$$

$\rho = 3047\ m$

۱۳۳) تمرین (۱ $\qquad \theta=60 \rightarrow \dot\theta=-0.02$

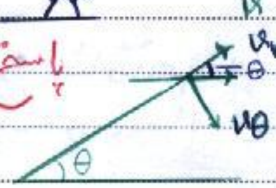
مطلوب است در لحظه مورد نظر سرعت افقی هواپیما و $\ddot r$

v_p = سرعت افقی هواپیما $\qquad \ddot r = ?$



$$v=\dot r\vec e_r+r\dot\theta\vec e_\theta$$

پاسخ (۱



$$v_r\sin\theta=v_\theta\cos\theta$$
$$\dot r\sin\theta=r\dot\theta\cos\theta$$
$$\dot r\sin 60=\frac{10+10}{\sin 60}(0.02)\cos 60$$

$$v_p=\sqrt{(\dot r)^2+(r\dot\theta)^2}$$

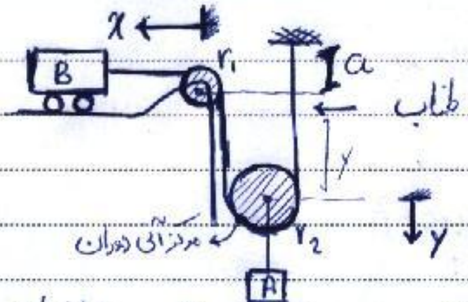
ب) $\vec a=a_r\vec e_r+a_\theta e_\theta=0 \Rightarrow a_r=0=\ddot r-r\dot\theta^2 \Rightarrow \ddot r=r\dot\theta^2$

$a_\theta=0=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta$

$$=\frac{(10+10)^3}{\sin 60}(-0.02)^2$$

PAPNO

* حرکت مقید ذرات متصل به هم :



طول طناب همیشه ثابت است $L = x + \frac{\pi r_1}{2} + y + \pi r_2 + y + a$ طول طناب

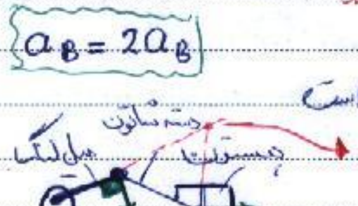
پس مشتق طول همواره صفر است

$\frac{dL}{dt} = 0 \rightarrow \dot{x} + \dot{y} + \dot{y} = 0 \qquad \dot{x} = -2\dot{y} \Rightarrow \boxed{v_B = 2v_A}$

اگر x با گذشت زمان زیاد شود y با گذشت زمان کم می‌شود

$\boxed{a_B = 2a_B}$

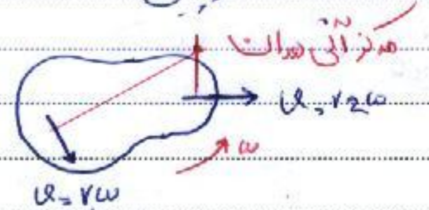
* سرعت نسبی طناب نسبت به قرقره به صورت لحظه‌ای صفر است



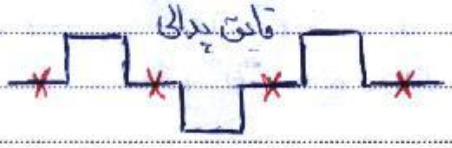
مرکز آنی دوران دسته شاتون

* دسته شاتون هم دوران دارد هم انتقال

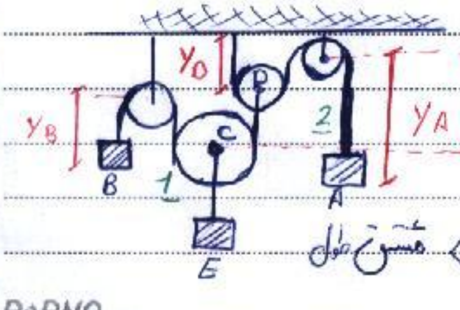
* پیستون فقط انتقال دارد



تحلیل فیزیکی مرکز دوران آن است که سرعت در یک لحظه صفر است



مثال) 1 طول طناب $\Rightarrow L_1 = y_B + y_C + (y_C - y_D)$ + مقدار ثابت



2 طول طناب $L_2 = y_D + y_D + y_A +$ مقدار ثابت

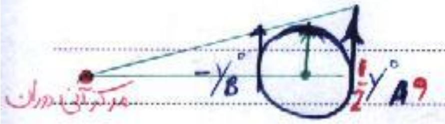
مشتق طول

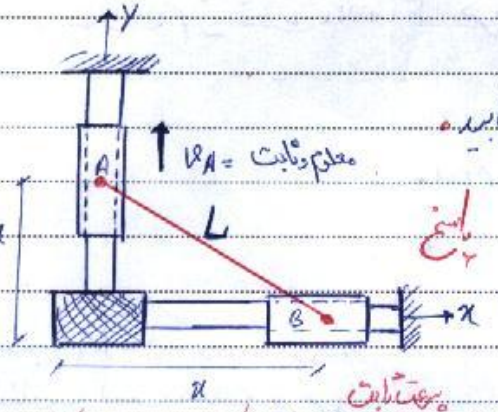
$\dot{y}_B + 2\dot{y}_C - \dot{y}_D = 0 \quad \times 2$

$2\dot{y}_D + \dot{y}_A = 0$

$2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C + \dot{y}_A = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )





مثال)

v_A ثابت و معلوم، رابطه‌ای برای شتاب و سرعت نقطه B بیابید.

پاسخ:

$$x^2 + y^2 = L^2$$

مشتق $\Rightarrow 2\dot{x}x + 2\dot{y}y = 0 \qquad \dot{y} = v_A$

$$\dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y} = -\frac{y}{x}v_A = v_B$$

مشتق ثابت

$$\cancel{2}\ddot{x}x + \cancel{2}\dot{x}^2 + \cancel{2\ddot{y}y} + \cancel{2}\dot{y}^2 = 0$$

$$\ddot{x}x = -\dot{x}^2 - \dot{y}^2$$

$-\frac{y}{x}v_A \longrightarrow v_B$

$$\ddot{x} = a_B = \frac{1}{x}\left[-\left(\frac{y}{x}v_A\right)^2 - v_A^2\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل سوم 1

سینتیک حرکت ذره

بررسی قانون دوم نیوتون $F=ma$ در محورهای مختلف مختصاتی

محورهای مختصات دکارتی $\Rightarrow \Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y$

$r-\theta$ محورهای مختصات $\Rightarrow \Sigma F_r = ma_r \quad \Sigma F_\theta = ma_\theta$

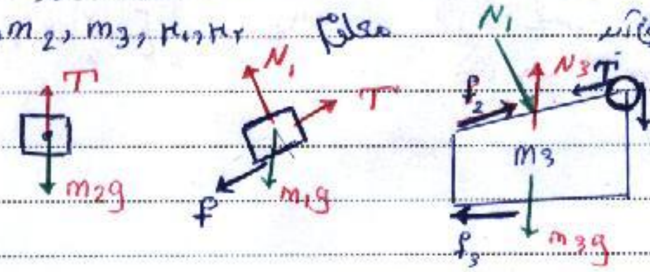
$n-t$ محورهای مختصات $\Rightarrow \Sigma F_n = ma_n \quad \Sigma F_t = ma_t$

مثال: سیستم از حال سکون رها می‌شود
مطلوب است شتاب هر جرم

$\alpha, m_1, m_2, m_3, \mu_1, \mu_2$ معلوم

فرض m_2 به سمت پایین حرکت کند

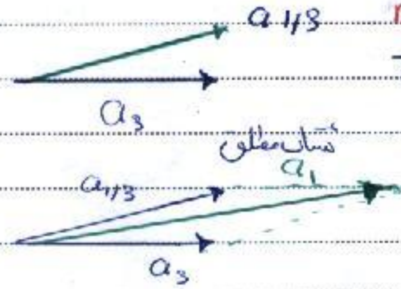
ترسیم دیاگرام آزاد نیرو



شتاب جرم m_1 نسبت به m_3

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_3 + \vec{a}_{1/3}$$

شتاب نسبی



قانون دوم نیوتن فقط و فقط برای شتاب‌های مطلق صادق است

جرم $m_2 \rightarrow m_2 g - T = m_2 a_2$

جرم m_1 در راستای سطح $\rightarrow T - m_1 g \sin\alpha - f = m_1 (a_{1/3} + a_3 \cos\alpha)$

$a_{2/3} = a_2 \quad a_{1/3} = a_{2/3} = a_2$

جرم m_1 در راستای عمود بر سطح $\Rightarrow N_1 - m_1 g \cos\alpha = (0 - a_3 \sin\alpha)$

شتاب مطلق جرم m_1 عمود بر سطح شیب دار

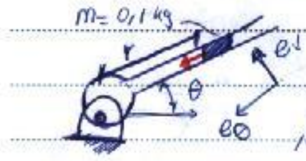
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f = \mu_1 N_1$

جرم m_3 در راستای افقی $\Rightarrow -f_3 + f\cos\alpha + N_1 \sin\alpha - T\cos\alpha = m_3 a_3$

جرم m_3 در راستای قائم $\Rightarrow N_3 - N_1 \cos\alpha + f\sin\alpha - T - T\sin\alpha - m_3 g = 0$

$f_3 = \mu_2 m_3$



مسأله)

$\dot{r} = -1.2$ $\qquad \dot{\theta} = 3 \ \frac{Rad}{s}$

سرعت ذره نسبت به لوله $1.2 \ m/s$ در $\theta = 30°$ نیروی عکس العمل وارده از دیواره لوله به ذره را حساب کنید.

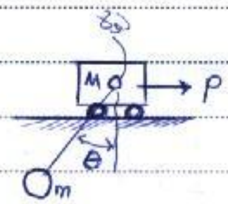
پاسخ

$\Sigma F_r = ma_r \rightarrow -mg\sin\theta = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$\Sigma F_\theta = ma_\theta \rightarrow N - mg\cos\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

$N = m(g\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta})$ $\qquad N = 0.1(9.81\cos 30 + 2(-1.2)(3))$

$N = 0.129 \ N$



زاویه‌ای که پاندول با محور قائم می‌سازد چقدر است؟

$\Sigma F_x \Rightarrow = ma_x$ $\qquad \Sigma F_y = ma_y$

$P = (m + M)a$ $\qquad N = mg + Mg$

$\Sigma F_x = ma_x \quad T\sin\theta = ma$

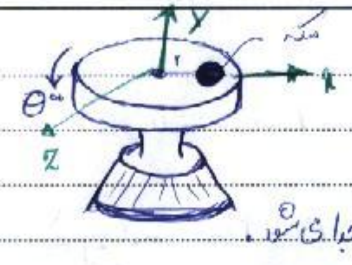
$\Sigma F_y = ma_y \quad T\cos\theta = mg$

$\left\{ \tan\theta = \frac{a}{g} = \frac{\frac{P}{m+M}}{g} \right.$

PAPNO

Subject:

Year. Month. Date. ( )



مثال) ضریب μ_s اصطکاک استاتیکی بین سکه و سطح

سیستم با شتاب زاویه ای ثابت $\ddot{\theta}$ شروع به چرخش می‌کند

سیستم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند پس از چند دور سکه از روی سطح جدا می‌شود.

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = \mu_s N = \mu_s mg$$

$$F_t = m a_t = m(\rho \ddot{\beta})$$

$$F_n = m a_n = m(\rho \dot{\beta})^2 = m\frac{v^2}{\rho}$$

F نیروی اصطکاک

$$F_r = m a_r = m(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)$$

$$F_\theta = m a_\theta = m(\cancel{\dot{r}\dot{\theta}} + r\ddot{\theta})$$

$\ddot{r}$ و $\dot{r}$ صفر است چون شعاع تغییر نمی‌کند

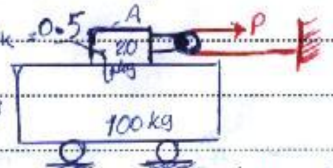
$$\alpha = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} = \text{ثابت}$$

انتگرال $\dot{\theta} = \alpha t + C_1 \xrightarrow[\dot{\theta}=0]{t=0} C_1 = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \alpha t$

$$f = \sqrt{(mr\ddot{\theta})^2 + (mr(\ddot{\theta}t)^2)^2} = \mu_s mg$$

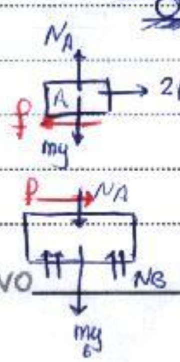
$\dot{\theta} = \alpha t$ انتگرال $\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + C_2 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ \theta=0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad t^2 = \frac{2\theta}{\ddot{\theta}}$

$$f = \sqrt{(mr\ddot{\theta})^2 + \left(mr\ddot{\theta}\,\frac{2\theta}{\ddot{\theta}}\right)^2}$$



۳/۱۸) مطلوب است شتاب a_A و a_B در دو حالت

$P = 60$, $P = 90$



پاسخ ۱) $f_{s\,max} = \mu_s N_A = \mu_s m_A g = (0.5)(20)(9.81) = 98.1$ N

$$2P - f = m_A a_A$$

$$f = m_B a_B$$

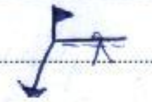
در حالت اول $P = 40$, $2P = 80$ $\quad 80 < 98.1$ f_{max}

دو جسم با هم حرکت می‌کنند

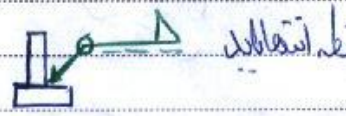
PAPNO

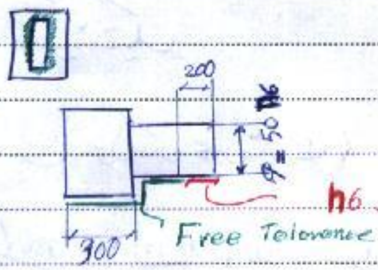
Subject:
Year. Month. Date. ( )

جوش پرچمی ▶ یعنی جوشکاری در محل استقرار قطعه (سایت) انجام گیرد.



جوش حلقوی) یعنی از یک نقطه جوشکاری شروع و به همان نقطه انتها یابد



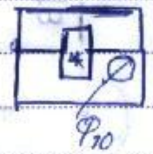


نقشه‌های مونتاژی جوش کاری) در مورد نقشه های جوش استاندارد نقشه ساخت، مونتاژ را روی یک کاغذ می‌کشند

چون در این مرحله دارای مراحل مونتاژ و ساخت هستیم (به علت وجود اعوجاج و ...) نقشه ~~[illegible]~~ جوش و ساخت را در ~~[illegible]~~ یک کاغذ می‌کشیم

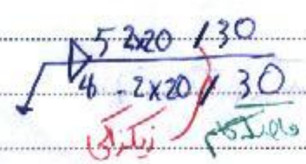
اگر تعداد قطعاتی که مونتاژ - جوشکاری می‌شوند زیاد باشد
اگر تعدادی از قطعات به وسیله جوشکاری و تعدادی دیگر به روش‌های دیگر مونتاژ شوند

در هر یک از دو حالت فوق نقشه مونتاژی و نقشه ساخت جدا ترسیم می‌شوند مانند جلسات گذشته منتها در نقشه‌های ساخت قسمت‌هایی که پس از جوشکاری انجام می‌شوند را مشخص می‌کنیم



سوراخ φ_{10} پس از جوشکاری انجام شود

صفحه ۶۸ و ۶۹

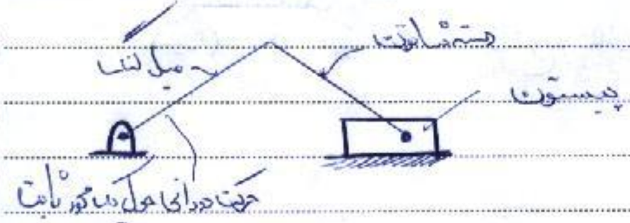


PAPNO

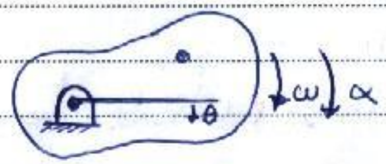
Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل نهم
سینماتیک ذره و جسم صلب

ذره: سینماتیک / سینتیک



حرکت دورانی حول یک محور ثابت)



سرعت زاویه‌ای $\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$ $\frac{rad}{sec}$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t=0}^{t} \omega dt \qquad \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega dt$$

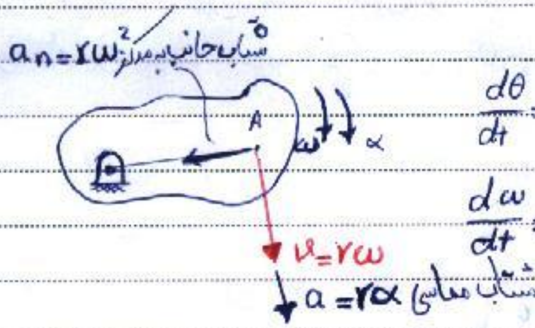
$$S(t) = S_0 + \int_0^t v dt$$

شتاب زاویه‌ای $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $\frac{rad}{s^2}$ $\qquad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t=0}^{t} \alpha dt$

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt$$

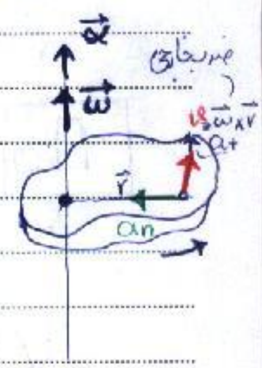
$$v(t) = v_0 + \int_0^t \alpha dt$$

$\vec{\alpha}$ و $\vec{\omega}$ بردارهای آزاد هستند



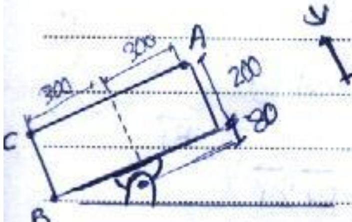
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow d\theta = \omega dt$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \rightarrow d\omega = \alpha dt$$



$$v = \vec{r} \times \vec{\omega} \qquad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$a_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$



y, x

اگر ضلع BC دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $6\ \frac{Rd}{s}$ در جهت عقربه‌های ساعت باشد مطلوب است

$v_A = ?$

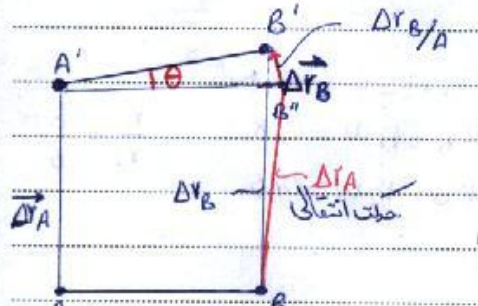
$a_A = ?$

$\omega = -6k$

$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r} = (-6k)(0.280\,j + 0.300\,i)$

$v_A = -(-6)(0.280)\,\vec{i} + (-6)(0.30)\,\vec{j} = 1.68\,i - 1.8\,j$

$a_A = a_t + a_n = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = (-6\vec{k})(1.68\,i - 1.8\,j)$
$= -10.08\,j - 10.8\,i$



حرکت کلی جسم صلب در صفحه)
ترکیبی است از یک حرکت انتقالی $AB \rightarrow A'B''$
بعلاوه یک حرکت دورانی حول یک محور ثابت
A' به اندازه زاویه θ و سرعت و شتاب زاویه ω و α

$\Delta r_{B/A}$ حرکت دورانی حول یک محور ثابت (A)

چون B را نسبت به A می‌سنجیم یعنی A ساکن است $AB \rightarrow$

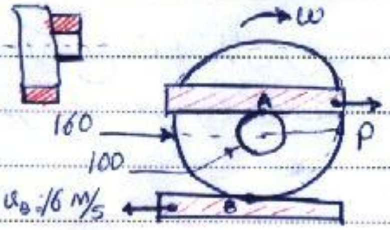
$\Delta \vec{r}_B = \Delta \vec{r}_A + \Delta \vec{r}_{B/A}$

$v_B = v_A + v_{B/A} = v_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$a_B = a_A + a_{B/A} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

روابط سینماتیک بین دو نقطه دلخواه از جسم صلب)

مثال ۱) با فرض لغزش مطلوب است سرعت نقطه P



$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{v}_{P/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BP}$$

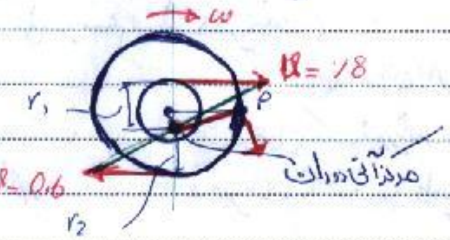
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = v_B + \omega \times \vec{r}_{BA}$$

$$0.8\,i = (-0.6\,\vec{i}) + (-\omega \vec{k}) \times (0.260\,\vec{j}) \qquad \omega = \frac{1.4}{0.26}$$

عقربه‌های ساعت مثبت

$$v_P = -0.6\,i + \left(\frac{1.4}{0.26}\right) \times (0.160\,\vec{j} + 0.160\,\vec{i})$$

$$\vec{v}_P = 0.2\,\vec{i} - 0.8\,\vec{j}$$

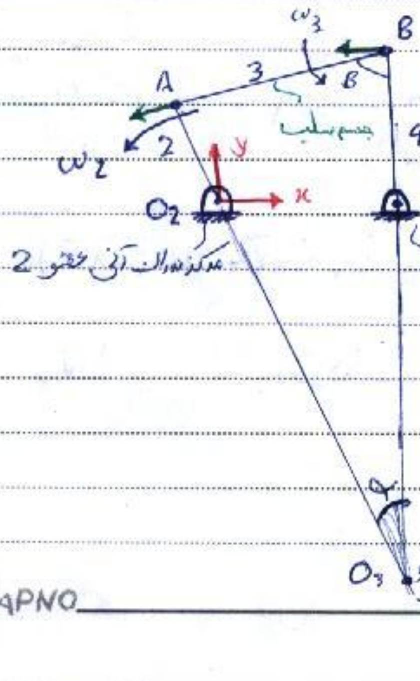


$$r_1 + r_2 = 260 \times 10^{-3}$$

$$v_A = r_1 \omega = 0.8 \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{8}{6}$$

$$v_B = r_2 \omega = 0.6$$

مکانیزم چهارمیله‌ای



$x_A = -60$

$y_A = 80$ $\qquad O_4B = 180$

$\omega_2 = 10\ \frac{rad}{s}$ $\qquad AB = 260$

$O_2O_4 = 180$

ω_3 , ω_4 مطلوب است

$$\omega_3 = \frac{v_A = 1}{O_3A} \qquad v_B = \omega_3 \times O_3B$$

$$\omega_4 = \frac{v_B}{O_4B}$$

Subject:
Year. Month. Date.

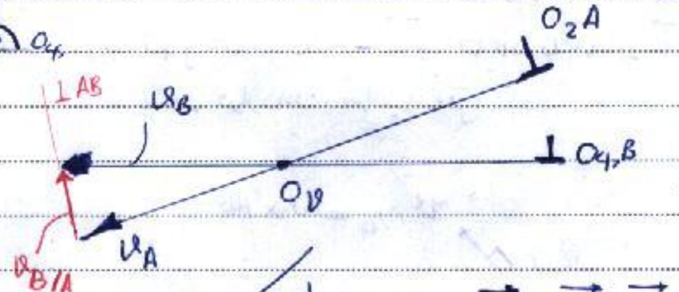
$\tan\alpha = \frac{y_B}{x_A} = \frac{6}{8} \rightarrow \alpha = 58^\circ$

$AB = 260$ $\frac{O_3B}{\sin 90} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{O_3A}{\sin\beta} \rightarrow O_3A\ ✓ \quad O_3B = ✓$

$O_2O_4 = 180$

$\beta = \mathrm{Arccos}\ \frac{180-160}{260} =$ ✓

روش 2) احل به روش ترسیم چندضلعی های سرعت



B, A دو نقطه از یک جسم صلب ← $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

روش 3) حل مسأله از روش تحلیل)

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = v_A + \omega_3 \times \vec{r}$ $\vec{AB}$

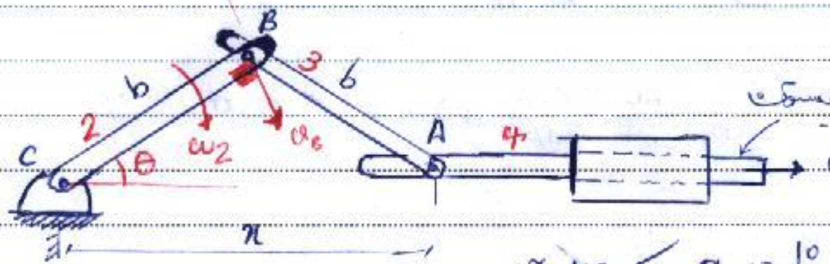
$v_B(-\vec{i}) = v_A\cos\alpha(-\vec{i}) + v_A\sin\alpha(-\vec{j}) + \omega_3\vec{k} \times (\cos\beta\,\vec{j} + \sin\beta\,\vec{i}) \cdot 260$

$\omega_3 =$ ✓ ضرایب i و j را از دو طرف متساوی دهید

$v_B =$ ✓

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال)



پیستون A با شتاب ثابت a در حرکت است

سیستم از حال سکون x=0 ...

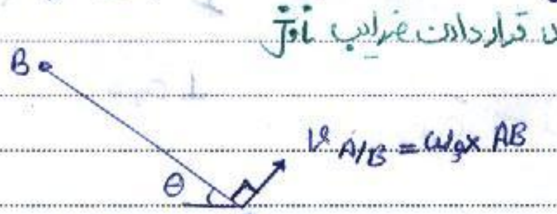
مطلوب است ω_{AB}

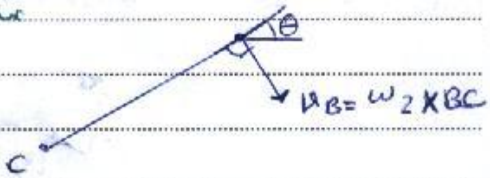
A و B متعلق به جسم صلب AB

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

$v_A\vec{i} = (v_B\sin\theta)\vec{i} - v_B\cos\theta\,\vec{j} + b\omega_3\cos\theta\,\vec{j} + b\omega_3\sin\theta\,\vec{i}$

متحد قرار دادن ضرایب $\vec{i}$ و $\vec{j}$





$$\begin{cases} v_A = b(\omega_3 + \omega_2)\sin\theta \rightsquigarrow v_A = 2b\omega\sin\theta \\ 0 = b(\omega_3 - \omega_2)\cos\theta \rightsquigarrow \omega = \omega_3 = \omega_2 \end{cases}$$

$v^2 - v_0^2 = 2ax$

$(2b\omega\sin\theta)^2 = 2ax \qquad \omega = \frac{\sqrt{2ax}}{2b\sin\theta}$

$|AD| = x\tan\theta$

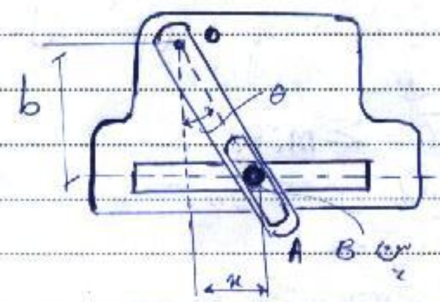
$v_A = AD\,\omega_3 = x\omega_3\tan\theta$

$x = 2b\cos\theta$

$v_A = 2b\omega_3\sin\theta \qquad \omega_3 = \omega_2 = \omega$

PAPNO

مثال ۱)



بازوی OA با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = \dot{\theta}$ حول O می‌چرخد
رابطه‌ای بین سرعت و شتاب پین B بدست آورید)

$$x = b\tan\theta$$

$$v_B = \dot{x} = b\dot{\theta}(1+\tan^2\theta) = b\omega(1+\tan^2\theta)$$

$$a_B = \ddot{x} = b\cancel{\ddot{\theta}}(1+\tan^2\theta) + b\dot{\theta}\,2\dot{\theta}\tan\theta(1+\tan^2\theta)$$

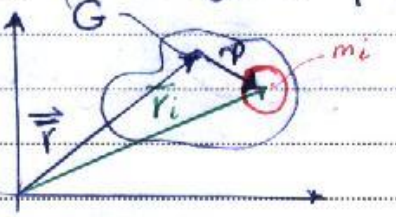
سرعت زاویه‌ای ثابت

$$a_B = 2b\omega^2(1+\tan^2\theta)\tan\theta$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل ششم) سینتیک حرکت جسم صلب در صفحه

مرکز گرانیگاه



از اعمال نیرو صحبت می‌شود

$m\times\bar r = \sum m_i r_i$

اگر مبدأ مختصات روی مرکز ثقل قرار گیرد

$\bar r = \bar x = \bar y = 0$

$m\times\bar x = \sum m_i x_i$ $\qquad \sum m_i r_i = \sum m_i y_i = \sum m_i x_i = 0$

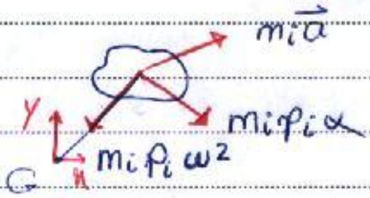
$m\times\bar y = \sum m_i y_i$

نیروهای خارجی $\qquad$ برآیند نیروهای خارجی

$a_A = \bar a + (a_{A/G})$

$(a_{A/G})_t + (a_{A/G})_n$

$(a_{A/G})_n = \rho_i\,\omega^2 \qquad (a_{A/G})_t = \rho_i\,\alpha$



نیروهای اعمالی به ذره i ام

ممان نیروهای اعمالی به ذره i ام)

$\bar M_i = (m_i\rho_i\alpha)\rho_i + (m_i\bar a\cos\beta)y_i - (m_i\bar a\sin\beta)x_i$

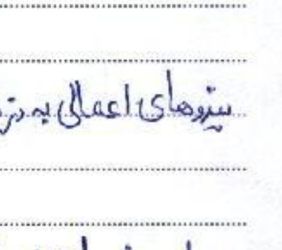
ممان کلیه نیروهای اعمالی به جسم صلب $\sum M_G = \sum\bar M$

$= \sum m_i\rho_i^2\alpha + \sum m_i y_i(\bar a\cos\beta) - \sum m_i x_i(\bar a\sin\beta)$

چون مبدأ مختصات روی مرکز ثقل در نظر گرفته شده است

$\sum M_G = (\sum m_i\rho_i^2)\,\alpha = \bar I\alpha$

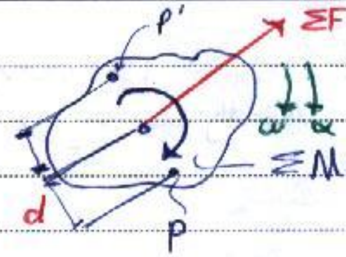
ممان اینرسی جرمی



یادآوری $= I_o = \int r^2\,dm$

PAPNO

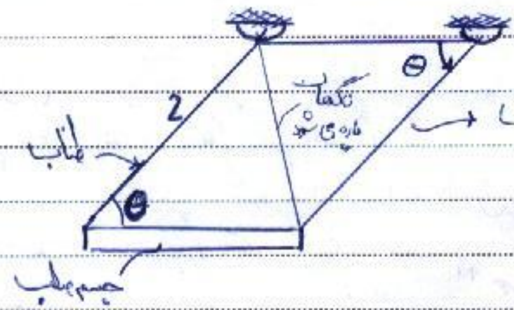
$\bar I\alpha = \sum\bar M = \sum M_G$



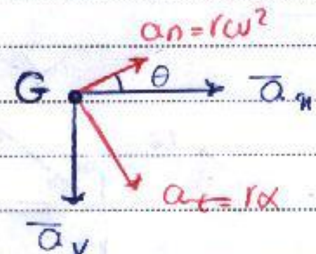
$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$

$\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + \underbrace{(m\bar{a})}_{\Sigma F} d$

$$\begin{cases} \Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \\ \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \\ \Sigma F = m\bar{a} \end{cases}$$

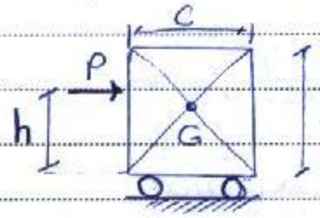


(ω و α جسم معلق صفر است)



$\sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

مثال)



مطلوب است P_{max} به نحوی که صندوق نچرخد:

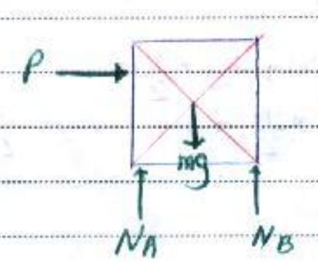
الف) $h=b$ باشد ب) $h=0$ باشد

$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \rightarrow P = m\bar{a}$

$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \rightarrow N_A + N_B = mg$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = \bar{I}\alpha = \bar{I}(0) = 0$

نچرخد



$* \; N_A \times \frac{c}{2} + P\left(h - \frac{b}{2}\right) - N_B \times \frac{c}{2} = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای حالت 1 وقتی $P=P_{max}$ که در آن N_A به دلیل جدا شدن از زمین صفر می‌گردد
در این صورت $N_B=Mg$ و در نتیجه نزول *

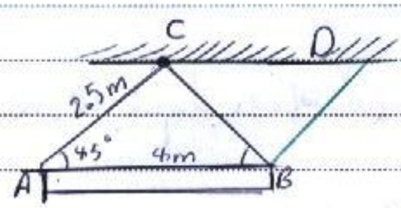
$$P_{max} = \frac{c}{b} mg$$

برای حالت 2 وقتی $P=P_{max}$ که در آن N_B برابر صفر باشد

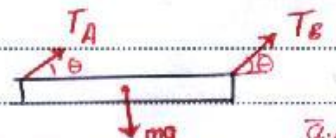
$$P_{max} = \frac{c}{b} mg$$

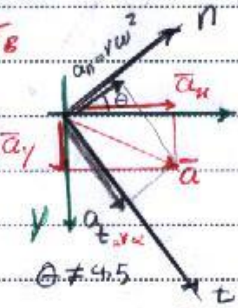
در هر دو حالت

$$\bar{a} = \frac{c}{b} g$$



مثال)
جرم میله AB، 100 کیلوگرم است
اگر طناب CB پاره شود مطلوب است کشش در طناب BD
بلافاصله بعد از پاره شدن طناب CB



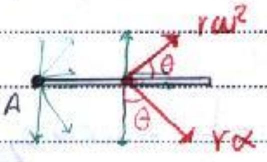


جسم میله حرکت انتقالی دارد
$\vec{a}_A = \vec{a}_G = \vec{a}_B$
$\vec{V}_A = \vec{V}_G = V_B$

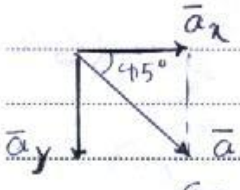
ω، α جسم AB صفر می‌باشد
α، ω طناب‌ها مخالف صفر است

$$\Sigma \vec{F} = m\bar{a}$$
$$\Sigma \bar{M}_G = \bar{I}\alpha$$
$$\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$

$$\Sigma M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$
جسم میله
$$-T_B \sin\theta * 4 + mg * \frac{4}{2} = -mr\omega^2 \sin\theta * \frac{4}{2} + mr\alpha \cos\theta \frac{4}{2}$$



PAPNO



$\left.\begin{matrix}\theta = 45 \\ \omega = 0 \quad \alpha \neq 0\end{matrix}\right\} \leftarrow$ BC در لحظه پاره شدن شتاب

if $\theta = 45$ حالت خاص $\boxed{\bar{a}_x = \bar{a}_y = r\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$-T_B \sin 45 * 4 + mg * \frac{4}{2} = m r \alpha \cos 45 * \frac{4}{2} \quad ☆$$

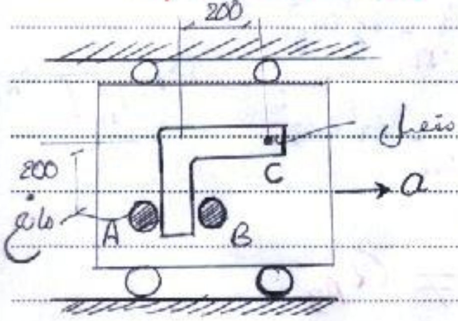
$$\sum F_y = m\bar{a}_y \quad T_A \sin\theta - T_B \sin\theta + mg = m\bar{a}_y \quad \left\{\begin{matrix} -T_A\frac{\sqrt{2}}{2} - T_B\frac{\sqrt{2}}{2} + mg = m\bar{a}_y \\ T_A\frac{\sqrt{2}}{2} + T_B\frac{\sqrt{2}}{2} = m\bar{a}_x \end{matrix}\right.$$

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \quad T_A \cos\theta + T_B \cos\theta = m\bar{a}_x$$

$$\bar{a}_x = \bar{a}_y \Rightarrow m(g - \bar{a}_y) = m\bar{a}_x \quad \bar{a}_x = \bar{a}_y = \frac{g}{2} = r\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}_{a_x, a_y}$$

اگر بخواهیم α را در معادله $\sum F_x$ یا $\sum F_y$ بگذاریم به این خاطر که θ درگیر است و θ هم متغیر است کار مشکل می‌شود اما در معادله ☆ چون α نداریم راحت است

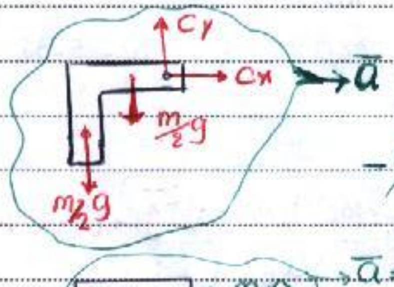
$\alpha = \checkmark$ در معادله ☆ قرار دهیم



مثال 1 $\frac{1}{6}$

شتاب a را چنان تعیین کنید که نبشی نه به مانع A بچسبد و نه به مانع B

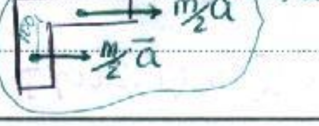
وزن نبشی 3kg



چون نمی‌چرخد

$$\circlearrowleft + \sum M_C = \bar{I}\cancel{\alpha} + m\bar{a}d$$

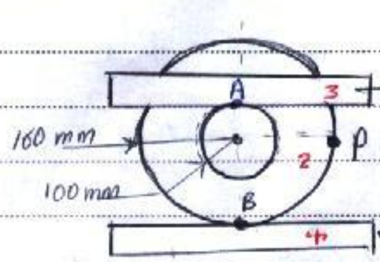
$$-\frac{m}{2}g * 200 \times 10^{-3} - \frac{m}{2}g * 100 \times 10^{-3} = -\frac{m}{2}a * 0.1$$



$\bar{a} = a \quad -0.3g = -0.1a$

$a = 3g$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

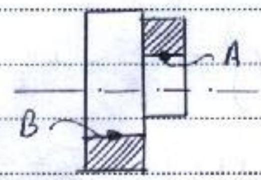


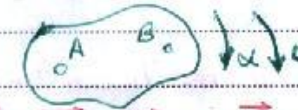
$\begin{cases} v = 0.8 \ m/s \\ a = 2 \ m/s^2 \end{cases}$

(کلاس

مطلوب است سرعت و شتاب نقطه P

$\begin{cases} v = 0.6 \\ a = 0 \end{cases}$

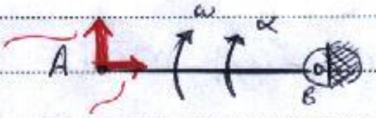




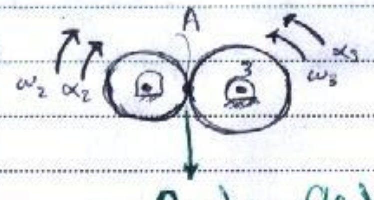
$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B})_t + \vec{a}_{A/B})_n$

$r\alpha = a_{A/B})_t$



$r\omega^2 = a_{A/B})_n$



$a_{A_2})_n = r_2 \omega_2^2$

But

$a_{A_3})_n = r_3 \omega_3^2 \Rightarrow a_{A_2})_n \neq a_{A_3})_n$

$a_{A_2})_t = a_{A_3})_t$

مولفه های مماسی یکی است

$\Rightarrow a_{A_2} \neq a_{A_3}$

$v_A = v_B + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$0.8\ \vec{i} = .6\ \vec{i} + (-\omega \vec{k}) \times (\overbrace{0.260}^{AB} \times \vec{j}) \qquad \omega = 5.38 \ \frac{rad}{s}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r}$

$\underbrace{2\vec{i}}_{\vec{a}_{A_2})_t} - \underbrace{(0.1)(5.38)^2 \vec{j}}_{a_{A_2})_n} = \underbrace{0}_{a_{B_2})_t} + \underbrace{(0.160)(5.38)^2 \vec{j}}_{a_{B_2})_n} + (-5.38\vec{k}) \times$

$[(-5.38\ \vec{k})(0.260\ \vec{j})] + (-\alpha \vec{k}) \times (0.260)\vec{j}$

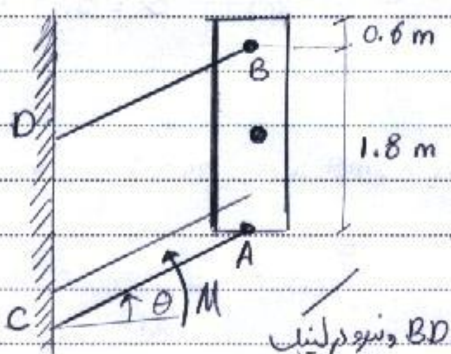
PAPNO

$$\alpha = 7{,}692 \ \frac{rad}{s^2}$$

$$\underline{\vec{a}_P} = \vec{a}_B + \vec{a}_{P/B} = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\vec{\alpha} \times \vec{r})$$

$$= 0(-\vec{i}) + (0{,}160)(5.38)^2 \vec{j} + (-5.38\vec{k})[(-5.38\vec{k}) \times (0{,}160\vec{j} + 0{,}16\vec{i})]$$

$$+ (-7{,}692\ \vec{k})(0{,}160\ \vec{j} + 0{,}160\ \vec{i}) = \boxed{-1{,}2\ \vec{j} - 3{,}4\ \vec{i}}$$



مثال ۱)

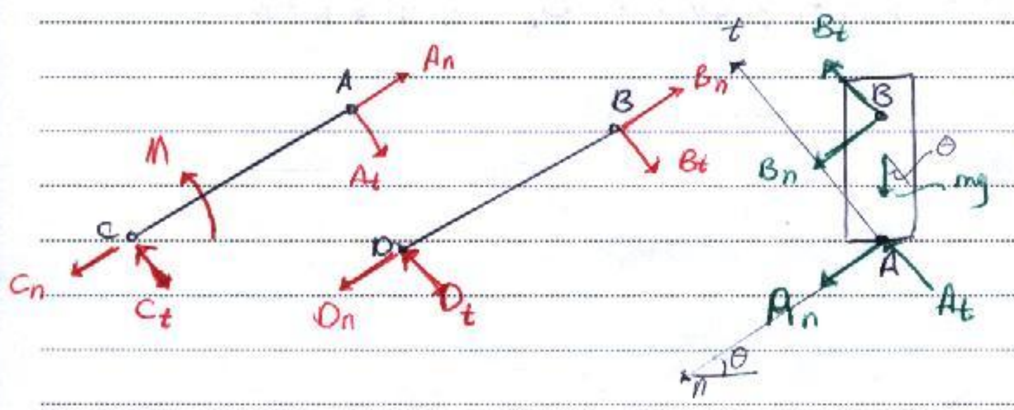
$m_{AB} = 150\ kg$

$M = 5\ kN\,m$

وزن لینک های AB و BD ناچیز است

سیستم از حال سکون، $\theta = 0$ شروع به حرکت می کند

مطلوب است شتاب زاویه ای لینک های AC و BD و نیرو در لینک BD وقتی $\theta = 30°$



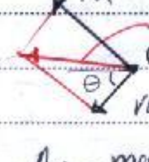
Subject:
Year. Month. Date. ( )

AC: $\Sigma M_C = \cancel{\bar{I}\alpha} + \cancel{m\bar{a}}d = 0 \quad A_t * 1.5 = 5 * 10^3 \rightsquigarrow A_t = 3333\ N$

BD: $\Sigma M_D = \cancel{\bar{I}\alpha} + \cancel{m\bar{a}}d = 0 \quad B_t * 1.5 = 0 \quad B_t = 0$ عضو BD دو نیروی است)

چون عملاً B_t و D_t صفر می‌شود

و D_n و B_n هم راستا هستند



$\vec{a}_A = \vec{a}_B = a_G$

AB متوازی

جرم AB: $\Rightarrow \Sigma F_t = ma_t$

$A_t - mg\cos\theta = ma_t = mr\alpha$

$3333 - (150) * 9.81\cos\theta = (150)(1.5)\alpha$

$\alpha = 14.81 - 6.56\cos\theta \qquad \theta = 30^\circ \quad \alpha = 9.15\ \frac{rad}{s^2}$

جرم AB $\stackrel{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_A = \bar{I}\cancel{\alpha} + m\bar{a}d \Rightarrow$

$-B_n\cos\theta * 1.8 = -mr\alpha\sin\theta * 1.2 - mr\omega^2\cos\theta * 1.2$

$\omega d\omega = \alpha d\theta \qquad \int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta (14.81 - 6.54\cos\theta)d\theta$

$\omega^2 = 29.6\,\theta - 13.08\sin\theta$

$\theta = 30^\circ \rightsquigarrow \omega^2 = 8.97 \rightsquigarrow B_n^\circ = 2.147 * 10^3\ N$

PAPNO