فهرست

فصل اول:
سینماتیك نقاط مادي ۳
فصل دوم:
سینتیك نقطه مادي ۱۴
فصل سوم:
سینتیك نقطه مادي ۲۰
فصل چهارم:
سیستم نقاط مادي ۳۹
فصل پنجم:
سینماتیك اجسام صلب ٤٨
فصل ششم:
حركت صفحه اي اجسام ٦٩
فصل هفتم:
حركت صفحه اي اجسام صلب ٧٦

فصل اول:
سینماتیک نقاط مادي

حرکت مستقیم الخط

سرعت لحظه اي : $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$

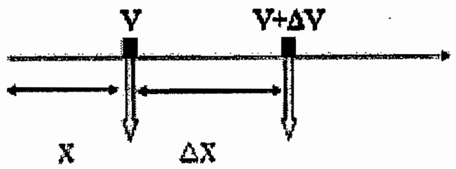
سرعت متوسط : $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

نیرو	زمان	طول	جرم	سیستم/واحد
Kg.m/s^2	s	m	Kg	SI
lb	s	Ft	lb.s^2/ft	FPS

$Slug = lb\,.\,s^2/ft$, $g = 32.2\ ft/s^2$, $1ft = 12\ inch$, $1\ inch = 1'' = 2.54\ cm$, $1ft = 1' = 30\ cm$

$x =$ موقعیت　　$v =$ سرعت

$a =$ شتاب



شتاب لحظه ای $= a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$

شتاب متوسط $= \bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{((v+\Delta v)-v)}{(t+\Delta t)-t}$　$\Delta t \to 0$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\ a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{x},\quad v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v}\ ,\quad a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{\frac{dx}{v}} = \frac{vdv}{dx}\ ,\ vdv = adx$$

حرکت مستقیم الخط یکنواخت: (a= 0)

$a = 0 \Rightarrow v =$ ثابت $\Rightarrow x = x_0 + vt$,　$v = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow vdt = dx \Rightarrow \int_0^t vdt = \int_{x_0}^x dx$

حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت: (a:ثابت)

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow adt = dv \Rightarrow \int_0^t adt = \int_{v_0}^v dv \Rightarrow at = v - v_0 \rightarrow v = v_0 + at$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t vdt = \int_x^{x_0} dx \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t (v_0 + at)dt \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

حرکت نقطه مادی

۱- اگرشتاب تابع زمان باشد:

$$a=f(t)\quad,\quad a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow f(t)dt=dv\Rightarrow\int_0^t f(t)dt=\int_{v_0}^{v}dv\Rightarrow v=g(t)$$

$$v=g(t),v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_0^t vdt=\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t g(t)dt\Rightarrow x=h(t)$$

۲- اگر شتاب تابع مکان باشد:

$$a=f(x)\quad,\quad adx=vdv=f(x)dx=vdv\Rightarrow\int_{x_0}^{x}f(x)dx=\int_{v_0}^{v}vdv=\frac{1}{2}(v^2-{v_0}^2)\Rightarrow v=g(x)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=g(x)\Rightarrow\frac{dx}{g(x)}=dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{g(x)}=\int_0^t dt\Rightarrow t=h(x)\Rightarrow x=j(t)$$

۳- اگر شتاب تابع سرعت باشد:

$$a=f(v)\quad,\quad a=\frac{dv}{dt}=f(v)\Rightarrow\frac{dv}{f(v)}=dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}\frac{dv}{f(v)}=\int_0^t dt\Rightarrow t=g(v)\Rightarrow v=h(t)$$

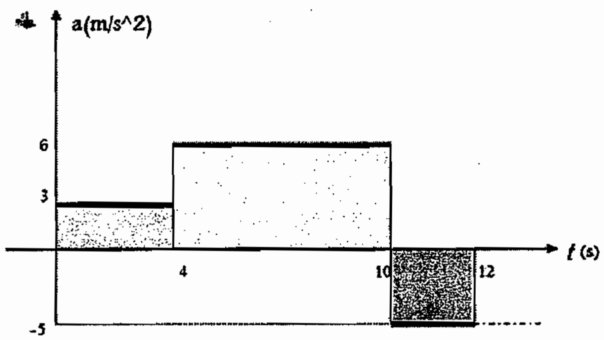
$$vdv=adx\Rightarrow vdv=f(v)dx\Rightarrow\int_v^v\frac{vdv}{f(v)}=\int_{x_0}^{x}dx\Rightarrow x=j(v)\,,\qquad v=h(t)=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int h(t)dt=\int dx$$

۴- ارتباط بین معادله و سرعت و شتاب:

$$a=\frac{dv}{dt}\rightarrow dv=adt\quad,\quad\int_{v_1}^{v_2}dv=\int_{t}^{t_2}adt\Rightarrow V_2-V_1=\int_{t_1}^{t_2}adt\quad,\quad a=\frac{dv}{dt}\quad,\quad v=\frac{dx}{dt}\quad,\quad v_2-v_1=\int_{t_1}^{t_2}adt$$

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_{x_1}^{x_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}vdt$$

مثال: مطلوب است نمودار منحنی $x\text{-}t$, $v\text{-}t$ در بین $0<t<20$ وهمچنین سرعت وموقعیت نقطه مادی درزمان t=12 (s) و مسافت طی شده تا 12 s . ($x_0=0$ و $v_0=-18m/s$)



$$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=adt\Rightarrow\int_{v_0}^{v_4}dv=\int adt\Rightarrow v_4=v_0+12=-18+12=-6\ \ m/s$$

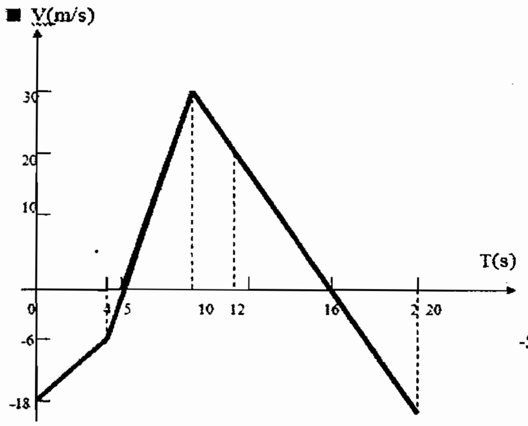
$$v_{10}=v_4+6(6)=-6+36=30\ \ m/s\Rightarrow v_{12}=v_{10}+2(-5)=30-10=20\ \ m/s\Rightarrow\qquad\Rightarrow$$

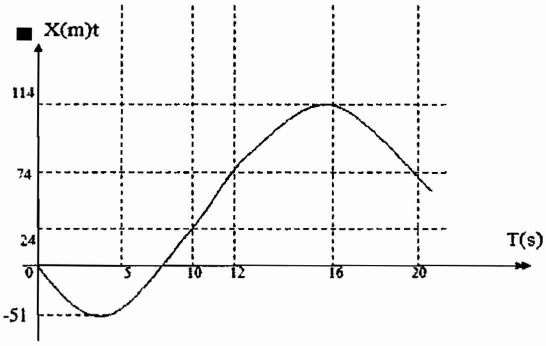
$$v_{20}=v_{12}+8(-5)=-20\ \ m/s$$

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=vdt\Rightarrow \int_{x_0=0}^{x_4}dx=\int_0^{20}vdt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_4=x_0+\int_0^4 vdt=0-\frac{1}{2}(18+6)(4)=-48m\,,\; x_5=x_4+\frac{1}{2}(6)(-1)=-51\ m\;,\; x_{10}=x_5+\frac{1}{2}(30)(5)=24\ m$$

$$x_{12}=x_{10}+\frac{1}{2}(30+20)(2)=74m, x_{16}=x_{12}+\frac{1}{2}(20)(4)=114m \quad , \quad x_{20}=x_{16}+\frac{1}{2}(4)(-20)=74\ m$$





t=12: مسافت طی شده = 74+51+51 = 176 m

$$vdv=adx \quad , \quad \frac{1}{2}(v^2-{v_0}^2)=\int adx \quad , \quad v=({v_0}^2+2\int adx)^{\frac{1}{2}}$$

مثال: با توجه به نمودار v-x، مطلوبست ترسیم نمودار a-x و زمان لازم برای رسیدن به موقعیت $x=400\,(m)$

$$0\le x\le 200\Rightarrow v=0.2x+10\Rightarrow \quad a=v\frac{dv}{dx}=(0.2x+10)(0.2)$$

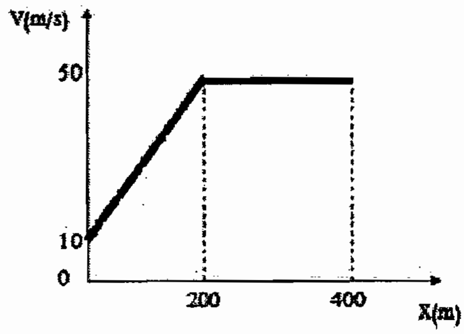
$$\Rightarrow \quad a=0.04x+2 \quad , \quad v=0.2x+10$$

$$200\le x\le 400\Rightarrow v=50 \quad , \quad a=50(0)=0$$

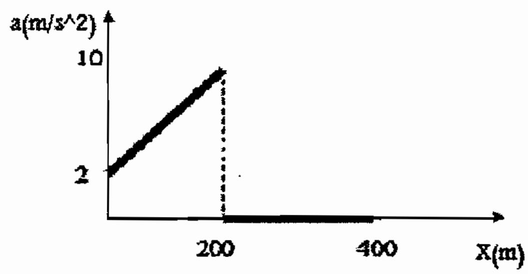
$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dt=\frac{dx}{v}\Rightarrow \int_0^t dt=\int_0^{200}\frac{dx}{0.2x+10}$$

$$x(m)\Rightarrow t=\frac{1}{0.2}Ln(0.2x+10)_0^{200}$$

$$t=5[Ln(40+10)-Ln(10)]\Rightarrow t=8.05(s)$$



$$dt=\frac{dx}{v}\Rightarrow \int_{8.05}^{t}dt=\int_{200}^{400}\frac{dx}{50}\Rightarrow t-8.05=\frac{x}{50}\Big]_{200}^{400}\rightarrow t=12\ .05(s)$$



حرکت نسبی چندین نقطه مادی

$x_A = A$ موقعیت مطلق نقطه , $x_B = B$ موقعیت مطلق نقطه

$x_B - x_A = x_{B/A} = A$ نقطه B نسبت به نقطه موقعیت نسبی , $x_{B/A} = x_B - x_A$

سرعت نسبی نقطه A نسبت به B

$$\frac{d}{dt}(x_{B/A}) = \frac{d}{dt}(x_B) - \frac{d}{dt}(x_A) = \dot{x}_{B/A} = \dot{x}_B - \dot{x}_A \Rightarrow v_{B/A} = v_B - v_A \quad :$$

$v_B = v_{B/A} + v_A \;=\; B$ سرعت مطلق

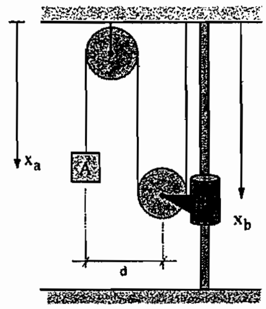
$$\frac{d}{dt}(v_{B/A}) = \frac{d}{dt}(v_B) - \frac{d}{dt}(v_A) \Rightarrow \ddot{x}_{B/A} = \ddot{x}_B - \ddot{x}_A \quad , \quad a_B = a_{B/A} + a_A = B$$ شتاب مطلق

حرکت وابسته چند جرم

مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب داریم :

$L =$ ثابت , $(x_A - c_1) + c_2 + (x_B - c_3) + c_4 + (x_B - c_5) = c$

$x_A + 2x_B = c'$, $v_A + 2v_B = 0$, $a_A + 2a_B = 0$



توجه : جهت مثبت را به سمت پایین گرفتیم

مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب ها داریم :

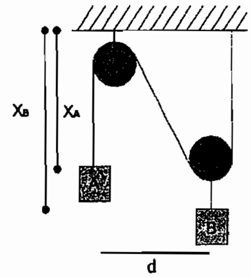
$L =$ ثابت , $L = x_A + \sqrt{d^2 + x_B^2} + x_B$

[$d =$ ثابت , $\dot{d} = 0$, $\ddot{d} = 0$]

$$\dot{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_A + \frac{1}{2}(d^2 + x_B^2)^{-\frac{1}{2}}(2x_B.\dot{x}_B) + \dot{x}_B$$

$\ddot{L} = 0$

$L_1 + x_A + C_1$, $L_2 = \sqrt{d^2 + x_B^2}$, $L_3 = x_B - C_3$



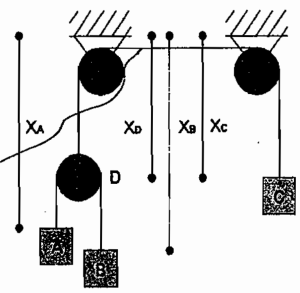
مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب ها داریم :

$(x_A - x_D) + (x_B - x_D) = c_1$, $x_A + x_B - 2x_D = C_1$, $x_D + x_C = C_2$

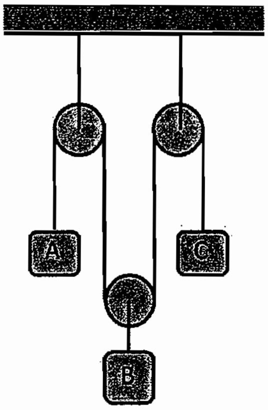
$v_A + v_B - 2v_D = 0$, $v_D + v_C = 0$

$a_A + a_B - 2a_D = 0$, $a_D + a_C = 0$

این طول همواره ثابت است



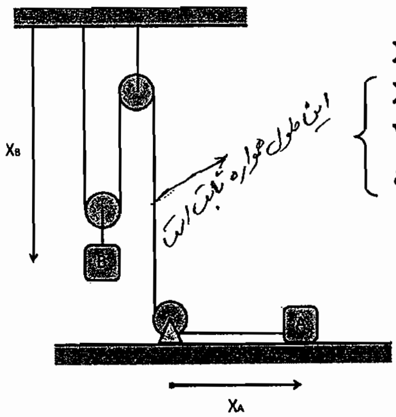
مثال :



$$XA + XB + XB + XC = Cte$$

$$\begin{cases} XA + 2XB + XC = Cte \\ VA + 2VB + VC = 0 \\ aA + 2aB + aC = 0 \end{cases}$$

مثال :



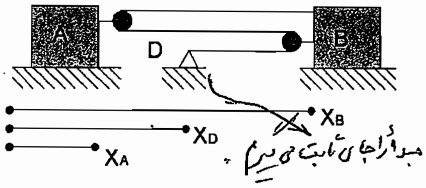
$$XB + XB + C1 + XA = Cte$$

$$\begin{cases} XA + 2XB = Cte \\ VA + 2VB = 0 \\ aA + 2aB = 0 \end{cases}$$

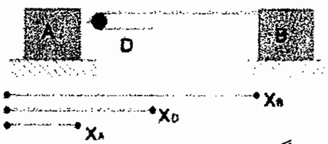
مثال: اگر $V_B= 18\,m/s$ (ثابت و در جهت x) مطلوبست:

الف) سرعت بلوک A ب) سرعت نقطه D کابل

ج) سرعت نسبی A نسبت به B



حل:



$(x_B-x_A) + (x_B-x_A)+x_B = C$, $3x_B -2x_A= C$, $3V_B -2 V_A = 0$

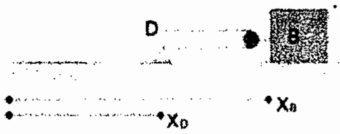
$V_A = 1.5V_B=3/2(18) = 27\,m/s \Rightarrow V_A = 27\,m/s \rightarrow$

$(x_B-x_A) + (x_D-x_A) = c_1$, $x_B +x_D -2x_A= c_1$, $V_B + V_D -2V_A = 0$

$18 + V_D -2\,(27\,) =0 \Rightarrow V_D = 36\,m/s \rightarrow$

روش دیگر:

در واقع از هر نقطه دلخواه مورد نیاز مناسب می‌توان نخ را قطع کرد و روابط را نوشت



$(x_B-x_D) + x_B = c_2$

$2x_B -x_D= c_2$

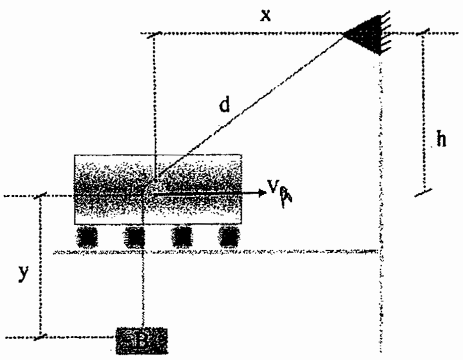
$2V_B - V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = 2V_B =36\,m/s \rightarrow$

$V_{A/B} =V_A -V_B = [\,27 \rightarrow\,] -[\,18 \rightarrow\,] =9\,m/s \rightarrow$

مثال: مطلوب است سرعت B نسبت به A

$V_A=?$

$V_B=?$



حل:

$$V_B = V_A + V_{B/A}$$

$$V_B = [V_A \leftrightarrow] + [V_{B/A} \updownarrow] \Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + V_{B/A}^2}$$

$$V_A = \dot{x}$$

$$L = d + y \quad \text{ثابت} \quad \dot{d} + \dot{y} = 0$$

$$|\dot{y}| = |v_{B/A}| = |\dot{d}| \qquad d = \sqrt{h^2 + x^2}$$

$$d^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow 2d\dot{d} = 2x\dot{x} \Rightarrow \dot{d} = \frac{x\dot{x}}{d}$$

$$V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + (\frac{x\dot{x}}{d})^2} \Rightarrow V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{d^2}}$$

$$V_B = \dot{x}\sqrt{(1 + \frac{x^2}{d^2})} \qquad V_B = V_A\sqrt{1 + \frac{x^2}{d^2}}$$

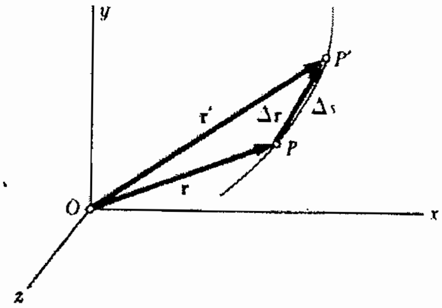
حرکت منحنی الخط

سرعت متوسط:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

سرعت لحظه ای:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, v = \frac{ds}{dt}$$



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$\vec{v} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\vec{e}_t$$

$\vec{e}_t = \Rightarrow \vec{v} = v\vec{e}_t$ ار واحد مماس بر مسیر حرکت ،

شتاب متوسط $= \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

شتاب لحظه ای $= \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

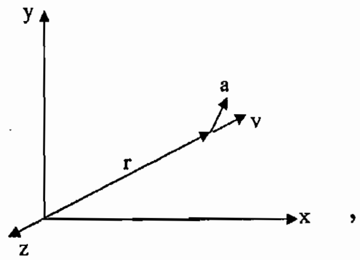
$\vec{r} =$ بردار موقعیت ، $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} =$ سرعت نقطه ، $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} =$ شتاب نقطه

مولفه های متعامد سرعت و شتاب

$r = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} =$ مولفه های بردار های واحد

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d}{dt}(\vec{i}) + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d}{dt}(\vec{j}) + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d}{dt}(\vec{k})$$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$, $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$,

$v_z = \dot{z}$

$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

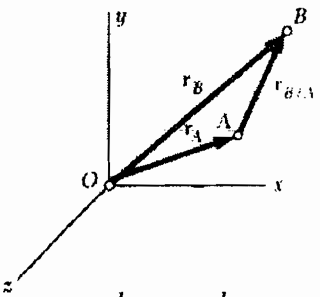
حرکت نسبی

موقعیت نقطه $\vec{r_A} = A$

موقعیت نقطه $\vec{r_B} = B$

موقعیت نسبی نقطه B نسبت به نقطه A $= \vec{r_B} - \vec{r_A} = \vec{r}_{B/A}$

$\Rightarrow \vec{r_B} = \vec{r_A} + \vec{r}_{B/A}$



سرعت نسبی نقطهB نسبت به A :

شتاب نسبی نقطهB نسبت به A :

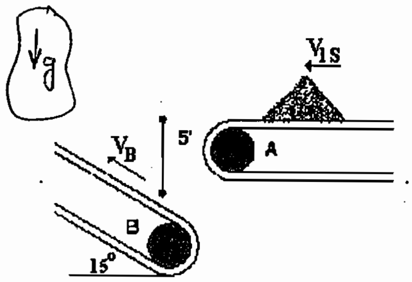
$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{r}_A) \Rightarrow \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{v}_A) \Rightarrow \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

*** مثال:** سرعت نسبی شن و ماسه نسبت به تسمه B؟ ($V_{S/B}$ به هنگام ریختن روی تسمه)

$v_{1s}=6ft/s \quad , \quad v_B=8ft/s$



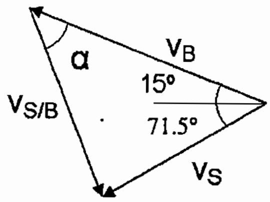
$\vec{v}_{S/B}=\vec{v}_S-\vec{v}_B$

$\vec{v}_s=\vec{v}_{sx}+\vec{v}_{sy} \qquad v_{sx}=6ft/s\leftarrow \quad v_{sy}=\sqrt{2g(5)}=\sqrt{2(32.2)(5)}=17.94ft/s\downarrow$

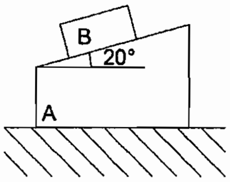
$\Rightarrow \vec{v}_{2S}=[6\leftarrow]+[17.94\downarrow]=18.92\ ft/s$

$v_{2S/B}=\sqrt{v_B^2+v_S^2-2v_Bv_s\cos 86.5}=20.01ft/s$

$\dfrac{Sin(\alpha)^\circ}{18.92}=\dfrac{Sin(15+71.5)^\circ}{20.01}\Rightarrow \alpha=70.69^\circ$



مثال: بلوك A با شتاب ثابت $80mm/S^2$ به سمت چپ درحال حرکت است و بلوك B باشتاب نسبي ثابت $120\,mm/s^2$ به سمت بالا روي بلوك A در حال حرکت است. مطلوبست شتاب مطلق B.

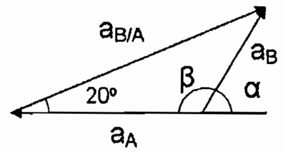


*وقتی دو جسم روی هم حرکت می‌کنند سرعت جسمی که روی دیگری است نسبی است.

حل:

$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{B/A} \quad , \quad \vec{a}_B=\sqrt{120^2+80^2-2(120)(80)\cos 20}$

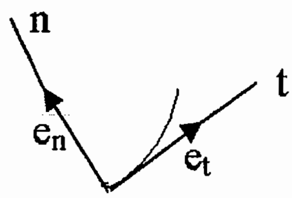
$$\left.\begin{array}{l} a_B=52.5\,mm/s^2 \\ \dfrac{\sin\beta}{120}=\dfrac{\sin 20^\circ}{52.5} \end{array}\right\}\Rightarrow \beta=128.6^\circ \qquad \alpha=51.4^\circ$$



مولفه‌هاي مماسي و نرمال

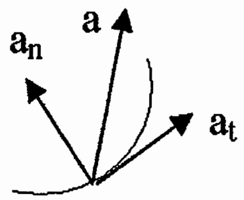
$\vec{e}_t=$ بردار واحد مماسي

$\vec{e}_n=$ بردار واحد عمودي



$\vec{r}=\vec{r}(t) \qquad , \qquad \vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt} \quad , \quad \vec{v}=v\vec{e}_t$

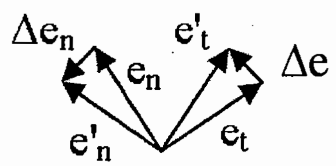
$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt} \quad , \quad \vec{a}=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n$



$\dfrac{d_{\vec{e}t}}{dt}=(\dfrac{d_{\vec{e}t}}{d\theta})(\dfrac{d\theta}{ds})(\dfrac{ds}{dt}) \qquad \boxed{a_t=\dfrac{dv}{dt}}$

شعاع خمیدگی:

$$\rho=\frac{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$



$$\frac{\Delta e_t}{\Delta\theta}=\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}=\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)}$$

$$\rightarrow\frac{de_t}{d\theta}=1\ \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta e_t}{\Delta\theta}=\lim\frac{\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}{\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}=1$$

$\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}=\vec{e}_n$ چون بر t عمود است و مقدار 1 را نیز داراست.

$$\vec{a}=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v(\frac{d\vec{e}_t}{dt})=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v^2/\rho\,\vec{e}_n$$

با معادل گذاري $:a_n=\frac{v^2}{\rho}$

پس به دست آوردیم $:\frac{d\vec{e}_t}{dt}=\frac{v}{\rho}\vec{e}_n$

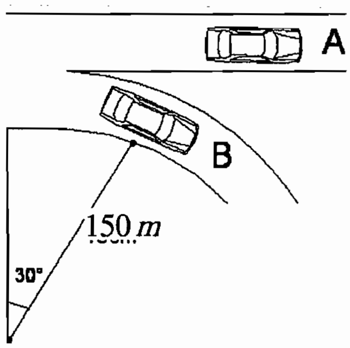
(در حرکت مستقیم الخط یکنواخت)

$$\begin{cases}\vec{v}=v\vec{e}_t\\ \vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{e}t+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n\end{cases}\qquad a=0\Rightarrow\begin{matrix}\frac{dv}{dt}=0\\ \frac{v^2}{\rho}=0\end{matrix}\qquad\begin{cases}\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}=\vec{e}_n\\ \frac{d\vec{e}_n}{d\theta}=-\vec{e}_t\end{cases}$$

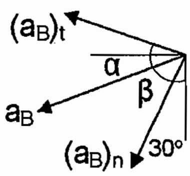
مثال:

$20.8m/s=v_A=\lfloor 75km/h\rightarrow\rfloor\qquad a_A=1.5m/s^2\qquad \vec{v}_{A/B}=?$

$11.1m/s=V_B=40km/h\qquad a_b=-8.9m/s^2\qquad \vec{a}_{A/B}=?$



حل:



$V_A=20.8m/s$

$V_B=11.1m/s$

$\vec{V}_{A/B}=\vec{V}_A-\vec{V}_B$

$\vec{V}_{A/B}=[20.8\rightarrow]-[11.1]$

$$\vec{V}_{A/B}=\sqrt{(20.8)^2+(11.1)^2-2(20.8)(11.1)Cos30}\Rightarrow V_{A/B}=12.5m/s\ \frac{\sin\alpha}{11.1}=\frac{\sin 30}{45}\rightarrow\alpha=26.4°$$

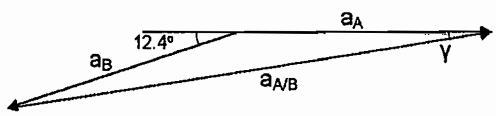
$(a_B)_t=0.9\,(a_B)_n=V^2/\rho=\frac{11.1^2}{150}=0.8m/s^2$

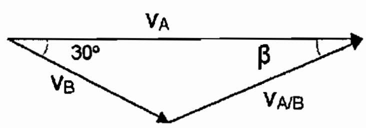
$\rightarrow a_B=1.2m/s^2\quad \beta=12.4°$

$a_{A/B}=\sqrt{(1.5)^2+(1.2)^2-2(1.5)(1.2)\,Cos167.6}=2.70m/s^2$

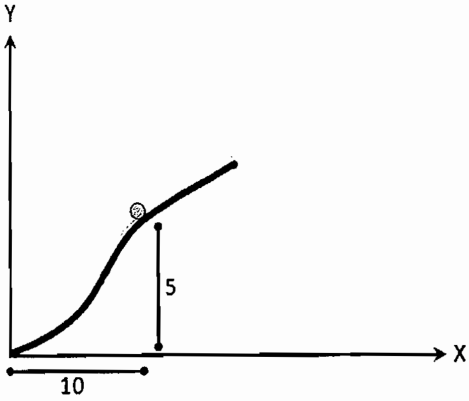
$\frac{\sin\gamma}{1.2}=\frac{\sin 167.6}{2.7}\rightarrow\boxed{\gamma=5.6°}$

$\boxed{\vec{a}_{A/B}=2.7}$





مثال : سرعت اسکی باز در مسیر سهموی در نقطهء A ، 6m/s و در حال افزایش با نسبت $2m/s^2$ است . مطلوبست : $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$



$$\begin{cases} y = (1/20)x^2 \\ dy/dx = (1/10)x \longrightarrow \\ d^2y/d^2x = (1/10) \end{cases}$$

at: $x=10$ $\quad dy/dx = 1$

$\vec{V}_A = 6\ (m/s)$ 45°

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

$\vec{a}_t = 2\ (m/s^2)$ 45°

$\rho = [1 + y'^2]^{3/2}/y'' = 28.28$

$\vec{a}_n = (v^2/\rho) = 1.27\ (m/s^2)$ 45°

$|a_A| = \sqrt{2^2 + 1.27^2}$

$\vec{a}_A = 2.37\ (m/s^2)$

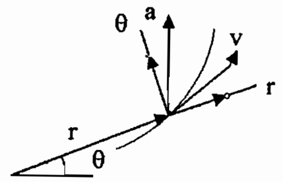
12.5°

(مختصات قطبی) مولفه‌های شعاعی و عرضی

$\theta =$ مختصات زاويه اي

$\vec{e}_r =$ بردار واحد شعاعي

$\vec{e}_\theta =$ بردار واحد عرضي



بردار موقعیت:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = d(r\vec{e}_r)/dt = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\,\vec{e}r}{dt}$$

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}}$$

$$\frac{d\vec{e}r}{dt} = (\frac{d\vec{e}r}{d\theta})(\frac{d\theta}{dt}) = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\frac{rd\vec{e}r}{dt} = \underbrace{r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}_{v_\theta} = v_\theta\vec{e}_\theta \qquad \boxed{v_\theta = r\dot{\theta}}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \;\;,\;\; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{r}\theta\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2 e_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$ ، شتاب زاويه اي : $\ddot{\theta} = \alpha\, rad/s^2$

مختصات استوانه ای

بردار موقعیت:

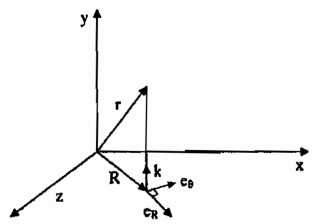
$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{z} = \mathrm{R}\,\vec{e}_R + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{ddt^2}$$

$$\vec{v} = \frac{dd}{dt}(r\vec{e}_R) + \frac{dd}{dt}(z\vec{k})$$

$$\rightarrow \vec{v} = v_R\vec{e}_R + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{k}$$

$$v_R = \dot{R} \;\;,\;\; v_\theta = R\dot{\theta} \;\;,\;\; v_Z = \dot{z}$$



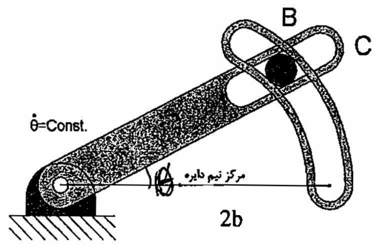
بردار شتاب:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_R\vec{e}_R + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{k}$$

$$\begin{cases} a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} \\ a_Z = \ddot{z} \end{cases}$$

مثال: سرعت و شتاب نقطه‌ي B را اگر بازوی OC با سرعت زاویه ای ثابت دوران کند بیابید.

حل:



$$r = 2b\cos\theta$$

$$v_r = \dot r = \frac{d}{dt}(2b\cos\theta) = 2b(-\sin\theta)(\dot\theta)$$

$$v_\theta = r\dot\theta = 2b\dot\theta\cos(\theta)$$

$$v = \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} = 2b\dot\theta$$

$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = ?$$

$$\ddot r = 2b[(-\cos\theta)(\dot\theta)^2 + (-\sin\theta)\ddot\theta] = -2b\dot\theta^2\cos\theta$$

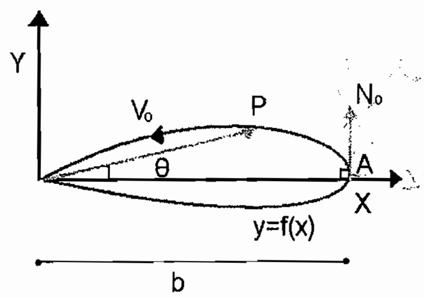
$$a_r = -2b\dot\theta^2\cos\theta - 2b\cos\theta\,\dot\theta^2 = -4b\dot\theta^2\cos\theta$$

$$a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = -4b\dot\theta^2\sin\theta$$

$$|\vec a| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 4b\dot\theta^2$$

مثال: در مسیرداده شده، سرعت ثابت و برابر $v_\circ$ است مطلوبست شتاب متحرک در موقعیت A؟ ($R = b\cos 3\theta$)

حل:



$$A = \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \qquad a_A \begin{cases} a_r = \ddot R - R\dot\theta^2 \\ a_\theta = R\ddot\theta + 2\dot R\dot\theta = 0 \end{cases}$$

$$R = b\cos 3\theta$$

زیرا در A ، θ صفر است.

$$\dot R = b(-\sin 3\theta)(3)(\dot\theta) = -3b\dot\theta\sin 3\theta$$

$$\ddot R = -3b\ddot\theta\sin 3\theta - 9b\dot\theta^2\cos 3\theta$$

$$v_A = \begin{cases} v_r = \dot R = 0 \\ v_\theta = R\dot\theta = v_\circ \Rightarrow \dot\theta = \dfrac{v_\circ}{b} \end{cases}$$

$$A \to \dot\theta = \frac{v_\circ}{b}, R = b, \ddot R = -9b\dot\theta^2 = -9\frac{v_\circ^2}{b}$$

$$a_A = a_r = -9\frac{v_\circ^2}{b} - b\left(\frac{v_\circ^2}{b^2}\right) \Rightarrow \boxed{a_A = -10\frac{v_\circ^2}{b}}$$

@A

$(R=b) \to b\cos 3\theta = b$

$\to \cos 3\theta = 1$

$\to \cos 3\theta = \cos 2k\pi$

$\to 3\theta = 2k\pi$

$\to \sin 3\theta = \sin 2k\pi = 0$

$\text{So} \to \ddot R = -9b\dot\theta^2 = -9\dfrac{v_\circ^2}{b}$

فصل دوم:

سینتیک نقطه مادی

(KINETICS)

12.12
12.13

حذف بخش ۴ و ۵

مکانیک فضایی

قانون کپلر

قوانین نیوتن

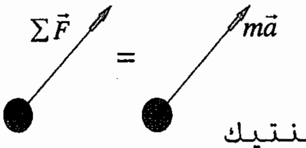
قانون اول :
$$\Sigma\vec{F}=0$$

قانون دوم :
$$\vec{F}=m\vec{a}\ ,\ \ \Sigma\vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})\ ,\ \ \Sigma\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\sum\vec{F}=m\vec{a}$$
$$\sum\vec{F}-m\vec{a}=0$$

نیروي مؤثر یا نیروي اینرسي (شبه نیرو) $ma=$

$$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\qquad \Sigma\vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$



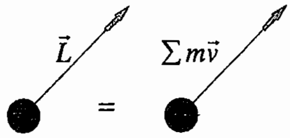
دیاگرام آزاد نیروها　　　　دیاگرام سینتیک

اصل دالامبر

قانون دوم نیوتن باید نسبت به یك دستگاه مختصات ثابت باشد.
و

ممنتوم خطي ،یا اندازه حرکت خطي (Linear Momentum)

$$\boxed{\begin{aligned}\sum m\vec{v}&=\vec{L}\\ \sum\vec{F}&=\dot{\vec{L}}\end{aligned}}$$



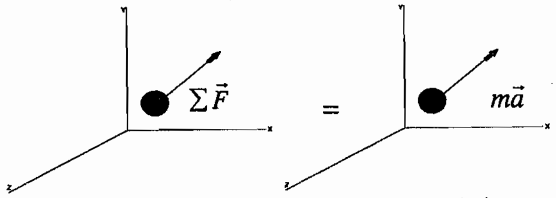
واحد ممنتوم :

$kg\ \ m/s=(kg.m/s^2).s=N.s \quad \Leftarrow SI$

$Ib.s \quad \Leftarrow FPS$

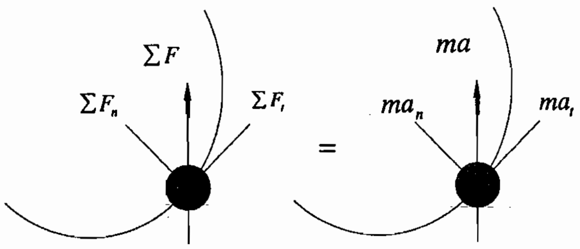
مختصات سه بعدي کارتزین

$$+\rightarrow \sum F_x=ma_x=m\ddot{x}$$
$$+\uparrow \sum F_y=ma_y=m\ddot{y}$$
$$+\swarrow \sum F_z=ma_z=m\ddot{z}$$

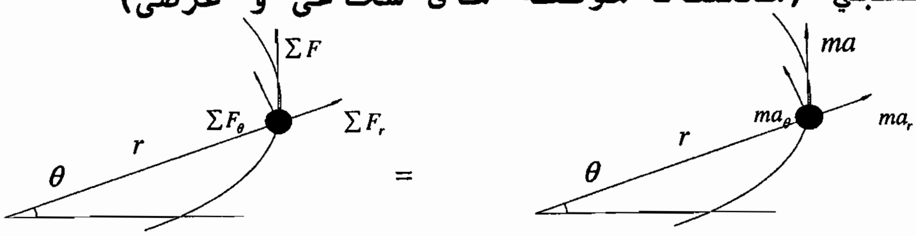


مختصات مؤلفه هاي مماسي و عمودي

$$+\uparrow \Sigma F_t=ma_t=m(\frac{dv}{dt})$$
$$+\leftarrow \Sigma F_n=ma_n=m\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$$



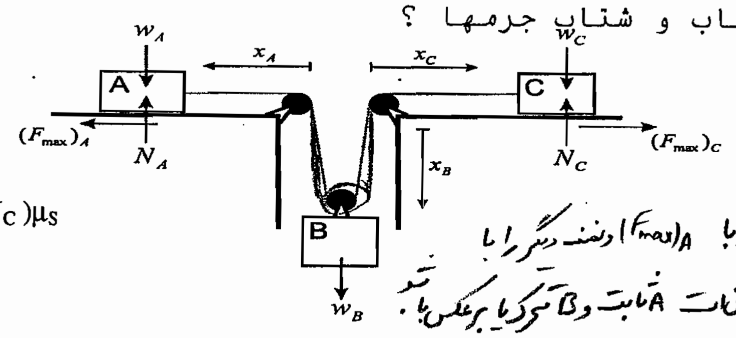
مختصات قطبي (مختصات مؤلفه های شعاعی و عرضی)



$$\boxed{\begin{aligned}&+\rightarrow\ r\ \ \Sigma F_r=ma_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\\ &+\uparrow\ \Sigma F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\end{aligned}}$$

مثال : سه وزنه به جرم های $m_A=5\ kg, m_B=10\ kg, m_C=10\ kg$ مطابق شکل زیر به هم متصل می باشد. اگر ضریب اصطکاک بین وزنه های A,C و سطح $\mu_S=0.24$, $\mu_K=0.20$ باشد؛ مطلوبست وضعیت سیستم؟ ومقدارکشش طناب و شتاب جرمها ؟

۱۸



حل :

$F_{max}=\mu_S.N=(N_A+N_C)\mu_S$
$W_A=5\ g=N_A$
$W_C=10\ g=N_C$
$W_B=10\ g=N_B$

* بهتر بود نفس μ_s را با $(F_{max})_A$ و نفس دیگر را با $(F_{max})_B$ تایپ کنیم زیرا امکانات A ثابت و B متحرک یا برعکس باشد.

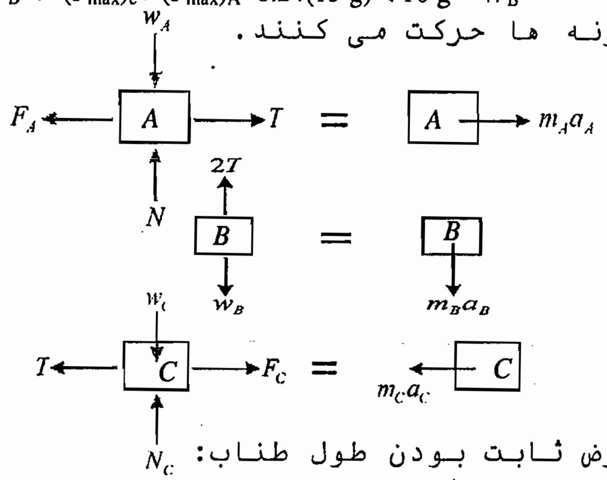
$F_{max} < W_B \rightarrow (5\ g+10\ g)\ 0.24 < 10\ g = W_B \rightarrow (F_{max})_c + (F_{max})_A = 0.24(15\ g) < 10\ g = W_B$

پس وزنه ها حرکت می کنند.

$$+\rightarrow \Sigma\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow T-F_A=m_A.a_A$$
$$\Rightarrow T-0.2(5g)=5a_A$$

$$+\downarrow \Sigma\vec{F}=m_B\vec{a}_B \Rightarrow W_B-2T=m_Ba_B$$
$$\Rightarrow 10g-2T=10a_B$$

$$+\leftarrow \Sigma\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow T-F_C=m_ca_c$$
$$\Rightarrow T-0.2(10g)=10a_c$$



با فرض ثابت بودن طول طناب:

جهت حرکت

ارتباط سینماتیکی

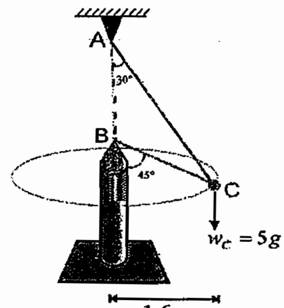
$$-x_A+2x_B-x_C=cte \Rightarrow -V_A+2V_B-V_C=0 \Rightarrow -a_A+2a_B-a_C=0 \Rightarrow a_B=1/2(a_A+a_C)$$

با استفاده از چهار معادله بالا داریم:

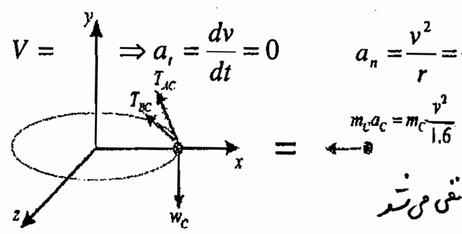
$a_A=4.76\ m/s^2 \rightarrow$, $a_B=3.08\ m/s^2 \downarrow$, $a_c=1.40\ m/s^2 \leftarrow$, $T=33.6\ (N)$

مثال : اگر جسم C به جرم ۵ kg با سرعت ثابت v در حال دوران حول میله قائم باشد ، مطلوبست حدود سرعت ثابت v که همواره دو کابل BC,AC در کشش باشند. ($g=9.81\ m/S^2$)

۱۹



$V =$ ثابت $\Rightarrow a_t=\frac{dv}{dt}=0 \qquad a_n=\frac{v^2}{r}=\frac{v^2}{1.6}$



اگر در رسی با توجه به شکل نشود، V از منفی می‌شد بی‌اثر بود.

$$\begin{cases} +\leftarrow \sum F_x=m_ca_c \overset{1.6m}{\Rightarrow} T_{AC}Sin30°+T_{BC}Sin45°=\frac{5}{1.6}v^2 \\ +\uparrow \sum F_y=0 \Rightarrow T_{AC}Cos30°+T_{BC}\cos45°-5g=0 \end{cases}$$

شرایط مرزی

حل :

$$\begin{cases} T_{AC}\sin30°+T_{BC}\sin45°=\frac{5}{1.6}v^2 \\ T_{AC}\cos30°+T_{BC}\cos45°=5g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AC}=0 \Rightarrow \tan45°=\frac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v=3.96\,m/s \\ T_{BC}=0 \Rightarrow \tan30°=\frac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v=3.01\,m/s \end{cases}$$

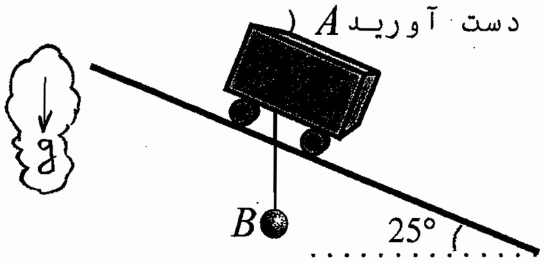
$\Rightarrow m/s \;\; 3.01 < v < 3.96 \;\; m/s$

حال اگر v کمتر یا بیشتر از بازه بالا باشد ، باید طناب با کشش منفی را حذف کرده و معادلات را از اول بنویسیم و داریم :

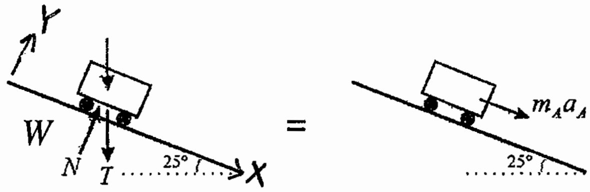
$v = 4 \Rightarrow T_{AC} < 0$

$v = 3 \Rightarrow T_{BC} < 0$

مثال : اگر سیستم فوق از حالت سکون شروع به حرکت کند؛ شتاب جسم A وکشش در کابل در لحظه شروع حرکت به دست آورید ($m_A = 20\ kg, m_B = 15\ kg$)



حل :



$+\searrow \sum F = m_A a_A$

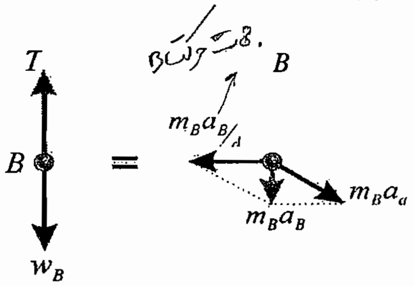
$\Rightarrow NCos90 + (W_A + T)\sin 25° = 20 a_A$

$(20g + T)\sin 25 = 20\, a_A$ 1

چون در لحظه اول که A به سمت راست حرکت مي کند ، B مي خواهد به سمت چپ برود :

$$\begin{cases} + \leftarrow \sum F = ma \Rightarrow 0 = m_B a_{B/A} - m_B a_A \cos 25° & 3 \\ + \downarrow \sum F = ma \Rightarrow W_B - T = m_B a_A \sin 25° & 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = 106.6 \quad N \\ a_A = 6.4 \quad m/s^2 \searrow \\ a_{B/A} = 5.8 \quad m/s^2 \leftarrow \end{cases}$$



$\vec{H}_o$ ممنتوم زاویه ای (لنگر حرکتی)

ANGULAR MOMENTUM - MOMENT OF MOMENTUM

$\vec{L} = m\vec{v}$

$\vec{r} =$

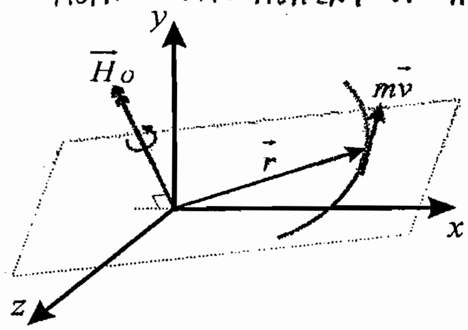
$\vec{H}_\circ = \vec{r} \times m\vec{v} =$

$H_\circ = r(mv)\sin\varphi$

$\vec{H}_\circ \perp (\vec{r}, m\vec{v})$

موقعیت

ممنتوم



واحد ممنتوم زاویه ای :

$kg\, m/s^2 \quad \Leftarrow SI$

$lb.ft.s \quad \Leftarrow FPS$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \qquad m\vec{V}=m\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{H}_\circ=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}\times m \Rightarrow \vec{H}_\circ=m\left(yv_z-zv_y\right)\vec{i}+m\left(zv_x-xv_z\right)\vec{j}+m\left(xv_y-yv_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{H}_\circ=H_x\vec{i}+\vec{H}_y\vec{j}+\vec{H}_z\vec{k} \qquad \dot{\vec{H}}_\circ=\frac{d(\vec{r}\times m\vec{v})}{dt}=0+\vec{r}\times\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\vec{r}\times(m\vec{a})=\sum\vec{M}_\circ$$

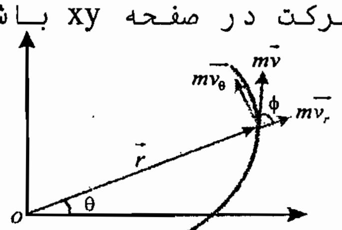
مشتق نسبت به زمان صفر نمیشود.

اگر حرکت در صفحه xy باشد؛ داریم :

$$\vec{H}_\circ=H_{\circ z}\vec{k}$$

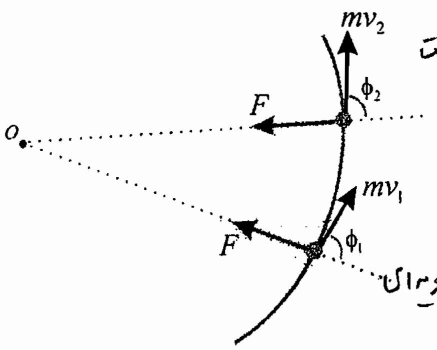
$$\vec{H}_\circ=\vec{r}\times m\vec{v} \Rightarrow H_\circ=rmv\sin\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} H_\circ=rmv_\theta \\ v_\theta=r\dot{\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow H_\circ=mr^2\dot{\theta}$$



حرکت تحت اثر نیروی مرکزی(Central Force)

اگر نیروئی روی جرم وارد گردد که همه جرم به سمت یک نقطه خاص باشد ،به آن حرکت نیروی مرکزی می نامند.



قانون گرانش : $F=G\dfrac{Mm}{R^2}$

حفظ ممنتوم زاویه ای یا بقای ممنتوم زاویه ای

$$r_1mv_1\sin\varphi_1=r_2mv_2\sin\varphi_2=\dots$$

$$r_1v_{\theta 1}=r_2v_{\theta 2}=\dots \quad \text{ثابت}$$

حالات خاص

حفظ ممنتوم : اگر

$$\sum\vec{F}=\dot{\vec{L}} \Rightarrow \qquad \sum\vec{F}=0 \Rightarrow \dot{\vec{L}}=0 \Rightarrow \vec{L}_1=\vec{L}_2$$

بقای مومنتوم

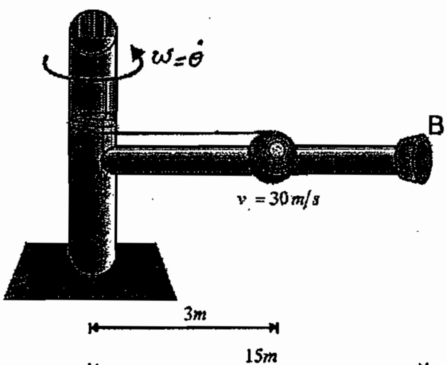
حفظ ممنتوم زاویه ای : اگر

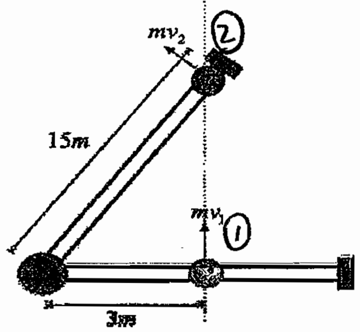
$$\sum\vec{M}_\circ=\dot{\vec{H}}_\circ \Rightarrow \qquad \sum\vec{M}_\circ=0 \Rightarrow \dot{\vec{H}}_\circ=0 \Rightarrow \left(\vec{H}_\circ\right)_1=\left(\vec{H}_\circ\right)_2$$

بقای مومنتوم زاویه ای: $\vec{H}_o$ ثابت است

$$\rightarrow r_1\times mv_1=r_2\times mv_2=\dots$$

مثال : اگر جرم گلوله 4 kg و از جرم میله صرف نظر شود، سرعت گلوله به هنگام رسیدن به نقطه B پس از قطع کردن کابل را محاسبه کنید.

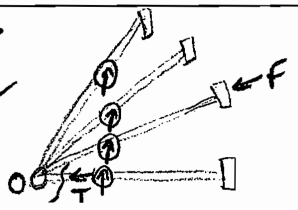




حل :

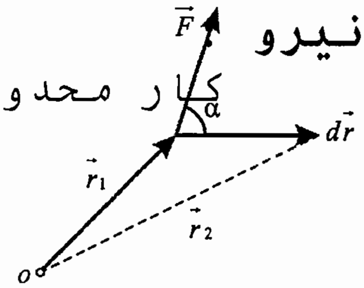
$$\sum\vec{M}_\circ=\dot{\vec{H}}_\circ=0\Rightarrow\left(\vec{H}_\circ\right)_1=\left(\vec{H}_\circ\right)_2\Rightarrow 3\times\left(mv_1\right)=15\times\left(mv_2\right)\Rightarrow 3\times 30=15\times v_2\Rightarrow v_2=6 \quad m/s$$

هرگاه در حرکت نقطه‌ای بتوانیم مجموع گشتاورها را صفر در نظر بگیریم (جمع نیروها از آن نقطه بگذرد) در آن صورت از $\sum\vec{M}_o=0=\dot{\vec{H}}_o$ استفاده می‌کنیم.



فصل سوم:
سينتيك نقطه مادي
(روشهاي انرژي و ممنتوم)

کارِ نیرو



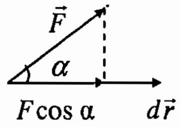
کار محدود انجام شده :

$$dU = \vec{F}.d\vec{r} = |\vec{F}|\cos\alpha\, dr$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

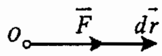
$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$



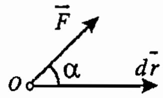
واحدکار : $lb.ft$: (FPS) $N.m\,(J)$ (ژول) :(SI)

واحد لنگر : $ft\text{-}lb$: (FPS) $N.m$:(SI)

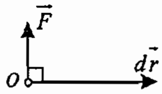
1) $dU = F.dr > 0$ $\alpha = 0$



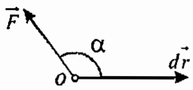
2) $dU = F\,dr\cos\alpha > 0$ $0 < \alpha < 90$



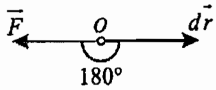
3) $dU = 0$ $\alpha = 90$



4) $dU = F\,dr\cos\alpha < 0$ $90 < \alpha < 180$

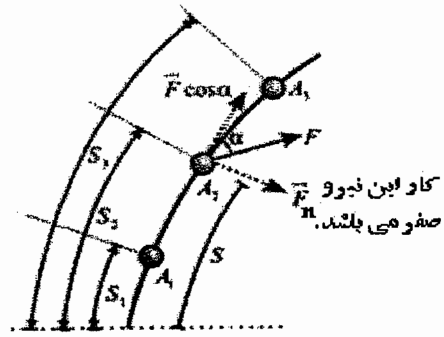


5) $dU = -F.dr < 0$ $\alpha = 180$



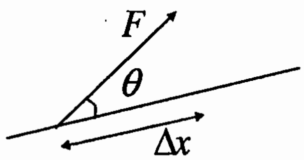
$$U_{1\to 3} = \int_{A_1}^{A_3} (F_x\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\vec{k})\cdot(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k})$$

$$U_{1\to 3} = \int_{A_1}^{A_3} dU = \int_{A_1}^{A_3} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{S_1}^{S_3} F\cos\alpha\, ds = \int_{S_1}^{S_3} \vec{F}_t.ds$$

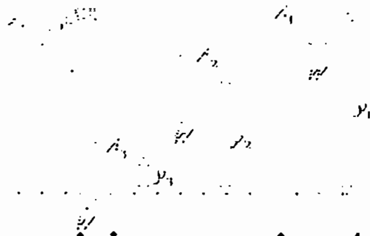


کار یک نیروي ثابت :

$$U_{1\to 2} = \int dU = F\,(\Delta x)\cos\theta$$



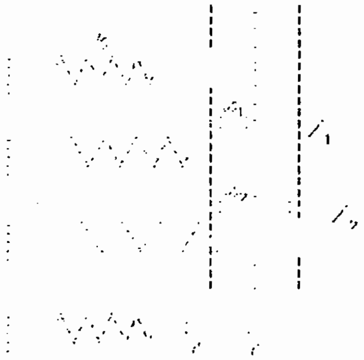
كار نيروي وزني :



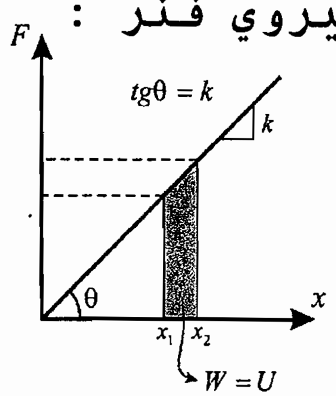
$$F_x = 0 \quad , \quad F_z = 0 \quad , \quad F_y = cte$$

$$U_{1\to 2} = \int_{y_1}^{y_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \Rightarrow$$

$$U_{1\to 2} = -W \Delta y = -W (y_2 - y_1) = \int_{y_1}^{y_2} F_y dy$$



كار نيروي فنر :



$$F = kx \quad , \quad dU = -F dx$$

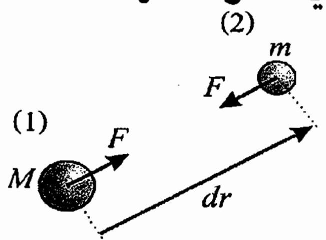
$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} dU = \int_{x_1}^{x_2} -(kx)\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow (U_{1\to 2})_e = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2)\Delta x$$

در حالت بازگشت به حالت اوليه كار نيروي فنر مثبت است.

كار نيروي گرانش :

$$F = G\frac{mM}{r^2}, G = 66.7\times 10^{-12}\left(\frac{m^3}{kg.s^2}\right)$$

$$U_{1\to 2} = \int dU = \int_{r_1}^{r_2} F\,dr \Rightarrow U_{1\to 2} = G\frac{mM}{r_2} - G\frac{mM}{r_1}$$



انرژي جنبشي واصل كار و انرژي :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

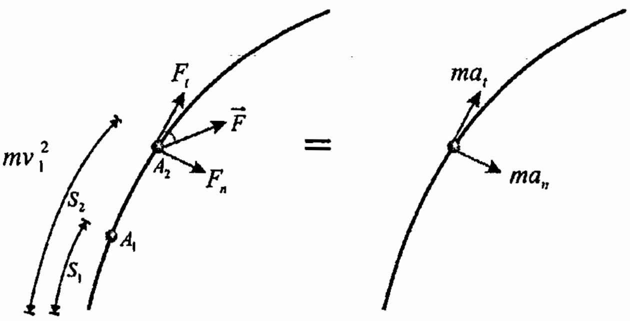
$$F_t = ma_t \Rightarrow F_t = m\frac{dv}{dt} = m(\frac{dv}{ds})\times(\frac{ds}{dt})$$

$$F_t ds = mv dv \Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds = m\int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad , T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

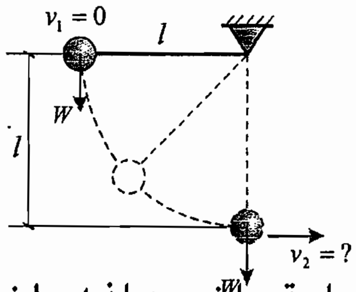
$$K = T = \frac{1}{2}mv^2$$ انرژی جنبشی



مثال :در شكل، اگر گلوله از وضعيت ۱ رهاشده باشد، سرعت آنرا در وضعيت ۲ بيابيد؟

(توجه : كار نيروی كششی صفر است زيرا هميشه عمود بر مسير حركت است.)

حل:



$$\left.\begin{array}{l} T_1 + U_{1\to2} = T_2 \\ T_1 = 0, T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 \\ (U_{1\to2})_g = mgl \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + mgl = \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gl}$$

قدرت يا توان- راندمان يا بازده :

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\sum(\vec{F}.d\vec{r})}{dt} = \sum \vec{F}.\vec{v}$$

قدرت $P = \sum(\vec{F}.\vec{v})$

واحد: . (SI) : Watt=N.m/s =J/s , (FPS): lb.ft/s , 550 lb.ft/s= 1HP

$P = \frac{dT}{dt} = F.v$ قدرت $T = \frac{1}{2}mv^2$, $\frac{dT}{dt} = mv\frac{dv}{dt} = (ma)v = Fv = p \Rightarrow$

$P = \frac{dT}{dt}$, $U_{1\to2} = T_2 - T_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$

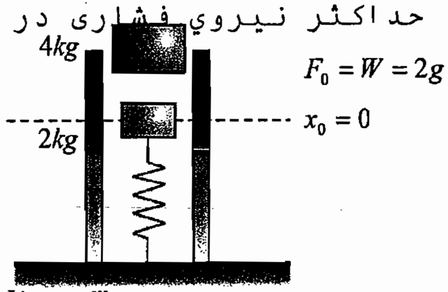
توان متوسط $= \overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$, $\overline{P} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt}.dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} dT = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}$

$\overline{P} = \frac{U_{1\to2}}{\Delta t}$, $\eta_m = \frac{P_{out}}{P_{in}} < 1$ راندمان مكانيكي

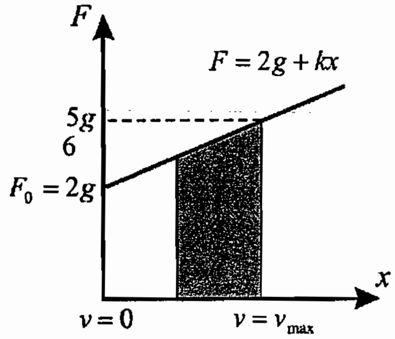
η_e= راندمان الكتريكي , η_{th}= راندمان حرارتي , $\eta = \eta_e.\eta_m.\eta_{th} < 1$

مثال: اگر بلوك ٤ kg را روي بلوك ٢ kg قرار دهيم، تناوب آغاز مي گردد؛ مطلوبست: (K=400 N/m)

الف) حداكثر سرعت بلوك ۴ kg ؟ ب) حداكثر نيروي فشارى در فنر ؟



حل:



الف)

$T_1 + U_{1\to2} = T_2$

$T_1 = 0$, $T_2 = \frac{1}{2}mv^2$

$$\left.\begin{array}{l} U_{1\to2} = (U_{1\to2})_g + (U_{1\to2})_e \\ (U_{1\to2})_e = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2)x = -2gx - 200x^2 \\ (U_{1\to2})_g = 6gx \end{array}\right\} \Rightarrow U_{1\to2} = 4gx - 200x^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

حداكثر سرعت :

$$\frac{d(U_{1\to2})}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0.098(m) , \quad v_{max} = 0.8(m/s)$$

حداکثر نیروی فشاری زمانی است که، سرعت صفر می شود (اما جایی که ب)
تعادل استاتیکی داریم : $a=0$)

$$T_1+U_{1\to2}=T_2$$

$$\frac{1}{2}mv_{\max}{}^2=mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max}=\frac{1}{2g}v_{\max}{}^2 \Rightarrow T_{\max}=k.h_{\max}$$

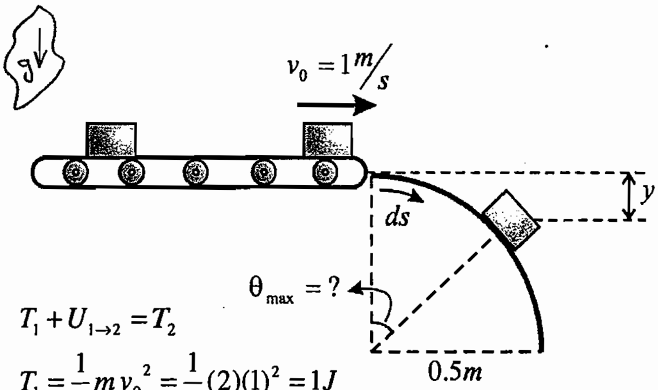
$$v_2=0$$

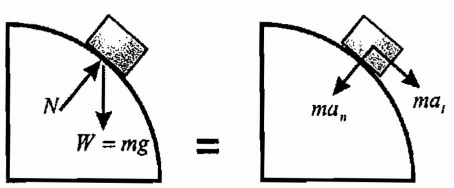
$$4(9.81)x-200x^2=0$$

$$x=0.196\,(m)$$

$$F_{\max}=2(9.81)+400(0.196)=98.1(N)$$

مثال: بسته های 2kg توسط یک تسمه نقاله به روی یک رمپ دایره ای شکل با سرعت 1m/s می افتند. مطلوبست، حداکثر زاویه ای که این بسته ها از سطح جدا می شوند؟





$$T_1+U_{1\to2}=T_2$$

$$T_1=\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}(2)(1)^2=1J$$

$$U_{1\to2}=W.y=mgr(1-\cos\theta_{\max})=g(1-Cos\theta_{\max}) \quad , \quad T_2=v^2$$

$$\Rightarrow 1+mgr(1-\cos\theta_{\max})=v^2 \Rightarrow 1+(1-Cos\theta_{\max})g=v^2 \quad (I)$$

: $\cancel{N}=0 \Rightarrow N-W\cos\theta_{\max}=-ma_n$ هنگام جدا شدن $\Rightarrow -mgCos\theta_{\max}=-m\frac{v^2}{0.5}$ (II)

$$(I,II) \Rightarrow \cos\theta_{\max}=\frac{2v^2}{g} \Rightarrow \theta_{\max}=42.7^\circ$$

$N=0 \leftarrow$ شرط جدا شدن

2nd $\quad +\searrow \ \sum F_t=+\searrow ma_t$

$$w\sin\theta=ma_t=m\frac{dv}{dt} \longrightarrow mg\sin\theta=m\frac{dv}{dt} \longrightarrow g\sin\theta=\frac{dv}{dt}=a\,ds=a_t(0.5d\theta)$$

$r d\theta$

$$\longrightarrow v\,dv=g\sin\theta(0.5)d\theta \longrightarrow \int_1^v v\,dv=\int_0^{\theta_{\max}}0.5g\sin\theta\,d\theta$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}v^2\Big|_1^v=-0.5g\cos\theta\Big|_0^{\theta_{\max}} \longrightarrow \frac{1}{2}(v^2-1)=\frac{-1}{2}g(\cos\theta_{\max}-1)$$

$$\longrightarrow v^2-1=-g(\cos\theta_{\max}-1) \longrightarrow v^2=1+(1-\cos\theta_{\max}) \quad (I)$$

مثال : در شکل زیر مطلوب است توان موتورسیستم بالابر اگر

الف : اگر آسانسور با سرعت ثابت 15 ft/s به سمت بالا در حرکت باشد .

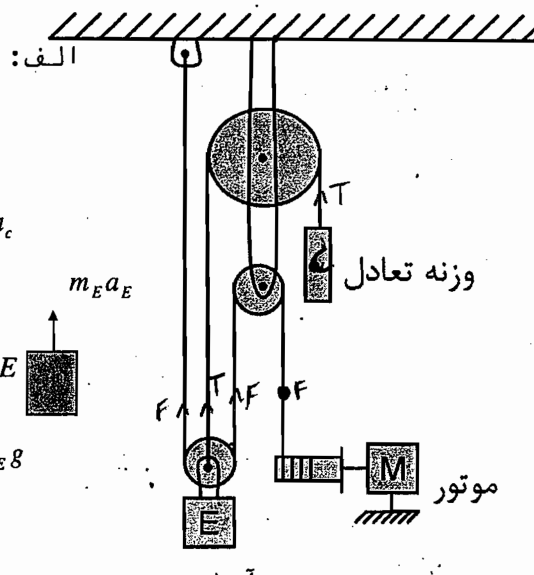
ب : اگر آسانسور با سرعت 15 ft/s و شتاب $3\ ft/s^2$ به سمت بالا در حرکت باشد.

$(W_c = 2200\,lb, W_E = 5000\,lb, \frac{ft}{s^2}$ g=32.2)

$P = \sum \vec{F}.\vec{v} \Rightarrow P = F.v$

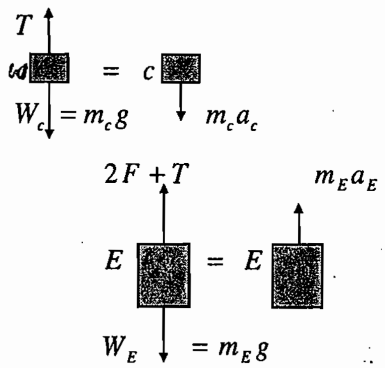
حل:

الف:



$m_c g - T = m_c a_c$

① $2200 - T = \frac{2200}{g} a_c$



$2F + T - m_E g = m_E a_E$

② $2F + T - 5000 = \frac{5000}{g} a_E$

$v_E = cte,\ a_E = 0 \Rightarrow a_c = 0$

$$\begin{cases} 2200 - T = 0 \Rightarrow T = 2200\ (lb) \\ 2F + T - 5000 = 0 \Rightarrow F = 1400\ (lb) \end{cases}$$

طول کابل متصل به وزنه تعادل ثابت است :

$\uparrow a_E = a_c \downarrow$

طول کابل تا نقطه M نیز ثابت است :

$2X_E + X_m = cte. \Rightarrow\ 2v_E \uparrow = v_m \downarrow \Rightarrow v_m = 30\frac{ft}{s}$

$P_m = (1400)(30) = 42000(lb\cdot\frac{ft}{s}) \Rightarrow P_m = \frac{42000}{550} = 76.4(HP)$ Horse power

ب :

$v_E = 15(\frac{ft}{s})\uparrow, a_E = 3(\frac{ft}{s^2})\uparrow \Rightarrow a_c = 3(\frac{ft}{s^2})\downarrow$

با توجه به قسمت الف داریم :

$F = 1735.4(lb)$, $v_m = 30(\frac{ft}{s})\downarrow$, $P_m = (1735.4)(30) = 52062(lb\frac{ft}{s}) \Rightarrow P_m = \frac{1735.4 \times 30}{550} = 94.7(HP)$

اصل حفظ انرژي (مکانیکي) :

شرط استفاده از اصل حفظ انرژی آن است که نیروهای ما پایستار و یا محافظه کار باشند. (Conservative Force)

نیروهای ما به دو صورت قابل تقسیم بندی هستند : **نیروهاي پایستار** و **غیر پایستاریا نا پایستار** .

اصطکاک $U_{friction} = \int \vec{F}_k . d\vec{r}$

۱:کار نیروهای غیرپایستار به مسیرحرکت بستگی دارد. (غیر پایستار)

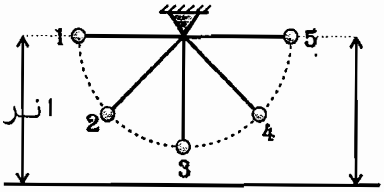
وزن $U_{وزن} = \int \vec{W}.d\vec{r} = \Delta y W$

۲:کار نیروهای پایستار به مسیرحرکت بستگی ندارد و فقط متناسب با جابجایی است. (پایستار)

انـرژی پـتـانـسيـل :

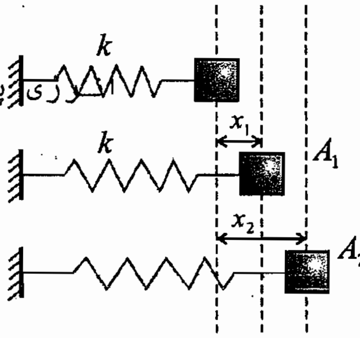
انـرژی پـتـانـسيـل نـيـروی وزنـی

$$U_{1\to2} = -\Delta y W = W y_1 - W y_2$$
$$V_g = W y$$



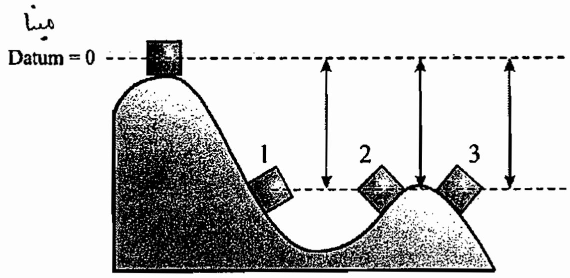
انـرژی پـتـانـسيـل نـيـروی فـنـر

$$U_{1\to2} = \frac{1}{2}k x_1^{\,2} - \frac{1}{2}k x_2^{\,2}$$
$$V_e = \frac{1}{2}k x^2$$
$$U_{1\to2} = V_1 - V_2$$
$$V_1 = V_{g_1} + V_{e_1}\ ,\ V_2 = V_{g_2} + V_{e_2}$$



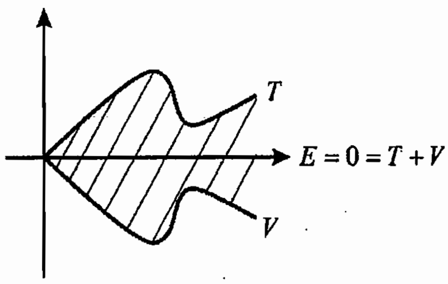
اصل حفظ انـرژی مـكـانـيـكـی :

$$\left.\begin{aligned} T_1 + U_{1\to2} &= T_2 \\ T_1 + V_1 - V_2 &= T \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$E_1 = E_2 = E_3 = \ldots = E_n \quad ; \quad E = T + V$$



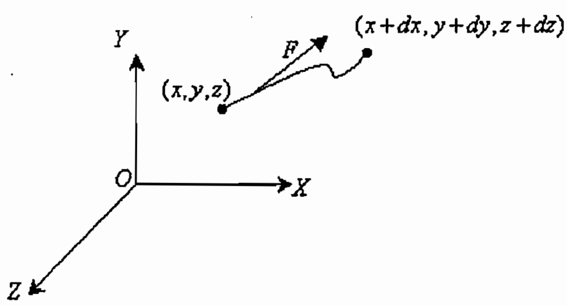
$$V = cte. \Rightarrow V_1 = V_2 = V_3$$
$$E_1 = E_2 = E_3 = \ldots$$

اگـر انـرژي مـكـانـيـكي ثـابـت بـاشـد، آنـگـاه E روي مـحـور y = 0 در نظر $T + V = 0$ گـيـريـم و T قـريـنـه ي U مـي شـود، زيـرا:



تـابـع پـتـانـسيـل :

$$V = V_g + V_e$$
$$U_{1\to2} = V_1 - V_2 = -\Delta V \quad , \quad U = V(x, y, z)$$
$$dU = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz)$$
$$dU = -dV(x, y, z) = -dV \quad \Rightarrow \quad dU = -dV$$
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$



$$dU = \vec{F}.d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

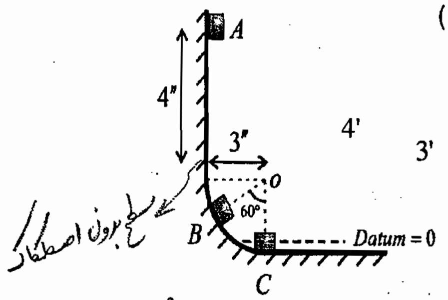
$$dU = -dV = -[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} = -F_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -F_y \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -F_z \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F} = -grad\vec{V}\,,\ \vec{F} = -\nabla\vec{V}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

توجه: هرگاه $\vec{F} = -\nabla\vec{V}$ شود, می توانیم از اصل حفظ انرژی مکانیکی استفاده کنیم .

برای نیروهای وزنی: $V = Wy\ ,\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = W\ ,\vec{F} = -\vec{W}$

مثال: اگر جسم از نقطه A رها شود، مطلوب است نیروي وارده از سطح به جسم در نقاط B و C ؟ (W=1.25 lb)



حل:

$$\begin{cases} N_B - W\cos 60 = ma_n = m\frac{v_B^2}{\rho} \Rightarrow N_B - 1.25(0.5) = \frac{1.25}{32.2}(\frac{v_B^2}{3}) \\ N_C - W = ma_n = m\frac{v_C^2}{\rho} \Rightarrow N_C - 1.25 = \frac{1.25}{32.2}(\frac{v_C^2}{3}) \end{cases}$$

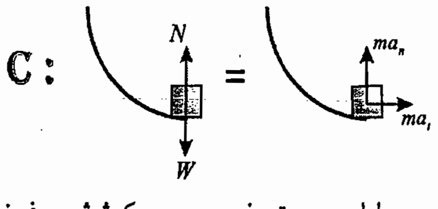
$$E_A = E_B = E_C \Rightarrow T_A + V_A = T_B + V_B = T$$

$$E_A = T_A + V_A = 0 + 7W = 7(1.25)\ ,\ E_B = 7$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1.25}{32.2})v_B^2 + 3(.5)(1.25) = \frac{1}{2}(\frac{1.25}{32.2})v_C^2 = 7(1.25)$$

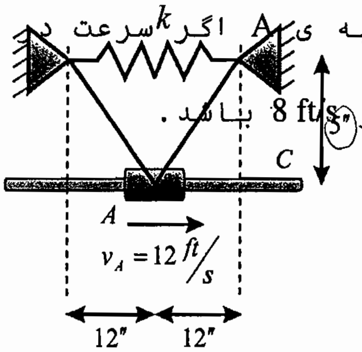
$$v_B^2 = 11g \Rightarrow N_B = 5.21(lb)$$
$$v_C^2 = 14g \Rightarrow N_C = 7.08(lb)$$

C :



مثال: مطلوبست نیروی کششی فنر در موقعیت اولیه ی A اگر سرعت در نقطه ی A برابر 12 ft/s و سرعت طوقه در نقطه ی C برابر 8 ft/s باشد .

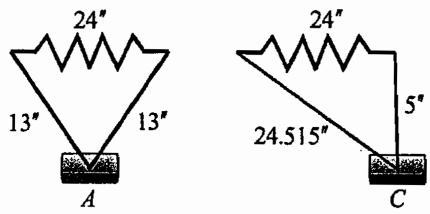
(g=32.2 و W=2 lb , K=3 lb/in) $\frac{ft}{s^2}, g = 32.2\times 12\frac{in}{s^2}$



حل :

$$\begin{cases} L_1 = 26+24 = 50 \Rightarrow x_1 = 50 - L \\ L_2 = 53.5'' \Rightarrow x_2 = 53.5 - L \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = 3.5'' \quad (1)$$

طول اولیه



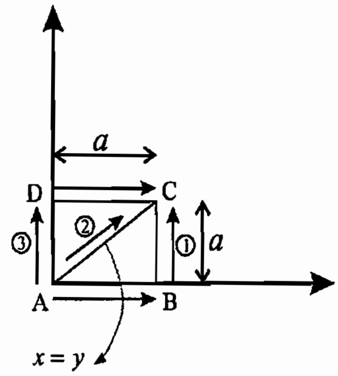
$$E_A = E_C \Rightarrow T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{g}\right)(144\times 12) + 1.5x_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{g}\right)(64\times 12) + 1.5x_2^2 \quad (2)$$

$$x_1 = 1.08(in) \quad , \quad F_1 = 3.24(Ib)$$

$$\frac{1.08}{12} = 0.09'$$

مثال : اگر $\vec{F} = x^2 y\vec{i} + xy^2\vec{j}$ روي ذره P درصفحه x-y اثر كند، ثابت كنيد كه نيروي $\vec{F}$ نیروی غیر محافظه كار است و همچنين كار نيروی F روی ذره P را كه از نقطه A به نقطه ی C حركت می كند را حساب كنيد.



حل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\vec{F} = -grad\vec{V}$$

$$\vec{F}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = x^2 y \qquad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = x^2 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = y^2 \end{cases} , x^2 \neq y^2$$

$$\vec{F}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = y^2 x$$

پس نيروي F نيروي غير محافظه كار است.

$$\oint F.dr = 0 \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \ldots$$

$$U_{A\to C} = \int_A^C \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^C F_x\,dx + F_y\,dy = \int_0^a F_x\,dx + \int_0^a F_y\,dy = \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{2}$$

روش ديگر :

$$U_{A\to C} = U_{A\to B} + U_{B\to C}$$

$$U_{A\to B} = \int_0^a F_x\,dx + \int_0^0 F_y\,dy = 0$$

$$U_{B\to C} = \int_0^0 F_x\,dx + \int_0^a F_y\,dy = a\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{a^4}{3}$$

با فرض اينكه پايستار باشد مسير حركت تفاوتي ندارد :

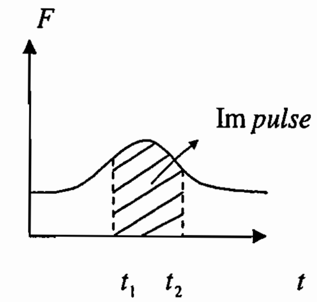
$$U_{A\to C} = U_{A\to B} + U_{B\to C} \Rightarrow \frac{a^4}{2} = 0 + \frac{a^4}{3} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

پس نيروي ما ناپايستار است.

اصل نیروي محرک و ممنتوم و حرکت خطي: (Impulse & Momentum)

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F}dt=md\vec{v} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=m\int_{v_1}^{v_2}d\vec{v}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

$$m\vec{v}_2=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt+m\vec{v}_1$$



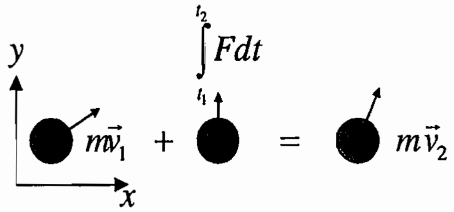
$$\vec{I}_{imp_{1\to2}}=(\int_{t_1}^{t_2}F_x dt)\vec{i}+(\int_{t_1}^{t_2}F_y dt)\vec{j}+(\int_{t_1}^{t_2}F_z dt)\vec{k}$$

اصل ایمپالس و ممنتوم

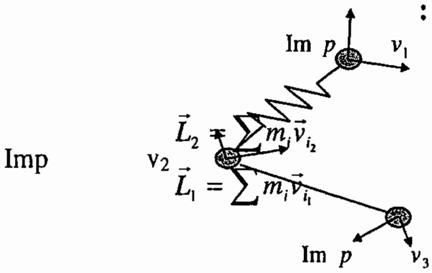
$$\vec{L}_2=\vec{I}_{mp_{1\to2}}+\vec{L}_1$$

واحد ایمپالس: N.s : (SI) lb.s : (FPS)

$$\begin{cases} mv_{2_x}=\int_{t_1}^{t_2}F_x dt+mv_{1x} & \xrightarrow{+} \\ mv_{2_y}=\int_{t_1}^{t_2}F_y dt+mv_{1y} & \overset{+}{\uparrow} \end{cases}$$



چندین جرم :



نیروی محرک / ایمپالس

$$\text{Im}\, p_{1\to2}=\sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt$$

$$\Rightarrow \quad \sum m_i\vec{v}_{i1}+\sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt=\sum m_i\vec{v}_{i2}$$

حفظ ممنتوم سیستم:

$$\sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt=0 \quad \Rightarrow \quad \sum m_i\vec{v}_{i_1}=\sum m_i\vec{v}_{i_2}$$

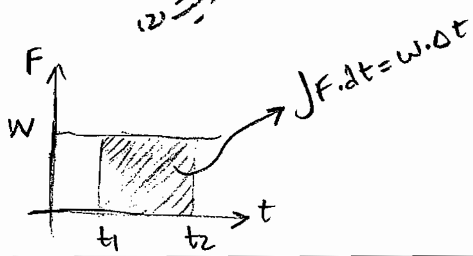
مومنتوم در موقعیت (1)

مومنتوم در موقعیت (2)

$$\vec{L}_1+\vec{I}mp_{1\to2}=\vec{L}_2$$

$$Imp_{1\to2}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$$

واحد ایمپالس شبیه واحد مومنتوم
(N.S)
(lb.S)



روش سوم در حل مسائل دینامیکی

روش اول: قانون دوم نیوتن

روش دوم: کار و انرژی

انواع مسائل برخورد

۱- مسائل ضربه اي ($\Delta t \approx 0.01s$)

درمسائل ضربه ای از اثر وزن اصطکاک و نیروی فنر صرفه نظر مي گردد :

$$t = dt \cong 0 \Rightarrow \int w dt \approx 0 \quad , \quad \int F_e dt \approx 0 \quad , \quad \int F_\mu dt \approx 0$$

ایمپالس

اصطکاک ایمپالس فنر ایمپالس وزن

۲- مسائل غیر ضربه اي

در مسائل غیر ضربه اي :

$$\Delta t > 0 \Rightarrow \int w dt \neq 0 \quad , \quad \int F_e dt \neq 0 \quad , \quad \int F_\mu dt \neq 0$$

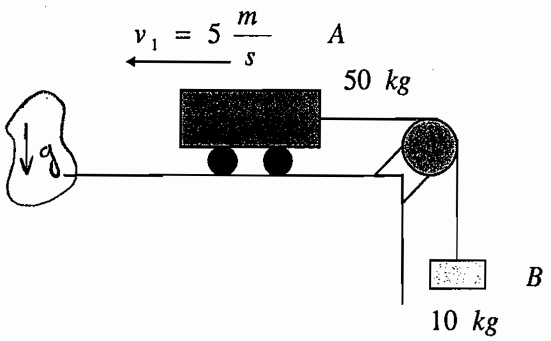
مثال: اگر از اصطکاک صرفنظر شده باشد, مطلوب است مدت زماني که A به سرعت :

الف: صفر مي رسد .

؟

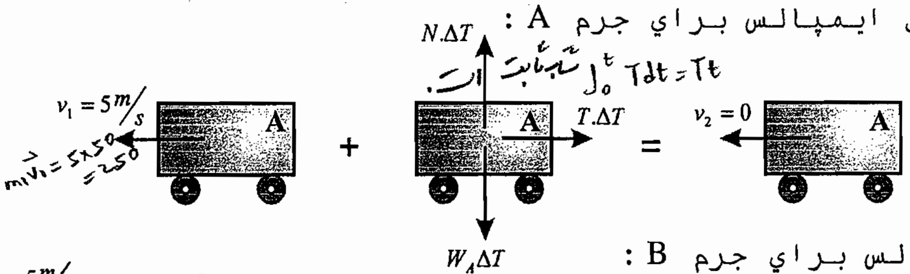
ب: به 5m/s طرف راست مي رسد ؟ (از اصطکاک صرفنظر شده است.)

(زمانی که سرعت سیستم مجدداً 5m/s ← می‌شود؟)

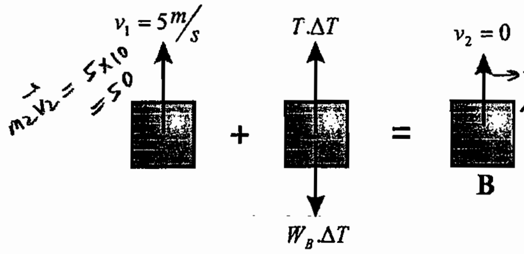


حل:

الف : اصل ایمپالس براي جرم A :



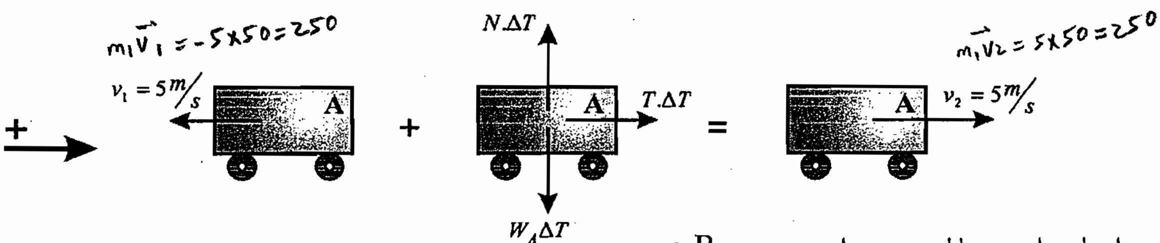
اصل ایمپالس براي جرم B :



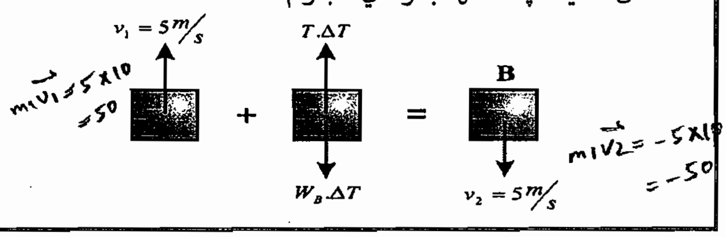
$$\left.\begin{array}{l} \overset{+}{\rightarrow} 1. \quad -250 + T\Delta t = 0 \\ \uparrow + 2. \quad 50 + (T - 98.1)\Delta t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{30}{g}$$

$\Delta t = 3.06\,(s)$

ب: اصل ایمپالس براي جرم A :



اصل ایمپالس براي جرم B :



براي جرم B نيز داريم : $(v'_B)_t = (v_B)_t$

اصل ايمپالس و ممنتوم براي كل سيستم :

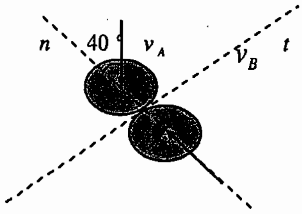
$$\xrightarrow{+n} m_A(v'_A)_n \pm m_B(v'_B)_n = m_A(v_A)_n \pm m_B(v_B)_n$$

رابطه سرعت هاي نسبي :

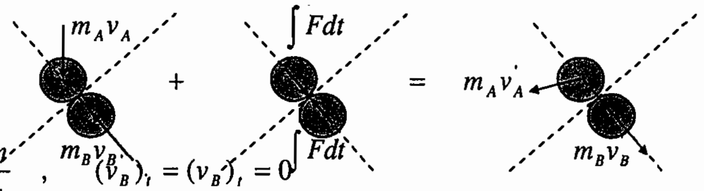
$$e[(v_A)_n - (v_B)_n] = (v_B)_n - (v'_A)_n$$

مثال : سرعت هاي نهايي دو جسم را بعد از برخورد بيابيد ؟(e=0.75)

$$(\quad m_A = 2.5kg \ , \ m_B = 1.5kg \ , \ v_A = 8\frac{m}{s} \ , \ v_B = 6\frac{m}{s} \ )$$



حل:



$$(v'_A)_t = (v_A)_t = 8\sin(40°) = 5.15\frac{m}{s} \quad , \quad (v'_B)_t = (v_B)_t = 0$$

$$+n\nwarrow: m_A(v'_A)_n - m_B(v'_B)_n = -m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n \Rightarrow 2.5(v'_A)_n - 1.5(v'_B)_n = -6.325$$

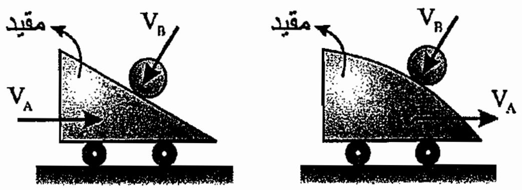
$$e = \frac{(v'_B)_n + (v'_A)_n}{-(v_A)_n + (v_B)_n} \quad \Rightarrow \quad (v'_B)_n + (v'_A)_n = 9.1$$

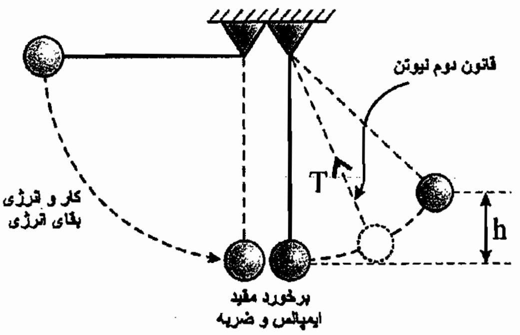
$$(v'_A)_n = 1.83\,(\frac{m}{s})\nwarrow \ , \ {v'_A}^2 = (v'_A)_n^2 + (v'_A)_t^2 \Rightarrow v'_A = 5.46\,(\frac{m}{s}) \ , \alpha = \tan^{-1}(\frac{(v'_A)_t}{(v'_A)_n}) = 20.4°$$

$$v'_B = (v'_B)_n = 7.27\,(\frac{m}{s})\ 40°$$

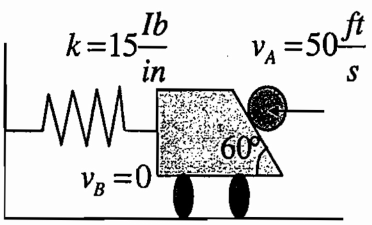
برخورد مقيد

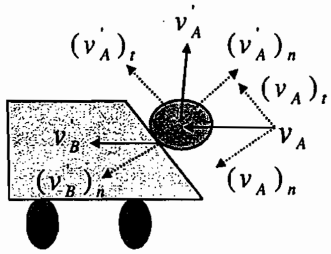
راستاى حركت پس از برخورد مشخص مى باشد.
همان روابط قبل صحيح است اما به جاي اصل ايمپالس و ممنتوم در جهت n ، در جهت عمود به ايمپاس با مقدار نامعلوم (مثلا عكس العمل زمين) رابطه را مي نويسيم.





مثال : مطلوبست حداكثر تغيير طول فنر وقتى جسم A به B برخورد كند ؟ (e=0.75, k=15 lb/in)

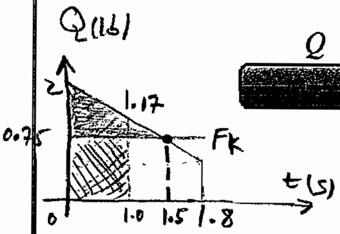


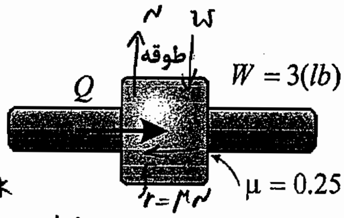


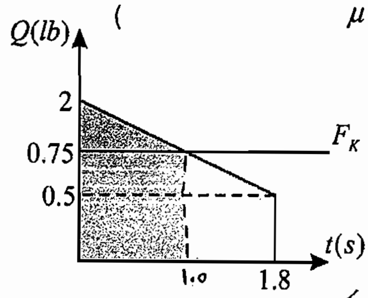
$$\begin{aligned}&1.\quad -250+T\Delta t=250\\&2.\quad 50+(T-98.1)\Delta t=-50\end{aligned}\Bigg\}\Rightarrow \Delta t=\frac{60}{g}$$

$\Delta t = 6.12s$

مثال : مطلوبست سرعت طوقه اگر از حال سكون رها شده باشد در: الف) t=1s   ب) t=2 s   ج) حداكثر سرعت طوقه
($\mu=0.25$, W=3 lb)







حل:

شروع حركت از حال سكون

$$\vec{L}_2=\sum \vec{I}_{mp_{1\to2}}+\vec{L}_1\quad,\quad \vec{L}_1=mv_1=0\quad,\sum I_{mp}=\int_0^t Qdt-\int_0^t F_k dt$$

$(Imp_{1\to2})_Q-(Imp_{1\to2})_{F_k}$

الف: t=1

$$0+I_{mp_{1\to2}}=\frac{3}{g}v\quad,\quad \int_0^1 Qdt=\frac{1}{2}(2+1.167)=1.58\,(lb*s)\quad,\quad \int_0^1 F_k dt=0.75(1)=0.75\,(lb*s)$$

$$\Rightarrow\ v=8.91\,(ft/s)$$

ب: t=2

$$0+I_{mp_{1\to2}}=\frac{3}{g}v\quad,\quad \int_0^2 Qdt=\frac{1}{2}(2+0.5)(1.8)=2.25\,(lb*s)\quad,\quad \int_0^2 F_k dt=0.75(2)=1.5(lb*s)$$

$$\Rightarrow\ v=8.05\,(ft/s)$$

براي وقتي كه v=0 است، t=?

$$2.25-0.75t=0\quad,\quad t=3(s)$$

در ثانيه سوم متحرك از حركت باز مى ايستد و زمانى سرعت ماكزيمم مى شود كه $\int_0^t Fdt$ و $\int_0^t Qdt$ بيشترين اختلاف را داشته باشند, يعنى در محل تلاقى دو نمودار با هم در t=1.5 s.

$$v_{max}=\frac{1}{2}(2-0.75)(1.5)/(\frac{3}{32.2})=10.06\,\frac{ft}{s}$$

@ t=1s ⟶ v=8.94 m/s

@ t=2s ⟶ v=8.05 m/s

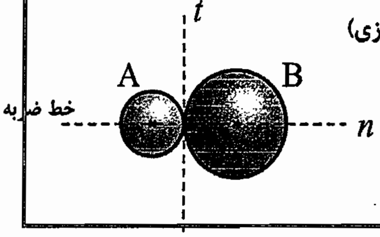
$\vec{0}+\vec{Imp}_{1\to2}=\vec{0}$

$2.25-0.75t=0\longrightarrow t=3(s)$

برخورد (ضربه) Impact

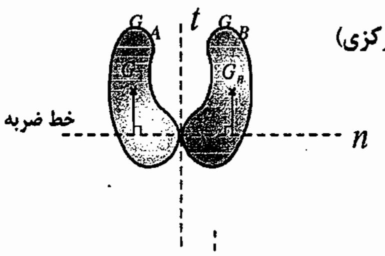
(مركزى)

۱.مركزي (مراكز جرم روي خط ضربه قرار دارند.)   تماس مادی



اجسام صلب

۲. غیر مرکزي (مراکز جرم روي خط ضربه قرار ندارند.)

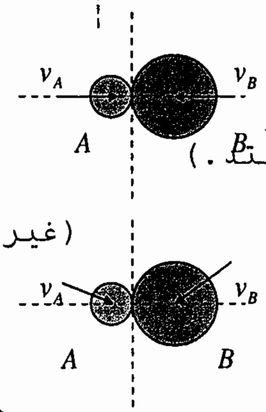


برخورد مرکزي

۱.مستقیم (سرعت روی خط ضربه می افتند.)

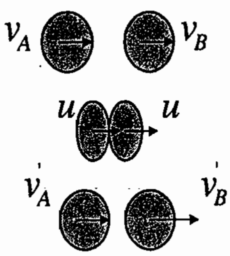
۲.مایل(حداقل یکی از سرعت ها روی خط نیفتد.)

(غیر مستقیم)



*ایمپالس در جهت مماس بر سطوح و وزن که صرف‌نظر می‌شود.

⇐ فقط ایمپالس در جهت n مد نظر است.



پیش از برخورد

تغییر شکل

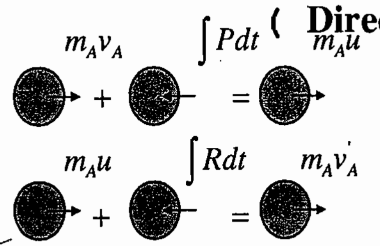
بازگشت

برخورد مستقیم مرکزي (Direct Central Impact)

اصل ایمپالس و ممنتوم

مرحله تغییر شکل (Deformation)

مرحله بازگشت (Restitution)



برای کل سیستم

$n \xrightarrow{+}$ $m_Av_A + m_Bv_B + 0 = m_Av'_A + m_Bv'_B$ از رابطه سرعت نسبی

و

برای A

$$\left.\begin{aligned} m_Av_A - m_Au &= \int Pdt \\ m_Au - m_Av'_A &= \int Rdt \end{aligned}\right\} \Rightarrow e = \frac{\int Rdt}{\int Pdt} = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

برای A

ضریب بازگشت $0 \le e \le 1$

براي جسم B نیز به همین ترتیب داریم : $e = \dfrac{v'_B - u}{u - v_B}$

با حذف u از این دو رابطه ، رابطه سرعت هاي نسبی بدست می‌آید $e(v_A - v_B) = v'_B - v'_A$

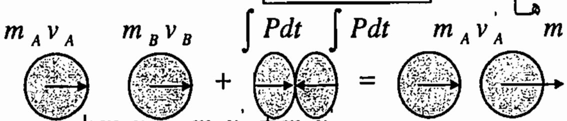
ضریب بازگشت (استرداد) :

به جنس جسم و هندسه مسئله بستگی دارد.

$$\boxed{e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}} = \frac{\int Rdt}{\int Pdt}$$ (Coefficient of Restitution)

اصل ایمپالس و ممنتوم براي کل جرم ها

کل سیستم



$$m_Av_A \pm m_Bv_B = m_Av'_A \pm m_Bv'_B$$

$$v'_B - v'_A = e\,(v_A - v_B)$$

سرعت نسبی پس از برخورد — سرعت نسبی قبل از برخورد

حالات خاص

۱) ضربه از نوع کاملا ارتجاعی (الاستیک) : (e=1)

$$\begin{cases} v_A - v_B = v'_B - v'_A \\ m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \end{cases}$$

ΔT=0 اتلاف انرژی

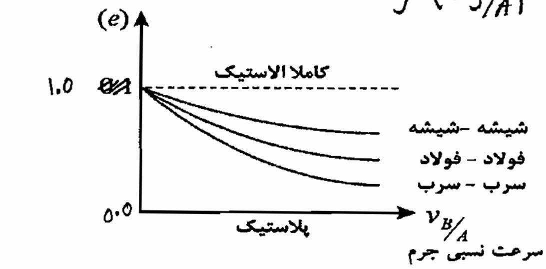
$$\frac{1}{2}m_A v_A^{2} + \frac{1}{2}m_B v_B^{2} = \frac{1}{2}m_A v_A'^{2} + \frac{1}{2}m_B v_B'^{2}$$: $T_1 = T_2$ حفظ انرژي

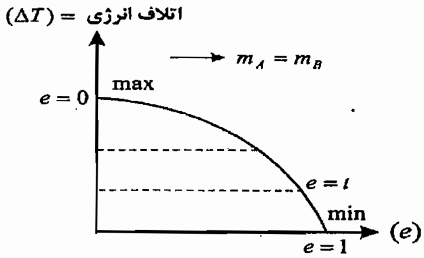
۲)ضربه از نوع کاملاً خمیری وپلاستیک(مومسان) : (e=0)

$e = 0 \Rightarrow v'_B - v'_A = 0 \Rightarrow v'_A = v'_B = v'$ حداكثر اتلاف انرژي Plastic Impact

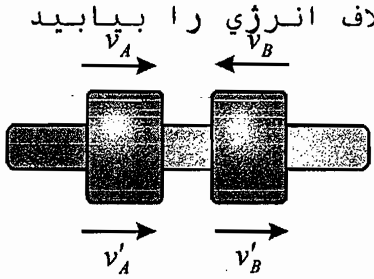
حالت كلي : ۰<e<۱ در سرعت هاي نسبي متفاوت ، اين ضريب فرق دارد.

$e = f(V_{B/A})$





مثال : دو جسم A وB به هم برخورد مي كنند اتلاف انرژي را بيابيد ؟



$v_A = 6\frac{ft}{s}$, $v_B = 4\frac{ft}{s}$ $e = 0.8$, $W_A = 5lb$, $W_B = 3lb$,

حل:

جهت فرضي

اصل ايمپالس و ممنتوم براي كل جرم ها :

$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow (5/g)(6) - (3/g)(4) = (5/g)v'_A + (3/g)v'_B$

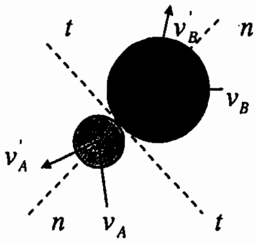
رابطه سرعت هاي نسبي

$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \Rightarrow (0.8)(6-(-4)) = (v'_B - v'_A)$

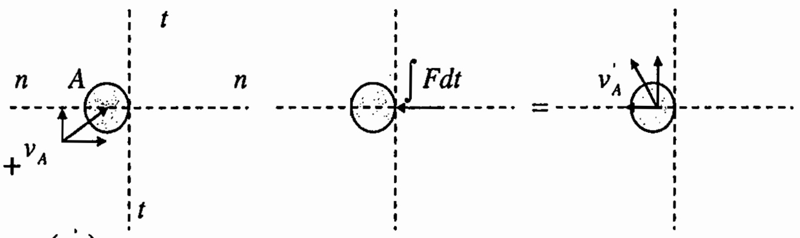
$\Delta T = T - T' = 3.54 - 2.49 = 1.05$ (ft.lb)
اتلاف انرژی سیستم

$$\begin{cases} 5v'_A + 3v'_B = 18 \\ -v'_A + v'_B = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_A = 0.75(\frac{ft}{s}) \leftarrow \\ v'_B = 7.25(\frac{ft}{s}) \rightarrow \end{cases} \Rightarrow \Delta T = 1.05 (ft.lb)$$

برخورد مركزي مايل (Oblique Central Impact)



اصل ايمپالس و ممنتوم براي جرم A :



+

$+t \qquad m_A(v_A)_t + 0 = m_A(v'_A)_t$

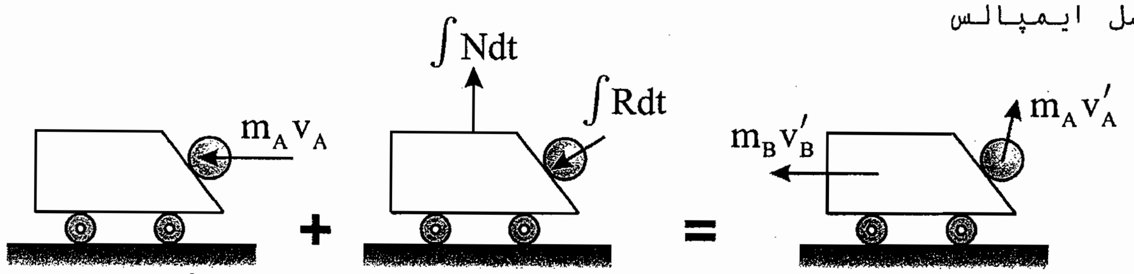
سرعت در راستاي عمود بر ضربه ثابت است (حفظ ممنتوم A در جهت t) $(v'_A)_t = (v_A)_t$

$v_A = 50\frac{ft}{s}$, $W_A = 1.5(lb)$, $W_B = 4(lb)$

بخاطر برخورد از اعمال اصطکاک صرف نظر می‌شود.

$$e = \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n} \Rightarrow 0.866 v'_B + (v'_A)_n = 32.476$$

اصل ایمپالس



$(v'_A)_t = (v_A)_t = 25(\frac{ft}{s})$ I

$$\left.\begin{array}{l} \overset{+x}{\leftarrow} : m_A v_A + 0 = -m_A (v'_A)_x + m_B v'_B \\ (v'_A)_x = (v'_A)_n \cos(30°) - (v'_A)_t \cos 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{75}{g} = \frac{4}{g} v'_B - \frac{1.5}{g}\left[(v'_A)_n \cos(30°) - 12.5\right] \quad II$$

$I, II \Rightarrow v'_B = 19.222(\frac{ft}{s})$

اصل کار و انرژي :

$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$

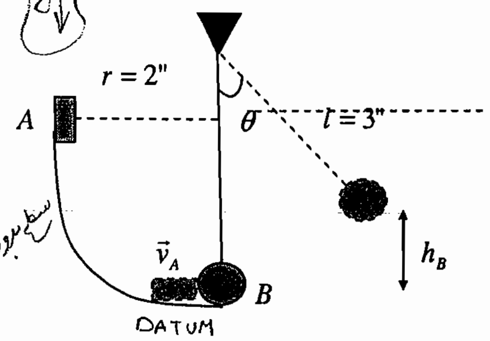
$T_2 = \frac{1}{2} m_B v'^2_B$ $\qquad U_{1\to 2} = -\frac{1}{2} K x^2_{max}$ $\qquad T_1 = 0$

$$\frac{1}{2} m_B (v'_B)^2 = \frac{1}{2} k x_{max}^2 \underset{g = 32.2\frac{ft}{s^2}}{\overset{k = 15\frac{lb}{in} = 180\frac{lb}{ft}}{\Rightarrow}} x_{max} = .505(ft) = 6.06(in)$$

اصل حفظ انرژی : $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

مثال : در شکل مقابل اگر بسته A رها شود، مطلوبست حداکثر مقدار θ و حداکثر کشش طناب ؟

($e = 0.9, W_A = 2.5\ lb, W_B = 4 lb$ اگر)

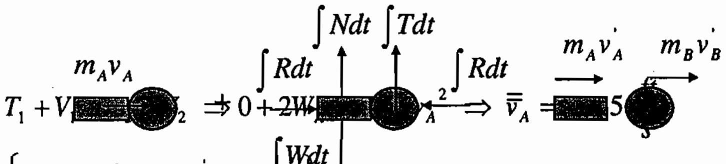


سطح بدون اصطکاک

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\longrightarrow \vec{v}_A = 11.35\ (ft/s \rightarrow)$

حل :



$$\left.\begin{cases} m_A v_A + 0 = m_A v'_A + m_B v'_B \\ e = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \end{cases}\right\} \Rightarrow v'_B = 8.3(\frac{ft}{s}), v'_A = -1.9(\frac{ft}{s})$$

اصل پایستگي انرژي بعد از برخورد

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

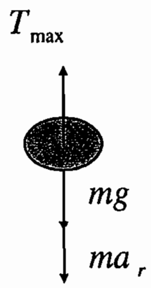
$E_1 = E_2$

$\frac{1}{2}m(v_B')^2 = m_B g h_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{(v_B')^2}{2g} = 1.1(ft)$

$\cos\theta_{max} = \frac{3-1.1}{3} \Rightarrow \theta_{max} = \arccos\frac{1.9}{3} = 50.70^\circ$

$T_{max} = m_B g + m_B \frac{(v_B')^2}{r}$ $\quad +\uparrow \sum F_y = m a_y$

$T_{max} = 6.85(lb)$

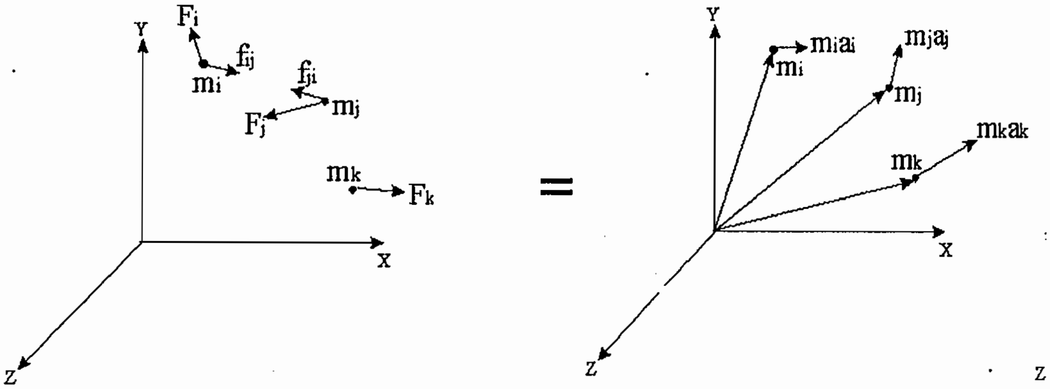


فصل چهارم:

سیستم نقاط مادي

F_i = نيروي خارجي كه به جرم m_i اثر مي كند.

f_{ji}= نيروي داخلي از i به j و $f_{ij} = -f_{ji}$

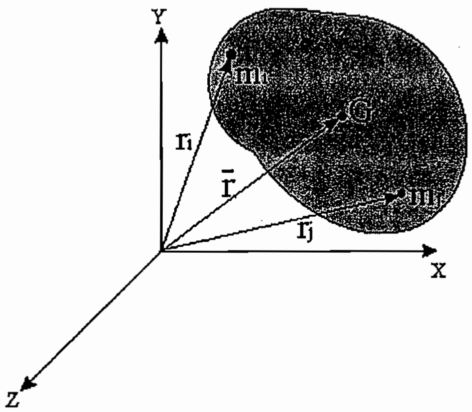


اصل دوم نيوتن براي جرم i :
$$\begin{cases} \vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ij} = m_i \vec{a}_i \\ \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \end{cases}$$

براى سيستم نقاط مادي : ($i:1 \rightarrow n$)

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = \sum_i m_i \vec{a}_i \quad , \quad \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = 0 \\ \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i (\vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}) = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) \quad , \quad \sum_i (\vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a}_i \\ \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \end{cases}$$

حركت مركز جرم سيستم نقاط مادي



$$\vec{\bar{r}} = \vec{r}_G$$
$$\vec{\bar{r}} = \bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k}$$
$$m\vec{\bar{r}} = \sum m_i \vec{r}_i$$
$$m = \sum m_i$$

موقعيت مركز جرم :

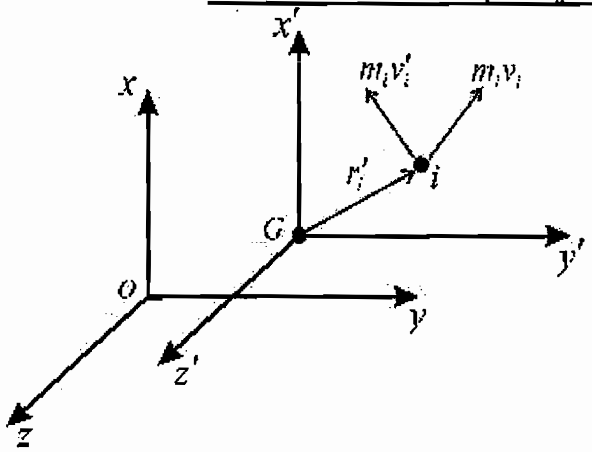
$$\rightarrow \bar{x} = \frac{1}{m}\left(\sum m_i x_i\right), \ \bar{y} = \dots \quad , \quad \bar{z} = \dots$$

سرعت جرم i $:\bar{v}_i =$ $\rightarrow m\vec{\bar{v}} = \sum m_i \bar{v}_i \Rightarrow \vec{\bar{v}} = \bar{v}_x \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} + \bar{v}_z \vec{k}$

شتاب جرم i $:\vec{a}_i =$ $\rightarrow m\vec{\bar{a}} = \sum m_i \vec{a}_i \Rightarrow \vec{\bar{a}} = \bar{a}_x \vec{i} + \bar{a}_y \vec{j} + \bar{a}_z \vec{k}$

$$\left.\begin{cases} \vec{L} = m\vec{\bar{v}} = \sum m_i \bar{v}_i \Rightarrow \vec{\bar{v}} = \bar{v}_i \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} + \bar{v}_z \vec{k} \\ \dot{\vec{L}} = m\vec{\bar{a}} \\ \sum \vec{F} = \dot{\vec{L}} \end{cases}\right\} \rightarrow \sum \vec{F} = M\vec{\bar{a}} = \dot{\vec{L}}$$

ممنتوم زاويه اى سيستم نقاط مادى :



دستگاه ثابت: $Oxyz$

دستگاه متحرك: $Gx'y'z'$

سرعت نسبي نقطه i نسبت به نقطه Gسرعت $\vec{v}_i' =$

مركز جرم $=\vec{\bar{v}}$سرعت مطلق نقطه i $\vec{v}_i =$

$v_i = \vec{\bar{v}} + \vec{v}_i'$

ممنتوم زاويه اي سيستم نقاط مادي نسبت به نقطه G (در دستگاه متحرك

$$\left.\begin{cases} \vec{H}_G' = \sum(\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') \rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \frac{d}{dt}(\vec{H}_G') = \frac{d}{dt}\left(\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'\right) \rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \sum(\vec{v}_i' \times m_i \vec{v}_i') + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i' \\ \sum(v_i' \times m_i \vec{v}_i') = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i'$$

شتاب مطلق نقطه i $= \vec{a}_i = \vec{a}_i' + \vec{\bar{a}}$

$$\left.\begin{cases}\dot{\vec H}'_G=\sum\vec r_i'\times m_i\left(\vec a_i-\vec{\vec a}\right)\Rightarrow\dot{\vec H}'_G=\sum\vec r_i'\times m_i\vec a_i-\left(\sum m_i\vec r_i'\right)\times\vec{\vec a}\\ \left(\sum m_i\vec r_i'\right)\times\vec{\vec a}=0\end{cases}\right\}\rightarrow\dot{\vec H}'_G=\sum\vec r_i'\times m_i\vec a_i$$

$$\left.\begin{matrix}\dot{\vec H}'_G=\sum\vec r_i'\times m_i\vec a_i\\ \sum\vec F_i+\sum\vec f_{ij}=m_i\vec a_i\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{cases}\dot{\vec H}'_G=\sum\vec r_i'\times\vec F_i+\sum\vec r_i'\times\sum\vec f_{ij}\\ \sum\vec r_i'\times\sum\vec f_{ij}=0\end{cases}\right\}\rightarrow\dot{\vec H}'_G=\sum\vec r_i'\times\vec F_i=\sum\vec M_G\qquad(1)$$

$\vec H_G=$ (ممنتوم زاويه اي سيستم نسبت به نقطه ي G (دردستگاه ثابت)

$$\left.\begin{cases}\vec H_G=\sum\vec r_i'\times m_i\vec v_i\\ \vec v_i=\vec v_i'+\vec{\vec v}\end{cases}\right\}\rightarrow\vec H_G=\sum\vec r_i\times m_i(\vec v_i'+\vec{\vec v})\rightarrow\begin{cases}\vec H_G=\sum\vec r_i'\times m_i\vec v_i'+(\sum m_i\vec r_i')\times\vec{\vec v}\\ \left(\sum m_i\vec r_i'\right)\times\vec{\vec v}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\vec H_G=\sum\vec r_i'\times m_i\vec v_i'=\vec H'_G\xrightarrow{(1)}\dot{\vec H}'_G=\sum\vec M_G=\dot{\vec H}_G$$

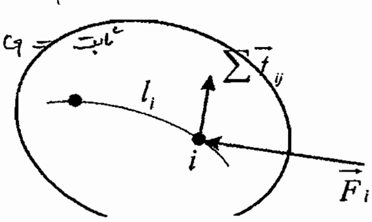
درواقع مشتق مومنتوم زاویه‌ای در دستگاه متحرک و ثابت برابر است با مجموع گشتاور

حالت خاص $\sum M_G=0$

$\dot H_G=\dot H'_G=0$

$\rightarrow H_G=$ ثابت

$\begin{cases}H_{G_1}=H_{G_2}\\ H'_{G_1}=H'_{G_2}\end{cases}$



كار نيرو :

براي جرم i كار نيروها

$$(U_{1\to2})_i=\int_{l_i}\left(\vec F_i+\sum\vec f_{ij}\right).\,d\vec r_i$$

براي سيستم نقاط كل كارنيرو ها را بدست مي آوريم

$$U_{1\to2}=\sum_{i=1}^{n}(U_{1\to2})_i\rightarrow U_{1\to2}=\int_{l_i}\sum_i\left(\vec F_i+\sum_j\vec f_{ij}\right).\,d\vec r_i=\int_{l_i}\sum_i(\vec F_i.\,d\vec r_i)+\int_{l_i}\sum_i\sum_j(\vec f_{ij}.\,d\vec r_i)$$

كار كل = (external) كارنيروي خارجي + (internal) كارنيروي داخلي

$$\Rightarrow u_{1\to2}=(u_{1\to2})_{\text{int}}+(u_{1\to2})_{ext}$$

توجه : در مسائلي كه اتصال بين دو جرم غير ارتجاعي باشد :

$(u_{1\to2})_{int}=0$

$\overset{\circ}{T}$ = حرکت دورانی (نسبت به مرکز جرم)

انرژی جنبشی

$$\begin{cases}\begin{cases}T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \quad , \quad (\vec{v}_i=\vec{v}_i'+\vec{\bar{v}}) \rightarrow T=\frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i'+\vec{\bar{v}}).(\vec{v}_i'+\vec{\bar{v}})=\frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2+\frac{1}{2}(\sum m_i)\bar{v}^2+(\sum m_i\vec{v}_i').\vec{\bar{v}} \\ (\sum m_i\vec{v}_i')=0 \quad , \quad m=\sum m_i\end{cases} \\ \Rightarrow \quad T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2+\frac{1}{2}m\bar{v}^2\end{cases}$$

$\bar{T}$ = (انتقالی) حرکت مرکز جرم

$T=\overset{\circ}{T}+\bar{T}$

انرژي جنبشي انتقالي +

انرژي جنبشي حركت دوراني = انرژي جنبشي سيستم

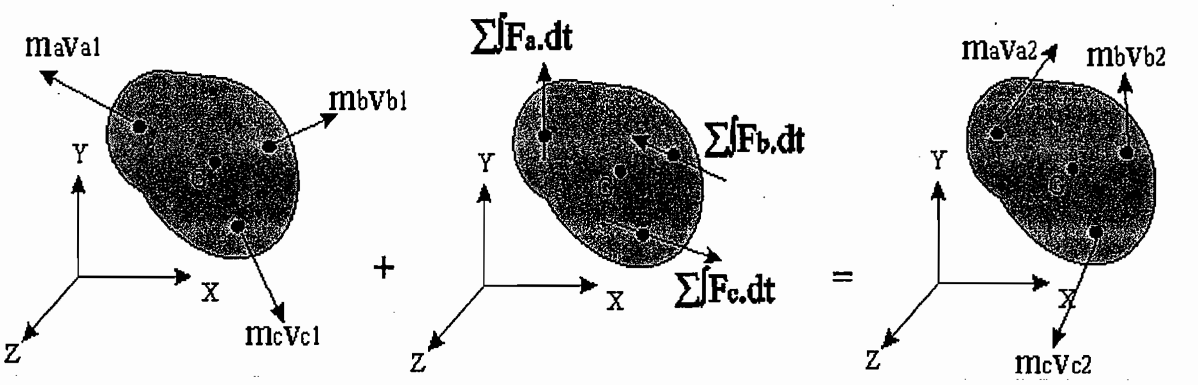
اصـــــــــل كـــــــــار و انـــــــــرژى :

$T_1+U_{1\to2}=T_2$

اصل حفظ انرژى :

$T_1+V_1=T_2+V_2$

اصل ايمپالس و ممنتوم :



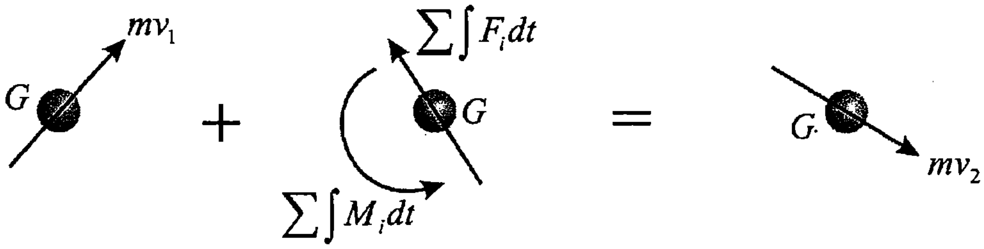
اصـــل ايمپـــالس و :
ممنتوم خطي (I)

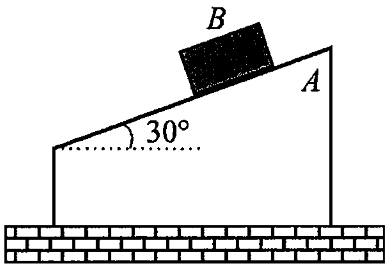
$$\begin{cases}\vec{L}_1+\overrightarrow{IMP}=\vec{L}_2 & (I) \\ (\vec{H}_O)_1+\sum\int\vec{M}_O dt=(\vec{H}_O)_2 & (II) \\ (\vec{H}_O)_1=\sum\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_{i1}\end{cases}$$

(II) اصل ايمپالس و ممنتوم زاويه اي:

(*) اگـر بـه مـرکـز جـرم مـنـتقـل کـنيـم يـا مـرکـز جـرم مـشخص بـود:

-

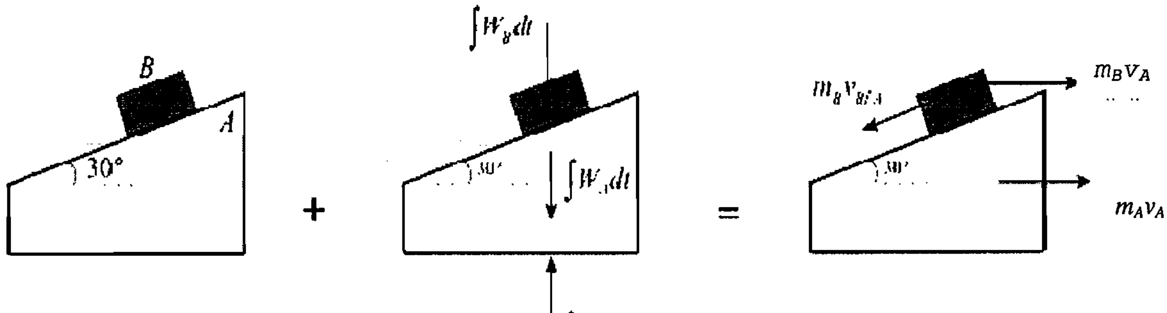




مثـال: در شکـل مقـابـل پـس از ايـنکه بـلـوك B، ۳ فـوت روي بـلـوك A حرکـت کـرد ، مـطلـوبـست سرعـت B نـسبـت بـه A.

$W_A = 25\ lb\ , W_B = 15\ lb\ , v_B = 0$

حل:

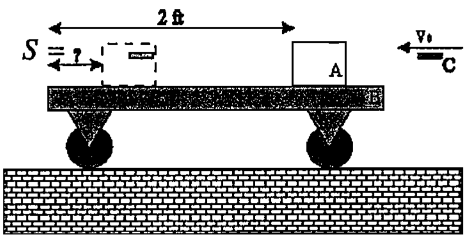


$\int N dt$ ايـمـپـالـس و مـمـنـتـوم بـراي سيـستم

$$\overset{+}{\rightarrow}\quad 0+0=-m_B v_{B/A}\cos 30^o + m_B v_A + m_A v_A \quad\Rightarrow\quad v_A = 0.32\ v_{B/A}$$

$$\begin{cases} T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \\ T_1 = 0\ ,\ V_1 = 0 \\ T_2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 \\ V_2 = -W_B 3 Sin\, 30 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B\left(v^2{}_A + v^2{}_{B/A} - 2v_A v_{B/A}\cos 30^o\right) - \frac{1}{2}W_B \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow\qquad v_A = 3.71\ ft/s\ \rightarrow\ ,\qquad v_{B/A} = 11.59\ ft/s\ \swarrow$$

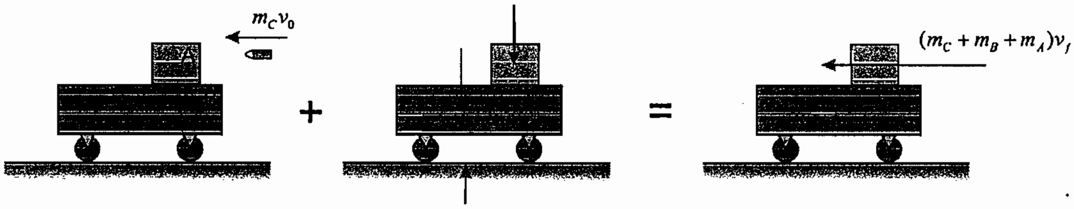


مثـال: گـلـولـه C بـا سرعـت v_0 بـه سمـت جسم A شـلـيـك مـی گـردد و در آن فـرو مـی رود و بـاعـث حرکـت جسم A روی گـاری B و حرکـت گـاری مـی گـردد. مـطلـوبـست :

الـف- سرعـت نـهـايـي کـل سيـستم. ب- مـوقـعـيـت نـهـايـي A نـسبـت بـه B .

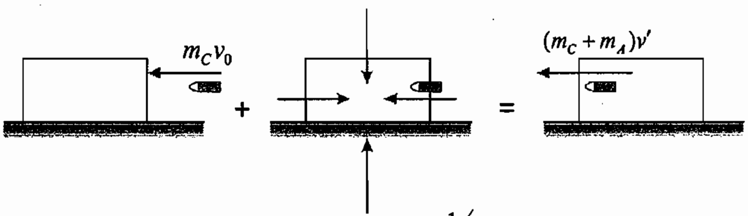
$W_A = 10\ lb$, $W_B = 8\ lb$, $W_C = \frac{1}{16}\ lb = 1$اونس , $v_0 = 1600\ ft/s$, $\mu_k = 0.5$

حل: با فرض اینکه جرم A به همراه C روی B باقی بماند و در نهایت سرعت همگی یکسان باشد ، از اصل ایمپالس و ممنتوم برای سیستم استفاده کرده و سرعت نهایی را محاسبه می کنیم :



$$\Rightarrow m_C v_0 = (m_C + m_A + m_B)\, v_f \Rightarrow v_{final} = \frac{\frac{1}{16}(1600)}{\frac{1}{16}+10+8} \Rightarrow v_f = 5.54\ ft/s$$

سرعت گلوله و بلوك A (v') را پس از فرو رفتن گلوله در A ، حساب می کنیم :



$$m_C v_0 + 0 = (m_C + m_A)\, v' \Rightarrow v' = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+10}(1600) = 9.94\ ft/s$$

براي بدست آوردن كار نيروي اصطكاك، اصل كار و انرژي را از زماني كه گلوله در A نشست تا زماني كه بلوك A نسبت به B متوقف شد، مي نويسيم :

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_C + m_A)v'^2 = 15.43\ ft.lb \quad , \quad T_2 = \frac{1}{2}(m_C + m_A + m_B)v_f^2 = 8.6\ ft.lb$$

$$U_{1\to 2} = (U_{1\to 2})_{friction} = -0.5\left(\frac{1}{16}+10\right)(\Delta x)$$

$$T_2 - T_1 = U_{1\to 2}$$

$$\Rightarrow 8.6 - 15.43 = -0.5\left(\frac{1}{16}+10\right)(\Delta x) \to \Delta x = 1.36\ ft$$

مسافتي كه A روي B مي پيمايد : Δx ⇐

موقعيت نهايي نسبت به انتهاي B $S = 2 - 1.36 = 0.64\ ft$

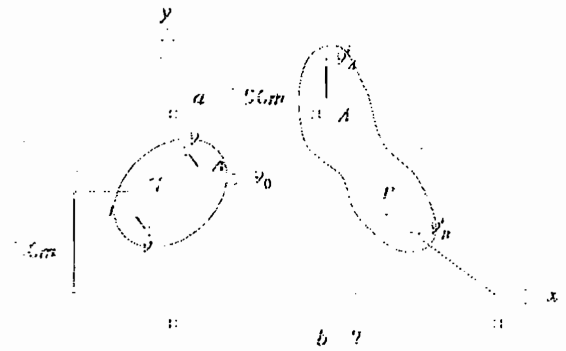
با توجه به موقعیت نهایی A که روی B باقی می ماند ، پیش فرض اولیه صحیح و نتایج درست می باشند .

مثال: در صفحه بدون اصطکاک مقابل ، $m_A = 2kg$ و $m_B = 1kg$. در لحظه اولیه داریم:

$\vec{H}_G = 3\ kg.m^2/s$ ↻

$\vec{v}_0 = 1.5\vec{i} + 1.2\vec{j}\ m/s$

$T' = 18.75\ J$



که T' در آن انرژي جنبشي سيستم نسبت به مرکز جرم (دوران) آن است. اگر در لحظه بعدی جرم A دارای سرعت v'_A (که موازي محور Y ها است) گردد، مطلوسبت: v'_A , v'_B , b .

حل

حفظ ممنتوم سيستم

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$
$$\vec{L}_1 = m\bar{v}_1 = (1+2)\,(1.5\vec{i} + 1.2\vec{j})$$
$$\vec{L}_2 = (2)(v'_A\vec{j}) + (v'_{Bx}\vec{i} - v'_{By}\vec{j}) \qquad (1)$$
$$4.5\vec{i} + 3.6\vec{j} = v'_{Bx}\vec{i} + (2v'_A - v'_{By})\,\vec{j}$$

$v'_{Bx} = 4.5\ m/s \xrightarrow{(1)} 2v'_A - v'_{By} = 3.6\ m/s\ (2)$ و نیز حفظ انرژي جنبشی $T_1 = T_2$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &T_1 = \frac{1}{2}m\bar{v}_0^2 + T' = \frac{1}{2}(3)\left((1.5)^2 + (1.2)^2\right) + 18.75 = 24.28\ J \\ &T_2 = \frac{1}{2}m_A v_A'^2 + \frac{1}{2}m_B\left(v_{Bx}'^2 + v_{By}'^2\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_A^2 + \frac{1}{2}\left(v_{Bx}'^2 + v_{By}'^2\right) = 24.28 \quad (3)$$

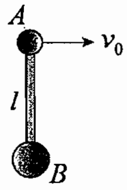
$$(1),(2),(3) \rightarrow \begin{cases} v'_A = 3.2\ m/s & \uparrow \\ v'_{Bx} = 4.5\ m/s & \rightarrow \\ v'_{By} = 2.8\ m/s & \downarrow \end{cases}$$

حفظ ممنتوم زاويه اي سيستم نسبت به O :

$$(\vec{H}_O)_1 = (\vec{H}_O)_2$$
$$(\vec{H}_O)_1 = \vec{H}_G + \vec{\bar{r}} \times m\bar{v}_O \Rightarrow (\vec{H}_O)_1 = 3\vec{k} + (1.6\vec{j}) \times (3)\,(1.5\vec{i} + 1.2\vec{j}) = 3\vec{k} - 3(1.5)(1.6)\vec{k} = -4.2\vec{k}$$
$$(\vec{H}_O)_2 = (2)\,a\bar{v}'_A\vec{k} - b(v'_{By})\,(1)\,\vec{k}$$
$$\Rightarrow -4.2 = (2)\,av'_A - bv_{By} \quad \Rightarrow b = 5.98\ m$$

مثال : در صفحه افقی بدون اصطکاک اگر به A سرعت $\vec{v}_0$ بدهیم مطلوبست سرعت جرم ها پس از $90^\circ, 180^\circ$ دوران میله .

$m_A = m \ , m_B = 2m$

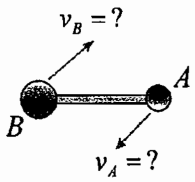


حل :

$$m\bar{Y} = \sum m_i y_i \rightarrow \bar{Y} = \frac{m(l)+2m(0)}{m+2m} = \frac{l}{3}$$

$$m\vec{\bar{v}} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B \Rightarrow 3m\vec{\bar{v}} = m\vec{v}_A + 2m\vec{v}_B \Rightarrow 3m\vec{\bar{v}} = m\vec{v}_0 + 0 \Rightarrow \bar{v} = {}^{v_0}\!/_3$$

در حالت دوران 90° داریم :



$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{L}_1 = m_A\vec{v}_0 = (mv_0)\vec{i} \\ \vec{L}_2 = m_A(-v_{AX}\vec{i} - v_{AY}\ \vec{j}) + m_B(v_{BX}\vec{i} + v_{BY}\vec{j}) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} v_0 = -v_{AX} + 2v_{BX} & (1) \\ 0 = -v_{AY} + 2v_{BY} & (2) \end{Bmatrix}$$

$$T_1 = T_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 = {}^1\!/_2 mv_0^2 \\ T_2 = {}^1\!/_2 m(v_{AX}^2 + v_{AY}^2) + {}^1\!/_2 (2m)(v_{BX}^2 + v_{BY}^2) \end{Bmatrix} \rightarrow v_0^2 = v_{AX}^2 + v_{AY}^2 + 2v_{BX}^2 + 2v_{BY}^2 \quad (3)$$

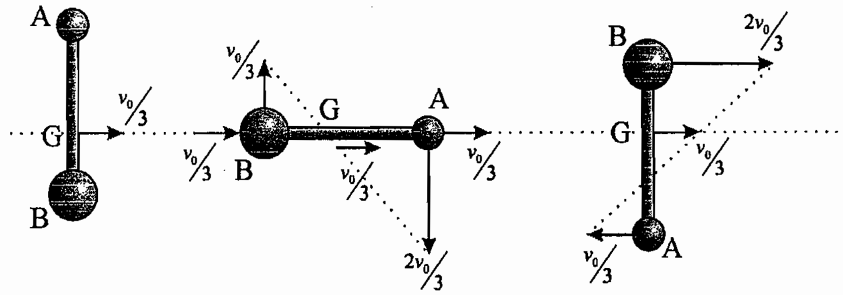
$$(H_G)_1 = (H_G)_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} (H_G)_1 = {}^2\!/_3 lm(v_0) \\ (H_G)_2 = {}^2\!/_3 lm(v_{AY}) + {}^1\!/_3 l(2m)(v_{BY}) \end{Bmatrix} \rightarrow v_0 = v_{AY} + v_{BY} \quad (4)$$

$$(1),(2),(3),(4) \rightarrow \begin{cases} v_{AX} = {}^{v_0}\!/_3 \rightarrow & v_{BX} = {}^{v_0}\!/_3 \rightarrow \\ v_{AY} = {}^{2v_0}\!/_3 \downarrow & v_{BY} = {}^{v_0}\!/_3 \uparrow \end{cases}$$

در حالت 180° نیز داریم :

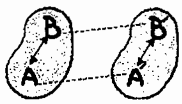
دوران 180°

دوران 90°

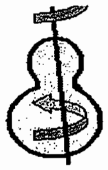


فصل پنجم: سینماتیك اجسام صلب

حرکت اجسام صلب (KINEMATICS OF RIGID BODIES)

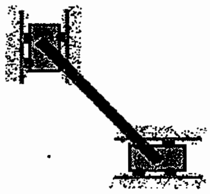


۱) حرکت انتقالی :

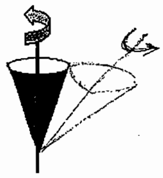


۲) حرکت دورانی حول محور ثابت :

۳) حرکت عمومی در صفحه : ترکیب حرکت انتقالی و دوران



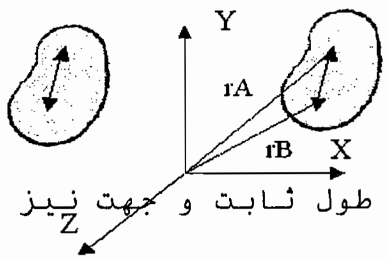
۴) حرکت دورانی حول نقطه



۵) حرکت کلی : غیر از حالات خاص قبل

۱) حرکت انتقالی

TRANSATIONAL



$$\vec{r}_B=\vec{r}_{A/B}+\vec{r}_A$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_B)=\frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B})+\frac{d}{dt}(\vec{r}_A)$$

برای حرکت انتقالی چون طول ثابت و جهت نیز ثابت است : $\frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B})=0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r}_B)-\frac{d}{dt}(\vec{r}_A)=0 \;\Rightarrow\; \vec{V}_B-\vec{V}_A=0 \;\Rightarrow\; \vec{V}_B=\vec{V}_A$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{V}_B)=\frac{d}{dt}(\vec{V}_A) \Rightarrow \vec{a}_B=\vec{a}_A$$

بنابراین همانند یك نقطه مادي فرض مي شود ، یعني سرعت و شتاب همه نقاط یکسان است.

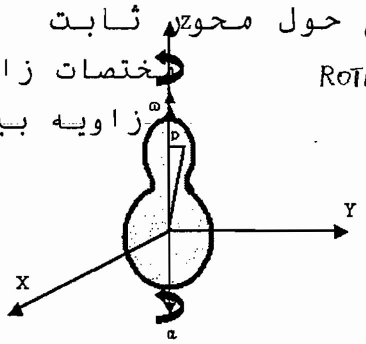
۲) حرکت دورانی حول محور ثابت

ROTATION ABOUT FIXED AXIS

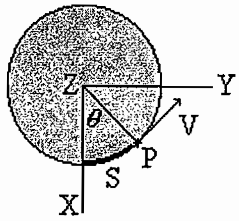
θ: مختصات زاویه ای نسبت به صفحه ی xz

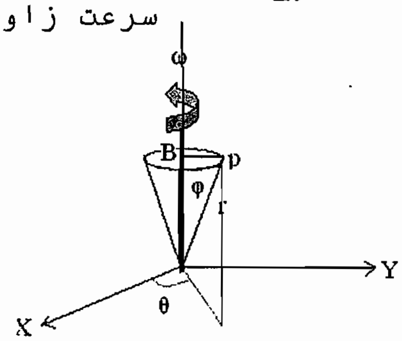
φ: زاویه بین بردار موقعیت و محور z

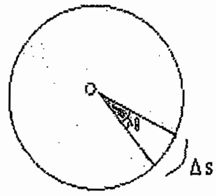
$\vec{r}$: بردار موقعیت نقطه P



$$V=\frac{\Delta s}{\Delta t}\ ,\ \begin{cases}\Delta s=(BP)\Delta\theta\\ BP=(OP)\sin\varphi=r\sin\varphi\Rightarrow V=BP\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\Rightarrow V=(r\sin\varphi)(\dot\theta)=\vec\omega\times\vec r\\ \dot\theta=\frac{d\theta}{dt}=\omega\ \text{سرعت زاویه ای}\end{cases}$$







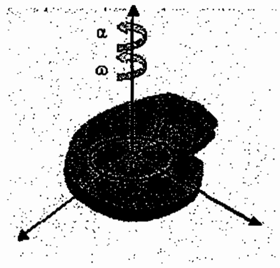
$$\begin{cases}\vec a=\frac{d\vec V}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec\omega\times\vec r)\Rightarrow\vec a=\frac{d}{dt}(\vec\omega)\times\vec r+\vec\omega\times\frac{d}{dt}(\vec r)\\ \ddot\theta=\dot\omega=\frac{d\omega}{dt}=\alpha\\ \frac{d}{dt}(\vec r)=\vec v=(\vec\omega\times\vec r)\end{cases}\Rightarrow\vec a=\vec\alpha\times\vec r+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)\Rightarrow\begin{cases}a_n=\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)=\vec\omega\times\vec v\\ a_t=\vec\alpha\times\vec r\end{cases}$$

شتاب زاویه ای

حالت خاص (حرکت دورانی یک صفحه نازک حول محور عمود بر صفحه)

$$\vec V=\vec\omega\times\vec r\Rightarrow V=r\omega$$

$$\vec a=\vec\alpha\times\vec r+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)\Rightarrow\begin{cases}a_t=r\alpha\\ a_n=r\omega^2\end{cases}$$



معادلات دوران محور ثابت

x	θ
$V=\frac{dx}{dt}=\dot x$	$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot\theta$
$a=\frac{dV}{dt}=\dot V=\ddot x$	$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\dot\omega=\ddot\theta$
$a=V\left(\frac{dV}{dx}\right)$	$\alpha=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$

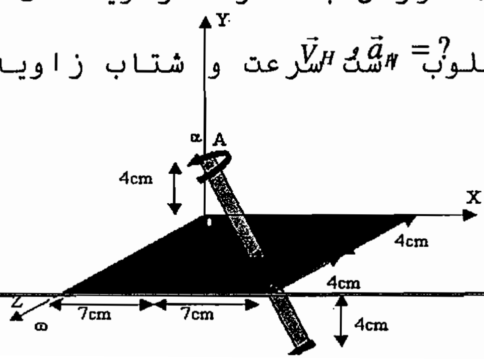
حالتهاي خاص :

حرکت دورانی با سرعت زاویه ای ثابت: $\omega=$ cte و $\alpha=0$ ، $\theta=\omega t+\theta_0$

حرکت دورانی با شتاب زاویه ای ثابت: $\alpha=$ cte و $\omega=\omega_0+\alpha t$ ، $\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

مثال : صفحه حول محور AC در حال دوران با سرعت زاویه ای $18\frac{rad}{s}$ و شتاب زاویه ای $\alpha=45\frac{rad}{s^2}$ است. مطلوب $\vec V_H,\vec a_H=?$ سرعت و شتاب زاویه ای نقطه H . $(\bar r_{H/C}=4\vec j)$

حل :



$$\vec V = \vec\omega\times\vec r \qquad , \qquad \vec a = \vec\alpha\times\vec r + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$$

$$\vec r = \vec r_{H/B} = 7\vec i + 4\vec k$$

$$\begin{cases} \omega = 18 \ (\frac{rad}{s}) \\ \vec\omega = \omega\vec\lambda_{AC} \\ \lambda_{AC} = \dfrac{14\vec i - 8\vec j + 8\vec k}{\sqrt{14^2+8^2+8^2}} = \dfrac{1}{18}(14\vec i - 8\vec j + 8\vec k) \end{cases} \qquad \Rightarrow \vec\omega = 14\vec i - 8\vec j + 8\vec k \ (\frac{rad}{s})$$

$$\vec\alpha = \alpha\vec\lambda_{CA} = -\alpha\vec\lambda_{AC} \Rightarrow \vec\alpha = \frac{-45}{18}(14\vec i - 8\vec j + 8\vec k)$$

$$\vec V_H = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 14 & -8 & 8 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -32\vec i + 56\vec k \ (\frac{cm}{s}) \qquad \vec a_H = \frac{-45}{18}\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 14 & -8 & 8 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 14 & -8 & 8 \\ -32 & 0 & 56 \end{vmatrix}$$

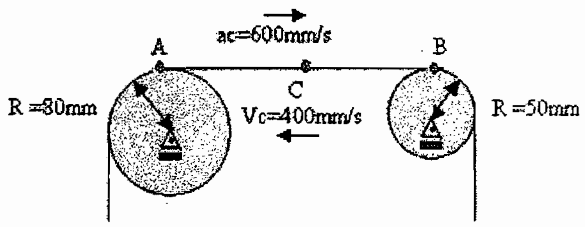
$$\Rightarrow \vec a_H = -386\vec i - 1040\vec j - 396\vec k \ (\frac{cm}{s^2})$$

مثال : با توجه به حرکت کابل قرقره B به سمت قرقره A مطلوب است :

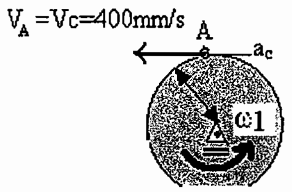
$\omega_1 = ?$ $\qquad \omega_2 = ?$

$\alpha_1 = ?$ $\qquad \alpha_2 = ?$

$a_A = ?$ $\qquad a_B = ?$

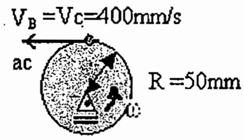


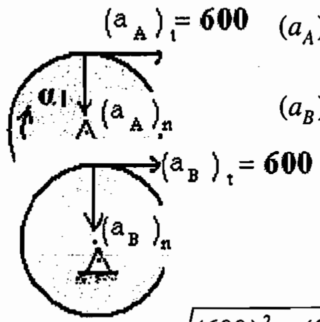
حل :



$$V_A = r_A\omega_1 \Rightarrow 400 = 80\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = 5\ \frac{rad}{s}$$

$$V_B = r_B\omega_2 \Rightarrow 400 = 50\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 8\ \frac{rad}{s}$$





$$(a_A)_t = r_A\alpha_1 \Rightarrow 600 = 80\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 7.5\ \frac{rad}{s^2}$$

$$(a_B)_t = r_B\alpha_2 \Rightarrow 600 = 50\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 12\ \frac{rad}{s^2}$$

$$(a_A)_n = r_A\omega_A^{\ 2} = 80(5)^2 = 2000 \ \ mm/s^2$$

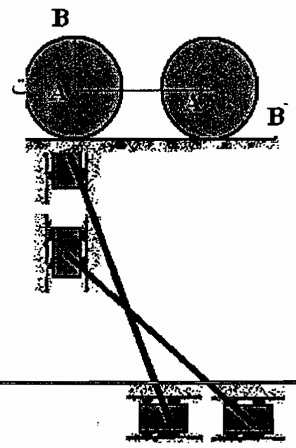
$$(a_B)_n = r_B\ \omega^2 = 50(8)^2 = 3200 \ \ mm/s^2$$

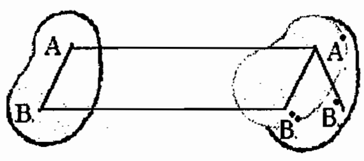
$$\Rightarrow a_A = \sqrt{(600)^2 + (2000)^2} = 2088\ mm/s^2 \quad 73.3^\circ$$

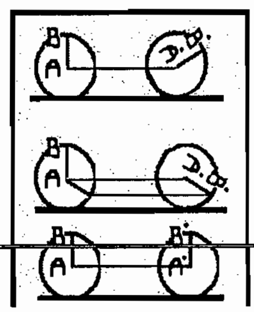
$$\Rightarrow a_B = \sqrt{(600)^2 + (3200)^2} = 3256\ mm/s^2 \quad 79.4^\circ$$

۳) حرکت کلی در صفحه (حرکت عمومی در صفحه)

از ترکیب حرکت انتقالی و حرکت دورانی حول ... آید.







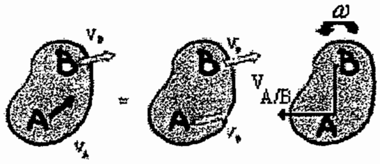
حرکت انتقالی در صفحه + حرکت دورانی در صفحه= حرکت کلی در صفحه

سرعت نسبی و مطلق در حرکت صفحه ای

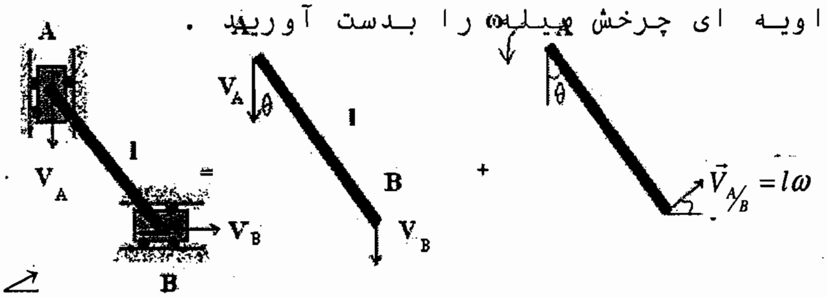
$\vec{V}_B \rightarrow$ انتقال A بوسیله سرعت B

$\vec{V}_{A/B} \rightarrow$ دوران A حول نقطه B $\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$

$\vec{V}_{A/B} = l\omega$



مثال : جسم A با سرعت V_A در حال حرکت به سمت پائین می باشد ، سرعت زاویه ای چرخش میله را بدست آورید .

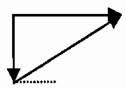


حل :

$[\vec{V}_B \rightarrow] = [V_A \downarrow] + [l\omega \nearrow]$

$V_A = V_B \tan\theta$

$\omega = \dfrac{V_A}{l \sin\theta}$

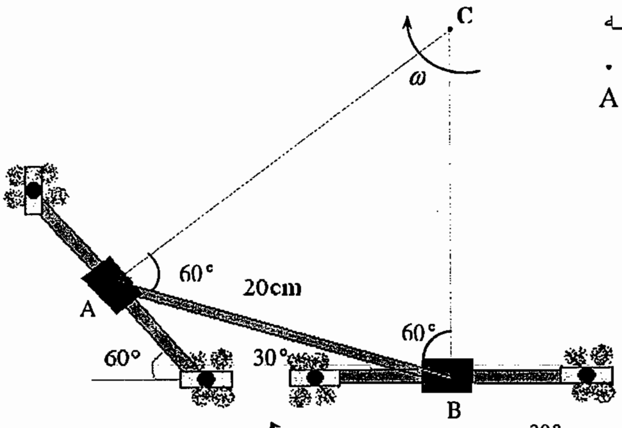


V_B

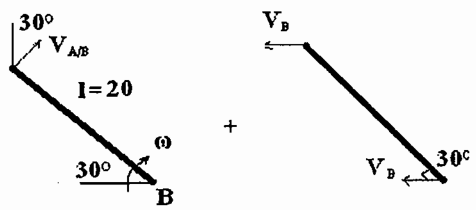
V_A

θ

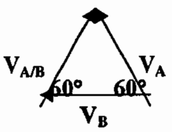
مثال : طوقه B با سرعت $25\ cm/s$ به سمت چپ در حال حرکت است . با توجه به شکل سرعت طوقه A را بدست آورید ؟



حل : حرکت مقید

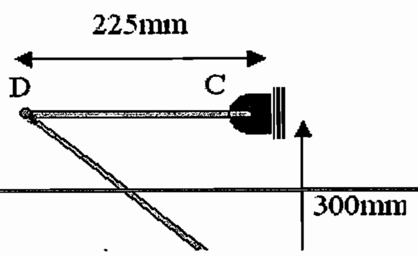


$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \Rightarrow [V_A\ 60^\circ] = [V_B \leftarrow] + [20\omega\ 30^\circ]$

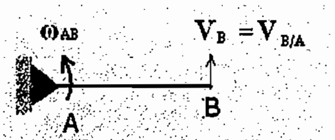


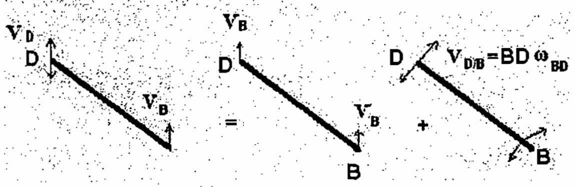
$\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B = 25\,(Cm/s)$

مثال : اگر در حالت نشان داده شده سرعت زاویه ای برابر $3\ rad/s$ باشد، مطلوب است: $\omega_{BD}, \omega_{DC} = ?$

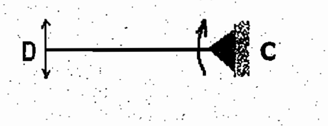


حل :

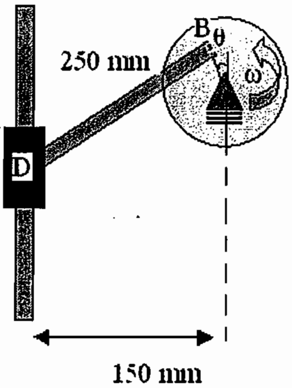




$$\begin{cases}\vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B}\\ [V_D \updownarrow] = [.45\uparrow] + [BD\,.\,\omega_{BD} \nearrow\!\!\swarrow]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega_{BD} = 0\\ \vec{V}_D = \vec{V}_B = [.45\ m/s \uparrow]\end{cases}$$

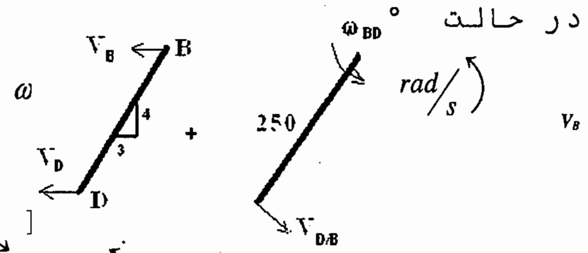


$$\Rightarrow V_D = 0.225\,\omega_{DC} = 0.45\ m/s \quad \Rightarrow \omega_{DC} = 2\ rad/s$$



مثال : اگر یک دیسک با سرعت زاویه ای ثابت $\omega=500\ rpm$ در حال دوران باشد، مطلوب است : سرعت طوقه D در حالت $\theta=0°$, $\theta=90°$ (فاصله نقطه B تا مرکز دیسک $50\ mm$ می باشد)

حل : در حالت °

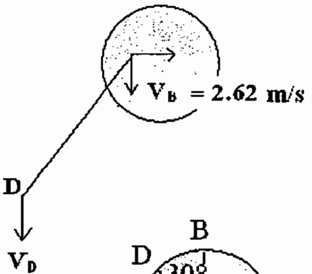


$V_B = r\omega = 0.05\times 52.36 = 2.62\ \ m/s \leftarrow$

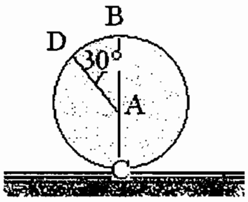
$\vec{V}_D \downarrow = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B} = [2.62 \leftarrow] + [0.25\omega_{BD}\ 3\ 4\ ]$

$\Rightarrow\ V_D = 1.96\ m/s \downarrow\ \ ,\ \omega_{BD} = 13.1\ \ rad/s$

در حالت $\theta=90$:

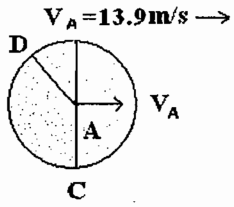


$V_D \parallel V_B \Rightarrow V_D = V_B = 2.62(m/s)\downarrow\ ,\ \omega_{BD} = 0$

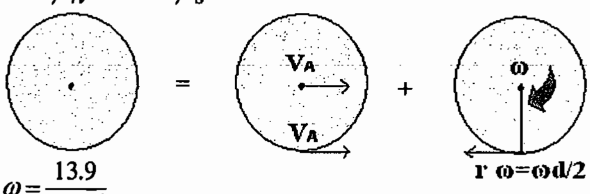


مثال : اتومبیلی با سرعت ثابت $50\ km/h$ در حال حرکت در جهت راست می باشد . اگر قطر چرخهای اتومبیلی $610\ mm$ باشد ، مطلوب است ، سرعت نقاط D,C,B,A ؟

حل : روش اول :

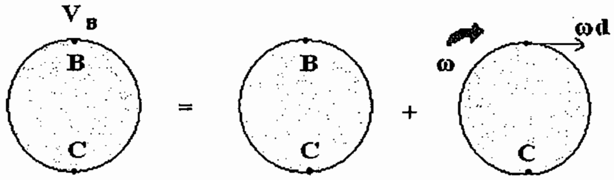


$V_A = 50\ km/h = 13.9\ m/s$



$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A}\quad ,\quad V_C = 0$

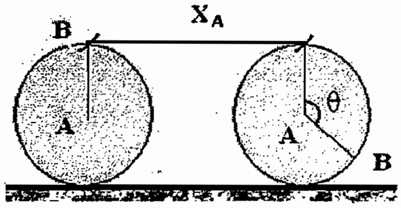
$\Rightarrow\ V_{C/A} = V_A = r\omega \qquad \Rightarrow\ 13.9 = r\omega\ \Rightarrow\ \omega = \frac{13.9}{0.61/2}$



$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{B/C} \qquad \Rightarrow\ \vec{V}_B = 0 + [d\omega \rightarrow] = [2\times 13.9 \rightarrow] = [27.8\ m/s \rightarrow]$

$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \Rightarrow\ \vec{V}_D = [13.9 \rightarrow] + [13.9 \nearrow 30°] \qquad \Rightarrow \vec{V}_D = 2\times 13.9\cos 15° = [26.8\ m/s\ \angle 15°]$

روش دوم : به شرطی که لغزش در کار نباشد

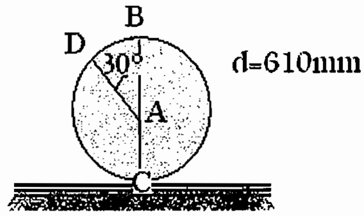


$$X_A = r\theta \quad\Rightarrow\quad V_A = r\dot{\theta} = r\omega \qquad a_A = r\alpha$$

$$\omega = \frac{V_A}{r} = \frac{V_A}{d/2} = 44.84 \quad rad$$

$$V_B = (BC)\omega = 2V_A = 27.8 \; m/s$$

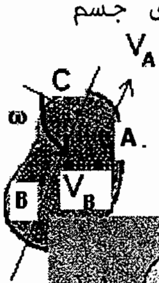
$$V_D = (DC)\omega = (\vec{CA} + \vec{AD}) \times \omega = .59 \times 44.84 = 26.5 \; m/s$$



مرکز آ

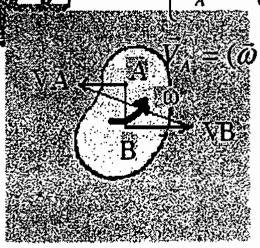
C (نقطه با سرعت صفر) مرکز انی دوران است که لزوماً روی جسم نیست.

تکیه گاه در تمام لحظات مرکز آني دوران مي باشد.



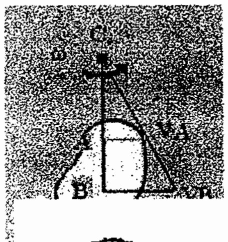
$$\begin{cases} V_C = 0 \\ \vec{V}_A = V_C + \vec{V}_{A/C} = \vec{V}_{A/C} = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_A = \vec{V}_{A/C} = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) \\ (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) \perp \vec{r}_{A/C} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_A \perp \vec{r}_{A/C}$$

$$\vec{V}_A = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) = (\vec{\omega} \times \vec{C}_A)$$



$V_A \parallel V_B$

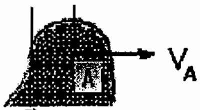
$V_A \perp AB$



$V_A \parallel V_B$

$V_A \perp AB$

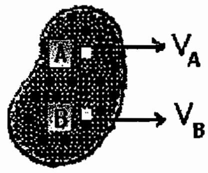
$V_A \neq V_B$



$V_A \parallel V_B$

$V_A \not\perp AB$

$\omega = 0$



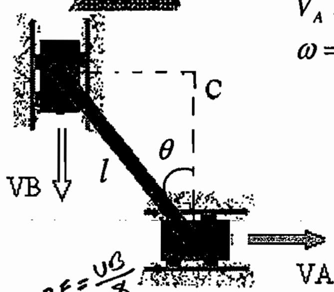
$V_A \perp AB$

$V_A \parallel V_B$

$V_A = V_B$

$\omega = 0$

مثال : در شکل ز B را برحسب V_A

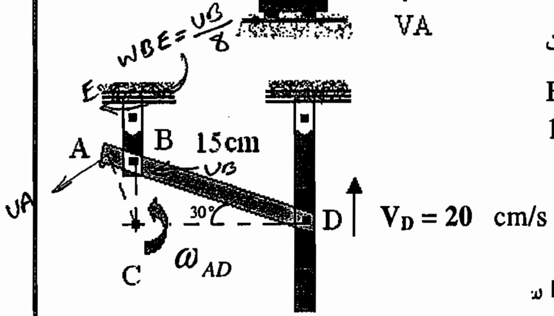


حل :

$$V_A = (AC)\omega = (l\cos\theta)\omega$$

$$\omega = \frac{V_A}{l\cos\theta} \quad , \quad V_B = V_A \tan\theta$$

مثال : طوقه D با سرعت 20 cm/s به سمت بالا درحال حرکت می باشد . طول BD برابر 15 cm و طول AB برابر 10 cm است. مطلوب است : $\omega_{AD} = ?,\ V_B = ?,\ V_A = ?$



حل : براي ميله BE نقطه E مرکز دوران اس

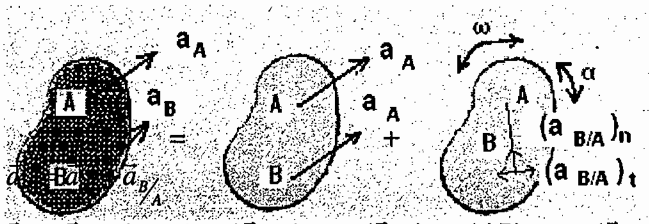
$$V_D = (DC)\,\omega_{AD} \Rightarrow \omega_{AD} = \frac{V_D}{DC} = \frac{20}{15\cos 30^\circ} = 1.54 \; rad/s$$

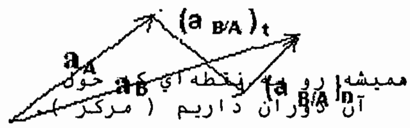
$$V_B = (BC)\,\omega_{AD} = (15\sin 30^\circ)(1.54) \Rightarrow V_B = 11.55 \; cm/s \leftarrow$$

$AC = \sqrt{(25\sin 30°)^2 + (10\cos 30°)^2} \;\Rightarrow\; AC = 15.21\ cm$

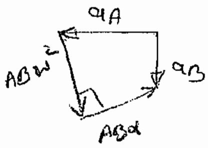
$V_A = (AC)\,\omega_{AD} = (15.21)(1.54) \;\Rightarrow\; V_A = 23.4\ \ {cm}/{s}\ \ 34.7°$

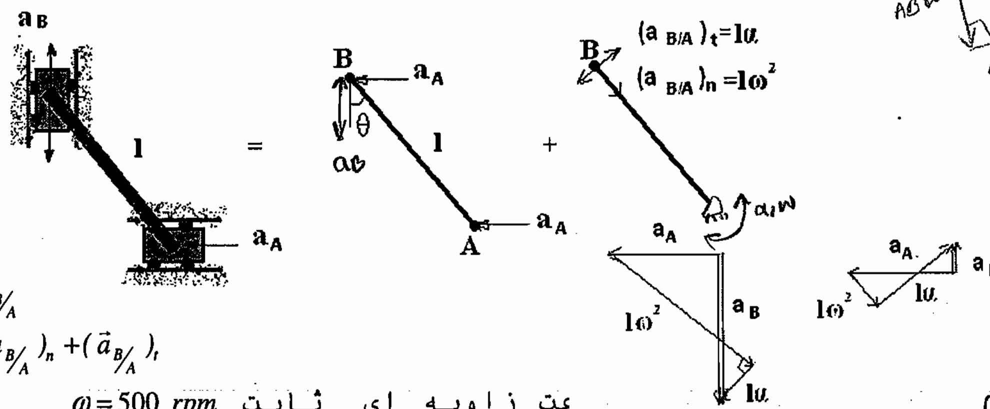
شتاب مطلق و نسبی در حرکت صفحه ای





$\vec{a}_B = \vec{a}_A + (a_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t \;\;,\;\; (\vec{a}_{B/A})_t = (AB)\alpha \;\;,\;\; (\vec{a}_{B/A})_n = (AB)\omega^2$

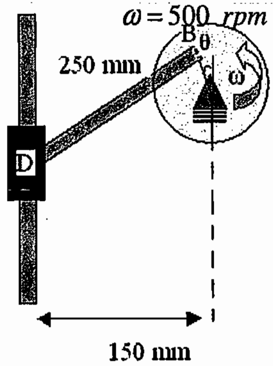




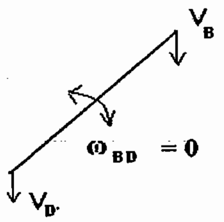
$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$

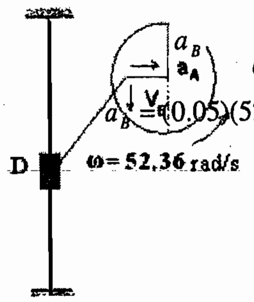
$\vec{a}_B = \vec{a}_A + (a_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t$

مثال) عت زاویه ای ثابت $\omega = 500\ rpm$ در حال دوران باشد، مطلوب است : شتاب طوقه D در حالت $\theta = 90°$, $\theta = 180°$. (فاصله نقطه B تا مرکز دیسک $50\ mm$ می باشد .)



حل :
$\omega = 500\ rpm = \frac{500 \times 2\pi}{60} = 52.36\ {rad}/{s}$





در حالت $\theta = 90°$

$a_B = (0.05)(52.36)^2 = 137.1\ \ {m}/{s^2}$

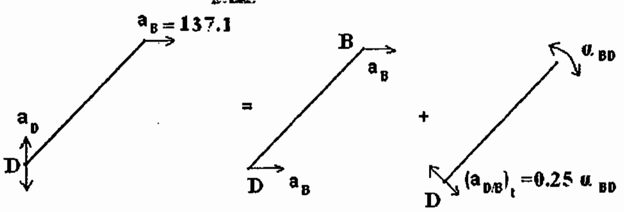
$V_B = (0.05)(52.96) = 2.62\ \ {m}/{s}$

$(a_{D/B})_t = 0.25 \times \alpha_{BD}$

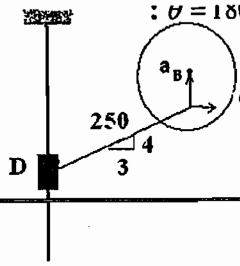
$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B}$

$[a_D \updownarrow] = [137.1 \rightarrow] + [0.25\,\alpha_{BD}\ \ 23.6°]$

$\Rightarrow a_D = 59.8\ \ {m}/{s^2}\ \uparrow$



در حالت $\theta = 180°$:



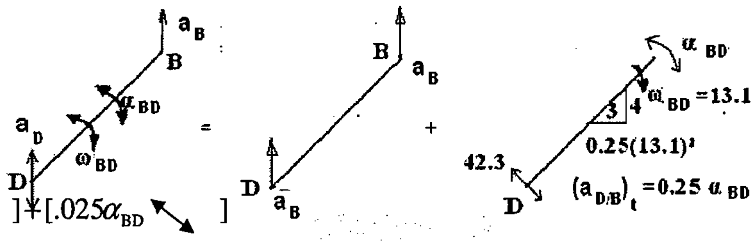
$a_B = 137.1\ \ {m}/{s^2}$

$\Rightarrow 0.2\omega_{BD} = 2.62 \Rightarrow \omega_{BD} = 13.1 \ \text{rad}/_{s} \quad V_B = BC(\omega_{BD}) = 2.62$

C

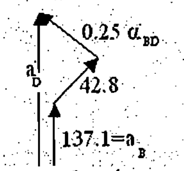
$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B}$

$\vec{a}_D = \vec{a}_B + (\vec{a}_{D/B})_n + (\vec{a}_{B/D})_t$



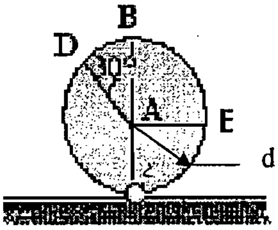
$[a_D \updownarrow] = [137.1 \uparrow] + [42.8 \nearrow] + [.025\alpha_{BD} \nwarrow]$

$\Rightarrow a_D = 190.65 \ m/_{s^2} \uparrow$



مثال : سرعت اتومبیل ~~90~~ 50 $km/_{h}$ می باشد

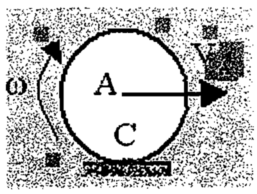
$a_C = ?\ ,\ a_D = ?\ ,\ a_B = ?\ ,\ a_E = ?$



$v_C = 0$ $\quad v_A = v_C + v_{A/C} \to \vec{v}_{A/C} = 13.89 \to$

$\omega = \frac{13.89}{r}$

حل :



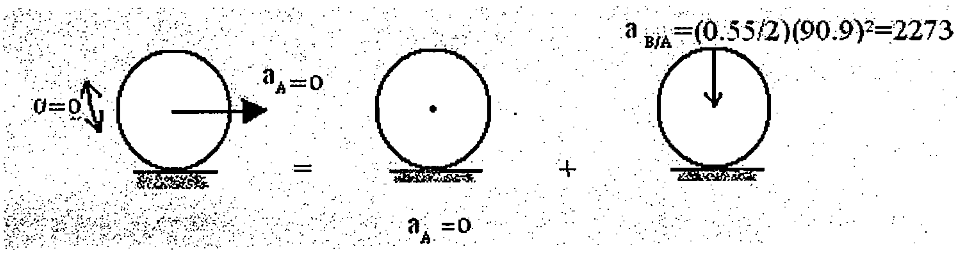
$v_B = v_C + v_{B/C} = 0 + [d\omega \to]$
$= 27.78$ m/s

$v_D = v_C + v_{D/C} = 0 + [D C\omega$
$= 26.8 \ \angle 15°$

$v_E = v_C + v_{E/C} = 0 + [r\sqrt{2} \cdot \frac{13.89}{r}$ 45
$= 13.89\sqrt{2} \ \angle 45°$

$V_A = 50 \ km/_{h} \to m/_{s} \to v_A = 13.89$ m/s $\to$

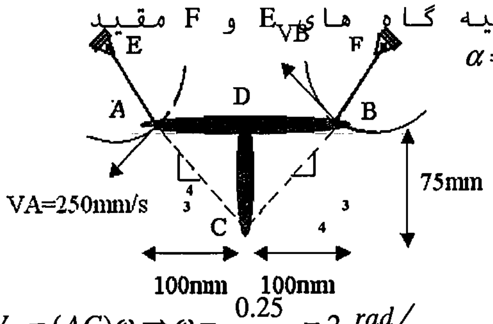
$V_A = \frac{d}{2}\omega \Rightarrow 25 = \frac{0.55}{2}\omega \Rightarrow \omega = 90.9 \ \text{rad}/_{s} \Rightarrow \alpha = 0$



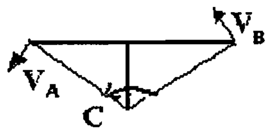
$\Rightarrow a_B$

مثال : میله زیر از نقاط A و B به تکیه گاه های E و F مقید است . مطلوب است : $\alpha = ?$ و $a_C = ?$

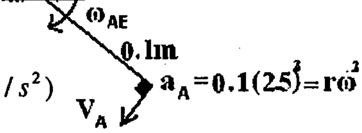
$BF = AE = 100\,mm\ ,\ V_A = 250 \ mm/_{s}$ و $\frac{dV_A}{dt} = 0$



حل :

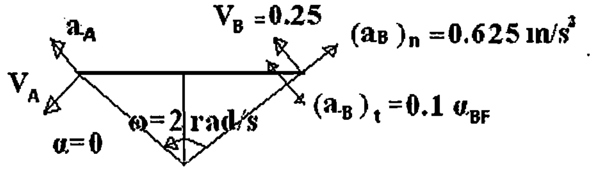


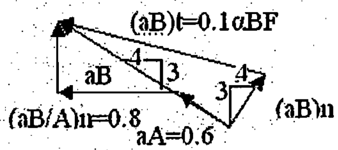
$V_A = (AC)\omega \Rightarrow \omega = \frac{0.25}{.0.125} = 2 \ \text{rad}/_{s}$



$V_A = (AE)\omega_{AE} \Rightarrow \omega_{AE} = \omega_{BF} = \frac{0.25}{0.1} = 2.5 \ \text{rad}/_{s}$

$a_A = (a_A)_n = r\omega_{AE}^{\ 2} = 0.1(2.5)^2 [= \frac{V^2}{r} = \frac{(0.25)^2}{0.1}] = .625 (m/s^2)$



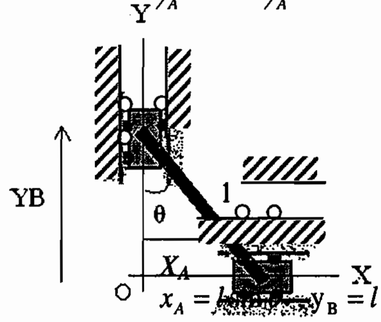


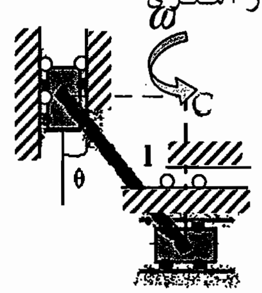
$$\begin{cases}(\vec{a}_B)_n+(\vec{a}_B)_t=\vec{a}_A+(\vec{a}_{B/A})_n+(\vec{a}_{B/A})_t\\(a_B)_n=0.625\ m/s^2\ ,\ (a_B)_t=0.1\alpha_{BF}\\(a_{B/A})_n=0.2\omega^2=0.8\ m/s^2\ ,\ (a_{B/A})_t=0.2\alpha\end{cases}\Rightarrow[.625\nearrow]+[0.1\alpha_{BF}\searrow]=[.625\nwarrow]+[.8\leftarrow]+[0.2\alpha\ \updownarrow]$$

$$\Rightarrow\ \alpha=12(rad/s)$$

$$\vec{a}_C=\vec{a}_A+(\vec{a}_{C/A})_n+(\vec{a}_{C/A})_t=[.625\nwarrow]+[.125\times2^2\nwarrow]+[.125\times12\nearrow]=1.875(m/s^2)\uparrow$$

حرکت صفحه ای به روش پارامتری





$$x_A=l\sin\theta\ ,\ y_B=l\cos\theta$$

$$V_A=\frac{dx_A}{dt}=\frac{d}{dt}(l\sin\theta)=l\dot{\theta}\cos\theta=l\omega\cos\theta$$

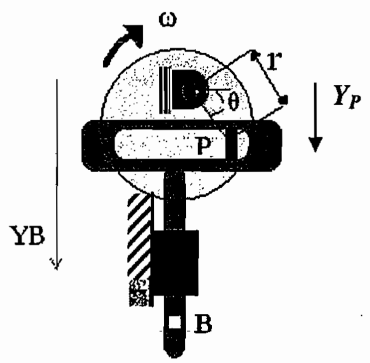
$$V_B=\frac{dy_B}{dt}=\frac{d}{dt}(l\cos\theta)=-l\dot{\theta}\sin\theta=-l\omega\sin\theta$$

$$a_A=\frac{dV_A}{dt}=\frac{d}{dt}(l\omega\cos\theta)=l\dot{\omega}\cos\theta-l\omega^2\sin\theta=l\alpha\cos\theta-l\omega^2\sin\theta$$

$$a_B=\frac{dV_B}{dt}=\frac{d}{dt}(-l\omega\sin\theta)=-l\dot{\omega}\sin\theta-l\omega^2\cos\theta=-l\alpha\sin\theta-l\omega^2\cos\theta$$

مثال : میله T شکل توسط یک پین به دیسکی که با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α درحال حرکت است . فاصله پین تا مرکز دیسک برابر r می باشد .

مطلوب است: $V_B=?\ ,\ a_B=?$

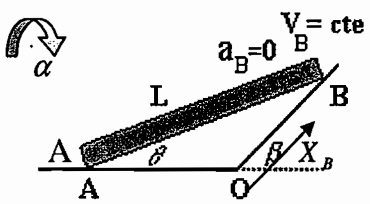


حل :

$$\begin{cases}y_B=y_p+C\\y_p=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow y_B=r\sin\theta+C\Rightarrow V_B=\frac{dy_B}{dt}=r\omega\cos\theta\ \Rightarrow\ a_B=\frac{dV_B}{dt}=r\alpha\cos\theta-r\omega^2\sin\theta$$

مثال : میله AB با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α در حال حرکت است .

مطلوب است : $\vec{V}_E=?\ ,\ a_E=?$

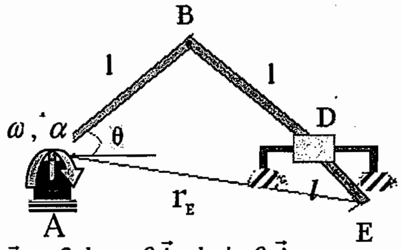


حل :

$$\frac{X_B}{Sin\theta}=\frac{L}{Sin\beta}\ \Rightarrow\ V_B=\frac{dX_B}{dt}=\frac{L\omega Cos\theta}{Sin\beta}\ \ \Rightarrow\ \ \omega_{AB}=\frac{V_BSin\beta}{LCos\theta}$$

$$\Rightarrow\ \alpha_{AB}=\dot{\omega}_{AB}=\frac{V_BSin\beta}{L}\times\frac{\omega_{AB}Sin\theta}{Cos^2\theta}=\frac{V^2{}_BSin^2\beta}{L^2Cos^3\theta}Sin\theta$$

مثال : میله AB با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α در حال حرکت است.
مطلوب است : $\vec{V}_E=?\ ,\ \vec{a}_E=?$



حل :

$$\vec{r}_E=3\,l\cos\theta\,\vec{i}-l\sin\theta\,\vec{j}$$

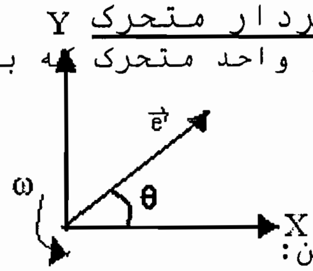
$$\vec{V}_E=\frac{d}{dt}\vec{r}_E\quad,\quad\vec{a}_E=\frac{d\vec{V}_E}{dt}$$

$$\Rightarrow\ \vec{V}_E=-3l\omega\sin\theta\,\vec{i}-l\omega\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{a}_E=-3l(\dot{\omega}\sin\theta+\omega^2\cos\theta)\vec{i}-l(\dot{\omega}\cos\theta-\omega^2\sin\theta)\vec{j}=-3l(\alpha\sin\theta+\omega^2\cos\theta)\vec{i}-l(\alpha\cos\theta-\omega^2\sin\theta)\vec{j}$$

مشتق بردار متحرک

بردار واحد متحرک که با سرعت زاویه ای ω در حال دوران می باشد $\vec{e}=$



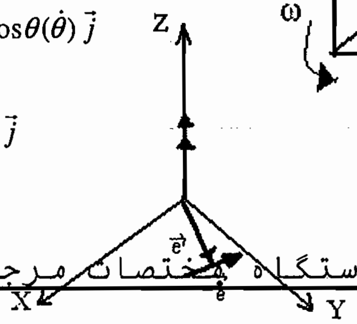
$$\vec{e}=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$

بنابراین:

$$\frac{d\vec{e}}{dt}=\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})=-\sin\theta(\dot{\theta})\,\vec{i}+\cos\theta(\dot{\theta})\,\vec{j}$$

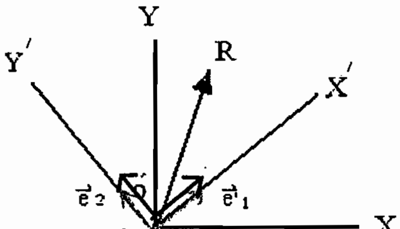
$$\Rightarrow|\dot{e}|=\omega\qquad\frac{de}{dt}=\dot{\vec{e}}=-\omega\sin\theta\,\vec{i}+\omega\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow\frac{d\vec{e}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{e}$$



بردار در دستگاه مختصات مرجع متحرک

$$\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}=R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2$$



$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{d}{dt}(R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2)=\dot{R}_1\vec{e}_1+R_1\dot{\vec{e}}_1+\dot{R}_2\vec{e}_2+R_2\dot{\vec{e}}_2$$

که در این روابط OXY دستگاه ثابت و OX'Y' دستگاه متحرک و $\vec{i},\vec{j}$ بردارهای یکه در دستگاه ثابت و $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ در دستگاه متحرک است. پس داریم:

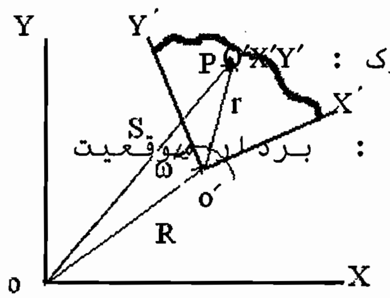
$$\dot{\vec{R}}=(\dot{R}_1\vec{e}_1+\dot{R}_2\vec{e}_2)+R_1\dot{\vec{e}}_1+R_2\dot{\vec{e}}_2\ \Rightarrow\ \dot{\vec{R}}=\dot{\vec{R}}'_1+\vec{\omega}\times(R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2)\Rightarrow\ \dot{\vec{R}}=\dot{R}'_1+R_1(\vec{\omega}\times\vec{e}_1)+R_2(\vec{\omega}\times\vec{e}_2)$$

$$\Rightarrow\dot{\vec{R}}=\dot{\vec{R}}'+\vec{\omega}\times\vec{R}$$ تئوري امگا

که دستگاه مطلق : $\dot{\vec{R}}$ و دستگاه متحرک: $\dot{\vec{R}}'$.

سرعت یک نقطه مادی:

دستگاه ثابت : OXY دستگاه متحرک : O'X'Y'



$\vec{S}$: بردار موقعیت نقطه P است.

$\vec{R}$: بردار موقعیت نقطه O' (مطلق) و $\vec{r}$: بردار موقعیت نقطه P (نسبی)