

Subject :

دینامیک

Year: ۸۹ Month: ۱۲ Date: ۶



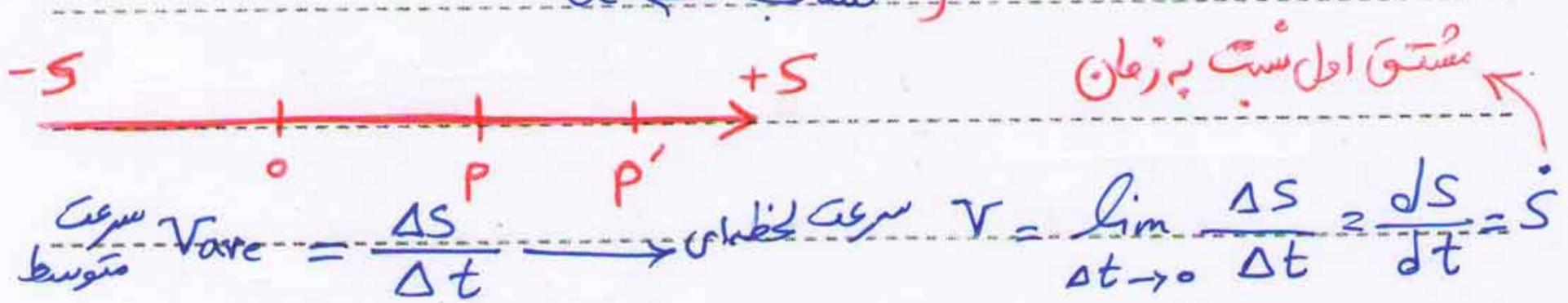
* دینامیک { ذرات ✓ ←
احسام صلب }
سیناتیک : فقط حرکت را بررسی می کند.
سینیتیک : علاوه بر حرکت، نیرو را هم بررسی می کند.
(سیناتیک + استاتیک)

سیناتیک :
حرکت مستقیم الخط
حرکت زاویه ای
حرکت منحنی الخط در صفحه
حرکت منحنی الخط در فضا
حرکت نسبی
مختصات متعامد (x-y)
مختصات عمودی-کاسی (n-t)
مختصات قطبی (r-θ)



سینیتیک ←
نیرو و ستاب (قانون دوم نیوتون)
کار و انرژی

* حرکت مستقیم الخط :
جا بجایی ← s یا x
سرعت ← v
ستاب ← a



Subject :

دینامیک

Year: ۸۹ Month: ۱۲ Date: ۶



$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad \text{① رابطه}$$

سرعت متوسط $a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow$ $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad \text{② رابطه}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} \quad \text{③ رابطه}$$

مشتق دوم نسبت به زمان

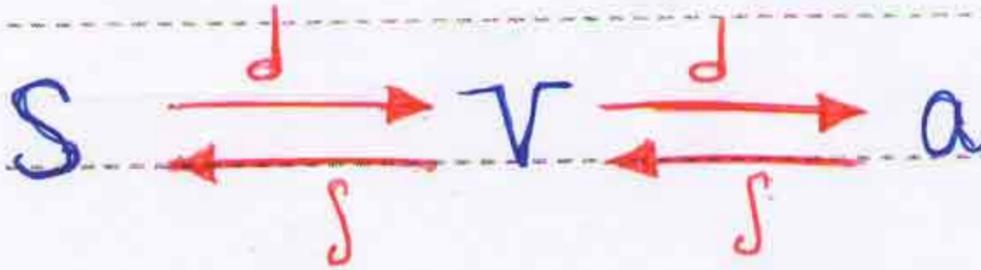
① $\rightarrow dt = \frac{ds}{v}$
 ② $\rightarrow dt = \frac{dv}{a}$
 $\frac{ds}{v} = \frac{dv}{a} \rightarrow v dv = a ds$

$$v dv = a ds \quad \text{④ رابطه}$$

$$\dot{s} ds = \ddot{s} ds \quad \text{⑤ رابطه}$$

① $\rightarrow ds = v dt \xrightarrow{\int} \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v dt \Rightarrow s_2 - s_1 = \Delta s$
 $\Rightarrow \Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$ **یعنی** « انتگرال سرعت = جایابی »
 نسبت به زمان

② $\rightarrow dv = a dt \xrightarrow{\int} \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a dt = v_2 - v_1 = \Delta v$
 $\Rightarrow \Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a dt$ **یعنی** « انتگرال از شتاب = تغییرات سرعت »
 نسبت به زمان



\int : مشتق
\int : انتگرال

حرکت مستقیم الخط « چهار حالت وجود دارد: a :

- الف) مقادیر ثابت باشد ($a=c$):

$$\textcircled{۱} \rightarrow dv = a dt \xrightarrow{\int} \int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{v = v_0 + at}$$

$$\textcircled{۲} \rightarrow v dv = a ds \xrightarrow{\int} \int_{v_0}^v v dv = a \int_{s_0}^s ds \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$$

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)}$$

این فرمول مستقل از زمان است.

$$\textcircled{۳} \rightarrow ds = v dt \xrightarrow{\int} \int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + at) dt \Rightarrow$$

$$\boxed{s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0}$$

- ب) مقادیر تابعی از زمان باشند ($a = f(t)$):

$$\textcircled{۱} \rightarrow dv = a dt \xrightarrow{\int} \int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) dt \Rightarrow v = v_0 + \int_0^t f(t) dt$$

سرعت بر حسب زمان

$$\textcircled{۲} \rightarrow ds = v dt \xrightarrow{\int} \int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt \Rightarrow s = s_0 + \int_0^t v dt$$

مسافت بر حسب زمان

$$s = s_0 + \int_0^t v dt$$

$$v = v_0 + \int_0^t f(t) dt$$

ج - شتاب تابعی از سرعت باشد $(a = f(v))$

$$\textcircled{۱} \quad dv = a dt \xrightarrow{a=f(v)} \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt \Rightarrow t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)}$$

$\xrightarrow{t \text{ بر حسب } v}$ $\xrightarrow{v \text{ بر حسب } t}$

$$\textcircled{۱} \rightarrow ds = v dt \xrightarrow{s} \int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt \Rightarrow s = s_0 + \int_0^t v dt \xrightarrow{s \text{ بر حسب } t}$$

ج - شتاب تابعی از جابجایی باشد $(a = f(s))$

$$\textcircled{۱۳} \rightarrow v dv = a ds \xrightarrow{a=f(s)} \int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s f(s) ds \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s f(s) ds$$

سرعت تابعی از جابجایی $v = g(s)$

$$\textcircled{۱} \rightarrow ds = v dt \xrightarrow{v=g(s)} \int_{s_0}^s \frac{ds}{g(s)} = \int_0^t dt \Rightarrow t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{g(s)}$$

سرعت تابعی از جابجایی $\parallel s \text{ و } v \text{ بر حسب } t \parallel$ و $\parallel t \text{ بر حسب } s \parallel$

مثال شتاب ذره‌ای با رابطه $[a = 6 (\frac{m}{s^2})]$ توصیف می‌شود. با این اطلاع

که در $[t = 0]$ $[x = -32 \text{ (m)}]$ و در $[t = 2 \text{ (s)}]$ $[v = -6 (\frac{m}{s})]$

پسند، سرعت، مکان و مسافت کل پیموده شده را در $[t = 5 \text{ (s)}]$ تعیین کنید.

سرعت اولیه: $v_0 = -18 (\frac{m}{s}) \rightarrow -6 = 6 \times 2 + v_0$

سرعت در $t = 5$: $v(t=5, s) = 6 \times 5 - 18 = 12 (\frac{m}{s})$

$$X(t=5) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + X_0 = \frac{1}{2} \times 6 \times 5^2 + (-18) \times 5 + X_0 (-32)$$

$$\rightarrow X = -47 \text{ m} \quad \text{مکان ذره}$$

$$v_2 at + v_0 \rightarrow v = 6t - 18 \xrightarrow{v=0} t = 3 \text{ (s)}$$

حالت حرکت رفت و برگشتی داریم باید زمان برگشت ذره ($v=0$) را بیابیم:

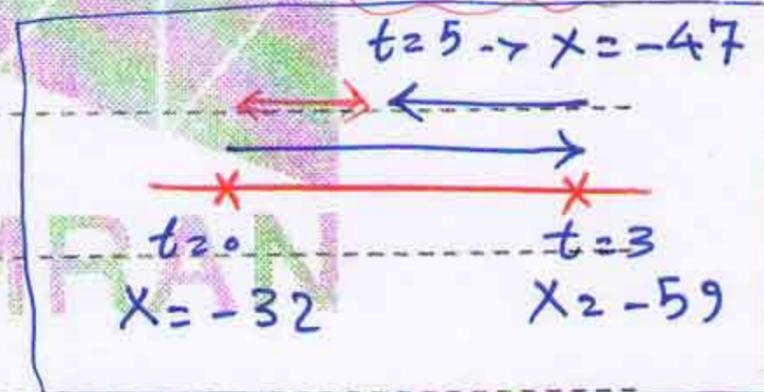
$$X_{\text{کل}} = |X(t=5) - X(t=3)| + |X(t=3) - X(t=0)|$$

مسافت کل

$$X(t=3) = \frac{1}{2} \times 6 \times 3^2 + (-18) \times 3 + (-32) = -59 \text{ (m)}$$

$$X_{\text{کل}} = |(-47) - (-59)| + |(-59) - (-32)|$$

$$= 12 + 27 = 39 \text{ (m)}$$



مثال موتور سیکلتی با شتاب اولیه $\frac{m}{s^2}$ 3 از حال سکون به راه می افتد در

شکل زیر، نمودار تغییرات شتاب موتور سیکلت را در مقابل جابجایی آن

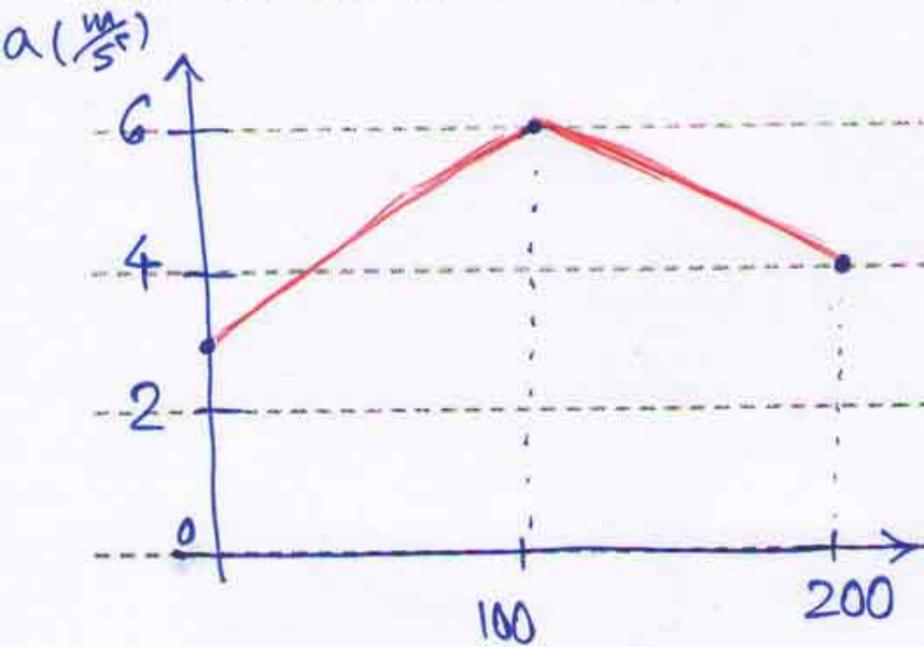
نشان داده ایم، سرعت موتور سیکلت در $S = 200 \text{ (m)}$ چقدر است و مقدار

$\left(\frac{dv}{ds}\right)$ در این نقطه چقدر است؟

Subject :

دینامیک

Year: 19 Month: 12 Date: 9



طبق حالت چهارم:

$$v dv = a ds$$

$$\int_0^v v dv = \int_0^{200} a ds$$

از شروع از سکون

سطح زیر منحنی $(a-s)$ برابر است با

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = \int_0^{200} a ds \rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{4+6}{2} \times 100 + \frac{6+4}{2} \times 100 = 950$$

$$\rightarrow v^2 = 2 \times 950 \rightarrow v = 43.59 \text{ (m/s)}$$

$$v dv = a ds \rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{a}{v} = \frac{4}{43.59} = 0.092$$

ABADANOMRAN

مثال: داده های تجربی نشان می دهد که سرعت جریان هوا در جلوی دریچه ای

بیک دستگاه هوا ساز با رابطه $v = \frac{0.18 v_0}{x}$ توصیف می شود که

v_0 سرعت اولیه خروج هوا است، برای $[v_0 = 3.6 \text{ (m/s)}]$ ؛ الف) حساب

هوا در $[x = 2 \text{ (m)}]$ چقدر است؟ ب) چه مدت طول می کشد تا هوا از

$[x = 1 \text{ (m)}]$ به $[x = 3 \text{ (m)}]$ برسد؟

$$v = \frac{0.18 \times 3.6}{x} = \frac{0.648}{x}$$

$$\text{الف) } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{0.648}{x} \right) = \frac{-0.648 \times \frac{dx}{dt}}{x^2} = \frac{-0.648 v}{x^2}$$

Subject :

دینامیک

Year: 19 Month: 12 Date: 9



$$\rightarrow a = \frac{-0.648 \left(\frac{0.648}{x}\right)}{x^2} \Rightarrow$$

$$a = \frac{-0.42}{x^3}$$

$$\rightarrow a = \frac{x=2m}{x^2} \Rightarrow a = -0.0525 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$b) v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{0.648}{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x dx = 0.648 dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_1^3 x dx = \int_0^t 0.648 dt \rightarrow \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = 0.648 t$$

$$\rightarrow \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.648 t \rightarrow t = 6.17 \text{ (s)} \checkmark$$

مثال چتر بازی نه با سرعت $200 \frac{km}{h}$ در حال سقوط آزاد است چترش برادر ارتفاع 600 متری باز می کند، سپس در پی شتاب کندگی ثابت با آفتاب ثابت $50 \frac{km}{h}$ از 586 m تا 30 m پایین می آید و در اینجا با چترش مانور می دهد تا سرعت فرودش را کم کند و در نهایت با سرعت ناچیزی فرود می آید؛ الف) شتاب کندگی چتر است؟ ب) پس از باز کردن چتر چه مدت طول می کشد تا چتر بازی به زمین برسد؟

$$\left. \begin{matrix} \text{تبدیل} \\ \frac{km}{h} \\ \frac{m}{s} \end{matrix} \right\} \frac{200}{3.6} = 55.56 \frac{m}{s}$$

$$\frac{50}{3.6} = 13.89 \frac{m}{s}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

$$(13.89)^2 - (55.56)^2 = 2 \times a \times (600 - 586)$$

$$\rightarrow a = -103.36 \frac{m}{s^2}$$

$$b) v = at_1 + v_0 \rightarrow 13.89 = -103.36(t_1) + 55.56 \rightarrow t_1 = 0.403 \text{ (s)}$$

از 600 متر تا 586 متر شتاب ثابت بود

Subject :

دینا میں

Year: 19 Month: 12 Date: 7



$$\Delta x = v t_2 \rightarrow (586 - 30) = 13.89 \times t_2$$

$$\rightarrow t_2 = 40.029 \text{ (s)}$$

وقت پہنچنے تک

$$v^2 - v_0^2 = 2a \Delta x \rightarrow 0^2 - (13.89^2) = 2 \times a \times 30$$

$$\rightarrow a = -3.216 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow v = at_3 + v_0$$

$$\rightarrow 0 = 13.89 + (-3.216) \times t_3 \rightarrow t_3 = 4.32 \text{ (s)}$$

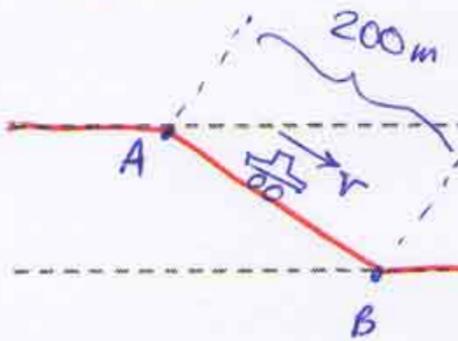
$$\rightarrow t_{\text{ج}} = t_1 + t_2 + t_3 \rightarrow t_{\text{ج}} = 44.75 \text{ (s)}$$

زمانہ



ABADANOMRAN

مثال اتومبیل شکل زیر از نقطه‌ی A در حال سقوط است، راننده رنده و طلاج را رها می‌کند و اتومبیل با شتاب ثابت a از سطح سبیلار پایین می‌آید و سرعت اتومبیل در نقطه B در پایین سطح سبیلار چقدر خواهد بود؟



$$a = 0.981 - 0.013 v^2$$

$$v dv = a ds \rightarrow \int_0^{v_B} \frac{v dv}{0.981 - 0.013 v^2} = \int_0^{200} ds$$

$$0.981 - 0.013 v^2 = u$$

$$-0.026 v dv = du$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{0.026} \int \frac{du}{u} = 200$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{0.026} \ln(0.981 - 0.013 v^2) \Big|_0^{v_B} = 200$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{0.026} [\ln(0.981 - 0.013 v_B^2) - \ln(0.981)] = 200$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \rightarrow \ln \left(\frac{0.981 - 0.013 v_B^2}{0.981} \right) = -5.2$$

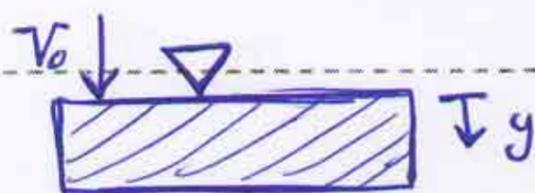
$$\ln a = b \rightarrow a = e^b \rightarrow (0.981 - 0.013 v_B^2) = 0.981 \times e^{-5.2} \Rightarrow v_B = 8.66 \frac{m}{s}$$

مثال مخروطی که در شکل نشان داده شده است پس از سقوط با سرعت v_0 به جسم

برخورد می‌کند و در آن مخروط می‌پودد، شتاب مخروط پس از برخورد با رابطه‌ی زیر

بیان می‌شود، در این رابطه c مقدار ثابت مثبت و l عمق نفوذ است

و ثابت c را بر حسب عمق نفوذ (y_m) که قابل اندازه‌گیری است، بیابید.



$$v dv = a ds \Rightarrow \int_{v_0}^0 v dv = \int_0^{y_m} (g - cy^2) dy$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v^2}{2} \right) \Big|_{v_0}^0 = \left(gy - \frac{cy^3}{3} \right) \Big|_0^{y_m}$$

$$\Rightarrow -\frac{V_0^2}{2} = g y_m - \frac{c y_m^3}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{y_m^3} \left(g y_m + \frac{V_0^2}{2} \right)$$

مثال فشار گاز نسبت فشنگ در تفنگ با تقریب خوبی به صورت خطی متناسب

است با عکس مسافتی که فشنگ در لوله تفنگ طی می کند، لذا نسبت فشنگ را می توان

به صورت $a = \frac{k}{x}$ نوشت که در آن k ثابت است و اگر فشنگ از حالت سکون

شروع به حرکت نموده و سرعت خروج آن از دهانه لوله به طول 750 میلی متر

برابر با $600 \frac{m}{s}$ باشد، نسبت فشنگ را در نیمه ی طول لوله ($x = 375 \text{ mm}$) تعیین کنید.



$$v dv = a dx \rightarrow \int_0^{600} v dv = \int_{0.0075}^{0.75} \frac{k}{x} dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v^2}{2} \right) \Big|_0^{600} = k \times \ln x \Big|_{0.0075}^{0.75} \Rightarrow k = 39086.5$$

$$a = \frac{k}{x} = \frac{39086.5}{0.375} \Rightarrow a = 104230.7 \frac{m}{s^2}$$

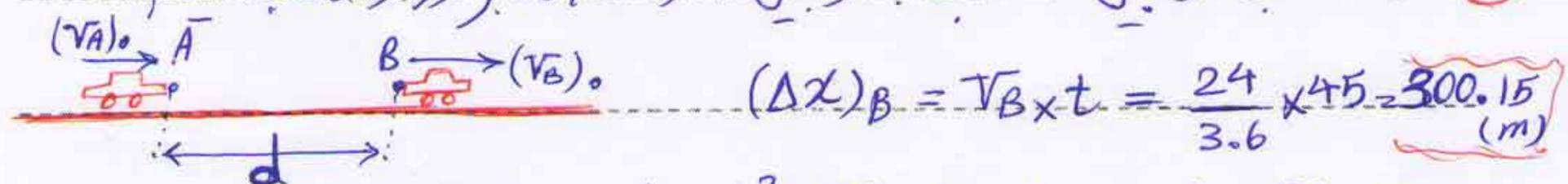
مثال مطابق شکل اتوبوس های A و B با اندازه ی d = 60 m از هم فاصله دارند و

به ترتیب با سرعت های ثابت $(V_A)_0 = 30 \frac{km}{h}$ و $(V_B)_0 = 24 \frac{km}{h}$ روی

جاده ی بیخ زده ای در حرکت اند، راننده ی A ترمز می کند تا با B برخورد نکند و او

45 ثانیه بعد با آن برخورد می کند و **الف** ک ب کند شوینده ی یکنواخت اتوبوس A

ب سرعت نسبی اتوبوس A نسبت به اتوبوس B در لحظه ی برخورد را حساب کنید؟



$$(\Delta x)_B = V_B \times t = \frac{24}{3.6} \times 45 = 300.15 \text{ (m)}$$

$$(\Delta x)_A = \frac{1}{2} a t^2 + (V_A)_0 t = \frac{1}{2} (a) (45^2) + \frac{30}{3.6} \times 45$$

$$\Rightarrow \Delta x_A = 10/2.5 \times a + 374.85$$

$$\Delta x_A = \Delta x_B + d \rightarrow 10/2.5 \times a + 374.85 = 300.15 + 60 \Rightarrow a = -0.0145 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

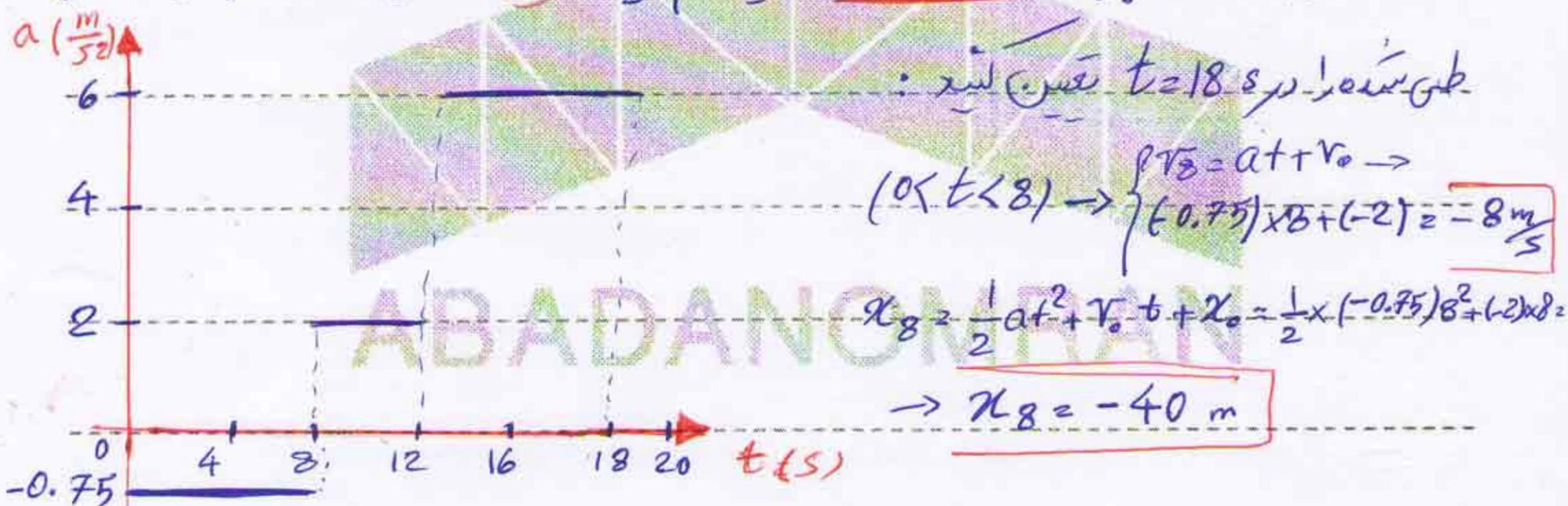
$$v_A = at + (v_A)_0 = (-0.0145) \times 45 + \frac{30}{3.6} = 7.68 \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\rightarrow v_B = \frac{24}{3.6} = 6.67 \left(\frac{m}{s}\right) \rightarrow \text{سرعت نسبی برعکس} = v_A - v_B = 1.01 \frac{m}{s}$$

مثال: ذره ای با شتابی که در شکل زیر نشان داده شده است روی خط راست حرکت می کند.

سرعت ذره در آغاز حرکت از بعد از برابر با $v_0 = -2 \frac{m}{s}$ می باشد. (الف) مشخص کنی

$(x-t)$ و $(v-t)$ را برای $0 < t < 18$ ثانیه رسم کن. (ب) مکان و سرعت ذره و مسافت طی



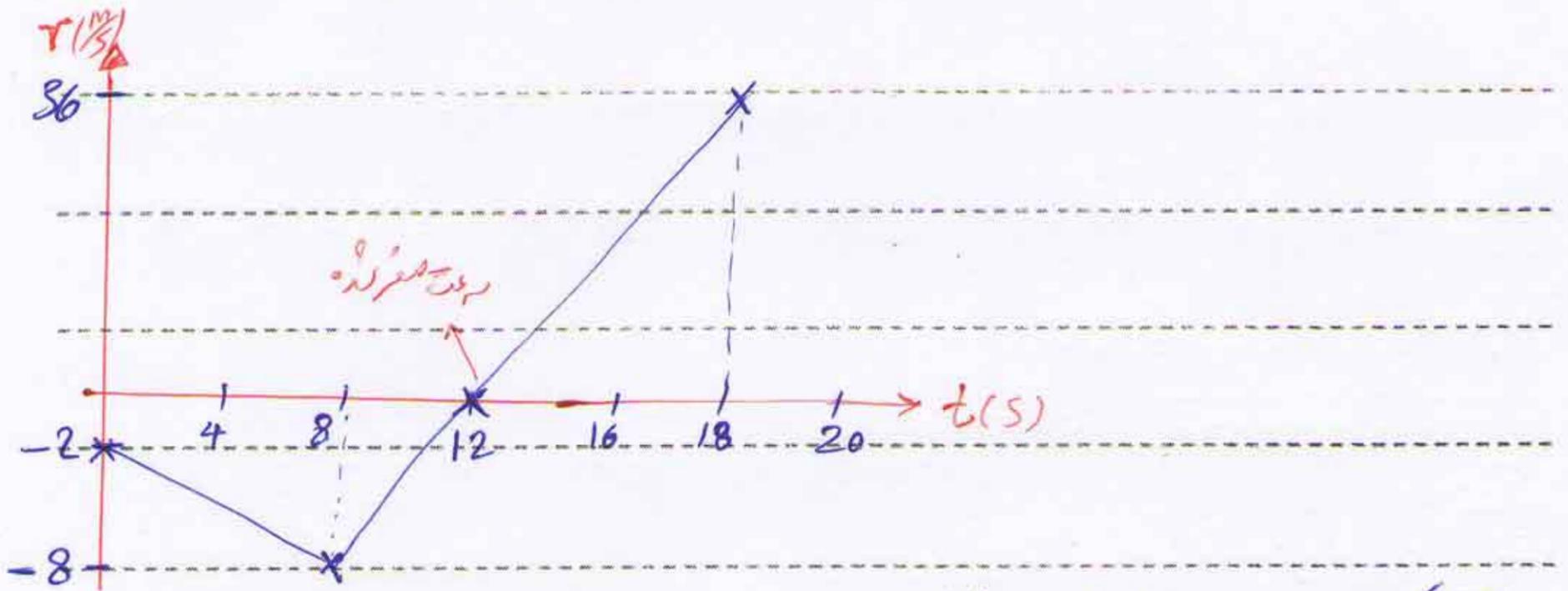
$$(8 < t < 12) \rightarrow \begin{cases} v_{12} = at + v_8 \rightarrow 2 \times 4 + (-8) = 0 \\ x_{12} = \frac{1}{2} at^2 + v_8 t + x_8 = \frac{1}{2} \times 2 \times 4^2 + (-8) \times 4 + (-40) = -56 \text{ m} \end{cases}$$

$$(12 < t < 18) \rightarrow \begin{cases} v_{18} = at + v_{12} = 6 \times 6 + 0 = 36 \frac{m}{s} \\ x_{18} = \frac{1}{2} at^2 + v_{12} t + x_{12} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6^2 + 0 \times 6 + (-56) = 52 \text{ m} \end{cases}$$

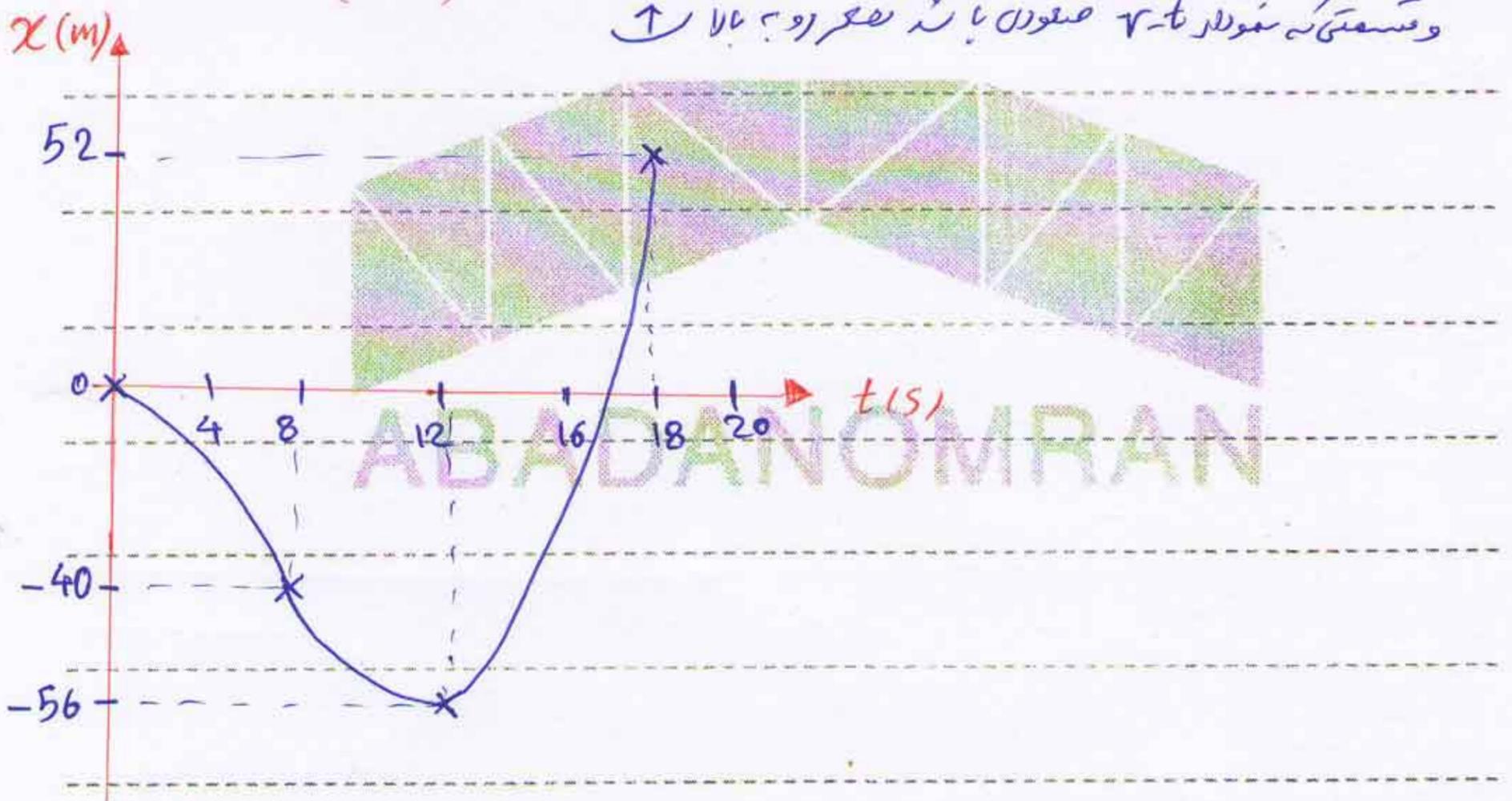
Subject :

دینامیک

Year: ۸۹ Month: ۱۲ Date: ۲۰



\downarrow مسافتی که خودرو با سرعت $v-t$ ترمز می‌کند و مسافتی که خودرو با سرعت $v-t$ حرکت می‌کند
 مسافت $(x-t)$ است



مسافت کل: $X_{کل} = X_{مت} + X_{برگشت} \rightarrow X_{کل} = |X_{12} - X_0| + |X_{18} - X_{12}|$

$\rightarrow X_{کل} = |(-56) - 0| + |52 - (-56)|$

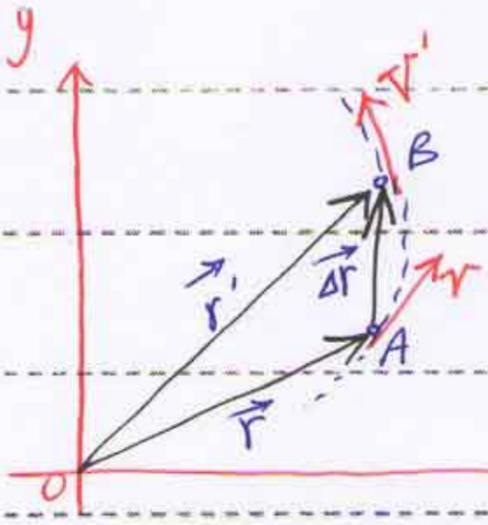
$\rightarrow X_{کل} = 164 \text{ (m)}$

Subject :

دینامیک

Year: 90 Month: 1 Date: 19

* حرکت منحنی الخط در صفحه :



$$\vec{r}' = \vec{r} + \Delta \vec{r}$$

$$\vec{V}_{ave} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

سرعت متوسط

سرعت لحظی

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + \Delta \vec{v}$$

$$\vec{a}_{ave} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \rightarrow \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

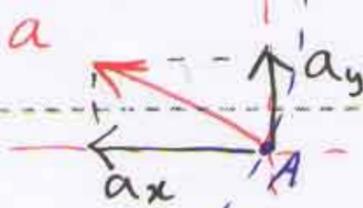
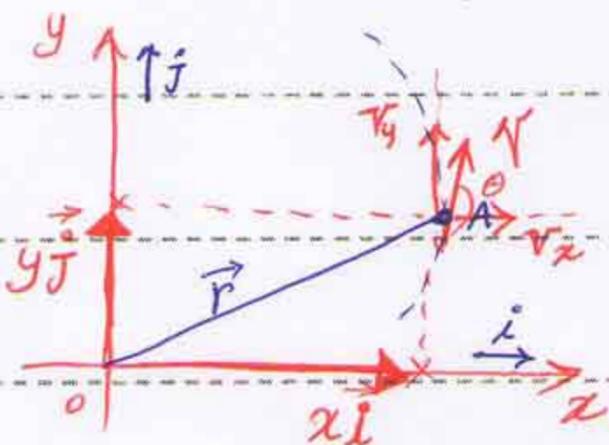
سرعت متوسط

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

* نکته: در حرکت منحنی الخط جهت سرعت ماس به سمت مرکز است

است در جهت شعاعی و در داخل منحنی است.

- ① دستگاه مختصات متعامد (x-y)
 - ② دستگاه مختصات عمود (r-t) ماسی
 - ③ دستگاه مختصات قطبی (r-θ)
- * سیستم های مختصات مورد استفاده در حرکت منحنی الخط :



دستگاه مختصات متعامد

Subject :

دینامیک

Year: 90 Month: 1 Date: 19



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \quad * \left\{ \begin{array}{l} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{array} \right.$$

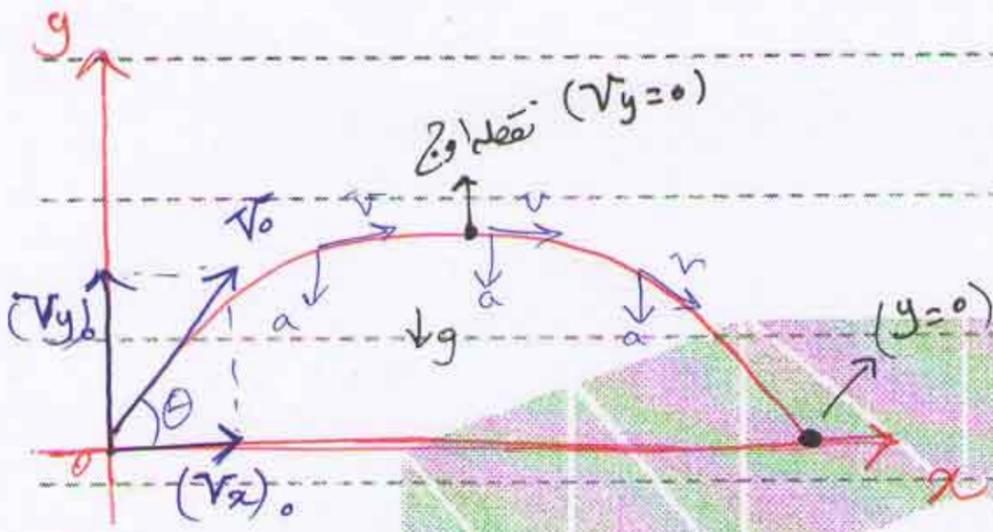
$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} \quad * \left\{ \begin{array}{l} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \end{array} \right.$$

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

* حرکت پرتابی



$$(v_x)_0 = v_0 \cos \theta$$

$$(v_y)_0 = v_0 \sin \theta$$

$$v = at + v_0$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$$

$$v_x = (v_x)_0, v_y = -gt + (v_y)_0$$

برای حرکت پرتابی

$$x = (v_x)_0 t, y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_y)_0 t$$

$$v_y^2 - (v_y)_0^2 = -2gy$$

مثال

تفنی را مطابق شکل به طرف نقطه A بی سرب و شیب می نند

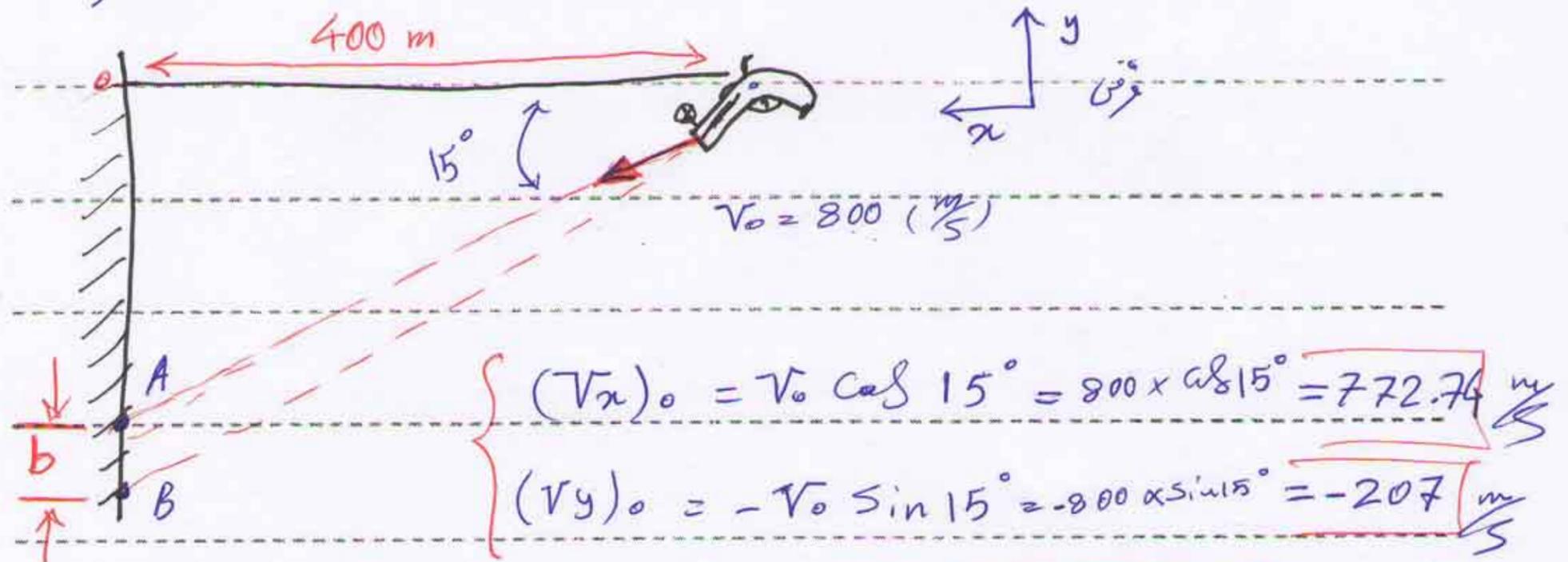
گویا به نقطه B برخورد می کند، فاصله قائم بین این دو نقطه (b) را بدست

آورید، هر شیب طول 800 m است.

Subject :

ریاضیات

Year: 90 Month: 1 Date: 19



$$x = (v_x)_0 t \Rightarrow 400 = 772.74 \times t \Rightarrow t = 0.518 \text{ (s)}$$

$$y = 0B = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_y)_0 t = -\frac{1}{2} (9.81) (0.518)^2 + (-207.06) \times 0.518$$

$$\rightarrow 0B = -108.57 \text{ m}$$

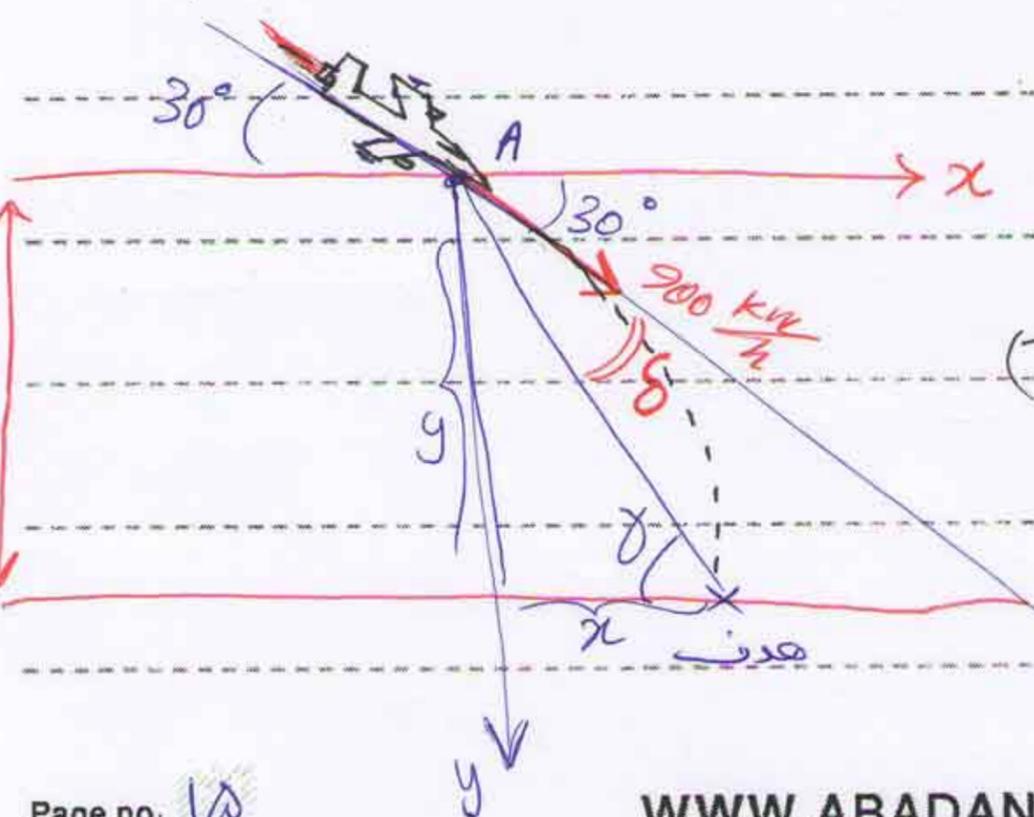
$$\tan 15^\circ = \frac{OA}{400} \rightarrow OA = 400 \times \tan 15^\circ \rightarrow OA = 107.18 \text{ (m)}$$

$$b = 0B - OA = 108.57 - 107.18 = 1.39 \text{ (m)}$$

مثال هواپیما با سرعت 900 کیلومتر بر ساعت و با زاویه $\theta = 30^\circ$ شیب جرزده

و می خواهد هدف را بمباران کند، زاویه δ و هدف فرضی (زاویه δ)

چقدر باید باشد؟



$$v_0 = 900 = \frac{900}{3.6} = 250 \frac{m}{s}$$

$$(v_x)_0 = v_0 \cos 30^\circ = 216.5 \frac{m}{s}$$

$$(v_y)_0 = v_0 \sin 30^\circ = 125 \frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g = 9.81 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 + (V_y)_0 t \rightarrow 2000 = \frac{1}{2} (9.81) t^2 + 125 t$$

$$\rightarrow 9.81 t^2 + 250 t - 4000 = 0 \rightarrow t = \frac{-250 \pm \sqrt{(250)^2 - 4 \times (9.81) \times (-4000)}}{2 \times 9.81}$$

$$\rightarrow t = 11.13 \text{ (s)}$$

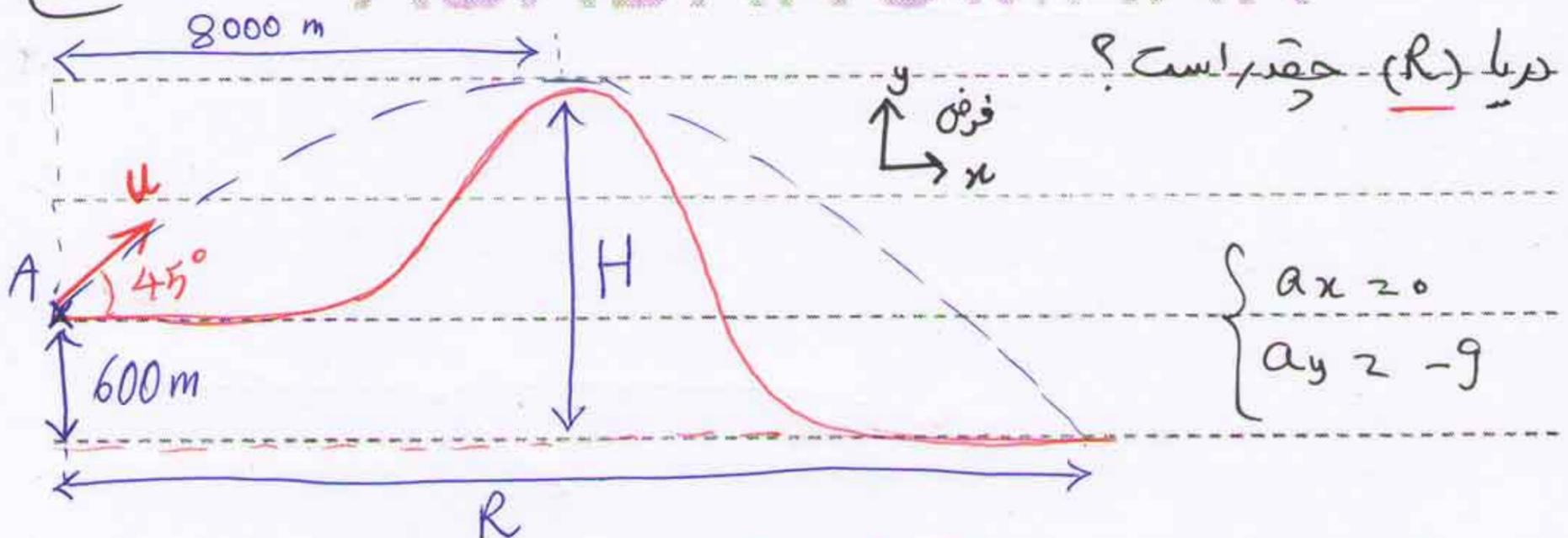
$$x = (V_x)_0 t = 216.5 \times 11.13 = 2410 \text{ (m)}$$

$$\tan(\delta) = \frac{y}{x} = \frac{2000}{2410} \rightarrow \delta = 39.7^\circ$$

$$\delta = \delta + 30 \rightarrow \delta = \delta - 30 = 39.7^\circ - 30 \rightarrow \delta = 9.7^\circ$$

مثال یک توپ تپاچی دوربرد در نقطه A که ارتفاع آن از سطح دریا 600 متر است، تحت زاویه 45° با افق شانهگیری می شود و طولی توپ در نقطه اوج مسیر خود، درست از ریس قله ی کوه می گذرد، سرعت اولیه ی طولی برابر است

آوردید؟ ارتفاع قله ی کوه از سطح دریا (H) چقدر است؟ برد طولی تا برخورد به سطح



$$\begin{cases} (V_x)_0 = u_0 \cos 45^\circ \\ (V_y)_0 = u_0 \sin 45^\circ \end{cases}$$

Subject :

دینامیک

Year: 90 Month: 1 Date: 19



$$(در نقطه اوج) \quad v_y = 0 \rightarrow -gt + (v_y)_0 = 0$$

$$\rightarrow (-9.81 \times t + u \sin 45^\circ = 0) \quad (1)$$

$$x = (v_x)_0 t \xrightarrow{\text{در نقطه اوج}} (8000 = u \cos 45^\circ \times t) \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow t = \frac{u \sin 45^\circ}{9.81} \xrightarrow{\text{در معادله (2)}}$$

$$\rightarrow 8000 = u \cos 45^\circ \times \frac{u \sin 45^\circ}{9.81} \Rightarrow \frac{u^2}{2 \times 9.81} = 8000$$

$$\rightarrow u = 396.18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_y^2 - (v_y)_0^2 = -2gy \xrightarrow{\substack{\text{در نقطه اوج} \\ v_y = 0 \\ y = H - 600}} 0 - (u \sin 45^\circ)^2 = -2 \times 9.81 \times (H - 600)$$

$$\Rightarrow H = 4600 \text{ (m)}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_y)_0 t \xrightarrow{\substack{\text{در نقطه انتهای} \\ y = -600}} -600 = -\frac{1}{2} \times 9.81 \times t^2 + (u \sin 45^\circ) \times t \rightarrow 4.905 t^2 - 280.14 t - 600 = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{280.14 \pm 300.42}{9.81} \Rightarrow t = 59.18 \text{ (s)}$$

$$R = x = (v_x)_0 \times t = u \cos 45^\circ \times t \rightarrow R = 396.18 \times \cos 45^\circ \times 59.18$$

$$\Rightarrow R = 16578.8 \text{ (m)}$$

مثال داخل لیوانی به بلندی اش 140 mm و قطر داخلی اش 66 mm است و از

ارتفاع h شیر می ریزیم و اگر سرعت اولیه شیر 1.2 m/s باشد و زاویه اش نسبت

به افق 40° باشد گزینی مقدار h چه باشد تا شیر بیرون نریزد



$$v_0 = 1.2 \text{ m/s}$$

$$(v_x)_0 = 1.2 \times \cos 40^\circ = 0.919 \text{ m/s}$$

$$(v_y)_0 = -1.2 \times \sin 40^\circ = -0.771 \text{ m/s}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_y)_0 t \Rightarrow (-h + 0.14) = -\frac{1}{2} \times 9.81 \times t^2 + (-0.771) \times t \quad (1)$$

$$x = (v_x)_0 t \Rightarrow \begin{cases} 0.08 = 0.919 \times t_1 \\ (0.08 + 0.066) = 0.919 \times t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0.087 \text{ (s)} \\ t_2 = 0.159 \text{ (s)} \end{cases}$$

$$h \xrightarrow{t_1 \rightarrow (1)} h_1 = 224.2 \text{ (mm)}$$

$$h \xrightarrow{t_2 \rightarrow (1)} h_2 = 386.6 \text{ (mm)}$$

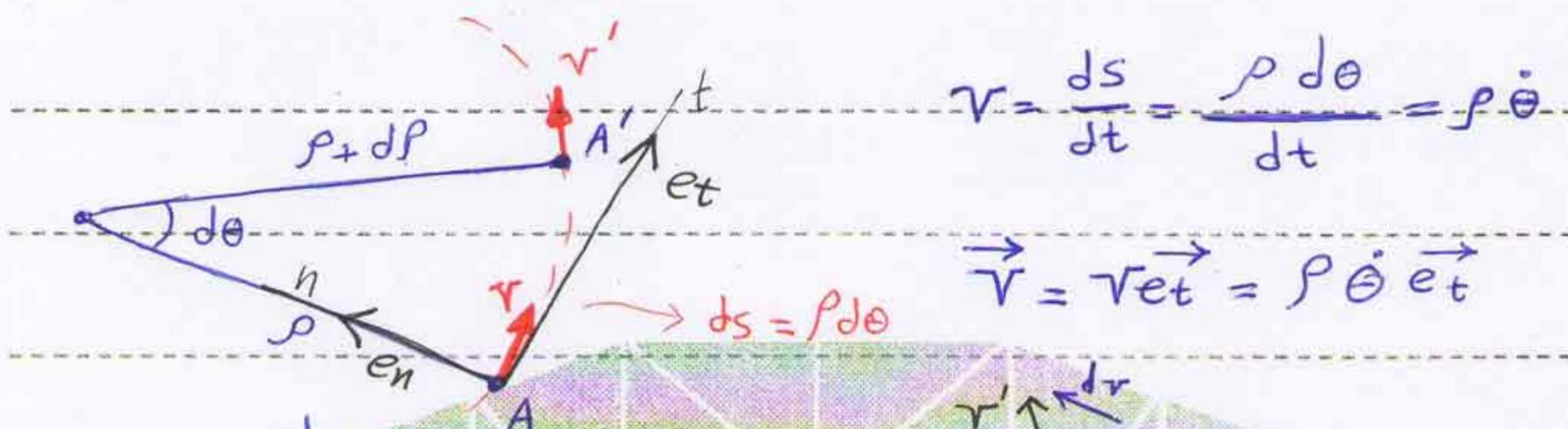
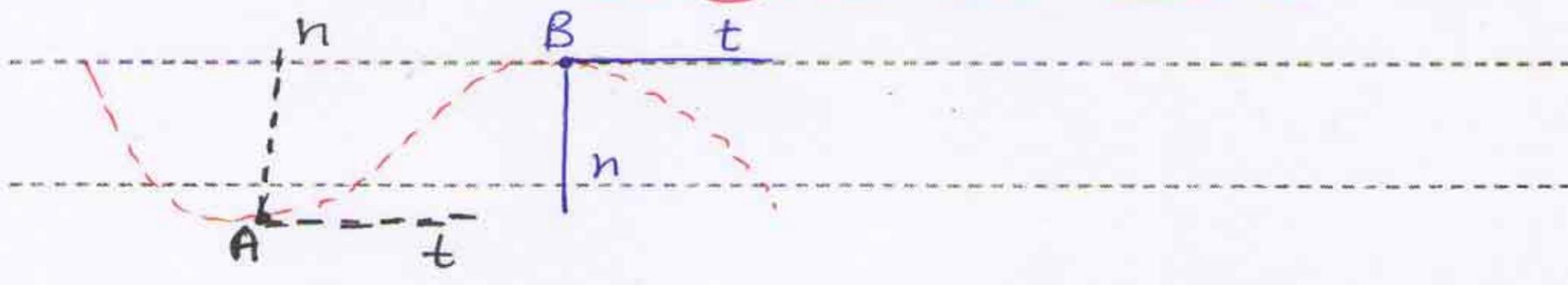
نکته طولهای با سرعت اولیه v_0 نه چندان زیاد v_0 در داخل یک ماده به مقاومتش در

مقابل حرکت متناسب با سرعت طول است بصورت لینی سلیک می شود و سواب

طول برابر $a = -kV$ می باشد و رابطه ای پیدا کنید که مسافت پیموده شده S را قبل

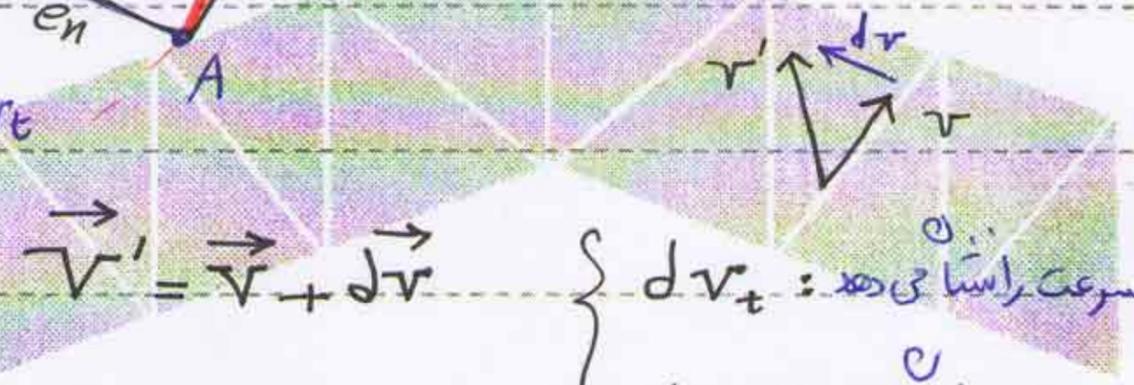
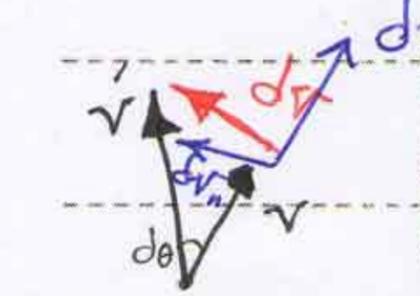
از توقف بر حسب v_0 و k بیان کرده و هم چنین زمان لازم t برای رسیدن به نصف سرعت اولیه را بیابید؟

دستگاه مختصات عمودی - مماسی (n-t)



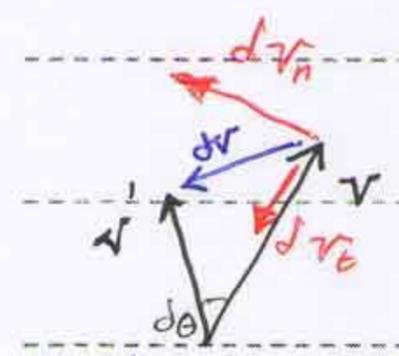
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\rho d\theta}{dt} = \rho \dot{\theta}$$

$$\vec{v} = v \vec{e}_t = \rho \dot{\theta} \vec{e}_t$$



تغییر اندازه بردار سرعت راستای می دهد: dv_t
 تغییر جهت بردار سرعت راستای می دهد: dv_n

سرعت در حال افزایش



سرعت در حال کاهش

$$\begin{cases} dv_t = d(v) = d(\rho \dot{\theta}) \\ dv_n = v d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \dot{\theta}) \\ = \dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} \\ a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v d\theta}{dt} = v \dot{\theta} = \rho \dot{\theta}^2 \\ = \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

Subject :

دینامیک

Year: ۹۰ Month: ۱ Date: ۲۶

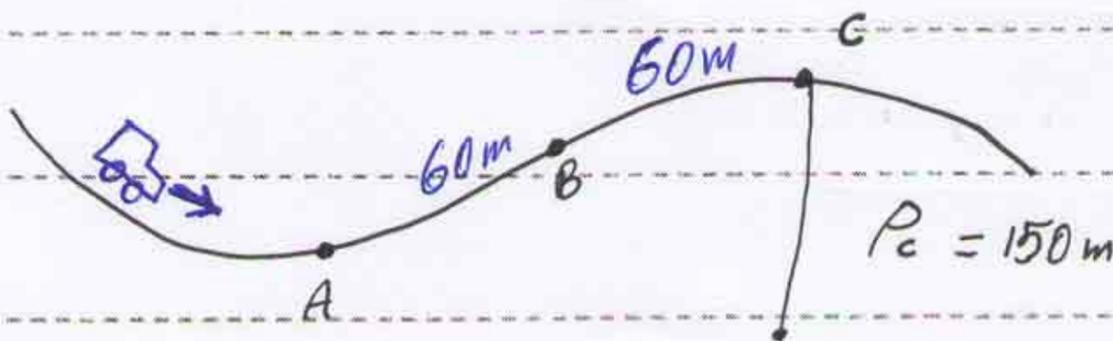
$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

حرکت دایره‌ای

$$(\rho = r) \rightarrow \begin{cases} v = r\dot{\theta} \\ a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta} \\ a_n = v\dot{\theta} = r\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

سرعت زاویه‌ای $(\dot{\theta} = \vec{\omega})$
 شتاب زاویه‌ای $(\ddot{\theta} = \alpha)$

مثال راننده‌ای با توجه به سیستم و بلندی جاده پدال ترمز را به نحوی فشار می‌دهد که سرعت اتومبیل با شتاب منفی ثابتی کاهش می‌یابد، سرعت اتومبیل در پایین برای هر دو نقطه‌ی A برابر ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت و در بالای سر بالای هر نقطه‌ی C برابر ۵۰ کیلومتر بر ساعت است. فاصله‌ی این دو نقطه در طول جاده ۱۲۰ متر است. کل شتابی که سرنشینان اتومبیل در نقطه‌ی A حس می‌کنند برابر ۳ متر بر مجذور ثانیه و شعاع انحنای برآمدگی در نقطه C برابر ۱۵۰ متر است، الف) شعاع انحنای مسیر در نقطه‌ی A چقدر است، ب) شتاب اتومبیل در نقطه‌ی عطف B چقدر است؟ ج) شتاب کل اتومبیل در نقطه‌ی C چقدر است؟



Subject :

دینامیک

Year: 90

Month: 1

Date: ۲۴



$$\left\{ \begin{aligned} V_A &= 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{100}{3.6} = 27.78 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \\ V_C &= 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{50}{3.6} = 13.89 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \end{aligned} \right.$$

$$V_C^2 - V_A^2 = 2 \times a_t \times \Delta x_{AC} \Rightarrow (13.89)^2 - (27.78)^2 = 2 \times a_t \times 120$$

$$\Rightarrow a_t = -2.41 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \quad \text{منهای شتاب در طول مسیر}$$

A در نقطه A :

$$\left\{ \begin{aligned} V_A &= 27.78 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \right.$$

$$a_t = -2.41 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\text{ج}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{(الف)}$$

$$(a_{\text{ج}})^2 = (a_t)^2 + (a_n)^2 \Rightarrow (a_n)^2 = (a_{\text{ج}})^2 - (a_t)^2$$

$$= (3)^2 - (-2.41)^2 \Rightarrow a_n = 1.79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho_A} \Rightarrow \rho_A = \frac{(27.78)^2}{1.79} = 431.13 \text{ (m)}$$

B در نقطه B :

$$\left\{ \begin{aligned} a_t &= -2.41 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned} \right. \quad \text{(ب)}$$

$$\rho_B = \infty \Rightarrow a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$$

$$\rightarrow a_{\text{ج}} = a_t = -2.41 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

C در نقطه C :

$$\left\{ \begin{aligned} a_t &= -2.41 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \end{aligned} \right. \quad \text{(ج)}$$

$$\rho_C = 150 \text{ (m)}$$

$$V = 13.89 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(13.89)^2}{150} = 1.29 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

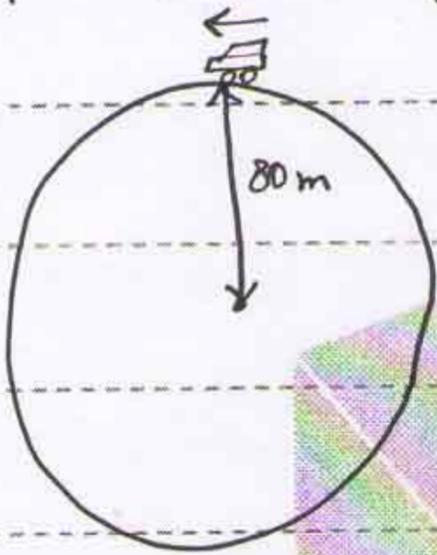
$$a_{\text{کل}} = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2} = \sqrt{(-2.41)^2 + (1.29)^2} = 2.73 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

مثال اتومبیلی روی مسیری افقی که به شکل دایره ای به شعاع 80 m است، از حال

سکون به راه من افتد، سرعت اتومبیل با آکسنگ ثابتی افزایش می یابد و در طی مدت

10 s به $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ می رسد، 8 ثانیه بعد از شروع حرکت مقدار شتاب

کل اتومبیل چقدر است؟



$$v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{100}{3.6} = 27.78 \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 27.78 = a \times 10 \Rightarrow$$

$$a = 2.78 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2.78 \times 8 = 22.24 \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(22.24)^2}{80} = 6.18 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$a_t = 2.78 \left(\frac{m}{s^2}\right) \rightarrow a_{\text{کل}} = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2} = \sqrt{(2.78)^2 + (6.18)^2}$$

$$\Rightarrow a_{\text{کل}} = 6.77 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

مثال گلوله ای از نقطه A واقع در بالای صخره ای به ارتفاع 50 m مطابق شکل با

سرعت $15 \left(\frac{m}{s}\right)$ به طور افقی پرتاب می شود و در نقطه C فرود می آید،

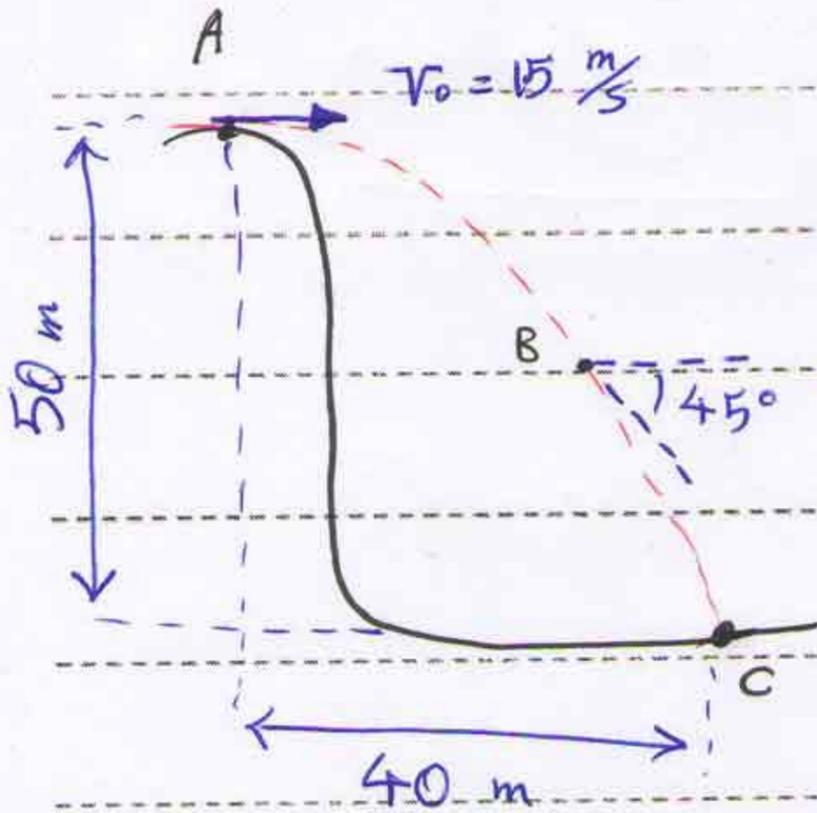
گلوله بر اثر باد شدیدی که به طرف چپ می وزد دچار شتاب افقی ثابتی در خلاف

جهت x می شود، شعاع انحنای مسیر گلوله را در نقطه B بدست آورید، در این شکل

Subject :

دینامیک

Year: 90 Month: 1 Date: 29



زاویه امتداد مسیر با افق 45° است ؟

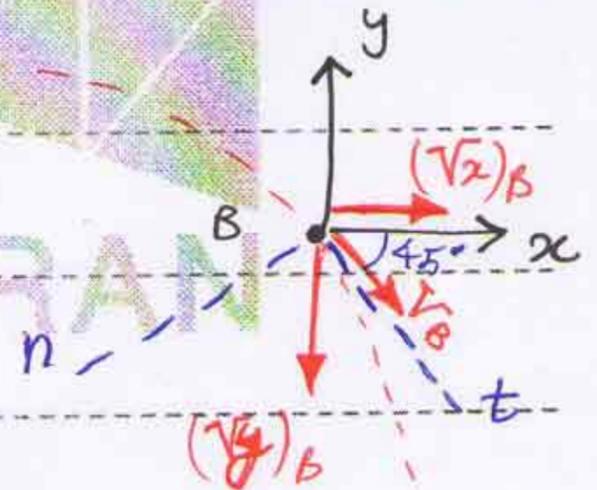
با \rightarrow

$$x = \frac{1}{2} a_x t_c^2 + (v_x)_0 t$$

$$y = -\frac{1}{2} g t_c^2 + (v_y)_0 t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 40 = \frac{1}{2} a_x \times t_c^2 + 15 \times t_c \\ -50 = -\frac{1}{2} \times 9.81 \times t_c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_c = 3.19 \text{ (s)} \\ a_x = -1.54 \left(\frac{m}{s^2}\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} (v_x)_B = a_x t_B + (v_x)_0 = -1.54 \times t_B + 15 \\ (v_y)_B = -g t_B + (v_y)_0 = -9.81 \times t_B \end{cases}$$

$$(v_y)_B = -g t_B + (v_y)_0 = -9.81 \times t_B$$

$$\tan 45^\circ = \frac{-(v_y)_B}{(v_x)_B} = 1 \Rightarrow \boxed{(v_y)_B = -(v_x)_B}$$

$$\Rightarrow -9.81 \times t_B = -(-1.54 \times t_B + 15) \Rightarrow \boxed{t_B = 1.32 \text{ (s)}}$$

$$\rightarrow \boxed{(v_x)_B = 12.97 \frac{m}{s}} \quad \text{و} \quad \boxed{(v_y)_B = 12.95 \frac{m}{s}}$$

Subject :

دینامیک

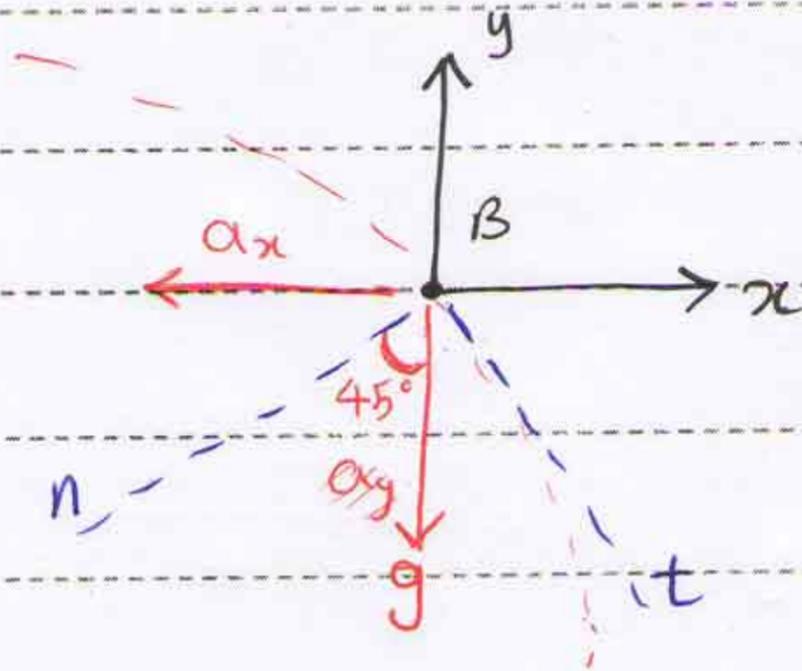
Year: 90

Month: 1

Date: 24



$$V_B = \sqrt{(V_x)_B + (V_y)_B} = \sqrt{2 \times (12.95)^2} = 18.33 \frac{m}{s}$$

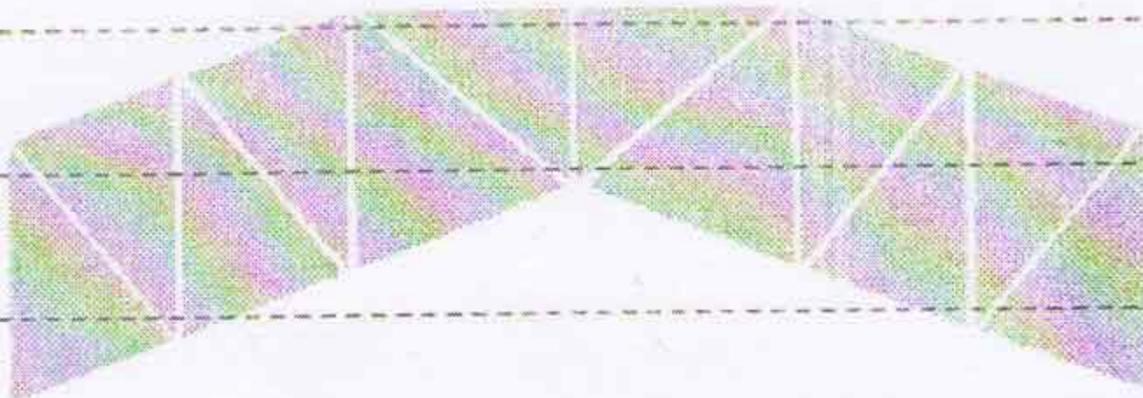


$$a_n = g \cos 45^\circ + a_x \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow a_n = 8.03 \frac{m}{s^2}$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow 8.03 = \frac{(18.33)^2}{\rho}$$

$$\Rightarrow \rho = 41.84 \text{ cm}$$



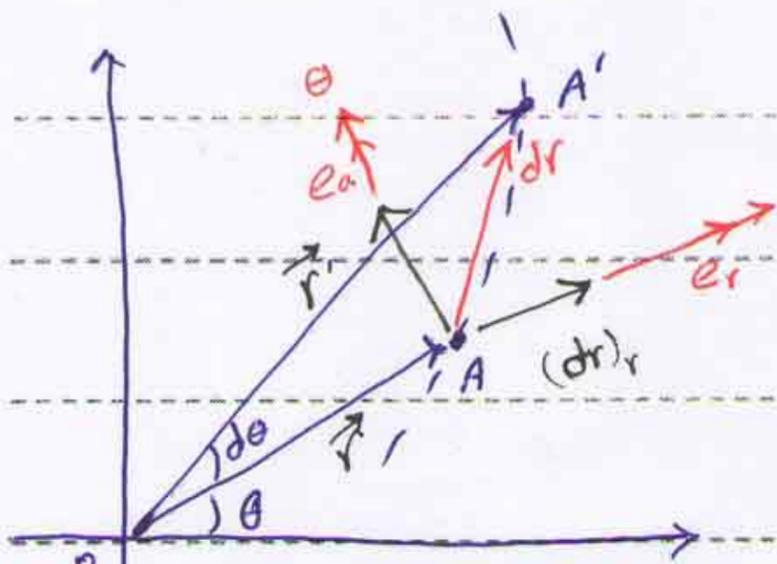
ABADANOMRAN

Subject :

دینامیک

Year: 90 Month: 2 Date: 2

دستگاه مختصات قطبی (r-θ)



$$\vec{r} = r \vec{e}_r, \quad \vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$$

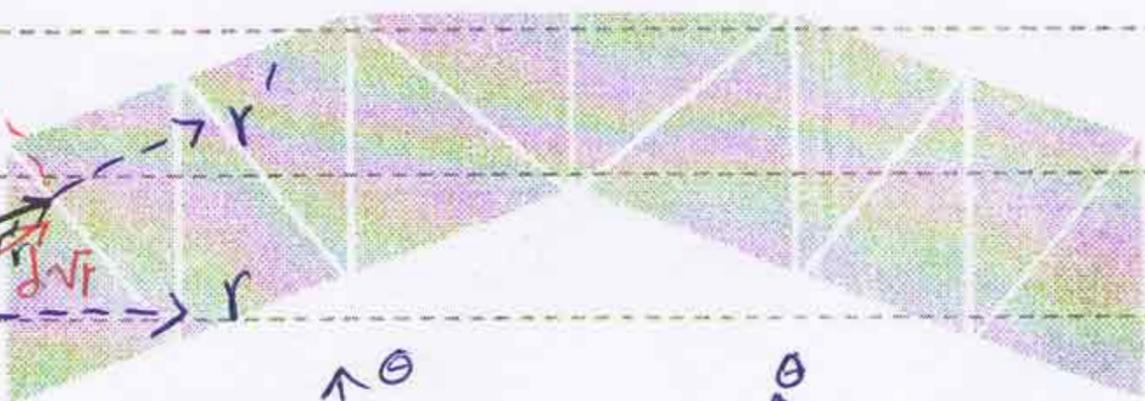
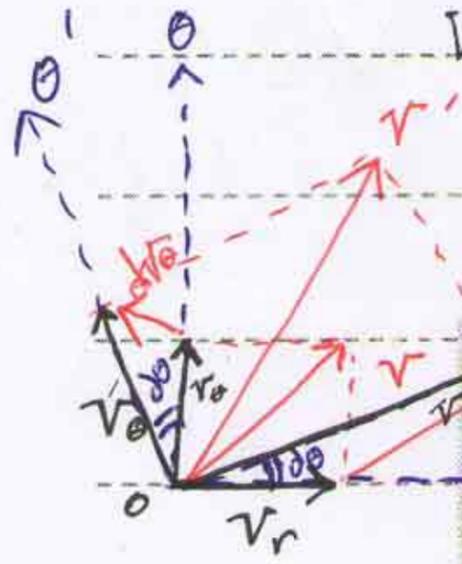
$$dr_r = |\vec{r}'| - |\vec{r}| = d|\vec{r}| = dr$$

$$dr_\theta = r d\theta$$

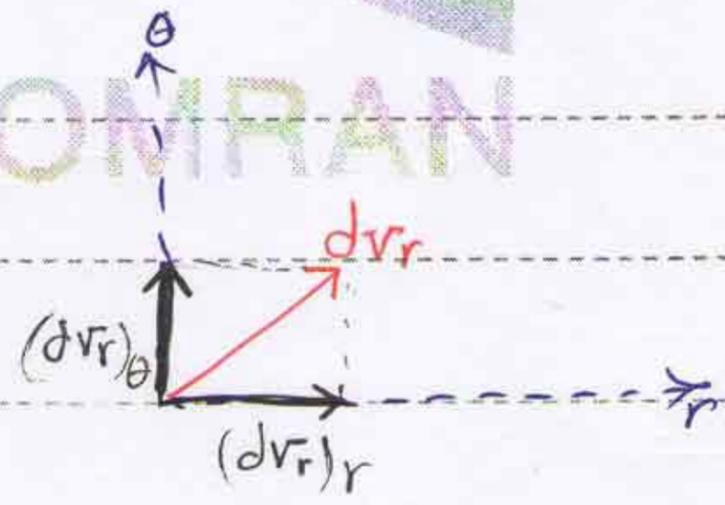
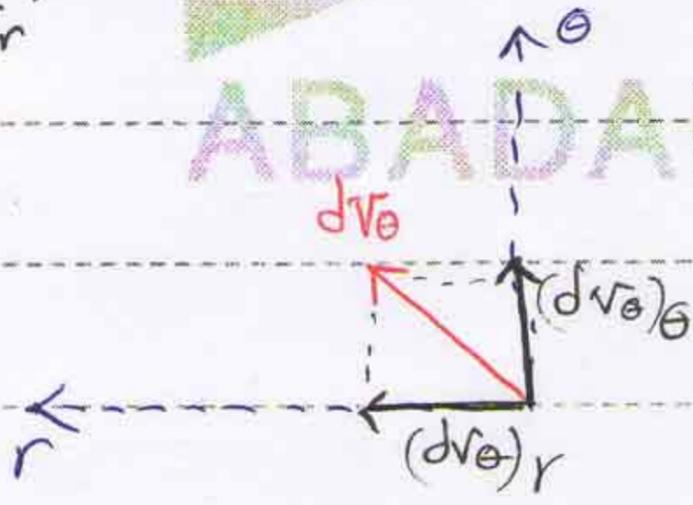
$$V_r = \frac{dr_r}{dt} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$\vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$V_\theta = \frac{dr_\theta}{dt} = \frac{r d\theta}{dt} = r \dot{\theta}$$



ABADANOMRAN



$$(dV_r)_r = d|\vec{V}_r| = dr \rightarrow r$$

$$(dV_r)_\theta = V_r d\theta = \dot{r} d\theta \uparrow \theta$$

$$(dV_\theta)_\theta = d|\vec{V}_\theta| = d(r\dot{\theta}) \uparrow \theta$$

$$(dV_\theta)_r = V_\theta d\theta = r\dot{\theta} d\theta \leftarrow r$$

Subject :

دینامیک

Year: ۹ • Month: ۲ Date: ۲



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{(dv_r)_r}{dt} &= \frac{dr}{dt} = \dot{r} \rightarrow r \\ \frac{(dv_r)_\theta}{dt} &= \frac{r d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \uparrow \theta \end{aligned} \right.$$

$$\frac{(dv_\theta)_\theta}{dt} = \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \uparrow \theta$$

$$\frac{(dv_\theta)_r}{dt} = \frac{r\dot{\theta} d\theta}{dt} = r\dot{\theta}^2 \leftarrow r$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned} \right.$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

* برای حرکت دایره‌ای (رابطه):

$$\begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_r = -r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

مثال در شکل زیر هواپیما می‌موردن با سرعت افقی ثابت پرواز می‌کند و از بالا به سر

ناظر نقطه O می‌گذرد، برای هر یک از موقعیت‌های A، B و C علامت کمیت‌های



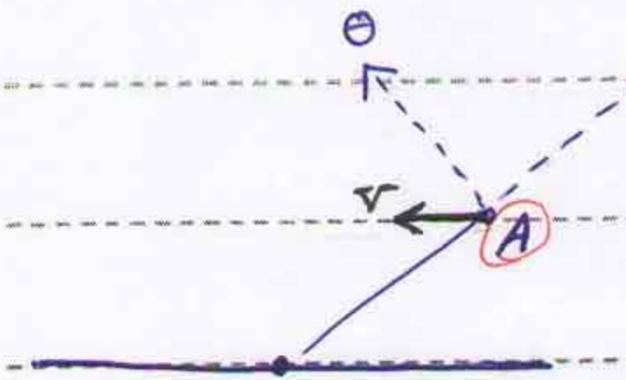
$r, \dot{r}, \ddot{r}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ را تعیین کنید:

در هر لحظه حالت مثبت هستند

$$\left. \begin{aligned} a_r = 0 \\ a_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 & (1) \\ \ddot{\theta} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} & (2) \end{cases}$$

① → سرعت مثبت است \dot{r} → مثبت $\dot{\theta}$ و چون r همیشه مثبت است →

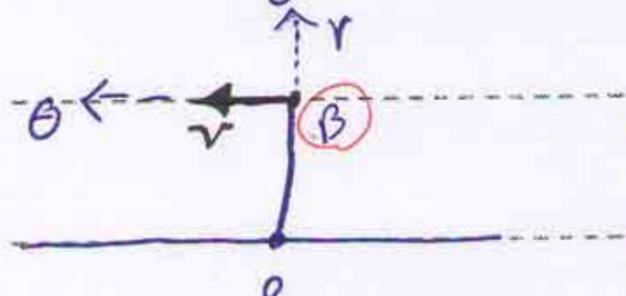


حالت اول:

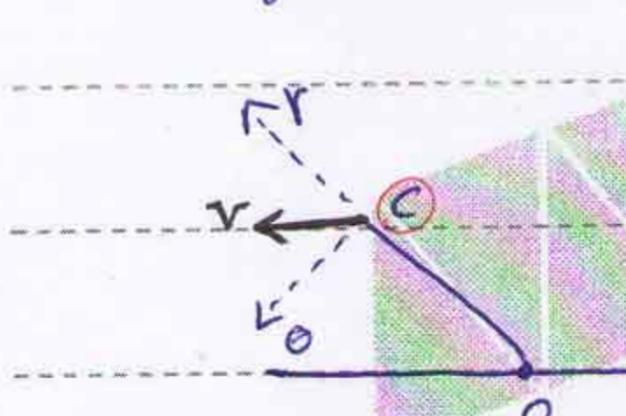
$$v_r = \dot{r} \rightarrow (\dot{r} \text{ مثبت است})$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \rightarrow (\dot{\theta} \text{ مثبت است})$$

$\dot{\theta}$ مثبت (۲)



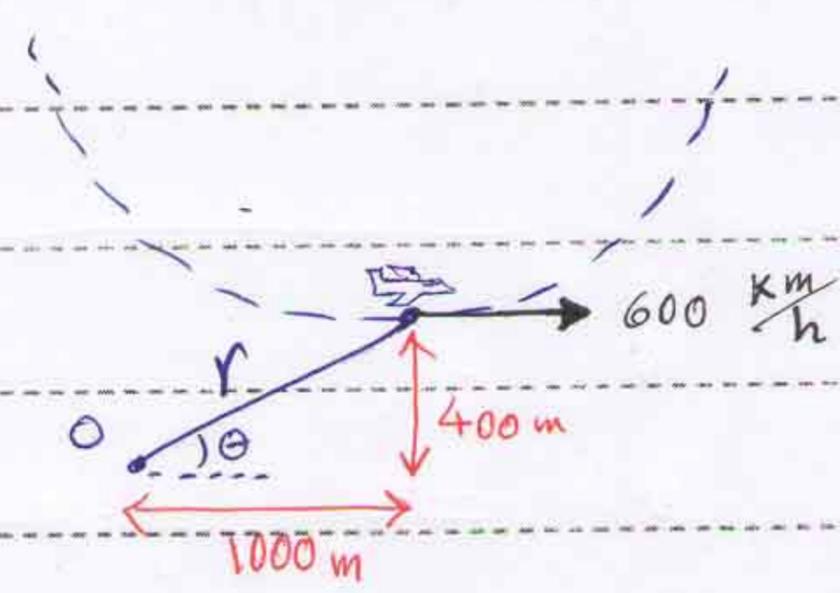
حالت دوم:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_r = \dot{r} \rightarrow (\dot{r} \text{ منفی است}) \\ v_\theta = r\dot{\theta} \rightarrow (\dot{\theta} \text{ مثبت است}) \end{array} \right\} \xrightarrow{(۲)} \dot{\theta} = 0$$


حالت سوم:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_r = \dot{r} \rightarrow (\dot{r} \text{ مثبت است}) \\ v_\theta = r\dot{\theta} \rightarrow (\dot{\theta} \text{ مثبت است}) \end{array} \right\} \xrightarrow{(۲)} \dot{\theta} \text{ (مثبت است)}$$

مثال هواپیمایی به شکل در مسیری دایره‌ای به شعاع ۱۲۰۰ متر را در صفحه‌ی قائم $(r-\theta)$ طی می‌کند و حرکت آن را رادار از نقطه‌ی O ردیابی می‌کند، در پایین این مسیر در ارتفاع ۴۰۰ متری، هواپیمای دارای سرعت افقی ۶۰۰ کیلومتر بر ساعت است و شیب افقی ندارد. در این لحظه رادار مقدار \dot{r} و $\dot{\theta}$ را چند سان من دهد؟



$$v = 600 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{600}{3.6} = 166.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Subject :

دینامیک

Year: 90 Month: 2 Date: 2



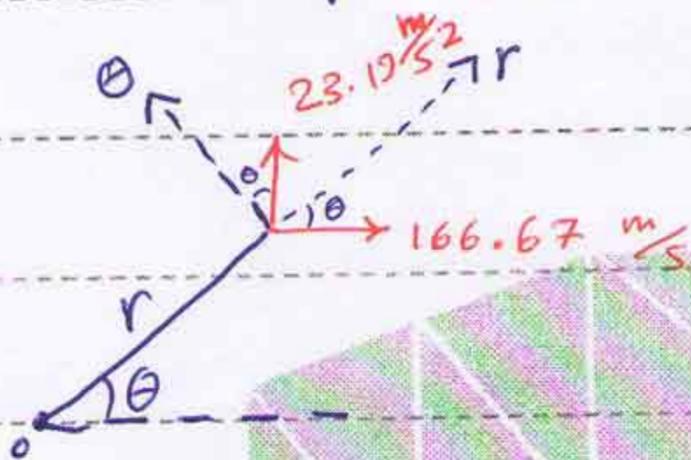
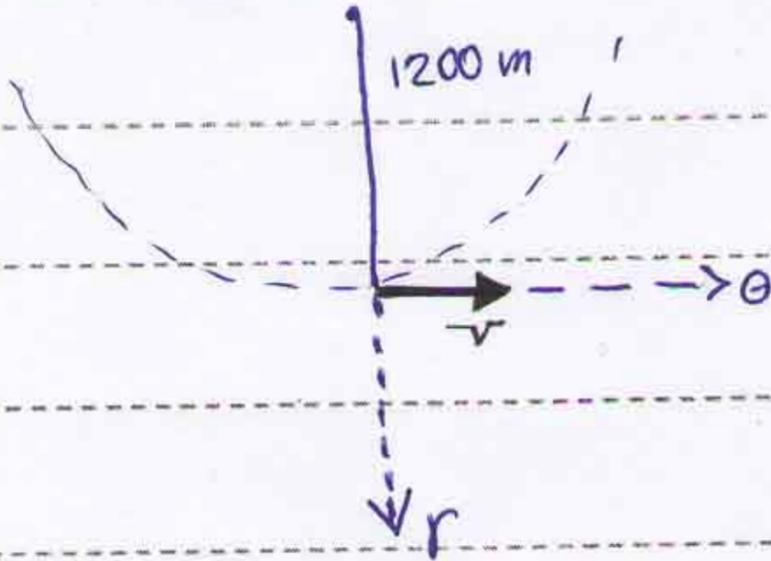
$$V_{\theta} = r\dot{\theta} \Rightarrow 166.67 = 1200 \times \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = 0.139 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

موازی شتاب - یعنی ندارد $a_{\theta} = 0$

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 = -1200 \times (0.139)^2 \Rightarrow$$

$$a_r = -23.19 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$$r = \sqrt{400^2 + 1000^2} = 1077 \text{ m} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{400}{1000}\right) = 21.8^\circ$$

$$V_r = 166.67 \times \cos 21.8^\circ = 154.75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_{\theta} = -166.67 \times \sin 21.8^\circ = -61.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_r = 23.19 \times \sin(21.8^\circ) = 8.61 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a_{\theta} = 23.19 \times \cos(21.8^\circ) = 21.53 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_r = \dot{r} \Rightarrow \boxed{\dot{r} = 154.75 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ V_{\theta} = r\dot{\theta} \Rightarrow -61.9 = 1077 \times \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = -5.75 \times 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \end{array} \right.$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \Rightarrow 8.61 = \ddot{r} - 1077 \times (-5.75 \times 10^{-2})^2 \Rightarrow \boxed{\ddot{r} = 12.17 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$a_{\theta} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow 21.53 = 1077 \times \ddot{\theta} + 2 \times 154.75 \times (-5.75 \times 10^{-2})$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = 0.0365 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}$$

مثال - مسیر یک ذره با روابط $r = b(2 + \cos \pi t)$ و $\theta = \pi t$ توصیف می شود.

الف - سرعت و شتاب ذره را در $t = 2 \text{ s}$ تعیین کنید. ب - θ های متناظر با $t = 2 \text{ s}$

Subject :

دینامیک

Year: 90

Month: ۲

Date: ۲



سرعت را تعیین کنید:

$$r = b(2 + \cos \pi t) \rightarrow \dot{r} = -b\pi \sin \pi t$$

$$\rightarrow \ddot{r} = -b\pi^2 \cos \pi t, \theta = \pi t \rightarrow \dot{\theta} = \pi, \ddot{\theta} = 0$$

$$V_r = \dot{r} = -b\pi \sin \pi t \rightarrow t = 2s \rightarrow V_r = 0$$

$$V_\theta = r\dot{\theta} = b\pi(2 + \cos \pi t) \rightarrow t = 2s \rightarrow V_\theta = 3b\pi$$

$$\Rightarrow \vec{V} = 3b\pi \vec{e}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -b\pi^2 \cos \pi t - b\pi^2(2 + \cos \pi t) \rightarrow t = 2s \rightarrow$$

$$a_r = -4b\pi^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2 \times (-b\pi \sin \pi t) \times \pi \rightarrow t = 2s \rightarrow a_\theta = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -4b\pi^2 \vec{e}_r$$

$$V = \sqrt{b^2\pi^2 \sin^2 \pi t + b^2\pi^2(2 + \cos \pi t)^2} =$$

$$= \sqrt{b^2\pi^2 \sin^2 \pi t + 4b^2\pi^2 + b^2\pi^2 \cos^2 \pi t + 4b^2\pi^2 \cos \pi t}$$

$$= \sqrt{5b^2\pi^2 + 4b^2\pi^2 \cos \pi t} \Rightarrow V = b\pi \sqrt{5 + 4 \cos \pi t}$$

سرعتی که ما می‌خواهیم در آن لحظه معادله \cos 1 شود.

$$\cos \pi t = 1 \rightarrow \pi t = 2k\pi (k = 0, 2, 3, 4, \dots) \rightarrow t = 2k \rightarrow \theta = 2k\pi$$

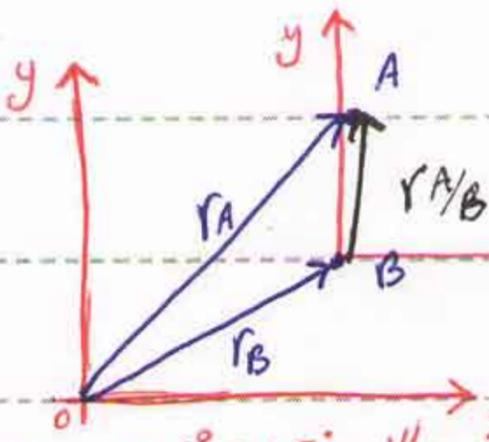
Subject :

دینامیک

Year: 90 Month: 2 Date: 9



* حرکت نسبی :



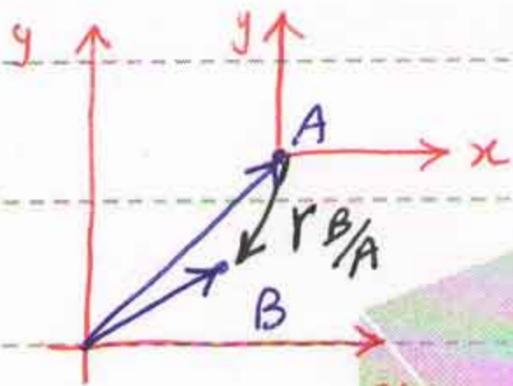
دستگاه مختصات انتقالی x

دستگاه مختصات ثابت (مبنا) x

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}$$

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}}_{A/B} \quad \text{یا} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

$$\ddot{\vec{r}}_A = \ddot{\vec{r}}_B + \ddot{\vec{r}}_{A/B} \quad \text{یا} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{r}_{B/A} = -\vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_{B/A} = -\vec{v}_{A/B}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_{B/A} = -\vec{a}_{A/B}$$

مثال در شکل مقابل هواپیمای جت مسافری A با سرعت $800 \frac{km}{h}$ به طرف شرق حرکت

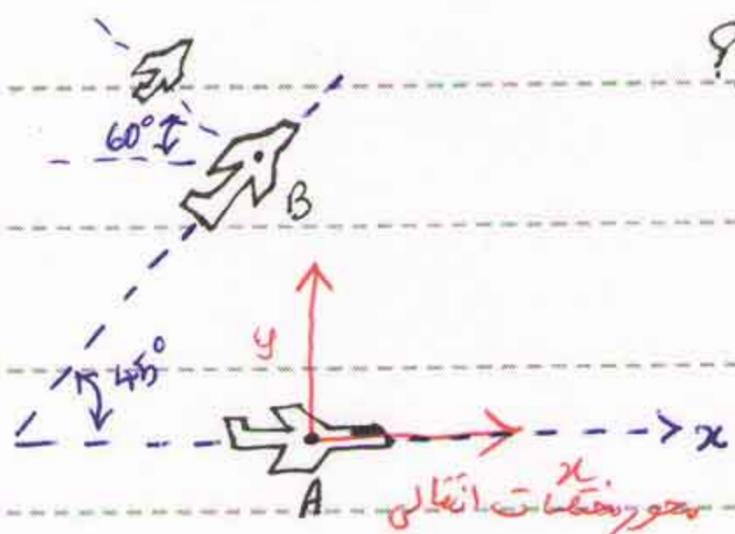
می کند و در زیر این هواپیمای جت B در حال پرواز افقی است و در جهت

45° درجه شمال شرقی حرکت می کند اما بطوری که در شکل هم نشان داده شده است

هواپیمای B از نظر مسافران هواپیمای A با زاویه 60° درجه از آن عاود می شود

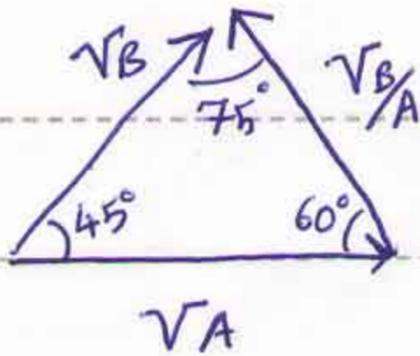
سرعت حقیقی هواپیمای B را بدست آورید؟

حل



برای حل این مسئله نمودار و جبر بردار:

* راه حل مسائلی :



قانون سینوس ها :

$$\frac{V_A}{\sin 75^\circ} = \frac{V_B}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{800 \times \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 717 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

* راه حل برابری :

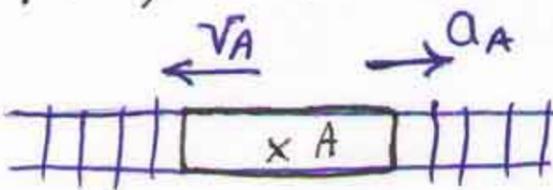
$$\vec{V}_A = 800 \vec{i}$$

$$\vec{V}_B = V_B \cos 45^\circ \vec{i} + V_B \sin 45^\circ \vec{j}$$

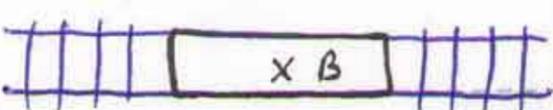
$$\vec{V}_{B/A} = -\frac{V_B}{A} \cos 60^\circ \vec{i} + \frac{V_B}{A} \sin 60^\circ \vec{j}$$

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \Rightarrow \vec{V}_{B/A} = 586 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

مثال در شغل زیر دو قطار A و B را نشان داده ایم که در دو ریل های موازی حرکت می کنند در حالی که سرعت قطار A برابر $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ و شتاب آن $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ باشد. سرعت قطار B ثابت و برابر $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ است. سرعت و شتاب قطار B را نسبت به قطار A بدست آورید.

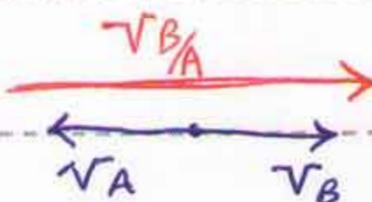


$$\vec{V}_A = -80 \vec{i}, \quad \vec{a}_A = 2 \vec{i}$$



$$\vec{V}_B = 40 \vec{i}, \quad \vec{a}_B = 0$$

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = 40 \vec{i} - (-80 \vec{i}) = 120 \vec{i}$$



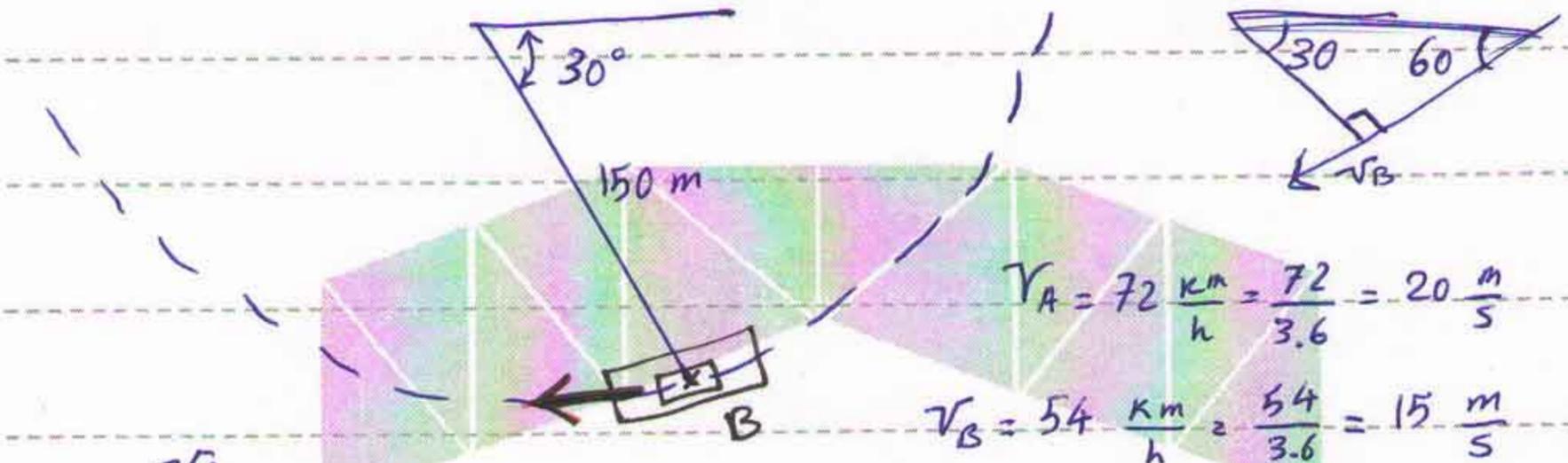
$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = 0 - 2 \vec{i} = -2 \vec{i}$$

مسئله در شکل مقابل اتوبوس A با شتاب $1.2 \frac{m}{s^2}$ حرکت می کند و اتوبوس B

قوسی به شعاع 150 m را با سرعت ثابت $54 \frac{km}{h}$ می پیماید، در وضعیت نشان

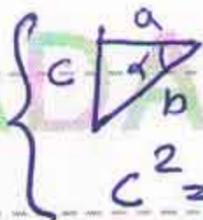
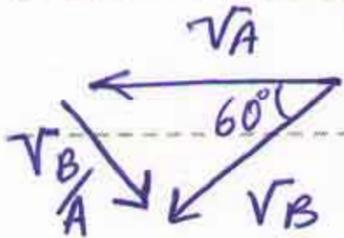
داده شده سرعت اتوبوس A برابر $72 \frac{km}{h}$ است، سرعت و شتاب اتوبوس B را

از دید ناظری که در اتوبوس A قرار دارد بدست آورید.



$$v_A = 72 \frac{km}{h} = \frac{72}{3.6} = 20 \frac{m}{s}$$

$$v_B = 54 \frac{km}{h} = \frac{54}{3.6} = 15 \frac{m}{s}$$



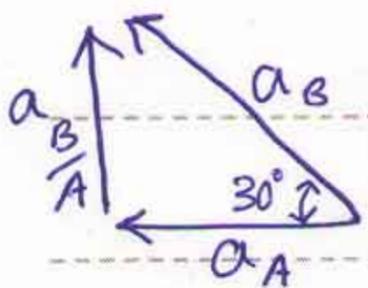
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

* راه حل دیگری :

$$(v_{B/A})^2 = (v_A)^2 + (v_B)^2 - 2 \times v_A \times v_B \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow (v_{B/A})^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \times 20 \times 15 \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow v_{B/A} = 18.03 \frac{m}{s}$$



$$(a_t)_B = 0 \quad \text{و} \quad (a_n)_B = \frac{(v_B)^2}{R_B} = \frac{15^2}{150} = 1.5 \frac{m}{s^2}$$

$$(a_{B/A})^2 = (a_A)^2 + (a_B)^2 - 2 \times a_A \times a_B \times \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow (a_{B/A})^2 = (1.2)^2 + (1.5)^2 - 2 \times 1.2 \times 1.5 \times \cos 30^\circ \rightarrow a_{B/A} = 0.757 \frac{m}{s^2}$$

① استفاده از قانون دوم نیوتن

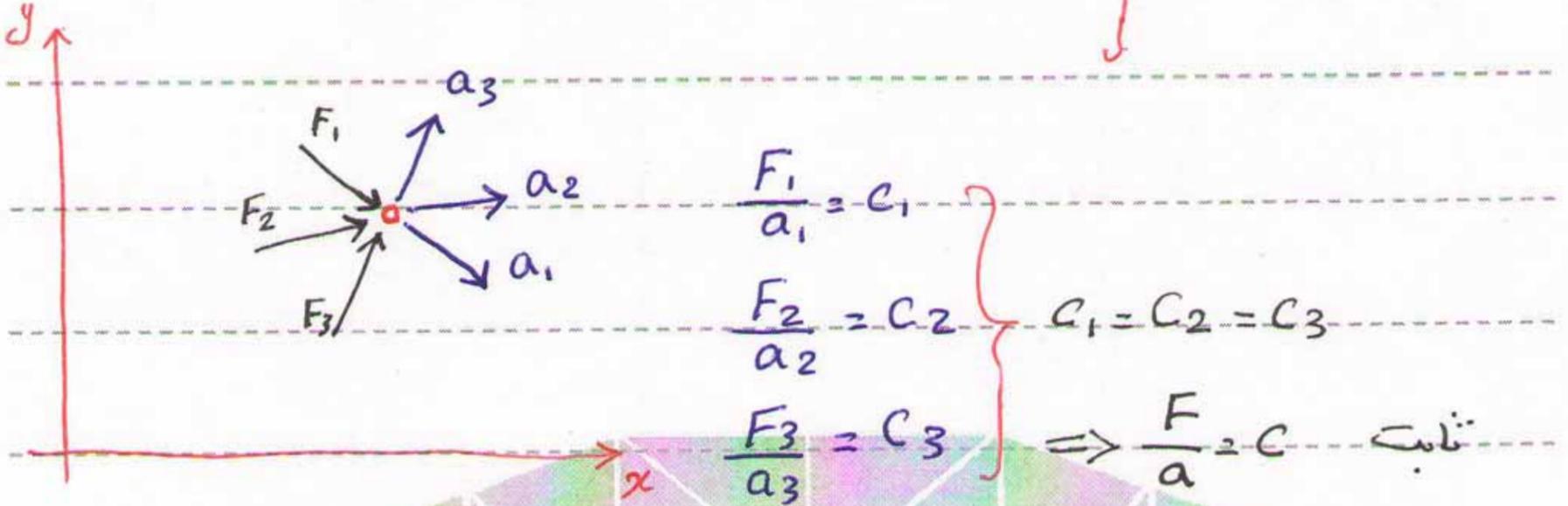
② روش کاروانرژی

③ روش ضرب و اندازه حرکت

* سینتیک:

روش های حل مسائل

سینتیک:



$$\vec{F} = m \vec{a}$$

(N)

(kg)

($\frac{m}{s^2}$)

ABADANOMRAN

$$\sum F_x = m a_x$$

$$\sum F_y = m a_y$$

$$\sum F_z = m a_z$$

حرکت سه بعدی:

$$\sum F_x = m a_x$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

حرکت مستقیم الخط:

دستگاه مختصات دکارتی:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum F_x &= m a_x & a_x &= \ddot{x} \\ \sum F_y &= m a_y & a_y &= \ddot{y} \end{aligned} \right.$$

دستگاه مختصات

عمودی - شعاعی:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum F_t &= m a_t & a_t &= \dot{v} \\ \sum F_n &= m a_n & a_n &= \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \right.$$

دستگاه مختصات قطبی:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum F_r &= m a_r & a_r &= \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ \sum F_\theta &= m a_\theta & a_\theta &= r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \end{aligned} \right.$$

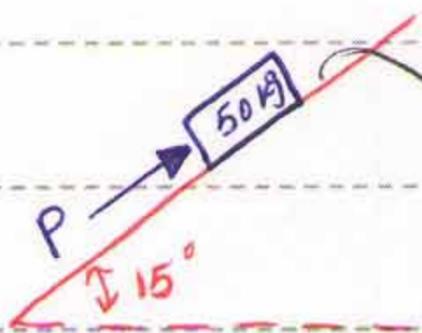
مثال صندوق 50 کیلوگرمی مثل شکل زیر، درست قبل از آن که نیروی P بر آن وارد شود.

ساکن است، شتاب صندوق را در حالت های زیر بدست آورید؟

الف) $P=0$ ، ب) $P=150$ (N) ، ج) $P=300$ (N)

نیروی اصطکاک ایستایی $F_s = \mu_s \cdot N$

نیروی اصطکاک جنبشی $F_k = \mu_k \cdot N$

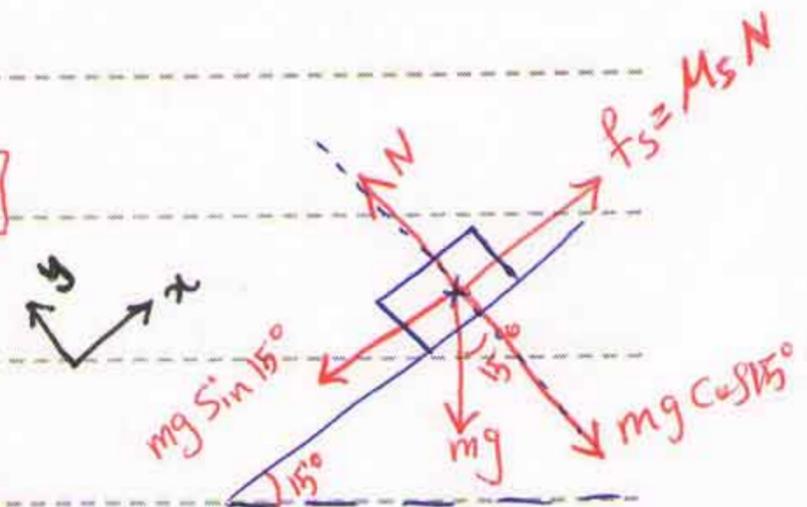


$$\left\{ \begin{aligned} \mu_s &= 0.2 \\ \mu_k &= 0.15 \end{aligned} \right.$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos 15^\circ = 0 \Rightarrow N = 433.79 \text{ (N)}$$

$$mg \sin 15^\circ = 50 \times 9.81 \times \sin 15^\circ = 126.95 \text{ (N)}$$

$$F_s = \mu_s N = 0.2 \times 433.79 = 94.76 \text{ (N)}$$



$\Rightarrow mg \sin 15^\circ > f_s \Rightarrow$ جسم رو به پایین حرکت می کند

$$\sum F_x = -max \Rightarrow mg \sin 15^\circ - \mu_k N = -max$$

$$\Rightarrow mg \sin 15^\circ - \mu_k mg \cos 15^\circ = -max \Rightarrow ax = g(\mu_k \cos 15^\circ - \sin 15^\circ)$$

$$\Rightarrow ax = (0.15 \times \cos 15^\circ - \sin 15^\circ) \times 9.81 \Rightarrow ax = 1.12 \frac{m}{s^2}$$

ب) $P = 150 \text{ N}$

$$P - mg \sin 15^\circ = 150 - 50 \times 9.81 \times \sin 15^\circ =$$

$$= 23.05 \text{ (N)} \quad (\text{به سمت بالا})$$

$$f_s = 94.76 \text{ (N)}$$

\Rightarrow نیروی اصطکاک بیشتر است $\rightarrow (ax = 0)$

ج) $P = 300 \text{ N}$

$$\sum F_x = max \Rightarrow P - mg \sin 15^\circ - \mu_k N = max$$

$$\Rightarrow 300 - 50 \times 9.81 \times \sin 15^\circ - 0.15 \times 473.79 = 50 \times ax$$

$$\Rightarrow ax = 2.04 \frac{m}{s^2}$$

$$P - mg \sin 15^\circ = 173.05$$

$$f_s = 94.76$$

مقایسه ای
ابتدایی:

مثال: اسکن باز روی سطحی با شیب 40 درجه در لحظه $t = 0$ از حال سکون

به راه می افتد و در لحظه $t = 2.58$ از مقابل محل ثبت سرعت که 20 متر پایین تر

است رد می شود و ضربه اصطکاک جنبشی بین برف و چوب اسکن را تعیین کنید

مقاومت هوا صرف نظر کنید.

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{1}{2} \times a \times (2.58)^2 + 0 \rightarrow a = 6 \frac{m}{s^2}$$

$$\sum F_x = m a_x$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = m g \cos 40^\circ \rightarrow N = m g \cos 40^\circ$$

$$\sum F_x = m a_x \rightarrow m g \sin 40^\circ - \mu_k N = m a_x$$

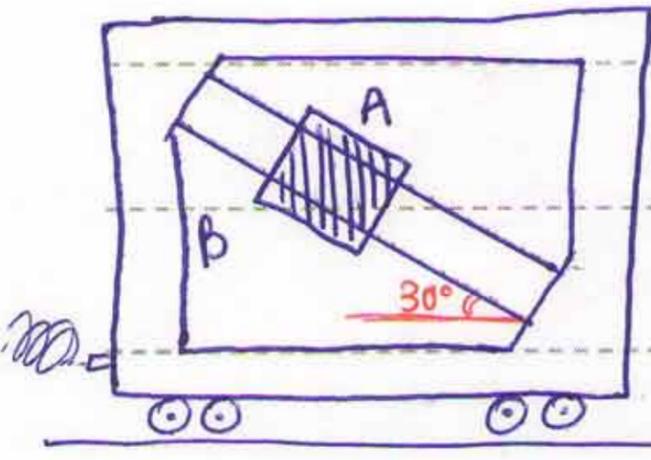
$$\Rightarrow m g \sin 40^\circ - \mu_k m g \cos 40^\circ = m a$$

$$\Rightarrow 9.81 \times \sin 40^\circ - \mu_k \times 9.81 \times \cos 40^\circ = 6 \Rightarrow \mu_k = 0.04$$

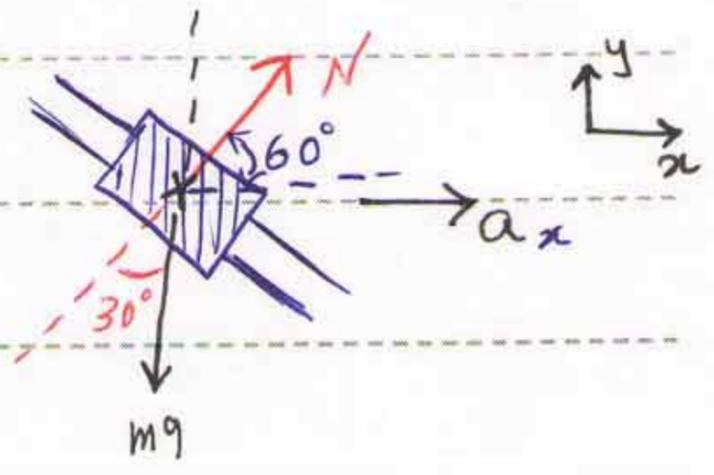
شکل مقابل قابی را نشان داده ایم که محور عمودی B بطور مایل در آن نصب شده است.

طوقه A می تواند آزادانه روی این محور بلغزد و قاب در صفحه ای

قائم قرار دارد برای آن که طوقه نسبت به محور حرکت نکند و ستاب افقی قاب حفظ باشد.



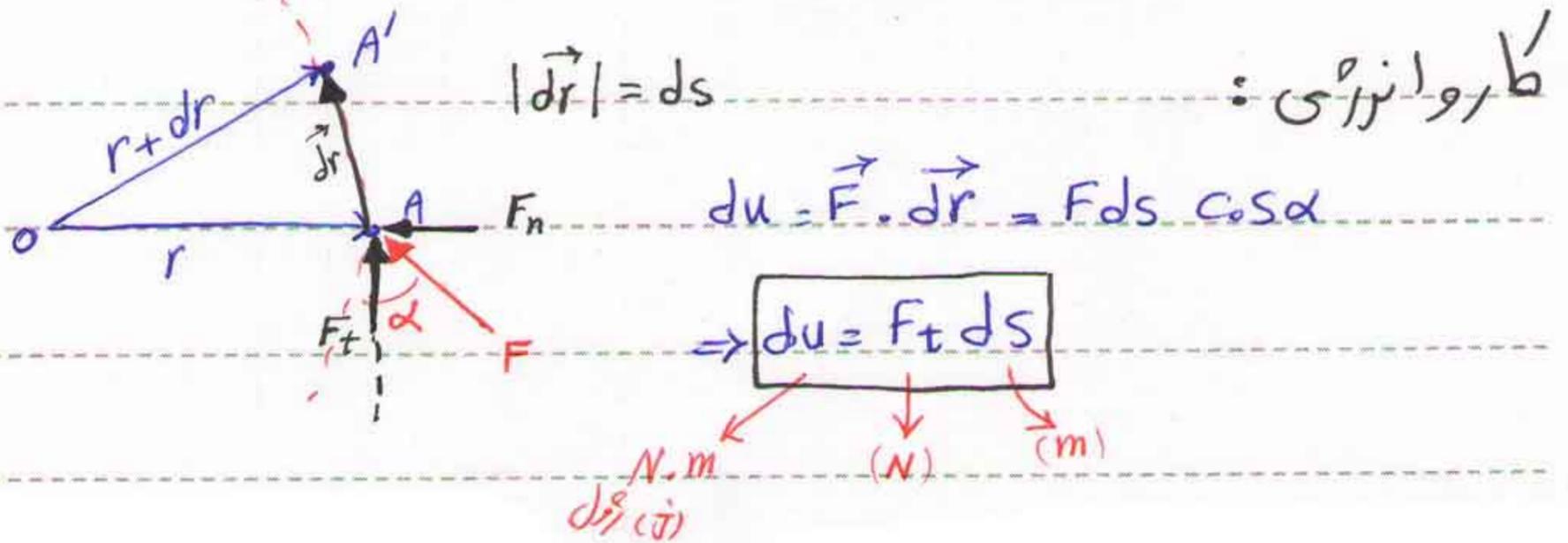
$\rightarrow a$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N \sin 60^\circ = m g \quad (1)$$

$$\sum F_x = m a_x \Rightarrow N \cos 60^\circ = m a_x \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{N \sin 60^\circ}{N \cos 60^\circ} = \frac{m g}{m a_x} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{9.81}{a_x} \rightarrow a_x = 5.66 \frac{m}{s^2}$$



اگر چند نیرو همزمان بر ذره اثر کنند:

$$U = \int F_t ds = \int \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

$$dU = (\vec{F}_1 \cdot \vec{dr} + \vec{F}_2 \cdot \vec{dr} + \dots) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) \cdot \vec{dr}$$

$$\Rightarrow dU = \sum \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

$$U = \int \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int m \vec{a} \cdot \vec{dr}$$

$\vec{a} \cdot \vec{dr} = a_t ds$
 $a_t ds = v dv$

$$U = \int_1^2 m v dv$$

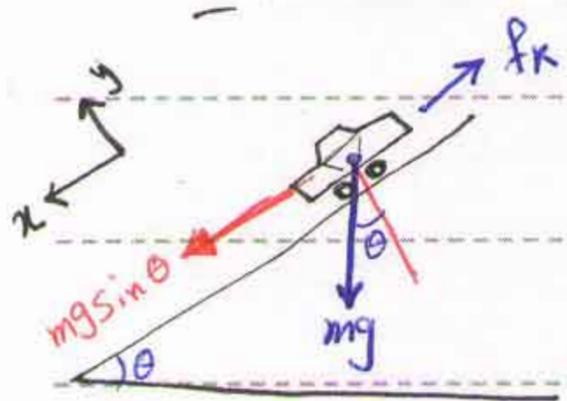
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2} m v^2$

$$\boxed{U = \Delta T}$$

تغییرات انرژی جنبشی
 کار انجام شده توسط نیروهای خارجی

مثال اتومبیلی در سر از پستی یک جاده با شیب ۱۰ درصد، با سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کرده و ناگهان ترمز می‌کند، اگر پس از طی مسافت ۱۵ متر متوقف گردد، ضریب اصطکاک بین چرخ‌ها و سطح جاده را محاسبه کنید؟



$$U = \Delta T \quad \Rightarrow \quad (m g \sin \theta - \mu_k N) \times S =$$

$$du = F_t ds \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta =$$

$$V_0 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{50}{3.6} = 13.89 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= -\frac{1}{2} m V_0^2$$

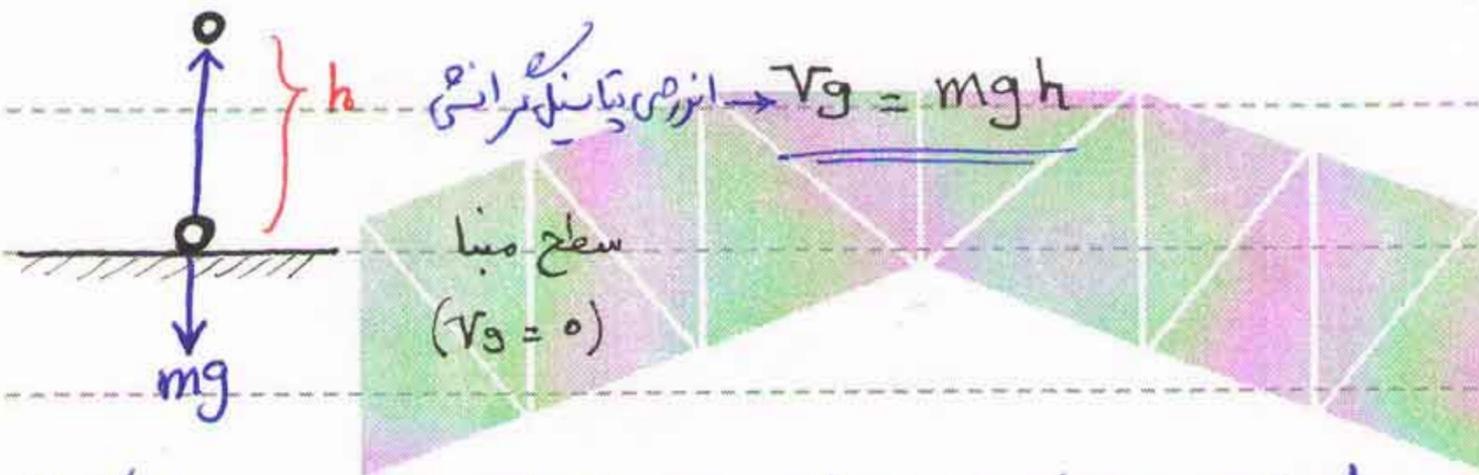
$$\Rightarrow \theta = \text{tg}^{-1}(0.1) = 5.71^\circ$$

$$\text{بنابراین: } 9.81 \times (\sin 5.71^\circ - \mu_k \times \cos 5.71^\circ) = -\frac{1}{2} \times 13.89^2$$

$$\Rightarrow \mu_k = 0.759$$

همچنین انرژی مکانیک در آن نقطه نیز قابل حل است.

* انرژی پتانسیل گرانشی:



$$\Delta V_g = mgh_2 - mgh_1 = mg \Delta h$$

$$U = -\Delta V_g = -mg \Delta h$$

کار انجام شده توسط

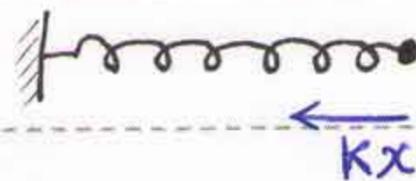
نیروی جاذبه

انرژی پتانسیل الاستیک

$$V_e = \int_0^x kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2$$

ثابت فنر

* انرژی پتانسیل الاستیک:



$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2)$$

تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک

کار انجام شده توسط فنر $\rightarrow U = -\Delta V_e$

$$U = \Delta T$$

$$U - \Delta V_g - \Delta V_e = \Delta T \rightarrow$$

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

کار سبزه‌های خارجی

تغییرات انرژی جنبشی

تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی

تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک

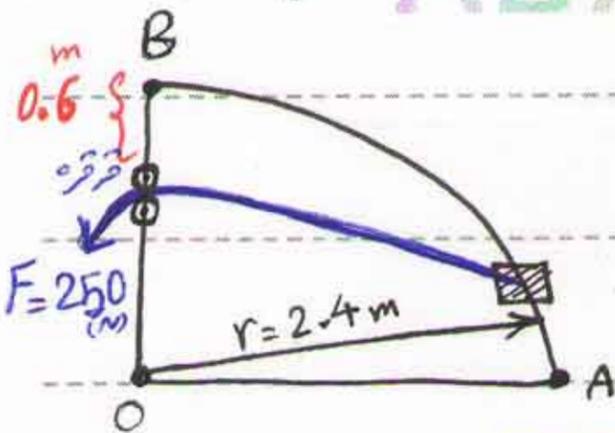
$$T + V_g + V_e = E \Rightarrow U = \Delta E$$

انرژی مکانیکی

مثال ۱ لغزنده‌ای به جرم 10 kg آزادانه در امتداد میله‌ی راهنمای خمیده‌ی می‌لغزد (میله AB)

لغزنده از حالت سکون در نقطه‌ی A در اثر نیروی کششی ثابت 250 N حرکت می‌کند.

سرعت لغزنده در نقطه‌ی B چقدر است؟ ($r_1 = 3 \text{ m}$ طول اولیه‌ی طناب)



$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$\Rightarrow F \times \Delta l = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) + mg \Delta h$$

$$\Rightarrow 250 \times 2.4 = \frac{1}{2} \times 10 \times v_B^2 + 10 \times 9.81 \times 2.4$$

$$\Delta l = 3 - 0.6 = 2.4$$

$$\Rightarrow v_B = 8.54 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

مثال ۲ مهره P به جرم 0.9 kg از نقطه‌ی A در بالای میله‌ی راهنما شده و در امتداد میله‌ی

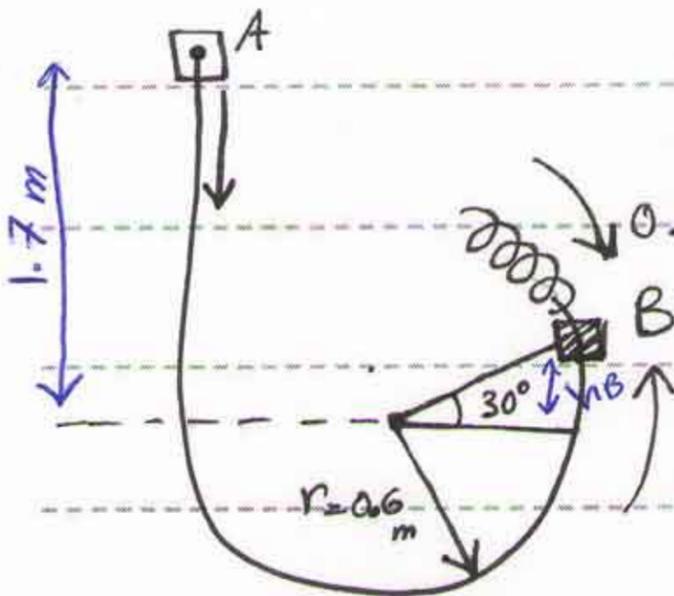
بدون اصطکاک می‌لغزد و باعث فشردگی فنر B می‌گردد. نیروی عکس‌العمل N بین

میله و مهره را در لحظه‌ی نشان داده شده که فنر 0.2 m فشرده شده، حساب کنید؟

Subject :

Year: 90 Month.

Date.



است $(K = 450 \frac{N}{m})$

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

چون نیروی به جسم اعمال نشده است

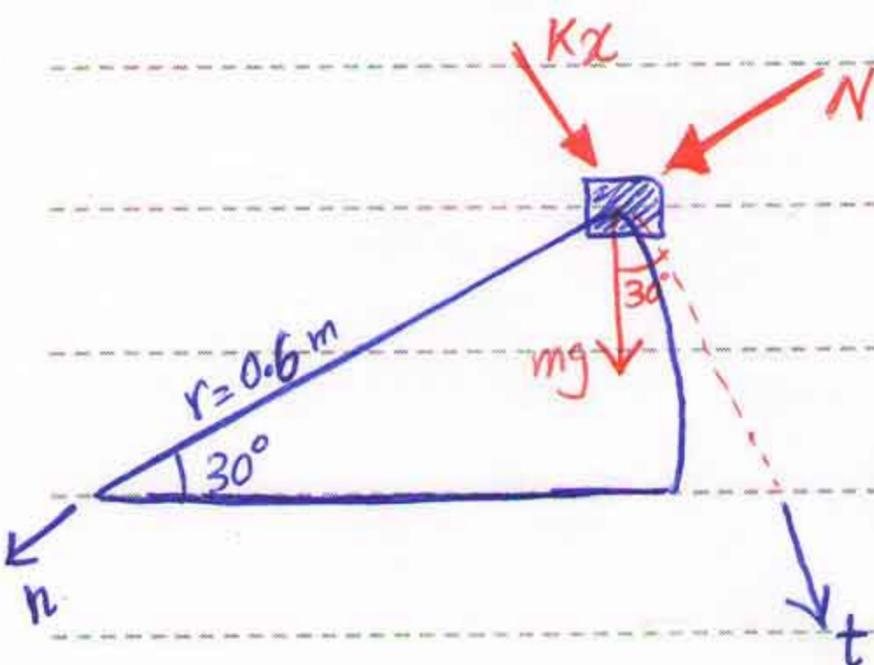
$$\Delta T = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2} \times 0.9 \times v_B^2 = 0.45 v_B^2$$

$$\Delta V_g = mg \Delta h = mg (h_B - h_A) = mg (0.6 \times \sin 30 - 1.7) =$$

$$\rightarrow \Delta V_g = -12.36 \text{ (j)}$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} \times 450 \times (0.2)^2 \Rightarrow \Delta V_e = 9 \text{ (j)}$$

بنابراین $\rightarrow 0.45 v_B^2 + (-12.36) + 9 = 0 \rightarrow v_B = 2.73 \text{ (}\frac{m}{s}\text{)}$



$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow (N + mg \sin 30) =$$

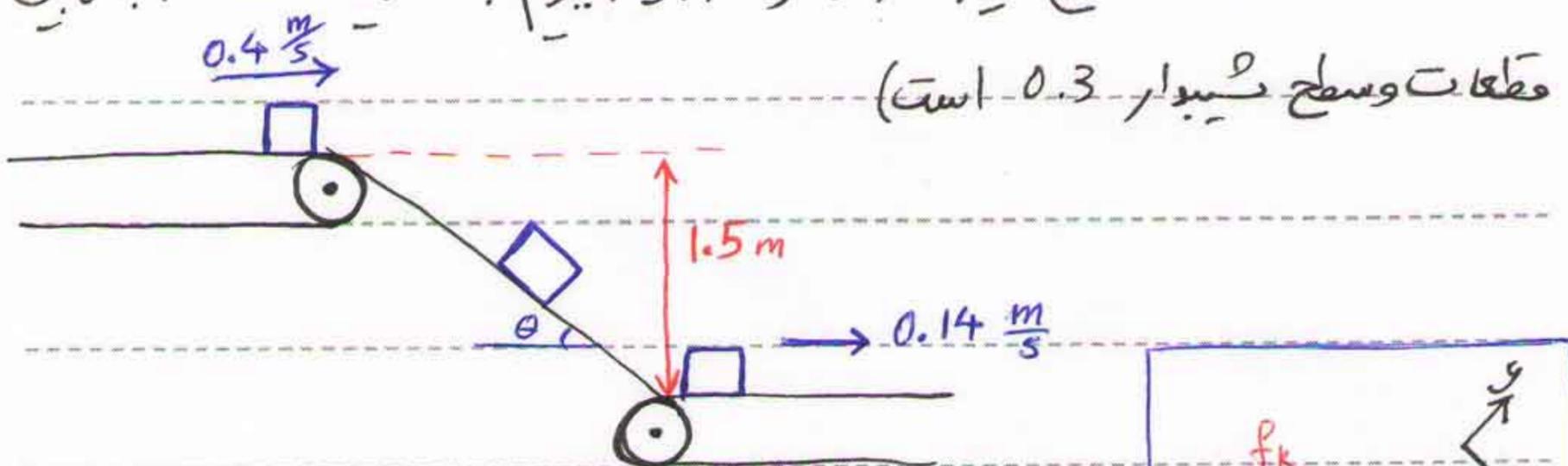
$$= m \frac{v_B^2}{r}$$

$$\Rightarrow N + 0.9 \times 9.81 \times \sin 30 = 0.9 \times \frac{2.73^2}{0.6}$$

$$\rightarrow N = 6.76 \text{ (N)}$$

مسئله در شکل داده شده طرح یک سیستم تکانه، نشان داده ایم، نوار تکانه بالایی مقطعات فلزی کوچک را با سرعت $0.4 \frac{m}{s}$ به سطح سبیلار می‌رساند، نوار تکانه پایینی

با سرعت $0.14 \frac{m}{s}$ حرکت می کند، می خواهیم که قطعات بدون لغزش به این تار منتقل شود، زاویه سطح سب تار را چقدر باید بگیریم؟ ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعات و سطح سب تار 0.3 است



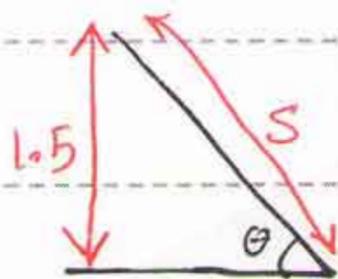
$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

تغییر انرژی جنبشی *تغییر انرژی پتانسیل* *تغییر انرژی مکانیکی*

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow (mg \sin \theta - \underbrace{\mu_k N}_{f_k}) \times S = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow$$

$$mg \times (\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \times S = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$



$$\rightarrow \sin \theta = \frac{1.5}{S} \rightarrow S = \frac{1.5}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow g (\sin \theta - 0.3 \times \cos \theta) \times \frac{1.5}{\sin \theta} = \frac{1}{2} \times (0.14^2 - 0.4^2)$$

$$\rightarrow \tan \theta = 0.2986 \Rightarrow \theta = 16.62^\circ$$