Subject:

Year. Month. Date. ( )

«بنام او که هستی جاویدان زاوست»

«دینامیک»

Dynamics

استاد:

DR: حاج موسی

جزوه نویس: (به قلم) !!

اسماعیل بهشتی

اسماعیل بهشتی

سال تحصیلی !!

1388-89

882

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

«بنام یگانه آفرینندهٔ هستی»

شنبه
88/7/4

دینامیک:

تحلیل سرعت و شتاب هدف سینماتیک است

سینتیک بین سرعت و شتاب با جرم و نیرو رابطه برقرار می‌کند

$v = \frac{ds}{dt}$ → مسافت $= \dot{s}$, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{s}$

$a = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$ ⇒

$$\begin{cases} ds = v\,dt \\ dv = a\,dt \\ v\,dv = a\,ds \end{cases} \xrightarrow[\text{ثابت}]{\text{حرکت با سرعت}} \Delta s = vt$$

حرکت با شتاب ثابت:

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = a\int_0^t dt \Rightarrow v_2 - v_1 = at \Rightarrow v = at + v_1 \quad (1)$$

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = a\int_{s_1}^{s_2} ds \Rightarrow \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = a\Delta s$$

$$\Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta s \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta s$$

داریم:

$$\int ds = \int v\,dt \overset{(1)}{\Rightarrow} \int ds = \int (v_1 + at)\,dt$$

$$\Rightarrow \Delta s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$$

فقط برای حرکت شتاب دار ثابت
چون رابطهٔ 1 در حرکت شتاب دار ثابت مد نظر بود.

چه زمانی a ثابت است؟

$$\sum F = ma \Rightarrow a = \frac{\sum F}{m}$$

پس باید نسبت $\frac{\sum F}{m}$ ثابت باشد (ممکن است مثل پرتاب موشک، m نیز متغیر باشد)

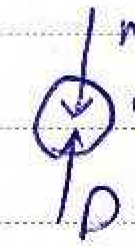
نکته:

۱) بعضی اوقات میشود شتاب را برحسب t (زمان) فرمول بندی کرد $a = f(t)$، مثلاً در پرتاب موشک که جرمش متناسب با زمان تغییر می‌کند و $\sum F$ نیز ثابت است.

۲) بعضی اوقات نیز می‌توان شتاب را برحسب s (مسافت) فرمول بندی کرد مثل دستگاه جرم - فنر

$$a = g(s)$$

۳) بعضی اوقات نیز می‌توان شتاب را برحسب سرعت (v) فرمول بندی کرد مثل سقوط آزاد در شرایط طبیعی



D ← نیروی مقاومت هوا

$$\Rightarrow \sum F = mg - D = ma$$

$$\Rightarrow a = g - \frac{D}{m}$$

و هرچه سرعت بیشتر ⇐ نیروی مقاومت هوا (D) بیشتر، یعنی

$$D = c' + w(v)$$

c' ← در هوا این عدد ثابت، بسیار کوچک است

$$\Rightarrow a = g - \frac{c' + w(v)}{m}$$

داریم:

اگر a برحسب t ($f(t)$) باشد، مشکلی پیش نمی‌آید زیرا مثلاً:

$dv = a\,dt \Rightarrow$ با انتگرال گیری از طرفین و البته جایگذاری a برحسب t

v را می‌توان برحسب t یافت، سپس با استفاده از فرمول $ds = v\,dt$

s برحسب t پیدا می‌شود.

اگر $a=K(v)$ ⇐ با جداسازی تابع $\frac{v}{K(v)}\,dv = ds \Rightarrow s(v) \Rightarrow$

معکوس داریم: $v=f(s) \Rightarrow \frac{ds}{f(s)} = dt$

اگر $a = g(s)$ ⇐

$v \cdot dv = a\,ds \Rightarrow$

با انتگرال گیری از طرفین؛ v برحسب s یافت می‌شود

و با استفاده از

$\frac{ds}{v} = dt$

و با جایگذاری v برحسب s ⇐ s برحسب t پیدا می‌شود.

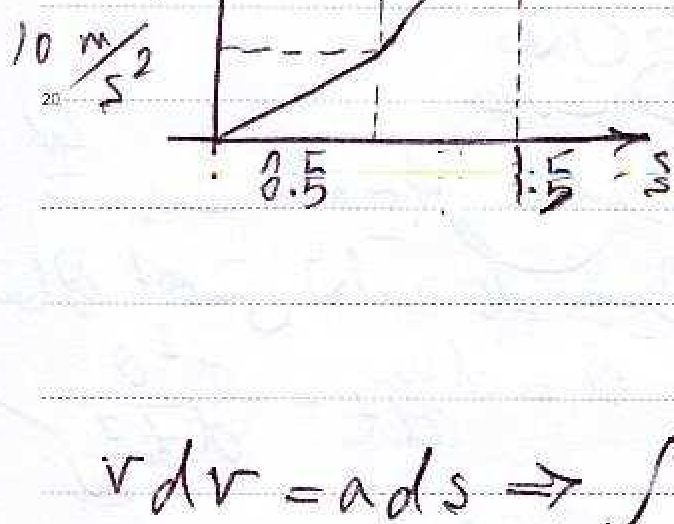
⇐ با ۲ مشتق گیری از آن؛ a برحسب زمان پیدا می‌شود

البته با استفاده از $ds = v\,dt$ و جایگذاری s برحسب t ⇐ $v(t)$ یافت می‌شود.

مثال: شکل روبه رو، شکل یک سرعت‌گیر دو مرحله‌ای را نشان می‌دهد که $v = 5\,\frac{m}{s}$

⇐ در لحظه‌ی برخورد سرعتش کم نمی‌شود

در این صورت جسم کجا متوقف می‌شود؟



فرض می‌کنیم فنر دومی وجود نداشته باشد

⇐ با این فرض نقطه‌ی توقف را می‌یابیم ⇐ اگر قبل از 0.5m بود که ok! و اگر بعد از 0.5 بود که ...

$v\,dv = a\,ds \Rightarrow \int v\,dv = \int a\,ds$ ، $a = As$ و $A = \frac{10}{0.5} = 20$

نمودار بالا برای فنر است ⇐ جهت شتاب جسم و فنر برعکس می‌باشد ⇐

برای جسم $A = -20 \Rightarrow \int v\,dv = -\int 20s\,ds \Rightarrow$

$\int_5^0 v\,dv = -\int_0^s 20s\,ds \Rightarrow$

لینک AB دوران دارد ⇐ سرعت در تمام نقاطش یکی نیست (در A سرعت صفر و در B بیشترین سرعت)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$-\frac{1}{20}\times 25 = -s^2 \Rightarrow s = 1.12$

⇐ نقطه توقف بعد از فنر وسطی است

⇐ مسئله را به 2 قسمت (قبل 0.5^m و بعد از آن) تقسیم می‌کنیم

① $\int_{5}^{v'} v\,dv = -\int_{0}^{0.5} 20s\,ds \Rightarrow v' = \sqrt{20}\ \frac{m}{s}$

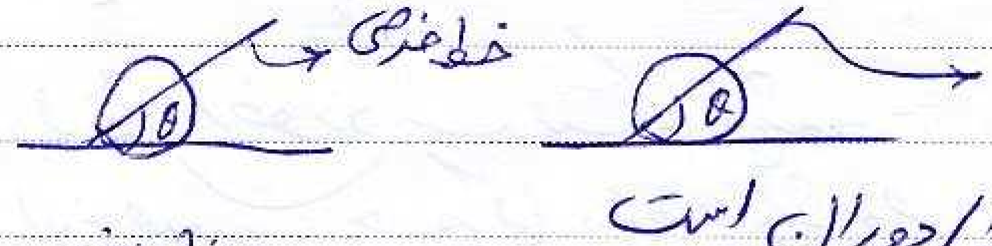
② $\Rightarrow \int_{+v'}^{0} v\,dv = \int_{0.5}^{s} (-5s-2.5)\,ds$

$\Rightarrow \int_{\sqrt{20}}^{0} v\,dv = \int_{0.5}^{s} (-5s-2.5)\,ds$

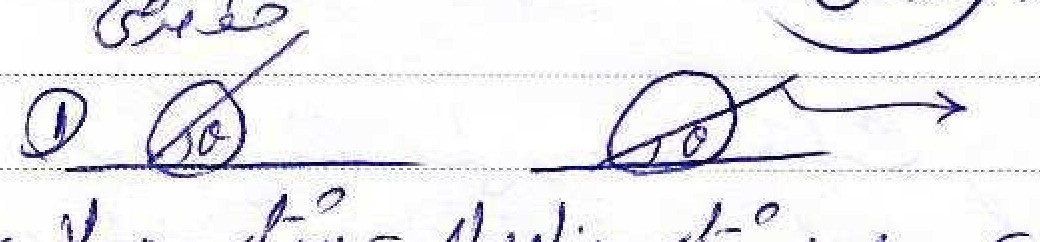
$\frac{1}{2}(0-20) = -\frac{5}{2}(s^2-\frac{1}{4}) - 2.5(s-\frac{1}{2}) \Rightarrow s = 1.36m$

دوران:

ماشین در لحظه ترمز کردن که چرخ‌ها قفل می‌کنند، چرخ‌ها دوران ندارند (انتقال دارند یا شرط می‌ صفر شد) زیرا θ تغییری نمی‌کند



اما اگر زاویه θ تغییر کند ⇐ دارای دوران است



سرعت زاویه‌ای = سرعت دوران ω α: شتاب زاویه‌ای = شتاب دوران

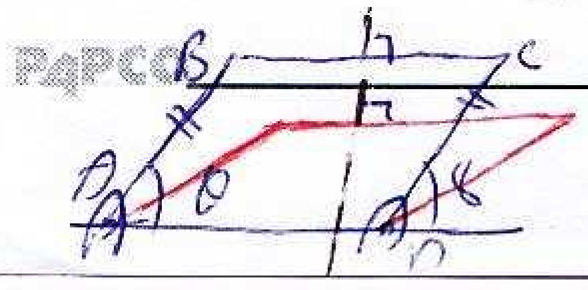
مقدار θ اهمیتی ندارد بلکه تغییراتش مهم است

سرعت زاویه‌ای $= \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega$ $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

نکته:

1) سرعت مرکز دوران صفر و یگانه است

2) جسم صلبی که دوران ندارد سرعت و شتاب آن در تمام نقاطش یکی است



لینک BC دوران ندارد اما لینک AB یا DC دوران دارند و چون موازی اند ⇐ ω و α ها برابر دارند

Subject: .... Year............ Month............ Date............ ( )

دوشنبه:

88/7/6 دینامیک دکتر حاج موسی:

$ds = v\,dt$
$dv = a\,dt$
$v\,dv = a\,ds$

این سه رابطه در حرکت زاویه‌ای نیز صادق است
با این تفاوت که:

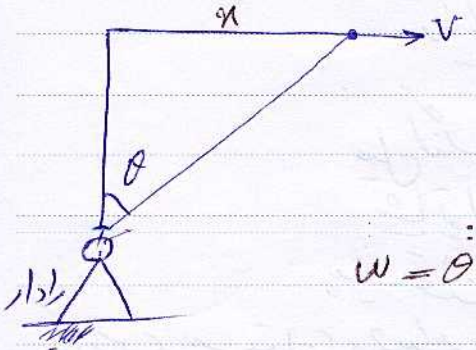
$s \rightarrow \theta \;,\; v \rightarrow \omega \;,\; a \rightarrow \alpha$

یعنی:

مثلاً: $\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$

مثال:

هواپیمایی در حال حرکت با سرعت ثابت v در ارتفاع ثابت h است
ω و α رادار را بیابید.



$\omega = \dot{\theta} \;,\; \alpha = \ddot{\theta} \Rightarrow$

در روش مستقیم:

باید روابط هندسی برقرار کنیم بین پارامترهای هندسی‌ای که تغییراتش نسبت به زمان معلوم است
بین پارامترهای هندسی‌ای که تغییراتش نسبت به زمان مطلوب است.

در این روش از هندسه شکل استفاده می‌کنیم

$\tan\theta = \frac{x}{h} \Rightarrow x = h\cdot\tan\theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dh}{dt}\cdot\tan\theta + \frac{d\theta}{dt}\cdot h\cdot(1+\tan^2\theta)$

$\Rightarrow \dot{x} = \cancel{\dot{h}\tan\theta} + \dot{\theta}(1+\tan^2\theta)h \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{h(1+\tan^2\theta)}$

$\ddot{x} = 2\dot{\theta}\tan\theta(1+\tan^2\theta) + \ddot{\theta}(1+\tan^2\theta)h \Rightarrow \ldots\ldots$

ویژگی این روش این است که:

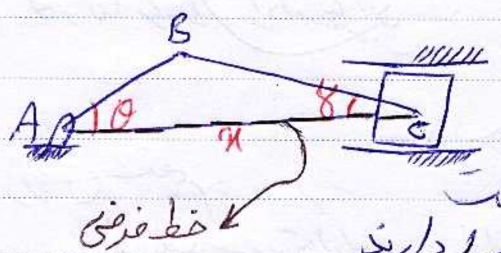
جواب بدست آمده، جواب کلی است

اما: به علت هندسی بودن این روش، این روش زیاد توصیه نمی‌شود.

مثال:

مکانیزم لنگ و لغزان

کار این مکانیزم این است که: حرکت دورانی را به حرکت رفت و برگشت تبدیل می‌کند و یا بالعکس



AB: میل لنگ

BC: شاتون

عضو C: پیستون

کورس پیستون = 2 برابر شعاع میل لنگ است و شاتون و میل لنگ توانایی عبور از روی هم را دارند

این مساله این گونه قابل طرح است که سرعت و شتاب پیستون را به ما بدهند و سرعت و شتاب زاویه‌ای میل لنگ را از ما بخواهند و یا بالعکس

در این مساله:

$\dot{\theta}$: سرعت زاویه‌ای میل لنگ

$\ddot{\theta}$: شتاب " "

$$\Rightarrow \quad a_c = f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}), \quad v_c = g(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v_c \quad , \quad \ddot{x} = a_c$$

① $AB\cos\theta + BC\cos\gamma = x$

$AB\sin\theta = BC\sin\gamma \Rightarrow \sin\gamma = \frac{AB}{BC}\sin\theta \Rightarrow$

$\dot{\gamma}\cos\gamma = \frac{AB}{BC}\dot{\theta}\cos\theta$ —

تلسکوپی

اگر لینک BC یک لینک آنتی باشد دیگر BC ثابت نیست و داریم $\dot{BC}$ که برابر است با V_{BC} و $\ddot{BC}$ که برابر است با a_{BC} ⇐ سیستم 2 درجه آزادی دارد؛ یکی پیستون و دیگری لینک BC

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \sqrt{1-\left(\frac{AB}{BC}\sin\theta\right)^2}$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{AB}{BC}\dot{\theta}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{AB}{BC}\sin\theta\right)^2}}$$

$\dot{\gamma}$: سرعت زاویه‌ای شاتون

$$① \Rightarrow -AB\sin\theta \times \dot{\theta} - BC\,\dot{\gamma}\sin\gamma = \dot{x} = v_c$$

⇐

با جایگذاری $\dot{\gamma}$ ، v_c برحسب $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ یافت می‌شود.

......

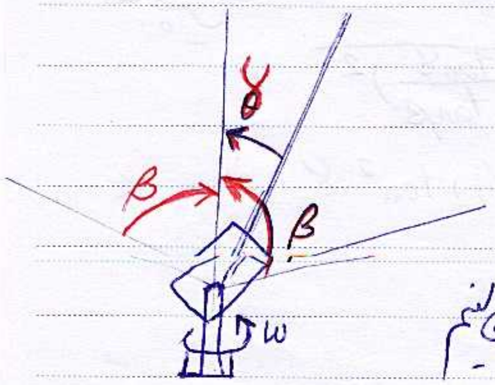
مثال:

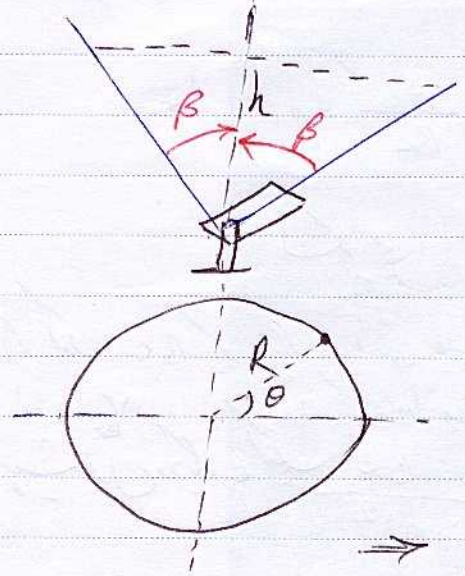
پایه به الکتروموتور متصل است

پایه‌ی نورافکن در زاویه‌ی β فیکس شده است؛

حال الکتروموتور را با سرعت زاویه‌ای ω روشن می‌کنیم

از دید ناظری که از روبه‌رو نگاه می‌کند ⇐ $\dot{\gamma}$ و $\ddot{\gamma} = ?$





در یک ارتفاع دلخواه داریم:

$$s = R\cos\theta = h\tan\gamma$$

$$\left(\frac{s}{h} = \tan\gamma \Rightarrow s = h\tan\gamma\right)$$

$$\frac{R}{h} = \tan\beta \Rightarrow R = h\tan\beta$$

$$\Rightarrow \cancel{h}\tan\beta\cos\theta = \cancel{h}\tan\gamma$$

$$\Rightarrow \tan\gamma = \tan\beta\cos\theta$$

همچنین:

در واقع $\dot\theta$ همان $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ ω است پس:

$$\dot\gamma(1+\tan^2\gamma) = -\dot\theta\sin\theta\cdot\tan\beta \Rightarrow$$

$$\dot\gamma = -\dot\theta\sin\theta\cdot\tan\beta \,/\, 1+\tan^2\gamma$$

همچنین:

$$\cos\theta = \frac{\tan\gamma}{\tan\beta} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}\right)^2}$$

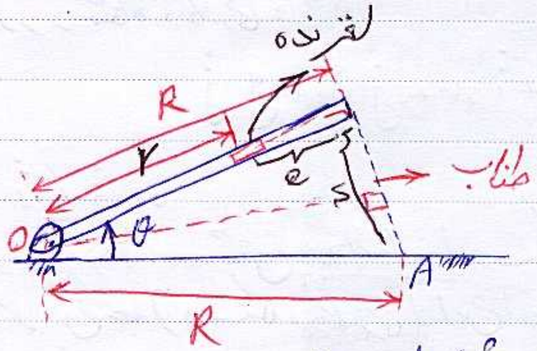
$$\dot\gamma = \left(-\omega\sqrt{1-\left(\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}\right)^2}\cdot\tan\beta\right) / 1+\tan^2\gamma \quad \Leftarrow$$

حال اگر $\begin{cases}\theta=0 \\ r=h\end{cases}$, $OA=cR$ ⇐ $r, r=?$

$cR=L+h \quad , L=l+s \Rightarrow s+l=cR-h \quad , r+l=R \Rightarrow l=R-r$

$\Rightarrow s+R-r=cR-h \Rightarrow r=s+h+R(1-c) \quad , s^2=R^2+c^2R^2-2cR^2\cos\theta$

مثال:



فرضیات: $\begin{cases}\theta=0 \\ r=0\end{cases} \Rightarrow l=R$

l طول طناب است.

در هر θ دلخواه، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ معلوم است

⇐ سرعت و شتاب لغزنده نسبت به لنگ شیاردار یعنی:

$\dot{r} , \ddot{r} = ?$

$$\Rightarrow \quad l=R=e+s \quad , R=e+r \Rightarrow s=r$$

ارتفاع مثلث متساوی الساقین، نیمساز هم است

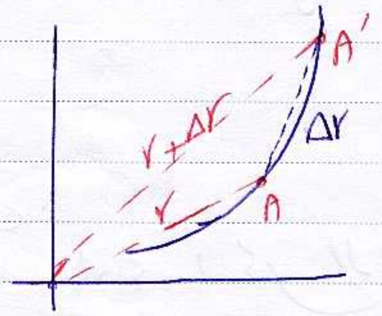
$s=r=2R\sin\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \dot{r}=$

....

مثال: استاد مشمول شد!!!

حرکت منحنی الخط در صفحه:



$\bar{v}=\frac{\Delta r}{\Delta t} \Rightarrow$

$v=\frac{dr}{dt}$ بردار سرعت در جهت بردار r است

v اندازه یعنی بردار سرعت است اما

v (کوچک) اندازه سرعت است

همچنین:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2r}{dt}$$

نکته = همیشه بردار سرعت بر مسیر حرکت مماس است

در دستگاه دکارتی:

$$r = xi + yj \Rightarrow \dot{r} = \dot{x} i + \dot{i} x + \dot{y} j + y \dot{j}$$

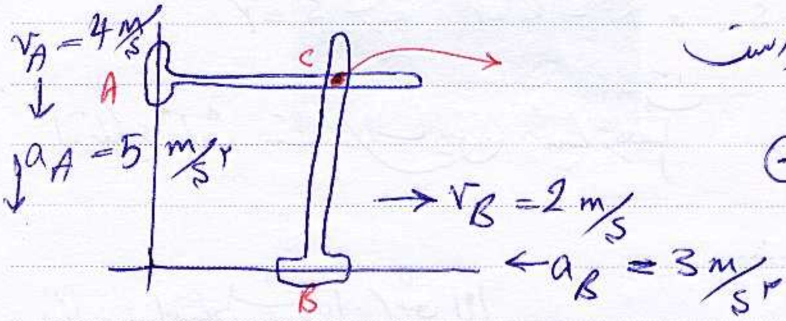
آیا $\dot{j}$:

مشتق برداری است که تنها جهتش قابل تغییر است

در این جا (دستگاه دکارتی) این اتفاق نمی افتد ⇐

$$\dot{r} = \dot{x} i + \dot{y} j = v$$
$$\ddot{r} = \ddot{x} i + \ddot{y} j = a$$

مثال:



این پین داخل هر دو شیار است

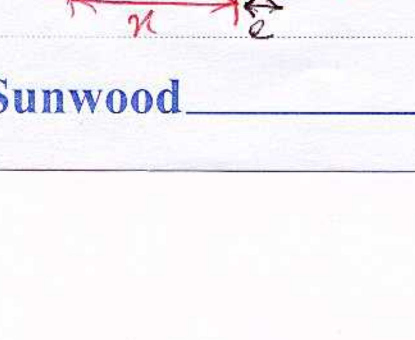
v, a پین $= ?$

در یک لحظه خاص ⇐

$$v_c = v_x i + v_y j \Rightarrow v = 2i - 4j \Rightarrow |v| = v = \sqrt{20}$$

$$a_c = -3i - 5j \Rightarrow a = \sqrt{34}$$

مثال:



داده ها، داده های سوال قبلی است

$v_c , a_c = ?$ ⇐

$$X = x + e$$
$$Y = y - s$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{s}{X} = \tan 20 \Rightarrow s = X \tan 20$$

$$\frac{e}{Y} = \tan 25 \Rightarrow e = Y \tan 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = x + Y \tan 25 \\ Y = y - X \tan 20 \end{cases}$$

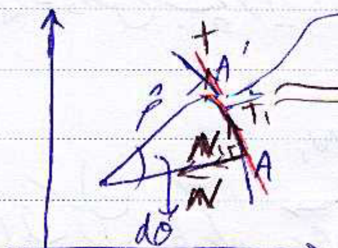
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = \dot{x} + \dot{Y} \tan 25 \\ \dot{Y} = \dot{y} - \dot{x} \tan 20 \end{cases} \quad (\dot{x} = v_B , \dot{y} = v_A) \rightarrow$$

$$\dot{X} = \dots \quad \dot{Y} = \dots$$

$$, \; v_c = \dot{X} i + \dot{Y} j$$

$, \; \dots$

۸۸/۷/۱۱ شنبه



$$\rightarrow ds = \rho \, d\theta$$

بردار یکه

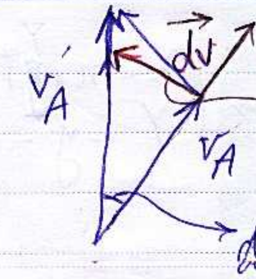
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\rho \, d\theta}{dt} = \rho \dot{\theta}$$

$$v = \rho \dot{\theta} \, t_1 = v t_1$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} t_1 + v \dot{t}_1$$

t_1 یک بردار یکه است ←
مقدارش ثابت است اما جهتش تغییر می‌کند

هر راستایی که بردار سرعت داشته باشد، بردار شتاب نیز همان گونه است



$dv_t = dv$

$dv_N = v\,d\theta$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \begin{cases} a_t = \dfrac{dv_t}{dt} = \dfrac{dv}{dt} = \dot{v} \\[2ex] a_N = \dfrac{dv_N}{dt} = \dfrac{v\,d\theta}{dt} \end{cases}$$

مولفه‌ی تانژانت

مولفه‌ی نرمال

همیشه به سمت مرکز انحنا است

$$\Rightarrow a_N = v\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{\rho}$$

اینو حفظ کن

یعنی به ذهن بسپار!!

$\vec{dt_1} = 1\,d\theta\,N_1$

dt_1 را یک کمان در نظر بگیر $dt_1 = 1 \times d\theta$

اندازه‌ی بردار واحد t_1، 1 است

$\vec{dN_1} = -1\,d\theta\,t_1$

$$\dot{t}_1 = \frac{dt_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt}N_1 = \dot{\theta}N_1$$

$$\dot{N}_1 = \frac{dN_1}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}t_1 = -\dot{\theta}t_1$$

برای کلیه‌ی بردارهای چرخنده است

با هر اسمی که داشته باشند

چه زاویه، چه r و θ و ....

$\dot{\theta}$: سرعت زاویه‌ای دستگاه است

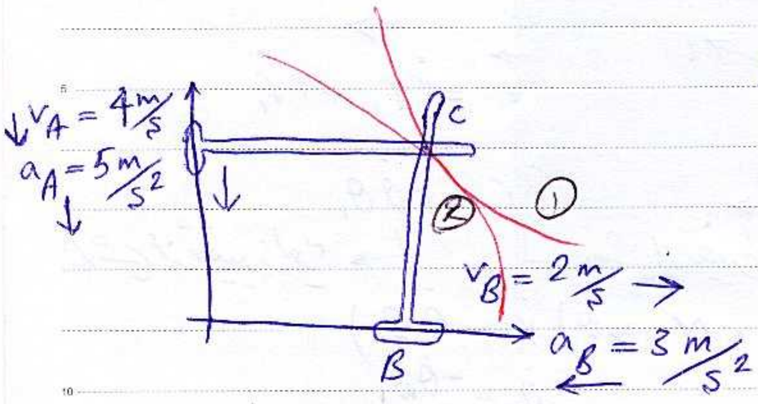
از نظر ریاضی :

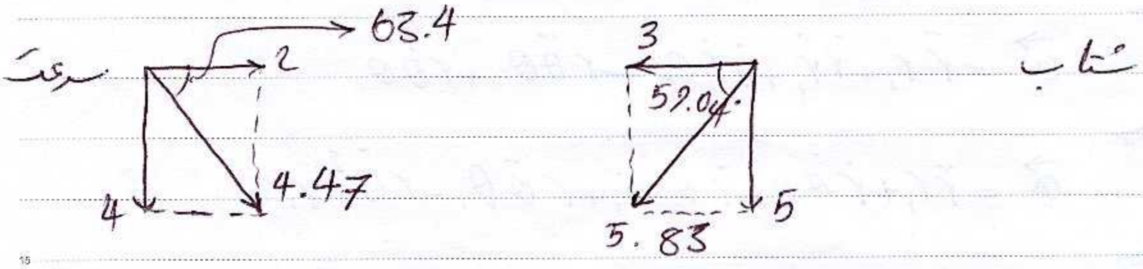
$$a = \dot{v} t_1 + v \dot{t}_1 \Rightarrow a = \dot{v} t_1 + v\dot{\theta} n_1 = \frac{v^2}{\rho} n_1 + \dot{v} t_1$$

مثال:

شعاع انحنای مسیر حرکت = ?

مرکز انحنا = ?





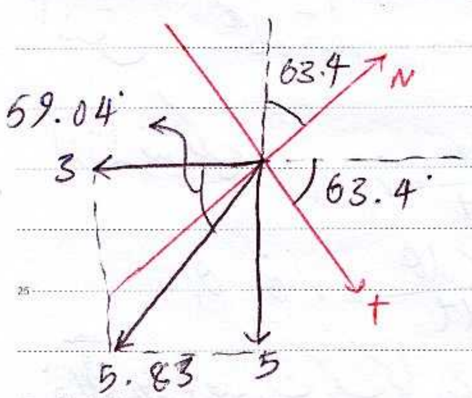
همیشه بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است.

داریم:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

a مطلق را داریم که از جمع a_N و a_t بدست می‌آید

⇐ با یافتن a_N ، ρ را می‌یابیم ⇐



$$\Rightarrow a_N = 5.83\cos(-90 + 63.4 + 59.04)$$

$$\rightarrow a_N = 4.92$$

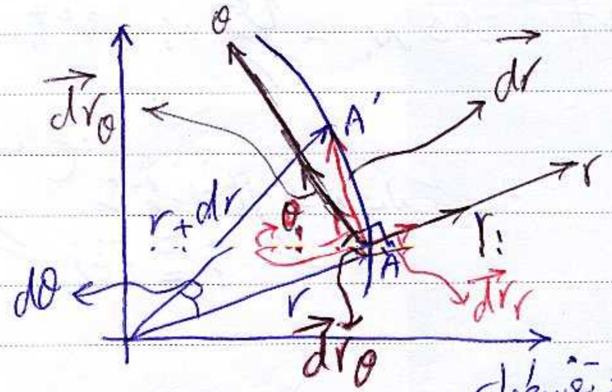
a_N در جهت a است (چون + شد) ⇐

جهت تقعر رو به پایین یعنی منحنی 2

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = 4.06 \, m$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دستگاه قطبی:



$\vec{r} = r\, r_1$

$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\, r_1 + r\, \dot{r}_1$

$= \dot{r}\, r_1 + r\dot{\theta}\, \theta_1$

ناشی از تغییر طول ↲   ↳ ناشی از تغییر زاویه

$(\dot{t}_1 = \dot{\theta} N_1 \Rightarrow (t \to r,\ N \to \theta)\ \dot{r}_1 = \dot{\theta}\, \theta_1)$

$\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}\, r_1$

$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\, r_1 + \dot{r}\, \dot{r}_1 + \dot{r}\dot{\theta}\, \theta_1 + r\ddot{\theta}\, \theta_1 + r\dot{\theta}\, \dot{\theta}_1$

$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\, r_1 + \dot{r}\dot{\theta}\, \theta_1 + \dot{r}\dot{\theta}\, \theta_1 + r\ddot{\theta}\, \theta_1 - r\dot{\theta}^2\, r_1$

$\Rightarrow \vec{a} = r_1(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \theta_1(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

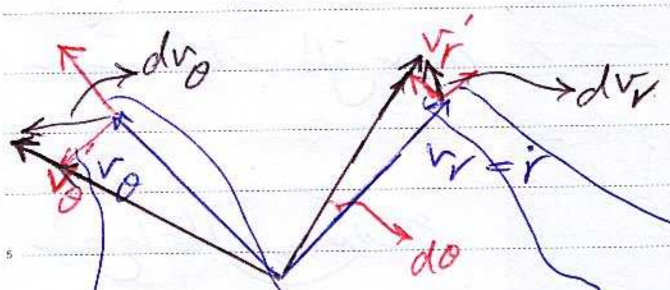
جهت r در راستای خود r است
اما جهت N در راستای مرکز انحنای منحنی است

↑ فرق دستگاه قطبی با دستگاه تانژانتی!!

از نظر فیزیکی:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \begin{cases} v_r = \dfrac{d\vec{r}_r}{dt} = \dfrac{dr}{dt} = \dot{r}\, r_1 \\ v_\theta = \dfrac{dr_\theta}{dt} = \dfrac{r\, d\theta}{dt} = r\dot{\theta}\, \theta_1 \end{cases}$$

$d\vec{r}_\theta$ را به صورت یک کمان در نظر می‌گیریم که ⇐ $|d\vec{r}_\theta| = r\, d\theta$



$dv_{rr} =$ تغییر v_r است $= d\dot{r}$

$dv_{r\theta} = \dot{r}\, d\theta$

$$\left.\begin{aligned} dv_{\theta r} &= r\dot{\theta}\, d\theta \\ dv_{\theta\theta} &= d(r\dot{\theta}) \end{aligned}\right\} v_\theta = r\dot{\theta}$$

پس داریم:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \begin{cases} a_r = \dfrac{d\dot{r}}{dt} - \dfrac{r\dot{\theta}\, d\theta}{dt} \\ a_\theta = \dot{r}\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{d(r\dot{\theta})}{dt} \end{cases}$$

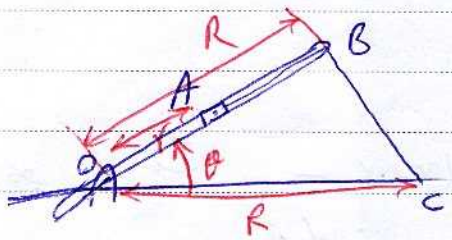
$$\Rightarrow \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

نکته: اگر بخواهیم دوباره مشتق گیری کنیم، دوباره dv_{rr} و یا $dv_{r\theta}$ و ... هرکدام دارای 2 مولفه خواهند بود

+ سرعت و شتاب زاویه ای که ما محاسبه می کنیم، سرعت و شتاب زاویه ای دستگاه ماست.

مثال:

سرعت و شتاب مطلق پین A = ؟



$$\begin{cases} \theta = \circ \\ r = \circ \end{cases}$$

شعاع انحنای مسیر حرکت؟

$R = 0.4\ m$

$\dot{\theta} = 2\ rad/s \qquad \ddot{\theta} = 5\ rad/s^2 \qquad \theta = 37^\circ$

$$\begin{matrix} r + AB = R \\ BC + AB = R \end{matrix} \Rightarrow r = BC \,,\ BC = 2R\sin\theta/2 = r = 0.207\,m$$

$$\dot{r} = R\dot{\theta}\cos\theta/2 \Rightarrow (0.207\,m = r)\ \dot{r} = 0.773\ m/s$$

$$\ddot{r} = R\ddot{\theta}\cos\theta/2 - \frac{R\dot{\theta}^2}{2}\sin\theta/2 = 1.73\ m/s^2$$

$\dot{r}$ و $\ddot{r}$ هم علامت اند ⇐ جهت سرعت، شتاب یکی است.

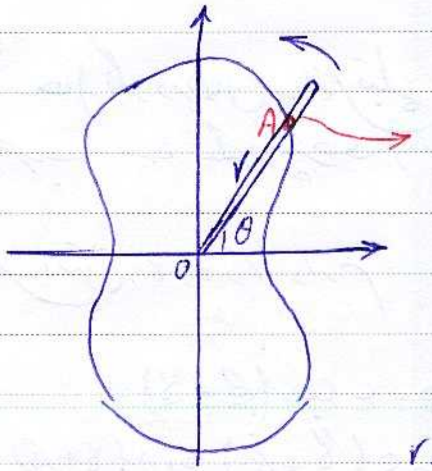
$\ddot{r}$ مثبت شد ⇐ $\dot{r}$ در حال افزایش است

$$v = 0.773\,r_1 + 0.207 \times 2\,\theta_1 = 0.773\,r_1 + 0.414\,\theta_1$$

$$\vec{a} = (1.73 - 0.207\times 4)\,r_1 + (2\times 0.773\times 2) + 0.207\times 5)\,\theta_1 \Rightarrow$$

$$\vec{a} = 0.902\,r_1 + 1.035\,\theta_1$$

مثال:



لینک OA روی بادامک در حال دوران است (حول مبدا)

A پین

اگر بادامک ثابت باشد: در $\theta = 30$ ، a_A , v_A را بیابید:

$r = b - c\cos\theta$

b و c ثابت اند که به ابعاد بادامک مربوط اند

$b = 0.1 \ , c = 0.075 \ , \ \begin{cases} \dot\theta = \frac{4}{3}\pi \ rad/s \\ \ddot\theta = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \theta = 30 \\ v_A , a_A = ? \end{cases}$

سرعت زاویه ای لینک $\frac{4}{3}\pi \ rad/s$ است و لینک با سرعت ثابت حرکت می کند $(\alpha = 0)$ (ω)

$r = 0.1 - 0.075\cos 30 \ , \ \dot r = 0.075 \times \frac{4}{3}\pi \sin 30$

$\ddot r = \cancel{0.075} + 0.075 \times \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \times \cos 30$

$\dot r = c\dot\theta\sin\theta \ , \ \ddot r = c\ddot\theta\sin\theta + c\dot\theta^2\cos\theta$

$\Rightarrow$ $r , \dot r , \ddot r$ را پیدا کردیم پس با جایگذاری در فرمول های زیر به خواسته ی سوال می رسیم

$v = \dot r r_1 + r\dot\theta\theta_1 \Rightarrow \begin{matrix} v_r = \dot r \\ v_\theta = r\dot\theta \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} v_r = \\ v_\theta = \end{cases}$

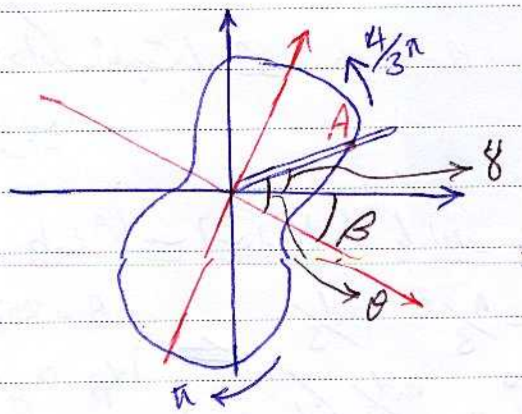
$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2$

$a_\theta = 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

حال اگر در همان مثال قبلی، بادامک نیز با سرعت زاویه‌ای π (ثابت) در جهت ساعتگرد بچرخد (با همان اطلاعات مثال قبل) $\Leftarrow$ $v_A, a_A = ?$



برای یافتن r، $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ داریم:

$$r = b - c\cos(\beta + \gamma)$$

$$\Rightarrow \dot{r} = c(\dot{\gamma} + \dot{\beta})\sin(\gamma + \beta)$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = c(\dot{\gamma} + \dot{\beta})^2\cos(\gamma + \beta) + c(\ddot{\gamma} + \ddot{\beta})\sin(\gamma + \beta)$$

نکته:

$\dot{\beta}$ در واقع، سرعت زاویه‌ای بادامک است و
$\dot{\gamma}$ در واقع، سرعت زاویه‌ای لینک است
و چون حرکت بادامک و لینک در خلاف جهت هم است $\theta = \beta + \gamma$

همچنین برای یافتن v_A، a_A داریم:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

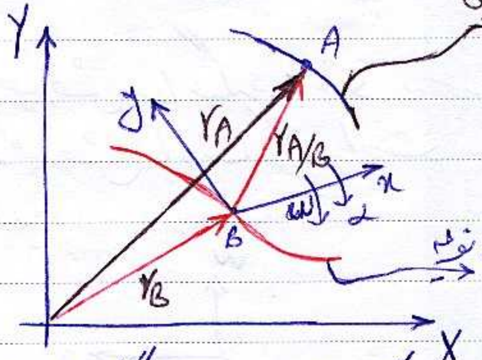
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

که $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ در این جا به ترتیب سرعت و شتاب زاویه‌ای لینک است و نباید با $\theta = \beta + \gamma$ که تنها یک حرف است (ظاهری است) اشتباه گرفته شود.

همچنین θ در $r = b - c\cos\theta$، زاویه‌ای است که لینک با محور بادامک می‌سازد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



سیر حرکت نسبی

دستگاه فرعی با سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای $\dot{\omega}$ در حال چرخش است

سیر حرکت مبدا دستگاه مختصات ثانویه

فرض: مختصات بردار r روی دستگاه مختصات متحرک است (دستگاه ثانویه)

سیر حرکت مطلق ذره A در شکل دیده می‌شود

وضعیت مبدا دستگاه مختصات ثانویه و وضعیت ذره A نسبت دستگاه مختصات ثانویه هم معلوم است ⇐

وضعیت حرکت ذره A نسبت به مبدا دستگاه مختصات فیکس (اصلی) = ؟

$r_A = r_B + r_{A/B}$ → r_A نسبت به B → $r_A = r_B + r$

$\Rightarrow r_A = r_B + (xi + yj) \Rightarrow v_A = v_B + (\dot{x}i + \dot{i}x + \dot{y}j + y\dot{j})$

$\Rightarrow v_A = v_B + (\dot{x}i + \dot{y}j) + (x\dot{i} + y\dot{j}) \Rightarrow$

سرعت مبدا دستگاه مختصات ثانویه

سرعت ذره A نسبت به دستگاه مختصات فیکس

$\Rightarrow v_A = v_B + v_{rel}$

مماس بر سیر حرکت ذره در دستگاه مختصات ثانویه

relative ⇒ سرعت نسبی

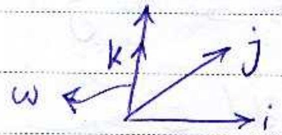
Subject:
Year. Month. Date. ( )

بردار ω، همیشه و همیشه بر صفحه دوران عمود است که

اگر چرخش ساعتگرد باشد به سمت داخل صفحه است
اگر چرخش پادساعتگرد باشد به سمت بیرون صفحه است

داریم:

$$\dot{i} = \dot{\theta} j \quad , \quad \dot{j} = -\dot{\theta} i \qquad (1)$$



$$\Rightarrow \omega \times i = \omega j \quad , \quad \omega \times j = -\omega i \qquad (2)$$

قانون دست راست — جهت را مشخص می کند

$$(1),(2) \Rightarrow \dot{i} = \omega \times i \quad , \quad \dot{j} = \omega \times j \qquad (\omega = \dot{\theta})$$

$$\Rightarrow v_A = v_B + v_{rel} + (x\,\omega \times i + y\,\omega \times j) \Rightarrow$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{rel} + \omega \times (x i + y j) \Rightarrow$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{rel} + \omega \times \vec{r}$$

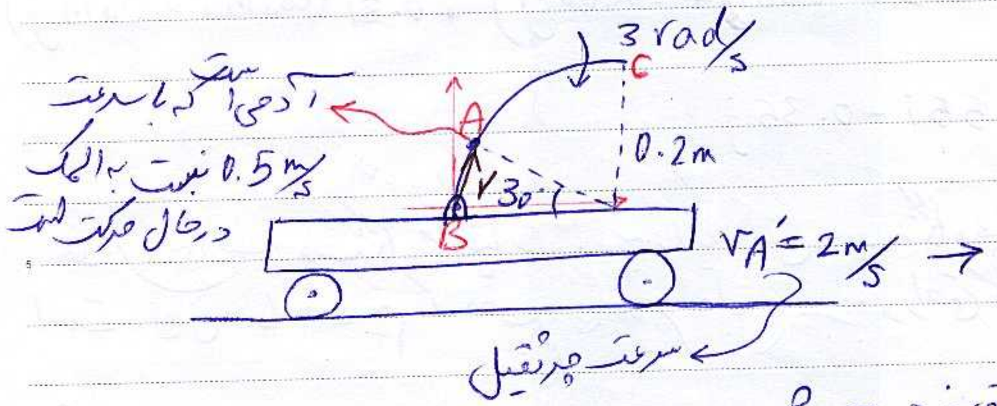
وجود دارد اگر
دستگاه مختصات ثانویه در حال چرخش
باشد و ذره روی مبدأ نباشد $(r=0)$

V_{rel} وجود دارد در صورتی که:
موقعیت ذره نسبت به دستگاه مختصات ثانویه تغییر کند

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



سرعت مطلق فرد = ?

روش تحلیلی

$$V_A = V_B + V_{rel} + \omega \times r$$

راستا و اندازه V_A مجهول است

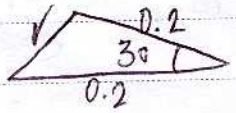
راستای V_{rel} مماس بر الک است (وقتی الک می چرخد ← دستگاه مختصات ثانویه هم می چرخد)

بردار r ، برداری است که از مبدا دستگاه مختصات ثانویه شروع می شود و به نقطه مورد بررسی ختم می شود

$\omega \times r$ بر r عمود است اما جهتش بستگی به ω دارد.

← در صفحه همیشه مقدار $\omega \times r$ برابر است با $|\omega| \times |r|$

چهار انگشت در جهت ω، پیچش در جهت r ← شصت جهت $\omega \times r$ را به ما می دهد

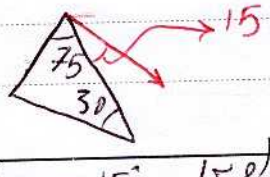
$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow |r| = 2 \times 0.2 \times \sin 15 = 0.103\ m$

$|V_A| = V_A$ $\qquad |V_{rel}| = 0.5\ m/s$ $\qquad$ مماس بر مسیر حرکت ذره $\angle 60$

$|V_B| = 2\ m/s \rightarrow$

$|\omega \times r| = 3 \times 0.103 = 0.31$



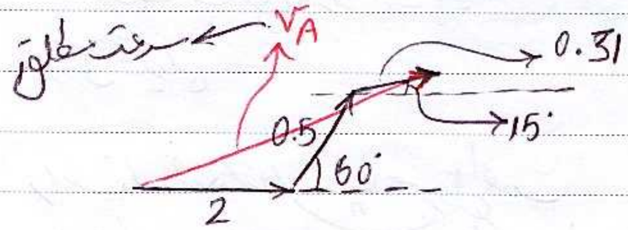
$\omega \times r$ با افق زاویه 15° می سازد

$$V_A = 2i + 0.5(\cos 60\, i + \sin 60\, j) + 0.31(\cos 15\, i - \sin 15\, j)$$

$$V_A = 2.55i + 0.35j$$

۱) نحوه انتخاب دستگاه مختصات ثانویه را اینکه این دستگاه چرخدار یا نه، با خود ما است یعنی ما هستیم که تصمیم می‌گیریم (طبق تجربه و راحتی کار)

روش ترسیمی:



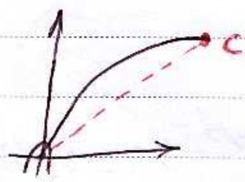
2) سرعت نوک الک = ?

$$v_C = v_B + \cancel{v_{rel}} + \omega \times r$$

3) حال اگر دستگاه مختصات را به الک جوش ندهیم ← $v_c = ?$

$$v_C = v_B + v_{rel} + \cancel{\omega \times r}$$

اما در واقع $\omega \times r$ بالایی همان v_{rel} پایینی است.



نکته ۳ در صفحه بعد ← $v_{rel} = \omega \times r$

Subject:
Year: ۸۸ Month: ۷ Date: ۱۸ ( ) شنبه

شتاب:

$$v_A = v_B + v_{rel} + \omega \times r = v_B + (\dot{x}i + \dot{y}j) + \omega(xi + yj)$$

$$\Rightarrow a_A = a_B + (\ddot{x}i + \ddot{y}j) + (\dot{x}\dot{i} + \dot{y}\dot{j}) + \dot{\omega}(xi + yj) + \omega(\dot{x}i + \dot{y}j + x\dot{i} + y\dot{j})$$

$$\Rightarrow a_A = a_B + a_{rel} + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times v_{rel} + \omega \times (\omega \times r)$$

داریم:

$$\dot{x}\dot{i} + \dot{y}\dot{j} = \dot{x}\,\omega \times i + \dot{y}\,\omega \times j = \omega(\dot{x}i + \dot{y}j) = \omega \times v_{rel}$$

$$\omega(x\dot{i} + y\dot{j}) = \omega \times (x\,\omega \times i + y\,\omega \times j) = \omega \times (\omega \times r)$$

پس:

$\leftarrow$ شتاب کلیوریس اسم شتاب کوریولیس

$$a_A = a_B + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times v_{rel} + a_{rel}$$

اگر مسیر حرکت ذره A مشخص باشد:

$$a_A = a_{A_n} + a_{A_t}$$

در راستای مرکز مسیر است و اندازه‌اش $\frac{v^2}{\rho}$ است

و همچین راستای a_{At} که مشخص است در راستای مماس بر مسیر حرکت؛ اما اندازه‌اش معلوم نیست.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

راستا و اندازه a_{B_n} معلوم است اما تنها جهت a_{B_t} معلوم است
را البته اگر اندازه آن نیز مسأله به ما می‌دهد

همیشه راستای $\omega \times (\omega \times r)$ از نقطه مورد بررسی است تا مبدا دستگاه مختصات ثانویه و مقدار عددی آن $r\omega^2$ است

ω و ω در صفحه، راستایشان عمود بر صفحه است اما در فضا 100% راستایشان یکی نیست

$\Leftarrow$ $\omega \times r$، راستایش عمود بر r است، اندازه‌اش $r\omega$ است

$\omega \times v_{rel}$: شرط وجودیت:

1) چرخش دستگاه

2) تغییر مکان ذره نسبت به دستگاه مختصات ثانویه

اندازه‌اش برابر است با:

ωv_{rel}

اما جهتش:

قاعده دست راست:

4 انگشت جهت ω (یا داخل صفحه یا بیرون صفحه)

بعد 4 انگشت در جهت v_{rel}

جهت شست برابر است با جهت $\omega \times v_{rel}$ که

اگر چرخش ساعتگرد باشد به سمت داخل صفحه و اگر پادساعتگرد باشد به سمت بیرون صفحه است

نکته: همواره راستای $\omega \times v_{rel}$ عمود بر v_{rel} است

ما می‌توانیم v_{rel} نداشته باشیم اما a_{rel} داشته باشیم

مثل موقعی که چرخی روی زمین می‌غلتد

اگر دستگاه مختصات ثانویه را روی زمین جوش دهیم

$\Rightarrow v_{rel} = 0$ ؛ $a_{rel_t} = 0$ ؛ اما: $a_{rel_n} = r\omega^2$

می خواهیم جهت $A \times B$ را مشخص کنیم: چهار انگشت در جهت A، پیچش در جهت B ⇐ شست جهت $A \times B$ را مشخص می کند **

Subject:
Year. $A \times B$ ~~Month~~ $B \times A$ Date.

a_{rel_n} برابر است با $\frac{V_{rel_n}^2}{\rho}$ ← مسیر حرکت ذره نسبت به دستگاه مختصات ثانویه

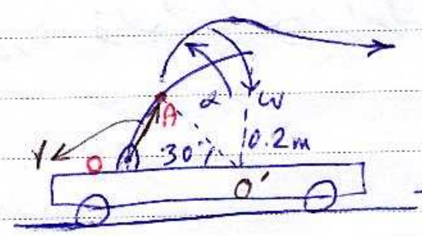
که جهتش نیز مشخص است

a_{rel_t}: جهتش که مشخص است اما اندازه اش می تواند مجهول باشد

⇒

$$\overset{\checkmark\checkmark}{a_{A_n}} + \overset{\checkmark\cdot}{a_{A_t}} = \overset{\checkmark\checkmark}{a_{B_n}} + \overset{\checkmark\checkmark}{a_{B_t}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\omega \times (\omega \times r)} + \overset{\checkmark\checkmark}{\dot{\omega} \times r} + \overset{\checkmark\checkmark}{2\omega \times V_{rel}} + \overset{\checkmark\checkmark}{a_{rel_n}} + \overset{\checkmark\cdot}{a_{rel_t}}$$

مثال:



$V_{rel} = 0.5\ \frac{m}{s}$

$\dot{V}_{rel} = a_{rel_t} = 0.8\ \frac{m}{s^2}$

$v = 2\ \frac{m}{s}$ $\quad \omega = 3\ \frac{rad}{s}$

$a = 5\ \frac{m}{s^2}$ $\quad \alpha = 4\ \frac{rad}{s^2}$

شتاب مطلق ذره A ؟ (در لحظه خاص $\theta = 30$)

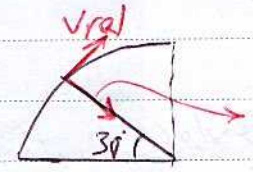
یا مسیر حرکت مطلق ذره A برای ما قابل تجسم است که در این صورت a_A را بصورت a_{A_n} و a_{A_t} می نویسیم، یا قابل تجسم نیست که در این صورت دو مجهول خواهیم داشت (در حالت اول یک مجهول داریم که در واقع همان اندازه ی a_{A_t})

در ابتدا باید مسیر a_A و a_B و a_{rel} را در صورت امکان تشخیص دهیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسیر a_B در راستای افق است ← a_{B_n} نداریم زیرا $r=\infty$

$$\ddot{a}_A = \cancel{a_{B_n}}_{\,0} + a_{B_t} + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r + 2\omega\times v_{rel} + a_{rel_n} + a_{rel_t}$$



جهت $2\omega\times v_{rel}$
با استفاده از قاعده دست راست
(راستایش همواره عمود بر v_{rel} است)

* دستگاه ثانویه را به الک جوش دادیم ← مسیر حرکت ذره نسبت به الک همان مسیر حرکت ذره نسبت به دستگاه ثانویه است.
←

$$a_{rel} = a_{rel_n} + a_{rel_t}$$

a_{rel_n} اندازه‌اش برابر است با $\frac{v_{rel}^2}{\rho}$

ρ ← شعاع انحنای منحنی نسبت به دستگاه مختصات ثانویه

$|a_{B_t}| = |a_B| = 5 \longrightarrow$

$|\omega\times(\omega\times r)| = 0.103\times 9 = 0.927$ 75°

$|\dot{\omega}\times r| = 0.103\times 4 = 0.412$ 75°

جهتش در واقع جهت α است
α پادساعتگرد ← جهتش به سمت خارج صفحه است

$|2\omega\times v_{rel}| = 2\times 3\times 0.5 = 3$ 30°

$|a_{rel_n}| = \frac{0.5^2}{0.2} = 1.25$ 30°

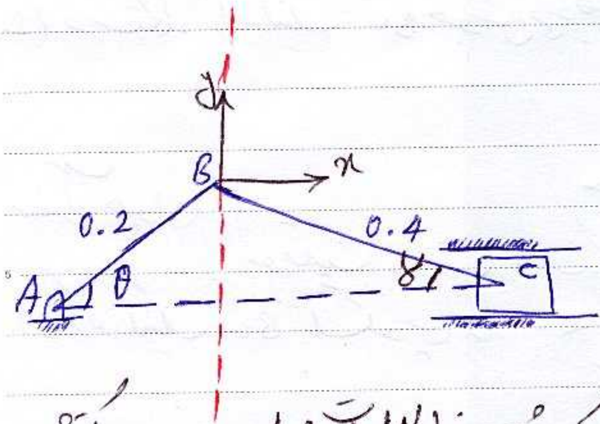
$|a_{rel_t}| = 0.8\ \frac{m}{s^2} = \dot{v}_{rel}$ 60°

شعاع انحنای مسیر مطلق حرکت ذره A ؟

$a_{A_n} = \frac{v_A^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v^2}{a_{A_n}} \longrightarrow$ سرعت مطلق A

[redacted]

مثال:



در لحظه خاصی که

$\theta = 30^\circ , \quad \dot{\theta} = 2 \ \mathrm{rad/s}$

$\ddot{\theta} = 5 \ \mathrm{rad/s^2}$

$\Rightarrow v_C , a_C = ?$

در حرکت های نسبی، باید به دنبال 2 نقطه که بیشترین اطلاعات را راجع به سیر حرکتشان و احیاناً سرعت و شتاب زاویه ای آن داریم، بگردیم که ⇐

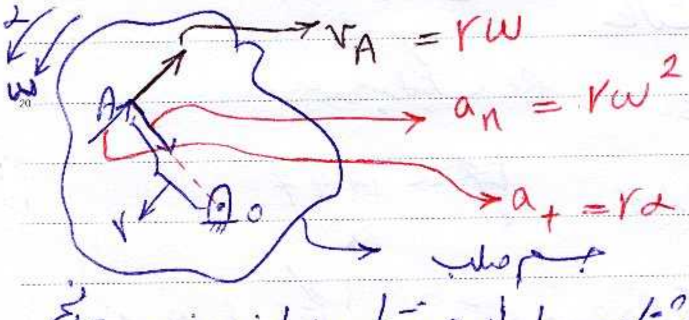
دستگاه مختصات ثانویه را روی یکی از آن 2 نقطه در نظر گرفته و سرعت و شتاب نسبی نقطه دیگر را نسبت به آن می سنجیم و ......

⇐ دستگاه مختصات ثانویه را روی B در نظر می گیریم:

1) دستگاه انتقالی: (دستگاه روی خط قرمز جابه جا می شود)

$v_C = v_B + \underbrace{\cancel{\omega} \times r}_{0} + v_{rel}$

نکته بسیار مهم:



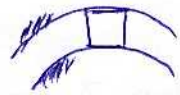
اگر نقطه o، مرکز دائمی دوران باشد و سرعت و شتاب زاویه ای عضو نیز مشخص باشد

⇐ خیلی آسان می توانم سرعت و شتاب را برای هر نقطه روی این عضو می توانم محاسبه کنم ⇐ v_B قابل محاسبه است

اما برای v_{rel} داریم: $\Rightarrow v_{rel} = \dot{\theta} \times r$

⇐ اگر لینک BC را تلسکوپی بگیریم ⇐ $v_{rel} = \dot{\theta} \times r + \dot{r}$

PAPCO

اگر  ⇐ a_{C_n} هم می‌داشتیم

2) دستگاه را به لینک BC جوش می‌دهیم:

$$V_C = V_B + \omega_{BC} \times r_{BC} + \cancel{V_{rel}}^{\,0}$$

صفر است چون:

موقعیت C نسبت به دستگاه مختصات ثانویه تغییر نمی‌کند (نه r تغییر می‌کند نه θ)

اما اگر لینک BC تلسکوپی بود ⇐

$V_{rel} \neq 0$ ⇐ r تغییر می‌کرد

3) دستگاه مختصات ثانویه را به لینک AB جوش دهیم:

$$\Longrightarrow \quad V_C = V_B + \omega_{AB} r_{BC} + V_{rel}$$

که V_{rel} برابر است با:

$$V_{rel} = r_{BC} \times (\omega_{AB} \pm \omega_{BC})$$

اگر ωها در خلاف جهت هم باشند ⇐ با هم جمع می‌شوند

اگر ωها در جهت هم باشند ⇐ از هم کم می‌شوند

بهترین حالت: (توصیه حاج حسنی):

حالت دوم (2)

$\Rightarrow |\omega_{BC} \times r_{BC}| = 0.4\,\omega_{BC}$ عمود بر لینک BC

$$\frac{0.4}{\sin 30} = \frac{0.2}{\sin \delta} \Rightarrow \delta = 14.47$$

14.47

با فرض ω_{BC} پادساعتگرد (در جهت عمود بر AB (مماس بر مسیر حرکت)) $\Leftarrow V_B = 0.2 \times 2 = 0.4$

$|V_C| = V_C \rightarrow$

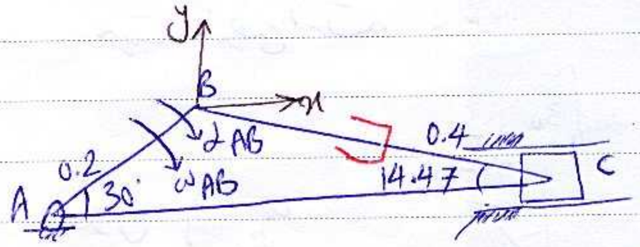
30

$$\Rightarrow V_C i = 0.4(\sin 30 i - \cos 30 j) + 0.4\,\omega_{BC}(\sin 14.47 i - \cos 14.47 j)$$

$$a_{C_t} = a_{B_n} + a_{B_t} + \omega_{BC} \times (\omega_{BC} \times r_{BC}) + \dot{\omega}_{BC} \times r_{BC} + \cancel{2\omega \times V_{rel}}^{\,0} + \cancel{a_{rel}}^{\,0}$$

مثال: مثال قبلی با 2 درجه آزادی:

میله BC تلسکوپی است



$$\begin{cases} \omega_{AB} = 2\ rad/s \\ \alpha_{AB} = 5\ rad/s^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{BC} = -0.3\ m/s \\ \ddot{BC} = -0.5\ m/s^2 \end{cases}$$

$\dot{BC}$ مثبت ⇐ جهت $\dot{BC}$ و BC یکی است

$\dot{BC}$ مثبت ⇐ طول BC در حال افزایش

2 نقطه را باید برگزینیم که بیشترین اطلاعات راجع به مسیر حرکتش و احیاناً سرعت و شتاب زاویه‌ای آن معلوم باشد

⇐

B : مسیر حرکتش دایره‌ای است به مرکز A و شعاع 0.2m

C : مسیر حرکتش روی افق است

⇐

دستگاه را روی B در نظر گرفته و نقطه C را نسبت به آن بررسی می‌کنیم

⇐

$V_C = V_B + \omega \times r + V_{rel}$

دستگاه را نوعی به لینک BC جوش داده شده ⇐

$$\overset{\checkmark 0}{V_C} = \overset{\checkmark\checkmark}{V_B} + \overset{\checkmark 0}{\omega_{BC}} \times r_{BC} + \overset{\checkmark\checkmark}{V_{rel}}$$

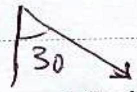
در اینجا V_{rel} از تغییر θ و یا تغییر طول BC رخ می‌دهد

که در اینجا تغییرات θ را نداریم ⇐

$V_{rel} = \dot{BC}$

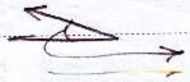
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$|v_C| = v_C$ → جهت فرضی است.

$|v_B| = 0.2 \times 2 = 0.4$ 

14.47 

$|\omega_{BC} \times r_{BC}| = 0.4\,\omega_{BC}$ با فرض ω_{BC} ↺

$v_{rel} = 0.3$  14.47

$\Rightarrow$

$$v_C\, i = 0.4(\sin 30\, i - \cos 30\, j) + 0.4\,\omega_{BC}(\sin 14.47\, i + \cos 14.47\, j) + 0.3(-\cos 14.47\, i + \sin 14.47\, j)$$

2 معادله و 2 مجهول $\Leftarrow$

$v_C =$

$\omega_{BC} =$

حال برای شتاب داریم:

$$\overset{\surd 0}{a_{C_t}} = \overset{\surd\surd}{a_B} + \overset{\surd\surd}{\omega_{BC} \times (\omega_{BC} \times r_{BC})} + \overset{\surd 0}{\dot{\omega}_{BC} \times r_{BC}} + \overset{\surd\surd}{2\,\omega_{BC} \times v_{rel}} + \overset{\surd\surd}{a_{rel}}$$

$0 = a_{C_n}$ $\Leftarrow$ چون شعاع سیر حرکت C بی‌نهایت است $\Leftarrow$

a_B نیز برابر $a_{B_t} + a_{B_n}$

$a_{B_n} = \omega_{AB}^2 \times r_{AB}$

$a_{Bt} = r_{AB} \times \alpha_{AB}$

$\omega_{BC} \times (\omega_{BC} \times r_{BC})$: جهتش در خلاف جهت r_{BC}

$\omega_{BC} \times v_{rel}$ $\Rightarrow$ با فرض درستی فرض قبلی!! $\Leftarrow$ جهتش عمود بر r_{BC} و به سمت پایین است

a_{rel} $\Rightarrow$ (جهتش مشخص است (جهت حرکت مشخص است))

حال اگر دستگاه مختصات ثانویه، انتقالی باشد ⇐

$$V_C = V_B + \cancel{\omega} \times r + V_{rel}$$

لذا:

$$v_{rel_r} = \dot{r} \quad , \quad v_{rel_\theta} = r\dot{\theta} \Rightarrow$$

$\omega \times r$ قبلی به صورت $r\dot{\theta}$ ظاهر شده است.

$$a_C = a_B + \omega_{BC} \times (\omega_{BC} \times r_{BC}) + \dot{\omega}_{BC} \times r_{BC} + 2\omega_{BC} \times v_{rel} + a_{rel}$$

تمام جملاتی که ω دارند ⇐ حذف می‌شوند

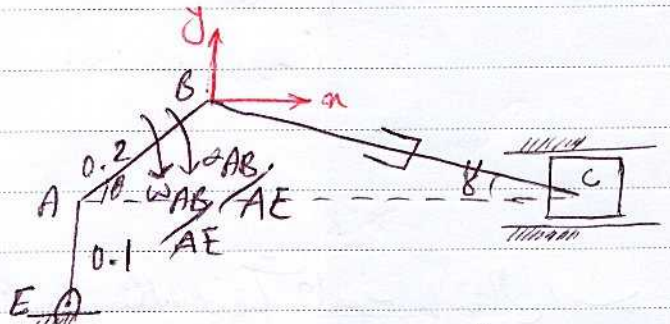
اما:

$$a_{rel} =$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال.

مثال قبل با 3 درجه آزادی:



$\theta = 30 \Rightarrow \gamma = 14.47$

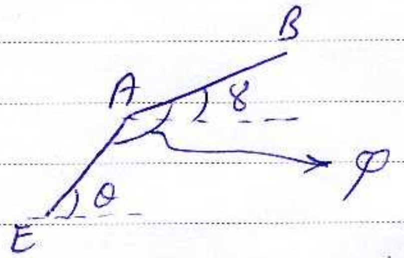
$$\begin{cases} \omega_{AB/AE} = 2\ rad/s \\ \alpha_{AB/AE} = 5\ rad/s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{B}_c = 0.3\ m/s \\ \ddot{B}_c = 0.5\ m/s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{AE} = 3\ rad/s \\ \alpha_{AE} = 6\ rad/s \end{cases}$$

پایه الکتروموتور به لینک AE متصل شده است ⇐

چون سرعت الکتروموتور برابر است سرعت روتور (چرخنده) نسبت به استاتور (معمولا ثابت) ⇐ ω_{AB} نسبت به AE سنجیده می‌شود



$\Rightarrow \omega_{AB} = \dot{\gamma}$ علامت زاویه‌ها مثبت

$\omega_{AE} = \dot{\theta}$

$\omega_{AB/AE} = \dot{\varphi} \Rightarrow \omega_{AB/AE} = \omega_{AE} + \omega_{AB}$

خلاف جهت هم است

$\Rightarrow \omega_{AB} = \omega_{AB/AE} - \omega_{AE}$

$$\Rightarrow \omega_{AB} = -2+3 = 1\ \text{rad}/_{s} \circlearrowleft = \dot{\theta}$$

$$\alpha_{AB} = -5+6 = 1\ \text{rad}/_{s^2} = \ddot{\theta}$$

سوال از ما سرعت و شتاب زاویه‌ای پیستون را می‌خواهد :

$\Rightarrow$ با درنظر گرفتن دستگاه مختصات ثانویه روی A $\Leftarrow$ سرعت و شتاب زاویه‌ای B را می‌یابیم (دستگاه مختصات ثانویه را به AB جوش دادیم)

$$\Rightarrow \ddot{v}_B = v_A + \omega_{AB} \times r_{AB} + \underbrace{\cancel{v_{rel}}}_{0}$$

$$\ddot{a}_B = a_A + \omega_{AB} \times (\omega_{AB} \times r_{AB}) + \dot{\omega}_{AB} \times r_{AB} + 2\,\omega \cancel{\times}\, \mathring{v}_{rel} + \cancel{\mathring{a}_{rel}}$$

$$\hookrightarrow a_{A_n} + a_{A_t}$$

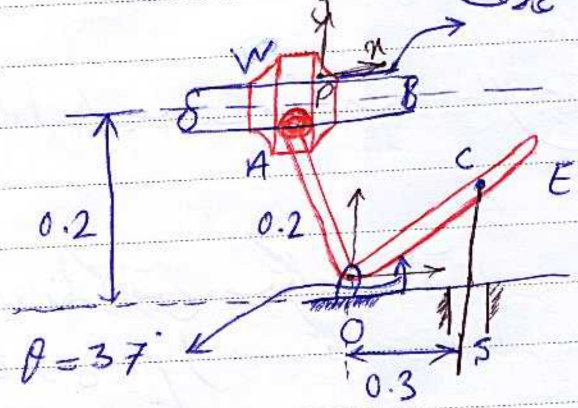
$a_{A_t} \longrightarrow$ عمود بر AE

Subject :
Year . Month . Date . ( )

مثال :

پین A مقیدست که همواره داخل شیار قائم حرکت کند

پین C هم مقید است داخل شیار L شکل باشد



سرعت و شتاب عضو CS = ؟

که در واقع همان سرعت و شتاب پین C است.

نکته : زیرا جسم صلبی که دارای انتقال است ⇐ سرعت و شتاب همه نقاطش یکی است
دوران ندارد

Mr. Haj musa :

مسئله پیچیده به پیچیده و شکل نیست بلکه مجموعه‌ای از نکات ساده است.

اطلاعات مسئله :

$V_W = 0.2 \, m/s$ ، $a_W = 0 \Rightarrow a_{CS} = ?$

ابتدا باید ω یا لینک L شکل را بیابیم

دستگاه مختصات ثانویه را در O به لینک L شکل جوش می‌دهیم.

$$V_C = \cancel{V_O}^{\text{صفر}} + \omega_{AE} \times r + V_{rel_2}$$

V_C در جهت قائم است و $\omega \times r$ عمود بر شیار و V_{rel} در راستای شیار است

V_{rel} از تغییر طول OC رخ می‌دهد (زاویه ثابت است)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

برای یافتن ω لینک 2 شکل:

بگذار صحبت‌های حاجی:

ابتدا ما باید 2 نقطه را که بیشترین اطلاعات را راجع به آن داریم بیابیم:

1) نقطه A: دایره‌ای به شعاع 0.2 و مرکز O مسیر حرکتش است.

2) نقطه‌ای بر روی غلاف (غلاف جسم صلبی است که تنها انتقال دارد)

⇐ دستگاه را بر روی نقطه‌ای در غلاف (انتخابی) بر می‌گزینیم ⇐ آن نقطه را P می‌نامیم

$$v_A = v_P + \cancel{\omega} \times r + v_{rel}$$

$|v_A| = 0.2 \times \omega_{AOE}$ $\nearrow 37°$ با فرض ω_{AOE} ↺

$|v_P| = 0.2 \longrightarrow$ $|v_{rel}| = v_{rel}$ ↑ فرض

$\Rightarrow$

$$0.2\,\omega_{AOE}(\cos 37\, i + \sin 37\, j) = 0.2\, i + v_{rel}\, j$$

$\Rightarrow$

$$0.16\,\omega_{AOE} = 0.2 \Rightarrow \omega_{AOE} = \frac{5}{4}$$

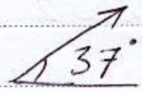
$$0.12\,\omega_{AOE} = v_{rel_1}$$

$$a_A = \cancel{a_P} + a_{rel} \Rightarrow a_{A_t} + a_{A_n} = a_{rel_t}$$

اگر شیار غلاف منحنی شکل می‌بود! ⇐ a_{rel_n} هم می‌داشتیم!!

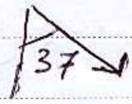
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$|a_{At}| = 0.2\,\alpha_{AoE}$ راستایش عمود بر Ao است



⇐ با فرض (α_{AoE}

$|a_{An}| = 0.2\left(\frac{5}{4}\right)^2$ از A به سمت o



$|a_{rel_t}| = a_{rel\,t}$ با فرض : ↓

$$\Rightarrow 0.2\,\alpha_{AoE}(\cos 37 i + \sin 37 j) + \frac{5}{16}(\sin 37 i - \cos 37 j) = -a_{rel}\, j \Rightarrow$$

2 معادله و 2 مجهول

از i و j → a_{rel} و α_{AoE}

⇐ با این اطلاعات v_c پیدا می‌شود.

حال:

$$a_c = \cancel{a_o} + \omega\times(\omega\times r_{oc}) + \dot{\omega}\times r_{oc} + 2\times\omega\times v_{rel_2} + a_{rel_t}$$

با فرض ساعتگرد ω و v_{rel_2} از o به c ⇐ جهتش طبق قاعده دست راست عمود بر OE و به سمت بالا است.

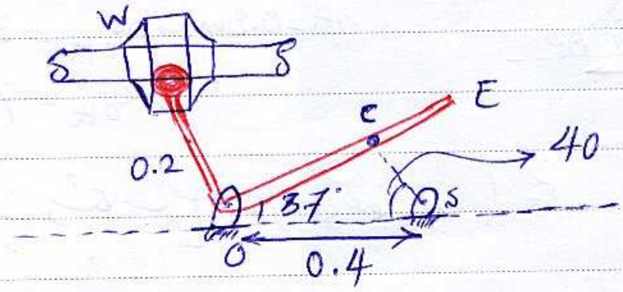
a_{rel} فقط در جهت تانژانت داریم

P4PCO

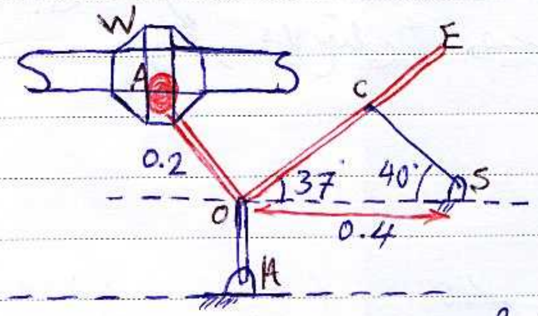
Subject:
Year. Month. Date. ( )

حاجی:

حال اگر سؤال قبلی را متوجه شدید، سؤال زیر را حل کنید:



Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال:

حال با همان اطلاعات مثال قبل و اینکه

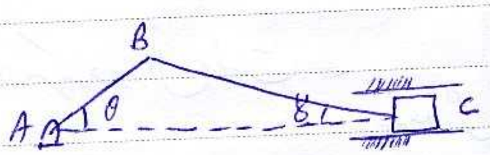
$OH = 0.2 m$ ، $\omega_{OH} = 3\ rad/s$

$\alpha_{OH} = 7\ rad/s^2$

سرعت و شتاب پین c (یا همان عضو cs) = ؟

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در مکانیزم لنگ و لغزان :
شتاب Max پیستون را
برحسب θ بیابید ($\dot{\theta}$ ثابت است)



نمودار $a-\theta$ ؟

$$AC = AB\cos\theta + BC\cos\gamma$$

$$, \frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\gamma = \sin\theta \times \frac{AB}{BC} \quad ① \Rightarrow$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{AB}{BC}\sin\theta\right)^2} \Rightarrow AC = AB\cos\theta + BC\sqrt{\cdots\cdots}$$

$$\Rightarrow \dot{AC} = AB\dot{\theta}\sin\theta - BC\dot{\gamma}\sin\gamma$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به زمان}]{① \text{ مشتق}} \dot{\gamma}\cos\gamma = \dot{\theta}\cos\theta \times \frac{AB}{BC} \Rightarrow \dot{\gamma} = \dot{\theta}\frac{\cos\theta}{\cos\gamma} \times \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \dot{AC} = -AB\dot{\theta}\sin\theta - BC\dot{\theta}\cos\theta \times \frac{AB}{BC} \times \frac{1}{\sqrt{\cdots}} \times \frac{AB}{BC}\cdot\sin\theta$$

$$\ddot{AC} = f(\theta, \dot{\theta}, AB, AC) \Rightarrow$$

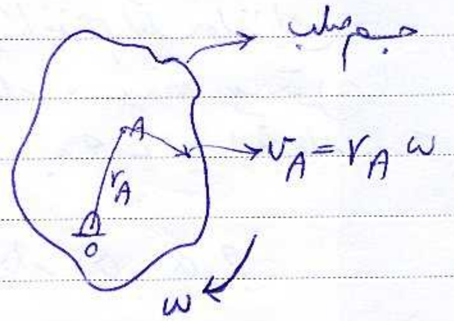
در طراحی این مکانیزم :
طول AB خیلی مهم است

$\Leftarrow$

در ماشین های پرقدرت (یا پرتوان) ، AB بزرگ انتخاب می شود
اما : در ماشین های پرشتاب ، AB کوتاه انتخاب می شود.

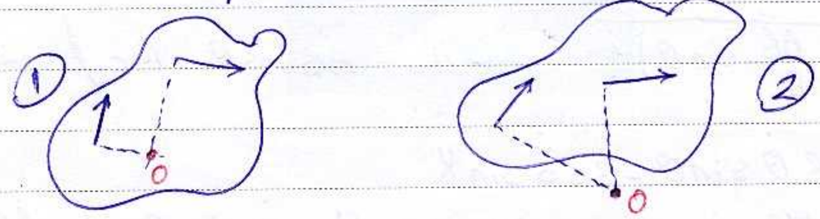
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مرکز آنی دوران:



O مرکز دوران است ⇐ سرعتش صفر است

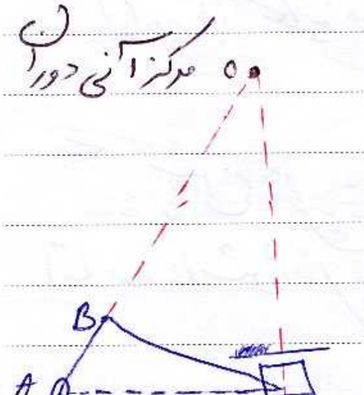
اگر سرعت 2 نقطه از جسم صلب را داشته باشیم
با عمود کردن راستایشان بر هم، مرکز دوران را می‌یابیم



نقطه‌ی دوران خارج
از جسم صلب هم
می‌تواند بیفتد

در شکل های ① و ② ، مرکز دورانی که به دست آوردیم، مرکز آنی دوران است
یعنی تنها سرعت در آنجا صفر است اما شتاب نه!!

اما در مرکز دوران دائم، نه تنها سرعت بلکه شتاب هم در آنجا صفر است.



⇐ در یک زمان مشخص می‌توانیم سرعت را
برای هر نقطه دلخواه (تنها سرعت را می‌توان
از این روش یافت یعنی این روش برای یافتن
شتاب کاربرد ندارد) بیابیم

برای دو نقطه B و C ؛ (نقطه A را نمی‌توان در نظر گرفت
چون خودش مرکز دائمی دوران است)

⇒

$$V_B = r_{AB} \times \omega_{AB} \quad (V_B = r_{OB} \times \omega_{BC}) \Rightarrow$$

$$r_{AB}\,\omega_{AB} = r_{OB} \times \omega_{BC} \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{r_{AB}}{r_{OB}}\,\omega_{AB}$$

$$\Rightarrow$$

$$v_C = r_{OC} \times \omega_{BC} = \frac{r_{OC} \times r_{AB}}{r_{OB}} \times \omega_{AB}$$

تحلیل فیزیکی:

اگر یک میله را به BC جوش دهیم بطوری که آن میله از o بگذرد (جوش دادیم ⇐ کلاً یک سیستم است) ⇐ یک نقطه از میله

⇐ در آن نقطه از میله

سرعت در آن لحظه در o صفر است (جسم صلبی که دوران دارد هر نقطه اش با خودش را می زند (سرعت ها مختلف اند))

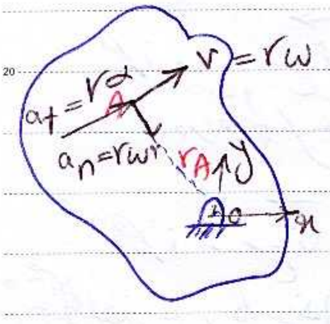
اما:

شتاب o صفر نیست زیرا مرکز دوران تغییر می کند (سرعت در لحظه بعد در نقطه دیگری صفر است) (سرعت در لحظه بعد در آن نقطه صفر نیست)

مرکز آنی دوران:

نقطه ای است واقع بر روی جسم صلب یا امتداد مجازی جسم صلب که در آن لحظه خاص سرعتش صفر است.

این روش برای شتاب قابل استفاده نیست زیرا:



دستگاه مختصات نوع ۲ را در o در نظر می گیریم پس:

$$v_A = \cancel{v_O} + r \times \omega + \cancel{v_{rel}} \Rightarrow v_A = r\omega$$

$$a_A = \cancel{a_O} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

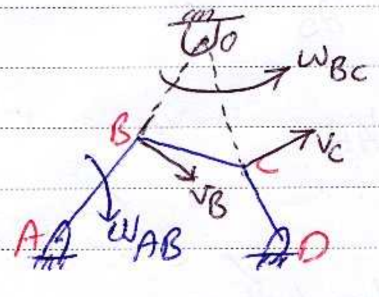
اگر o مرکز دائمی دوران باشد ⇐ $a_O = 0$

اما اگر o مرکز آنی دوران باشد ⇐ $a_O \neq 0$

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۷ Date. 25

شنبه:

مرکز آنی دوران:



$v_B = \omega_{AB} \times r_{AB}$,

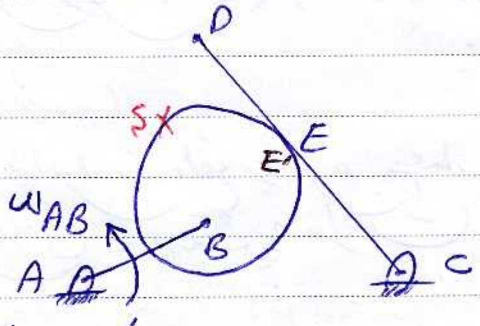
$v_B = \omega_{BC} \times r_{OB}$ $\Rightarrow \omega_{BC} = \dfrac{r_{AB}}{r_{OB}} \times \omega_{AB}$

$$\Rightarrow \quad |v_C| = r_{OC} \times \frac{r_{AB}}{r_{OB}}\, \omega_{AB} \;,\quad \omega_{CD} = \frac{V_C}{r_{CD}}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{CD} = \frac{r_{OC}}{r_{CD}} \times \frac{r_{AB}}{r_{OB}}\, \omega_{AB}$$

جهت ω_{BC} و v_C از روی جهت v_B یافت شده است.

مثال من درآوردی!!!



E متعلق به لینک CD است
، E′ متعلق به دیسک است

⇐

۱) : $\vec{v}_E = \vec{v}_{E'}$ ⇐ این دو جسم نسبت به هم (لینک و دیسک) در نقطه‌ی تماس غلتش دارند

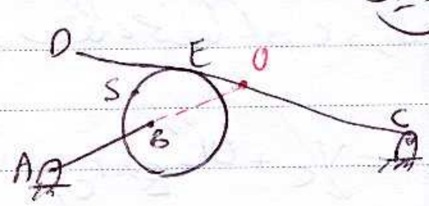
۲) : $\vec{v}_E \neq \vec{v}_{E'}$ ⇐ این دو جسم نسبت به هم در نقطه‌ی تماس غلتش توأم با لغزش دارند (یا لغزش کامل)

در مسأله فرض می‌کنیم که غلتش داریم ⇐ $v_D , v_S = ?$

از مرکز آنی دوران داریم:

استفاده سرعت در 2 نقطه از دیسک را داریم، یکی نقطه B که عمود بر لینک AB، و دیگری E (با توجه به غلتش و $v_E = v_{E'}$)

⇐



$$\omega_B = \frac{r_{AB}\,\omega_{AB}}{r_{OB}} \leftarrow \omega \text{ دیسک}$$

$$v_{E'} = v_E = \omega_B \times r_{OE'}$$

$$v_E = v_{E'} = \frac{r_{AB}}{r_{OB}}\,\omega_{AB} \times r_{OE'} \quad , \quad v_E = \omega_{CD} \times r_{CE}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{CD} = \frac{r_{AB} \times r_{OE'}}{r_{OB} \times r_{CE}}\,\omega_{AB}$$

⇐ v_D و v_S را با توجه به اینکه ω لینک CD و دیسک را داریم می‌توانیم بیابیم.

$$v_D = r_{OD} \times \omega_{CD} \quad , \quad v_S = \omega_B \times r_{OS}$$

⇐ سرعت هر نقطه دیگر را نیز که روی لینک و یا دیسک باشد را نیز می‌توانیم بیابیم.

نکته:

سرعت زاویه‌ای همیشه راجع به یک جسم صلب گفته می‌شود اما سرعت می‌تواند راجع به نقطه نیز مطرح گردد

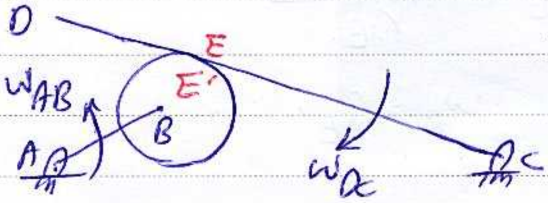
شتاب زاویه‌ای نیز همین گونه است.

Subject:
Year.　　Month.　　Date.

حال اگر لغزش نیز داشته باشیم !!! (غلتش توأم با لغزش)

⇐ چون مسأله با 2 درجه آزادی می‌شود ⇐ در صورت مسأله یک دسته اطلاعات دیگر نیز باید باشد ⇐ ω_{DC} نیز برای ما معلوم است

دستگاه مختصات را در C در نظر می‌گیریم:



$$\ddot{V}_{E'} = \cancel{V_C} + \omega_{CE} \times r_{CE} + V_{rel}$$

دستگاه را به DC جوش دادیم:

$$V_{rel} = \cancel{V_{E\,rel}} + V_{E'/E} \Rightarrow V_{rel} = V_{E'/E}$$

جهتش مماس بر لینک است از دید دیسک. نمی‌تواند در شکم لینک برود!

اما:

حال دستگاه ثانویه را در B وجوش داده بر دیسک در نظر می‌گیریم:

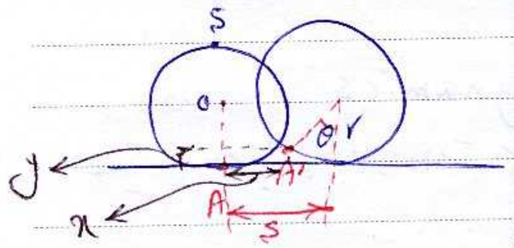
$$\ddot{V}_{E'} = V_B + \omega_B \times r_{BE} + \cancel{V_{rel}}$$

زیرا E نقطه‌ای از دیسک است که همراه با دیسک در حال چرخش است.

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سینماتیک چرخ :



if $s = r\theta \Rightarrow$ غلتش کامل

if $s = 0 \Rightarrow$ لغزش کامل

if $s \neq r\theta \Rightarrow$ غلتش همراه با لغزش

در غلتش کامل داریم:

$$x = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$
$$y = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\dot{x} = r\dot{\theta}(1-\cos\theta)$$
$$\dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow$$

سرعت نقطه‌ای از چرخ که با زمین در غلتش کامل، در تماس است، در واقع همان سرعت زمین است (صفر است)

نکته‌ی بالا در واقع همان تعریف غلتش کامل صفحه‌ی قبل است.

حال برای شتاب داریم:

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}(1-\cos\theta) + r\dot{\theta}^2\sin\theta + \ddot{X}$$
$$\ddot{y} = r\ddot{\theta}\sin\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{Y}$$

شتاب سطح زیرین

در $\theta = 0$ داریم $\ddot{x} = 0$ یعنی: شتاب شبی جسم در راستای x ها صفر است

اگر سطح زیرین (زمین) شتاب نداشته باشد!! شتاب در راستای x صفر است

$$\ddot{y} = r\omega^2$$

در واقع مرکز چرخ هنگام غلتش کامل چرخ فرمرکز دائم دوران نسبت زمین، مرکز دائم دوران نباید موقعیتش نسبت به زمان تغییر کند

Subject:
Year. Month هم دارد Date a_n ( ) و ←

ω و α ، سرعت و شتاب زاویه‌ای چرخ نسبت به زمین است

Mr. Hajmusa:

در Dynamics همیشه هنگام مطرح کردن سرعت و شتاب همیشه و همیشه، از خودت بپرس! سرعت و شتاب نسبت به چی و کجا!!

حال:

با توجه به اینکه، سرعت در A صفر شد ⇐ A را مرکز آنی دوران در نظر گرفته و داریم:

سرعت مرکز چرخ $= V_o = r\omega$ = سرعت مرکز چرخ

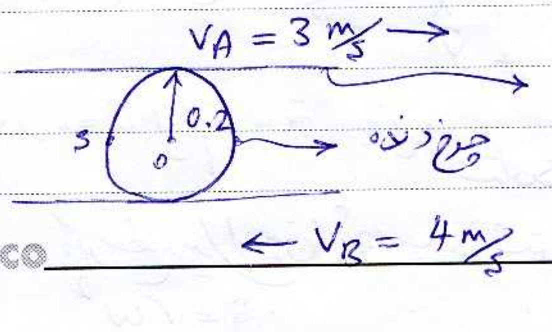
↑ سرعت مرکز چرخ در واقع برابر است با: سرعت ماشین

$V_s = 2r \times \omega \Rightarrow V_s = 2V_o$

اگر لغزش کامل داشته باشیم (ماشین گیر کرده در برف که بوکس و باد!! می‌کند) ⇐ مرکز دوران، مبدا چرخ است.

اگر غلتش کامل داشته باشیم ⇐ نقطه تماس با زمین، مرکز آنی دوران
اگر غلتش همراه با لغزش باشد ⇐ مرکز دوران، بین O و A است

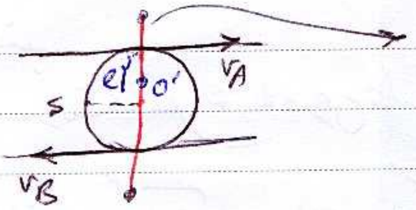
مثال:



شانه ⇐ $\vec{V_o}, \vec{V_c} = ?$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مرکز آنی دوران روی این خط است

اما اگر فرض کنیم که مرکز آنی دوران بالا باشد ⇐ با توجه به V_A ⇐ ω ساعتگرد ⇐

جهت V_B باید به راست باشد ✗

و اگر فرض کنیم که مرکز آنی دوران پایین باشد

⇐ با توجه به V_B ⇐ ω ساعتگرد ⇐ جهت V_A باید به چپ باشد ✗

⇐ مرکز آنی دوران در داخل چرخ دنده است (نزدیک به نقطه دارای سرعت کمتر)

⇐

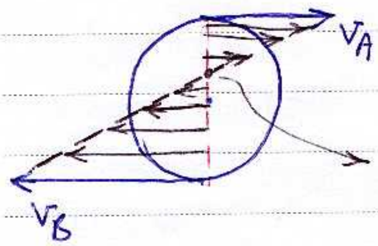
$$3 = e\omega \Rightarrow \omega = \frac{3}{e}$$

$$4 = (0.4 - e)\,\omega \Rightarrow 4 = (0.4 - e)\frac{3}{e} \Rightarrow e = \frac{1.2}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{21}{1.2} \Rightarrow V_o = \frac{21}{1.2}\left(0.2 - \frac{1.2}{7}\right)$$

$$V_s = r_{os'} \times \omega \quad , \quad r_{os'} = \sqrt{\left(0.2 - \frac{1.2}{7}\right)^2 + (0.2)^2}$$

V Profile : پروفیل سرعت :



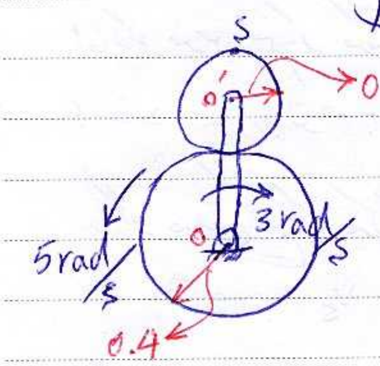
تناسب بین اندازه V_A و V_B باید رعایت شود.

مرکز آنی دوران

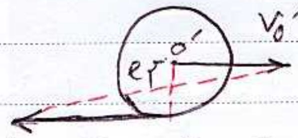
دوشنبه

۸۸ مهر 27

سرعت نقطه S با فرض غلتش کامل دو دیسک روی هم:



ابتدا باید مرکز آنی دوران دیسک بالایی را پیدا کنیم برای این کار نیاز به 2 نقطه روی دیسک داریم که سرعتشان معلوم باشد ⇐



$v_{o'} = (0.4+0.2)\times 3 = 1.8$

$v_{\text{تماس}} = 5\times 0.4 = 2$

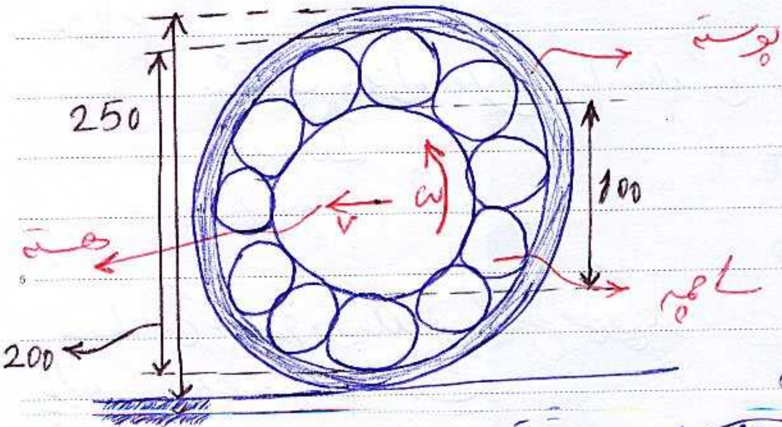
چون غلتش کامل داریم ⇐ سرعت در محل تماس در 2 دیسک برابر است

$$\Rightarrow \frac{1.8}{e} = \frac{2}{0.2-e} \Rightarrow \omega_{o'} = \frac{1.8}{e}$$

$$\Rightarrow (e = ۰/۱) \quad \omega_{o'} = 18\ rad/s$$

$$\Rightarrow v_S = (0.2+e)\,\omega_{o'} = 0.3\times 18 = 4.8$$

Subject:
Year.　Month.　Date.　( )



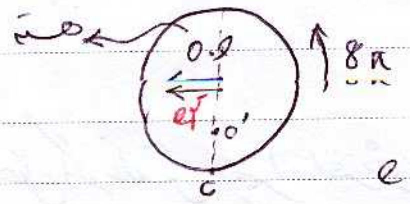
شکل:
بلبرینگ روی زمین
می غلتد
هسته با سرعت زاویه‌ای ω و
سیستم با v = 0.9 می چرخد
$\omega = 240\ rpm$
سرعت زاویه‌ای ساچمه چقدر؟ ← دور بر دقیقه

سرعت زاویه‌ای پوسته $\omega_1 = \frac{0.9}{0.125} = 7.2\ rad/s$

چون غلتش کامل داریم.
سرعت نقاط تماس ساچمه با بقیه‌ی اعضا برابر سرعت
آن اعضا است.
حال باید مرکز آنی دوران هسته را بیابیم ←

$\omega_{هسته} = \frac{240 \times 2\pi}{60} = 8\pi\ rad/s$

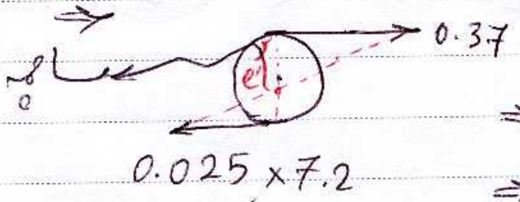
با توجه به جهت v و ω



← مرکز آنی دوران پایین
مرکز هسته است.

$e \times 8\pi = 0.9 \Rightarrow e = 0.035$

$\Rightarrow v_c = 0.015 \times 8\pi = 0.37 \Rightarrow$ برابر با سرعت در نقطه‌ی تماس
با ساچمه است ←



$\Rightarrow \frac{0.37}{e'} = \frac{0.18}{0.05 - e'} \Rightarrow e' = 0.03$

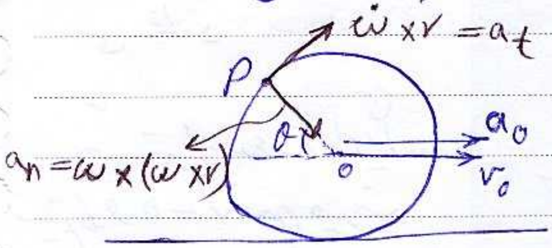
$\Rightarrow \omega_{ساچمه} = \frac{0.37}{0.03} = 12.3$

سرعت پوسته در محل تماس
با ساچمه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سؤال:

شتاب یک نقطه دلخواه روی چرخ را در غلتش کامل چگونه می‌توان یافت:



$a_P = ?$

مسافتی که چرخ در غلتش کامل طی می‌کند برابر $r\theta = s$ است:

$$\dot{s} = r\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{r} \Rightarrow \omega = \frac{v_o}{r}$$
$$\ddot{s} = r\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{s}}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{a_o}{r}$$

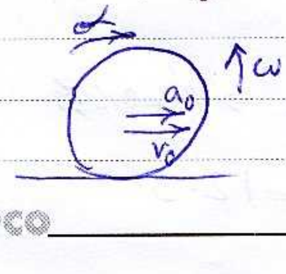
دستگاه را روی مبدا جوش می‌دهیم:

$$a_P = a_o + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$
$$\Rightarrow a_P = a_o + \left(r\left(\frac{v_o}{r}\right)^2\right)_n + \left(\left(\frac{a_o}{r}\right)r\right)_t \Rightarrow$$
$$a_P = \left(a_o + \frac{v_o^2}{r}\cos\theta + a_o \sin\theta\right)i + \left(a_o\cos\theta - \frac{v^2}{r}\sin\theta\right)j$$

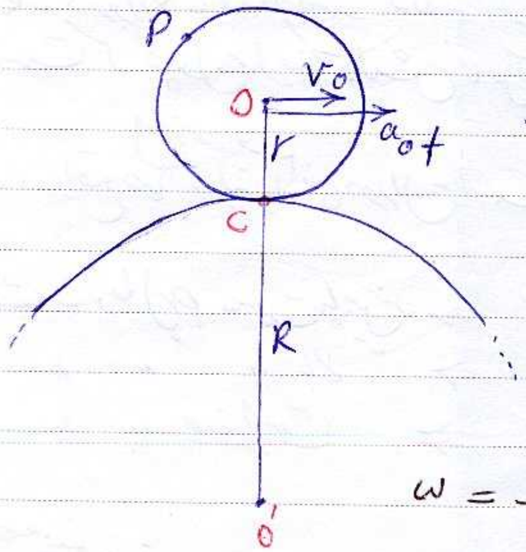
if $\theta = 270°$ (تماس با زمین) $\Rightarrow a_P = \frac{v^2}{r} j$

حال اگر غلتش همراه لغزش باشد:

چون در این حرکت سرعت و شتاب با سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای ارتباطی ندارد $\Leftarrow$ ω و α را نیز مسأله باید علاوه بر v_o و a_o بدهد



مثال:



چرخ دنده پایین ثابت است اما
چرخ دنده بالایی دارای غلتش کامل است

سرعت و شتاب مرکز چرخ دنده را داریم
⇐ شتاب نقطه دلخواه P را می‌خواهیم:

$$\omega = \frac{v_o}{r}$$

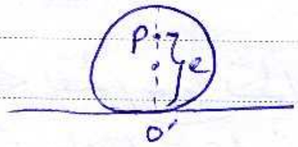
چون غلتش کامل داریم و دیسک پایینی ثابت است ⇐
در محل تماس دو دیسک:
سرعت صفر است و شتاب در جهت نرمال برابر $r\omega^2$ و
شتاب در جهت تانژانت هم صفر است ⇐
می‌توان این نقطه را مرکز آنی دوران در نظر گرفت ⇐

$$v_o = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_o}{r}$$

نکته: جهت ω و α از جهت v_o و a_o جهتشان بدست می‌آید (a در جهت α، v در جهت ω)
همچنین:

$$\alpha = \frac{a_{ot}}{r}$$

زیرا:
(اثبات α): (شتاب تانژانت صفر):
دیسک در غلتش کامل ⇐ محل تماس مرکز آنی دوران ⇐



a_{o_t} و v_o را هم داریم:

$$a_p = a_{o_t} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

$$\Rightarrow a_p = r\omega^2 j + (-e\omega^2) j + e\alpha i$$

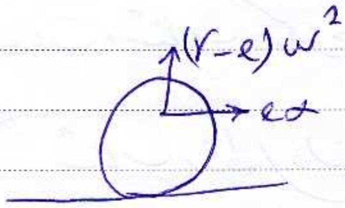
$$\Rightarrow a_p = \omega^2 (r-e) j + e\alpha i$$

استال $e\alpha$

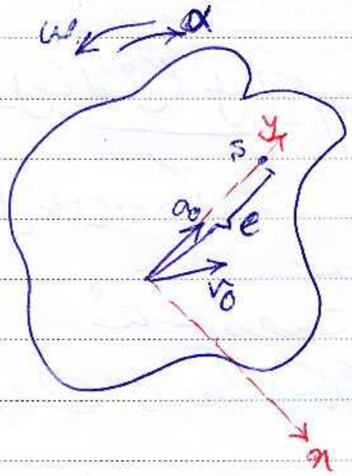
e : در واقع فاصله‌ای است که نقطه‌ی مورد بررسی تا نقطه‌ای دارد که شتابش در راستای n صفر است که چون اینجا غلتش کامل داریم:

این نقطه (نقطه‌ی شتاب تانژانت صفر)

در واقع همان مرکز آنی دوران است:



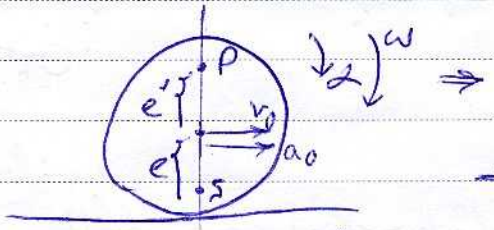
شتاب نرمال P بسمت پایین $\leftarrow$ if $e>r$
if $e<r \Rightarrow$ بالا " " "
if $e=r \Rightarrow$ صفر است " "



همچنین:

$$a_s = a_0 + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r$$
$$\Rightarrow a_s = a_0 j - e\omega^2 j + e\alpha i$$
$$\Rightarrow a_{s_i} = e\alpha$$

همچنین:



$$\Rightarrow a_s = a_0 + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r$$
$$\Rightarrow a_s = a_0 i + e\omega^2 j - e\alpha i$$

if:
$$\Rightarrow a_{s_n} = 0 \Rightarrow a_0 = e\alpha \Rightarrow e = \frac{a_0}{\alpha}$$

$\Leftarrow$ نقطه‌ی s را نقطه‌ی شتاب تانژانت صفر گوییم $(a_{s_n} = 0)$ که برای یافتن این نقطه داریم:

$$e = \frac{a_0}{\alpha}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

که اگر غلتش کامل داشته باشیم این نقطه همان مرکز آنی دوران است.

حال برای شتاب نقطه‌ی P داریم:

$$a_{P_x} = (e' + e)\alpha$$

یعنی: اگر نقطه‌ی شتاب تانژانت صفر را بیابیم ⇐ شتاب هر نقطه‌ی دلخواه روی سیستم را نیز می‌توانیم با استفاده از فرمول زیر (البته شتاب تنها در راستای تانژانت (x)) بیابیم:

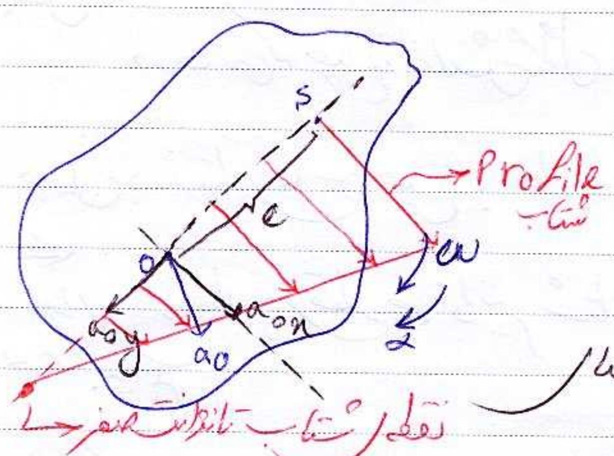
$$a_{P_x} = e\alpha$$

که:

α : شتاب زاویه‌ای دستگاه ما است

e : فاصله‌ی نقطه‌ی مورد بررسی تا نقطه‌ی شتاب تانژانت صفر است

بالاخره: حالت کلی:



شتاب نقطه‌ی O را داریم ⇐ شتاب نقطه‌ی S را می‌خواهیم

با در نظر گرفتن دستگاه مختصاتی که یک راستای آن از S بگذرد داریم:

$$\Rightarrow a_{S_x} = a_{O_x} + e\alpha$$

⇐ هر چه e کمتر شود (از بالا به پایین حرکت می‌کنیم) ⇐ به نقطه‌ای می‌رسیم که $a_{S_x} = a_{O_x}$ یعنی به مبدا می‌رسیم و حال:

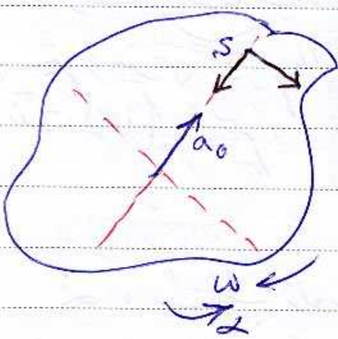
Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر همچنان به حرکت خود ادامه دهیم در نقطه ای پایین تر از مرکز (o) داریم:

$a_{o_x} = e\alpha$

یعنی $a_{s_x} = 0$ که در واقع این نقطه همان نقطه ی شتاب تانژانت صفر است

حال اگر محور را دقیقاً بر روی بردار شتاب در نظر بگیریم:

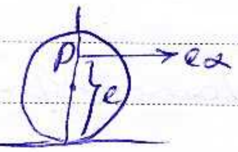


$$\Rightarrow a_{s_x} = \cancel{a_{o_x}}^{0} + e\alpha$$

$$\Rightarrow a_{s_x} = e\alpha$$

از این حالت خاص زیاد استفاده می کنیم

پس:

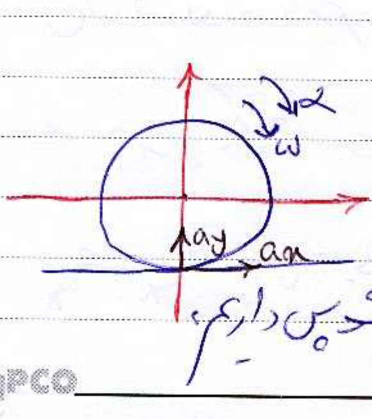


در حالتی که چرخ غلتش کامل دارد داریم: $e\alpha = a_{p_x}$

چون در نقطه ی تماس چرخ با سطح تماس، شتاب در جهت x ها نداریم

$\Leftarrow$ برای هر نقطه روی قطر می توانیم شتاب در جهت x ها را با استفاده از $e\alpha$ بیابیم

حال اگر:

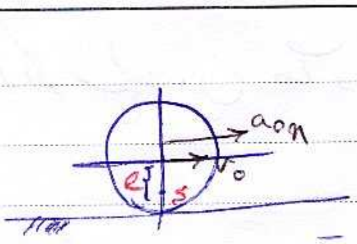


غلتش توام با لغزش باشد:
نقطه ی تماس چرخ با زمین را نمی توان به عنوان نقطه ی تانژانت صفر در نظر گرفت اما حتماً نقطه ای هست که شتاب تانژانت در آنجا صفر باشد پس داریم:

توجه کن که سطح زیر ثابت است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فرض می‌کنیم که آن نقطه باشد ⇐



$$a_{on} = e\alpha \Rightarrow e = \frac{a_{on}}{\alpha}$$

همچنین نقطه‌ای وجود دارد که سرعت در آنجا صفر است

یعنی مرکز آنی دوران ⇐

$$e'\omega = v_0 \Rightarrow e' = \frac{v_0}{\omega}$$

e و e' در حالتی که غلتش کامل داشته باشیم روی هم می‌افتند!!!

البته امکان دارد که نسبت $\frac{a_{on}}{\alpha}$ و $\frac{v_0}{\omega}$ نیز با هم برابر شود اما غلتش کامل نداشته باشیم.

حال به ادامه‌ی مثال می‌رسیم!!!

چون چرخ زیری ثابت است ⇐

محل تماس 2 دیسک‌ها مرکز آنی دوران

و نقطه‌ی شتاب تانژانت صفر است ⇐

$$\omega = \frac{v_0}{r}, \quad \alpha = \frac{a_{ot}}{r}$$

$$\Rightarrow a_p = a_{ot}\, i - \frac{v_0^2}{(r+R)^2}\, j + r\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 j - \frac{a_{ot}}{r} \times r\, i$$

شتاب نرمال a_0 — مرکزش حول o می‌چرخد دایره‌ی کوچکتر

با توجه به جهت r و a_{ot} ⇐ α پادساعتگرد است

$$\Rightarrow a_p = v_0^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+R}\right) \Rightarrow a_p = v_0^2 \frac{1}{r\left(1+\frac{1}{R}\right)}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در اگر سطح زیرین صاف و بدون انحنا (خط مستقیم) باشد $\Leftarrow$

$R \to \infty \Rightarrow$

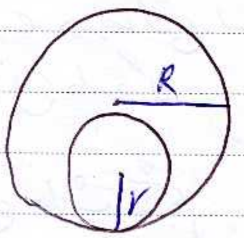
$$a_p = \frac{v_0^2}{r}$$

حال اگر:

$R \to 0 \Rightarrow$ یعنی مثلاً دیسک بالایی حول یک نقطه بچرخد

$\Rightarrow a_p = 0$ (سرعت مرکز دوران صفر است)

حال اگر چرخش داخلی باشد یعنی:



$$\Rightarrow a_p = v_0^2 \left(\frac{R}{r(R-r)} \right)$$

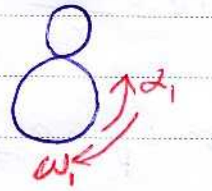
زیرا:

$$a_p = a_{0t}\, i + \frac{v_0^2}{(R-r)}\, j + r\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 j - \frac{a_{0t}}{r} \times r\, i$$

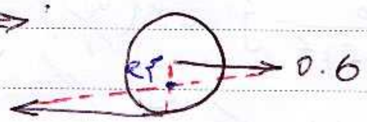
حال اگر در مثال قبلی (چرخش خارجی) دیسک پایین نیز با سرعت و شتاب زاویه‌ای ω_1 و α_1 بچرخد $\Leftarrow a_c = ?$

$a_{0t} = 0.6\ m/s^2$, $v_{0t} = 2\ m/s$, $R = 0.4\,m$, $r = 0.2\,m$

$\alpha_1 = 2\ rad/s^2$ $\quad \omega_1 = 3\ rad/s$



O' مرکز آنی دوران $\Rightarrow$



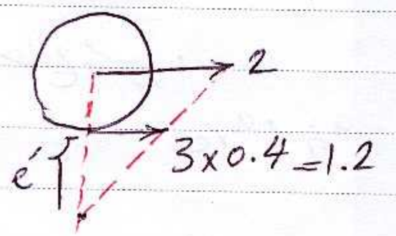
$R\alpha_1 = 0.8$

$$\Rightarrow \frac{0.6}{l} = \frac{0.8}{0.2 - l} \Rightarrow l = 0.08\,m$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{0.6}{0.08} = 7\ \alpha_2$$

[redacted]

حال برای یافتن ω_2 نیاز به مرکز آنی دوران داریم ⇐
v_c و a_{c_t} را با استفاده از



V_2 و a_2 ← جهتشان را با استفاده از قاعده‌ی دست راست در دیسک دوم تشخیص می‌دهیم.

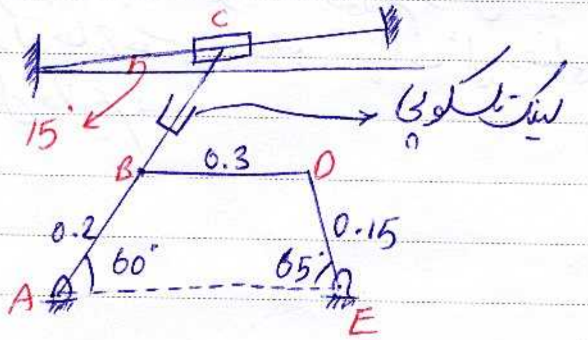
$$\frac{1.2}{e'} = \frac{2}{0.2+e'} \Rightarrow e' = 0.3 \Rightarrow \omega_2 = \frac{2}{0.3+0.2} = 4$$

$$\Rightarrow a_p = a_0 + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

$$a_p = a_{0_t} i - \left(\frac{v_0^2}{R+r}\right) j + r\omega_2^2 j - r\alpha_2 i$$

$$\Rightarrow a_p = (0.6 - 1.4) i + (0.8 - \tfrac{20}{3}) j = -0.8 i - 5.9 j$$

مثال:



$V_C = 2 \, m/s \rightarrow$

$a_C = 3 \, m/s^2$

$\Rightarrow \alpha_{ED} = ?$

فرض می‌کنیم عضو BDE وجود خارجی نداشته باشد ⇐
دستگاه را روی A می‌گذاریم و به لینک تلسکوپی جوش می‌دهیم ⇐

$$\overset{\checkmark\checkmark}{V_C} = \cancel{V_A} + (\omega \times r) + v_{rel} = \overset{\checkmark 0}{\omega_{Ac}} \times r_{Ac} + \overset{\checkmark 0}{v_{rel}}$$

جهت معلوم　　　　جهت معلوم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$a_c = a_A + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r + 2\omega\times v_{rel} + a_{rel}$$

نکته:

پروفسور حاج حسینی:

a_{rel} و a_A و a_c: مسیر حرکتشان را خوب بررسی کنید (100 بار گفتم!)

$$\Rightarrow\quad a_{c_t} = \cancel{a_A}^{\,0} + \omega_{AC}\times(\omega_{AC}\times r_{AC}) + \dot{\omega}_{AC}\times r_{AC} + 2\omega_{AC}\times v_{rel} + a_{rel}$$

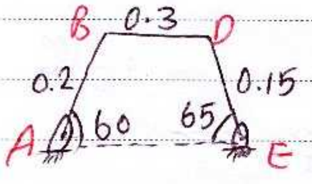
راستا معلوم

چون لینک تلسکوپی داریم ⟸ (هیچ گونه دورانی حول A ندارد)

$a_{rel_n} = 0$

و تنها a_{rel_t} داریم که جهتش عمود بر لینک تلسکوپی است.

⟸ ω_{AC} و α_{AC} را می‌یابیم. حال:



از قسمت بالا صرف نظر می‌کنیم و شکل روبرو حاصل ماست!

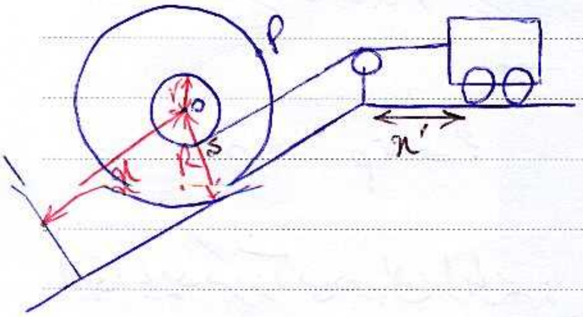
(دکتر حاج حسینی: از این تیپ مسائل خیلی پیش میاد!)

حال داریم:

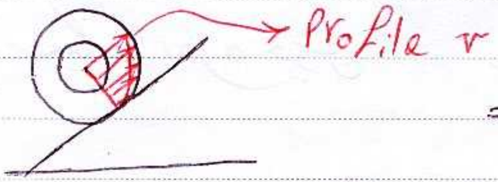
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



وقتی $x = 0$ ⇐ /
ماشین با شتاب $3\ m/s^2$ حرکت می‌کند
حال وقتی $x = 2.5$ ⇐ $a_p = ?$
با فرض: غلتش کامل قرقره ، $r = 0.2 , R = 0.3$



$$\Rightarrow \frac{v_o}{v_s} = \frac{x}{x'}$$

$$\Rightarrow \frac{0.3\omega}{0.1\omega} = \frac{2.5}{x'} \Rightarrow x' = 0.83$$

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \times 3 \times 0.83} = 2.23\ m/s \Rightarrow$$

$$v_s = \omega \times 0.1 \Rightarrow 2.23 = \omega \times 0.1 \Rightarrow \omega = 22.3\ rad/s$$

چون غلتش کامل است و سطح زیر ثابت است ⇐

$$a_{s_t} = 0.1 \times \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 30\ rad/s^2$$

$$\Rightarrow a_o = 30 \times 0.3 = 9\ m/s^2 \quad , \quad v_o = 0.3 \times 22.3 = 6.69\ m/s$$

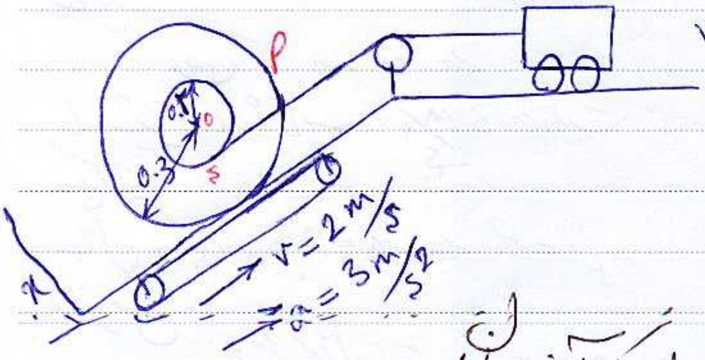
حال دستگاه را بر روی o قرار می‌دهیم و به آن جوش می‌دهیم ⇐

$$v_p = v_o + \omega \times r + \cancel{v_{rel}} = 6.69 + 22.3 \times 0.3$$

$$a_p = a_o + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r = 9 + (22.3)^2 \times 0.3 + 30 \times 0.3$$

Subject: Mec20.blogfa.com ibm_raby@yahoo.com

Year. Month. Date.



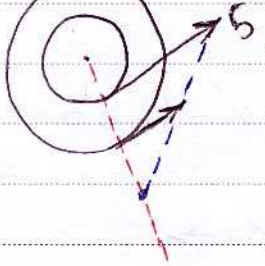
$v = 5 \frac{m}{s}$, $a = 3 \frac{m}{s^2}$

$? = v_p , a_p$

ابتدا باید مرکز آنی دوران را بیابیم ؛

سپس v_o و a_o را بیابیم (با استفاده از مرکز آنی دوران)

دستگاه را روی o جوش داده و a_p و v_p را بیابیم ؛



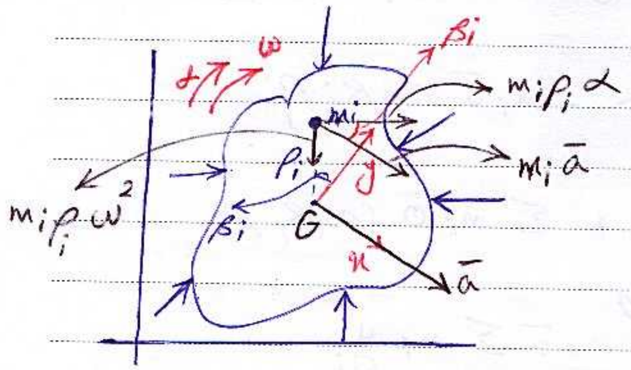
Subject:
Year. ۸۸ Month. ۸ Date. ۳۰

شنبه

Dr Hajmusa

«سینتیک اجسام صلب»

سینتیک اجسام صلب در صفحه:



G مرکز جرم جسم صلب است

ذره‌ای نمونه m به فاصله ρ از G در نظر می‌گیریم و داریم:

$$a_i = \bar{a} + \underbrace{\omega \times (\omega \times r)}_{\rho_i \omega^2} + \underbrace{\dot{\omega} \times r}_{\rho_i \alpha}$$

حال اگر بخواهیم برآیند نیروهای وارد بر ذره را نشان دهیم، می‌توانیم در قالب ۳ مولفه نشان دهیم

برای ذره i
$$\Sigma \vec{F}_i = m_i\rho_i\vec{\alpha} + m_i\vec{\bar{a}} + m_i\rho_i\vec{\omega^2}$$

برای کلیه ذرات
$$\Sigma F_i = \Sigma m_i\rho_i\alpha + \Sigma m_i\bar{a} + \Sigma m_i\rho_i\omega^2$$

$$\Sigma F = \alpha \cancel{\Sigma m_i\rho_i} + \bar{a}\,\Sigma m_i + \dot{\omega}^2 \cancel{\Sigma m_i\rho_i}$$

نکته:

$$\Sigma m_i\rho_i = m\bar{\rho} = 0$$

$\bar{\rho}$: فاصله مرکز جرم تا مبدا مختصات است

$$\Rightarrow \Sigma F = m\bar{a}$$

PAPCO

ممان اینرسی اجسام مختلف:

1) میله ⇒ $I_o = \frac{1}{12} ML^2 \Rightarrow I_E = \frac{1}{3} ML^2$

Subject:

Year. Month. 2) Date. دیسک $I_o = \frac{1}{2} Mr^2$

جسم صلب، هر نقطه اش، شتاب خودش را دارد اما مبنای کار ما، شتاب مرکز جرم است.

* علامت بار (−)، مختصه را منسوب به مرکز جرم می کند

$\bar{M}_i$: گشتاور وارده بر ذره i حول مرکز جرم

$$\bar{M}_i = \Sigma \bar{m}_i = m_i \rho_i^2 \alpha + m_i \bar{a} \cos\beta_i \rho_i$$

$$\Sigma \bar{M}_i = \Sigma m_i \rho_i^2 \alpha + \Sigma m_i \bar{a} \cos\beta_i \rho_i$$

$$\Sigma \bar{M} = \alpha \Sigma m_i \rho_i^2 + \bar{a} \Sigma m_i y_i$$

داریم:

$$\Sigma m_i \rho_i^2 = \bar{I} \quad , \quad \Sigma m_i y_i = m\bar{y} = 0$$

$$\boxed{\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha}$$

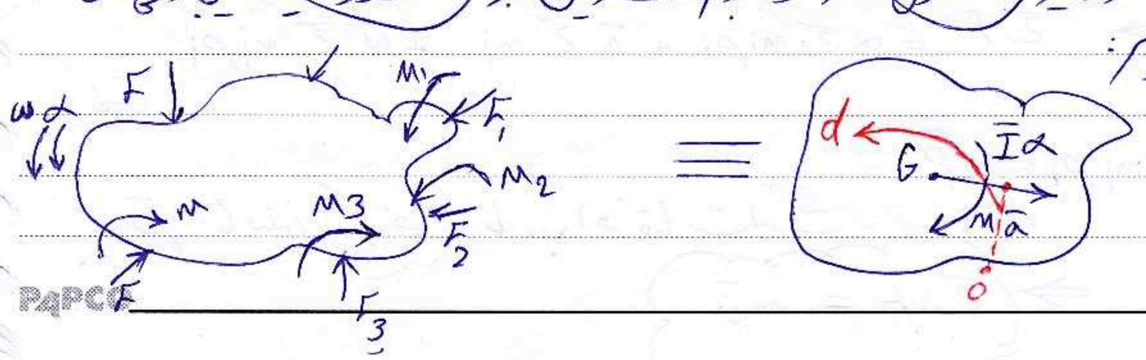
$\bar{I}$: ممان اینرسی (گشتاور لختی) مرکز جرم است ، $I = \int r^2 dm$

مقاومت جسم در برابر تغییر سرعت زاویه ای را ممان اینرسی گویند

نکته:

گشتاورگیری ما حول مرکز جرم است ولی برای ما محدودیت ایجاد می کند

اما داریم:



3) شکل هندسی نامشخص $\Rightarrow \bar{I} = m \times \bar{k}^2$ $\bar{k}$: شعاع ژیراسیون

Subject: Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \sum M_o = \pm \bar{I}\alpha \pm m\bar{a}d$$

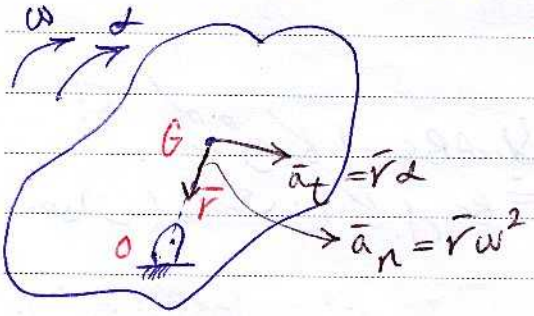
که محدودیت گشتاورگیری حول نقطه‌ی خاص (مرکز جرم) از بین رفت !!

حال داریم:

✓ ۱) برای جسم صلبی که تنها انتقال دارد:

$$\sum \bar{M} = 0 \quad , \quad \sum M_o = m\bar{a}d$$

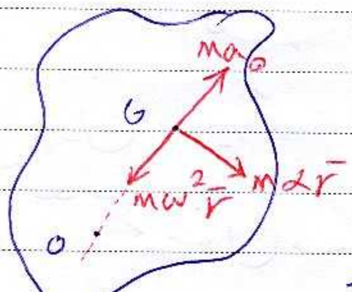
✓ 2) جسم صلبی که دارای مرکز دائمی دوران است (نقطه‌ی O، شتاب ندارد)



$$\sum F = m\bar{a} \begin{cases} \sum F_t = m\bar{a}_t = m\bar{r}\alpha \\ \sum F_n = m\bar{a}_n = m\bar{r}\omega^2 \end{cases}$$

$$\sum M_o = \bar{I}\alpha + m\bar{r}^2\alpha$$

$$\rightarrow \sum M_o = \alpha(\bar{I} + m\bar{r}^2) = I_o\alpha$$



✓ 3) اگر نقطه‌ای روی جسم صلب داشته باشیم که شتابش صفر نباشد آنگاه:
شتابش از مرکز جرم بگیریم، داریم:

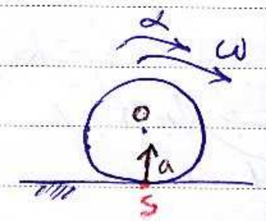
$$\bar{a} = a_o + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

$$\rightarrow \sum M_o = \bar{I}\alpha + m\alpha\bar{r}^2 = \alpha(\bar{I} + m\bar{r}^2) = I_o\alpha$$

[redacted]

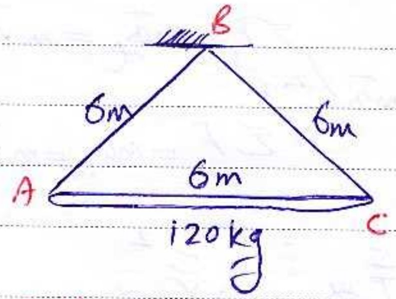
برای حالت سوم می‌توان مثالی آورد:

اگر دیسک بالانسی (مرکز جرم و مرکز هندسی یکی هستند) داشته باشیم که روی سطح غلتش دارد



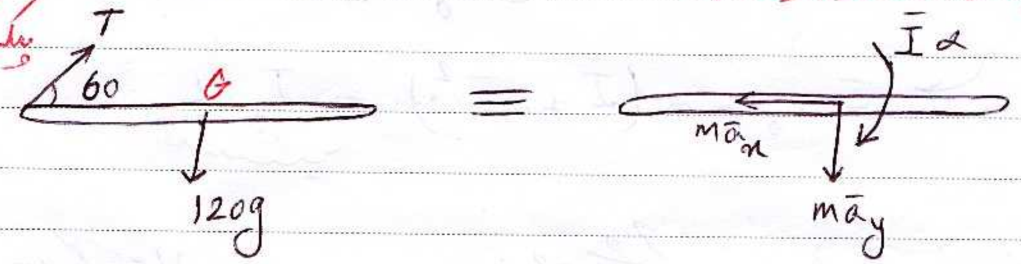
$$\to \sum M_S = I_S \alpha$$

مثال: کشش کابل AB بلافاصله بعد از پاره شدن کابل BC



پیکره آزاد گشتاور و شتاب

پیکره آزاد نیرو



چون مسیر حرکت مرکز جرم را نمی‌دانیم، این قدر مجهول واسه ما به وجود آمد که چون مسیر حرکت A را می‌دانیم (دایره‌ای به مرکز A و شعاع 6m) ⇐

با قرار دادن دستگاه روی A و بررسی شتاب مرکز جرم داریم:
دستگاه را به AC جوش می‌دهیم

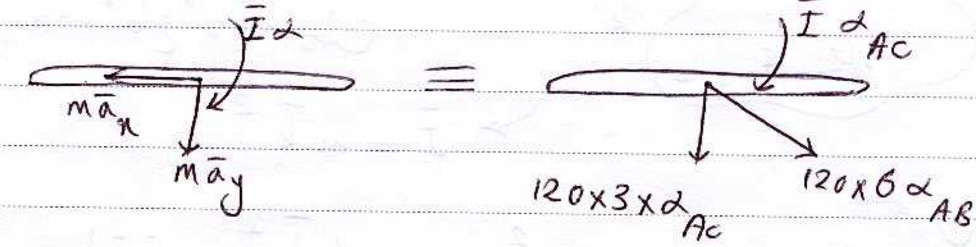
[redacted]

$$\bar{a} = a_A + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

$$\bar{a} = a_{A_n} + a_{A_t} + \omega_{AC} \times (\omega_{AC} \times r_{AG}) + \dot{\omega}_{AC} \cdot r_{AG}$$

چون در صورت سوال: بلافاصله قطع شده است ⇐ تنها در لینک AB و AC
α ایجاد شده است و فرصت نکرده که ω ایجاد کند!!

$$\bar{a} = a_{A_t} + \dot{\omega}_{AC} \cdot r_{AG}$$



سیر حرکت A مشخص است زیرا:

if: کابل تحت کشش باشد ← سیر حرکت مشخص است

else:
کابل تحت فشار باشد ← T منفی است و سیر حرکت نامشخص است.

اما: ما فرض را بر تحت کشش بودن طناب و ⇐ مشخص بودن سیر حرکت می‌گذاریم

⇐ 3 معادله و 3 مجهول ⇐ مجهولات را می یابیم

در میله یکنواخت، ممان اینرسی حول مرکزش برابر است با $\frac{1}{12} mL^2$

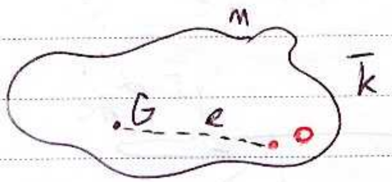
L: طول میله است

همچنین، ممان اینرسی میله یکنواخت حول نقطه ابتدایی $= \frac{1}{3} mL^2$

در دیسک یکنواخت، ممان اینرسی حول مرکز برابر است با $\frac{1}{2} mr^2$

r: شعاع دیسک است

همچنین:



k: شعاع ژیراسیون

$$\bar{I} = m\bar{k}^2$$

همچنین

$$I_O = \bar{I} + me^2 = m(\bar{k}^2 + e^2)$$

حال اگر به جای $\bar{k}$، k_O را استفاده بنماییم ⇐ $I_O = m k_O^2$

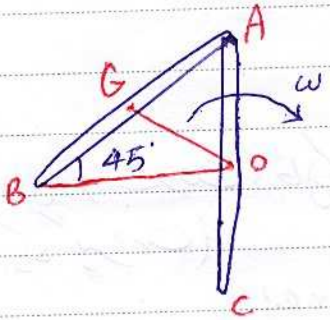
حال به ادامه مثال می پردازیم:

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow -T\sin 60 \times 3 = \frac{1}{12} \times 120 \times 6^2 \times \alpha_{AC}$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow T\sin 60 - 120g = -360\alpha_{AC} - 720\alpha_{AB}\sin 30$$

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow T\cos 60 = 720\alpha_{AB}\cos 30$$

مثال:



$AB = 0.2\,m \quad , \quad m_{AB} = 3\,kg$

$\omega_{AC} = 10\,rad/s$

شکل در صفحه افقی قرار دارد

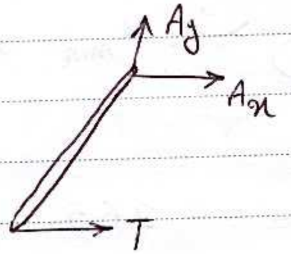
لینک AC با سرعت زاویه‌ای $10\,rad/s$ می‌چرخد

(سرعت زاویه‌ای ثابت)

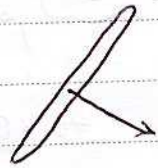
لینک AB در نقطه A به لینک AC مفصل شده است.

⇐ کشش طناب $OB = ?$

در صفحه افقی هستیم ⇐ mg نداریم



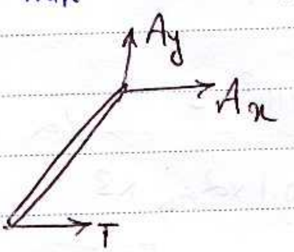
$$=$$



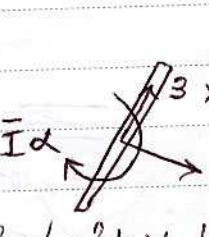
$$\Rightarrow \sum M_A = \cancel{\bar{I}\alpha} + m\bar{a}d \Rightarrow T \times 0.2 \sin 45 = 3 \times 10 \times 0.1$$

$$\Rightarrow T = 21.21\,N$$

حال α را طوری تعیین کنید که جسم یکپارچه عمل کند:
$\alpha_{Min} < \alpha < \alpha_{Max}$



$$=$$



فرض می‌کنیم سرعت در حال افزایش باشد ⇐ α ↻

$$\Rightarrow \sum M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \Rightarrow T \times 0.2 \sin 45 = -\frac{1}{12} \times 3 \times (0.2)^2 \times \alpha + 30 \times 0.1$$

$$\Rightarrow T = \frac{3 - 0.01\alpha}{0.2\sin 45} \Rightarrow$$

اگر α_{max} باشد ← T صفر است

$$\Rightarrow 3 - 0.01\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_{max} = 300$$

حال اگر سرعت در حال کاهش باشد ⇐ α ↶ (جهت α و ω معکوس یکدیگر است)

$$\Rightarrow T \times 0.2\sin 45 = \frac{1}{12} \times 3 \times (0.2)^2 \alpha + 30 \times 0.1$$

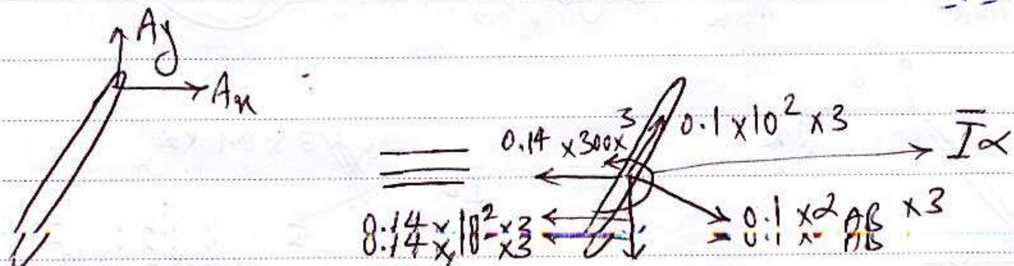
$$\Rightarrow T = \frac{3 + 0.01\alpha}{0.2\sin 45}$$

اگر α_{min} باشد ← T ، ماکزیمم است.

$$\Rightarrow \alpha_{min} = \frac{40 \times 0.2 \times \sin 45 - 3}{0.01} = -265.6$$

$$\Rightarrow -۲۶۵/۶ < \alpha < 300$$

حال اگر : $\alpha = -300$ ⇐ شتاب زاویه‌ای لینک AB و همچنین A_x ، A_y را بیابید :



برای بدست آوردن a_G ، چون سیستم یکپارچه نیست ، به راحتی نمی‌توان a_G را نوشت ⇐ دستگاه را روی A گذاشته ، و G را بررسی می‌کنیم (به لینک AB حرکت می‌دهیم)

از A به O

$$a_G = a_{A_t} + a_{A_n} + \omega_{AC}\times(\omega_{AC}\times r) + \dot{\omega}_{AB}\times r$$

$\Rightarrow \bar{a} = a_G \longrightarrow$ در شکل صفحه‌ی قبل این 4 مولفه را نشان دادیم (الف)

(α_{AB} پاد ساعتگرد فرض شد)

چون در لحظه‌ی پاره شدن طناب متوقف است $\Leftarrow$ ω ها ω_{AC} (ن) است

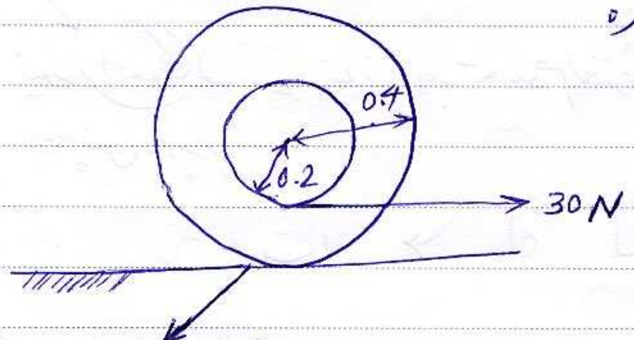
$$\Rightarrow \sum M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \Rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{۱۲}\times 3\times(0.2)^2\times\alpha + 0.3\,\alpha_{AB}\times 0.1 + 42\times 0.15\sin 45$$
$$-۱۲۶\times 0.1\cos 45 \Rightarrow \alpha_{AB} =$$

مثال:

بعد از 1.2m جابجایی قرقره

سرعت مرکز قرقره و ω = ?



$m = 10kg$

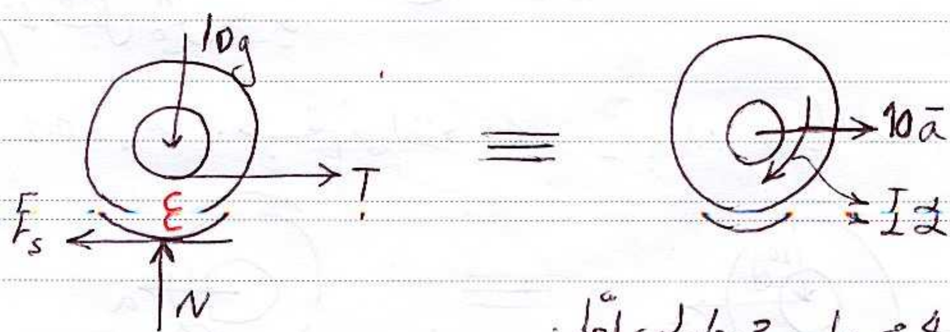
$\bar{k} = 0.3$

جرم طناب ناچیز است.

$\mu_s = 0.3$

$\mu_d = 0.15$

برای حل این مساله داریم:



$\Leftarrow$ 4 مجهول و 3 معادله، اما:

(چون سطح صاف است $\Leftarrow$ ρ بی‌نهایت می‌شود $\Leftarrow$ a_n صفر می‌شود)

با فرض غلتش کامل داریم (البته شکل نیز باید بالانس باشد)
حال $I\alpha$ دیگر مجهول نیست زیرا α به $\bar{a}$ مرتبط می‌شود

$$\longrightarrow \alpha = \frac{\bar{a}}{r}$$

$$\longrightarrow \sum M_c = I_c \alpha \Rightarrow 30 \times 0.2 = (10 \times 0.3^2 + 10 \times 0.4^2) \times \frac{\bar{a}}{0.4}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{a} = 0.96 \qquad I_o = \bar{I} + md^2$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = 10g$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 30 - F_s = 10 \times 0.96 \Rightarrow F_s = 30 - 9.6 = 20.4$$

نیروی اصطکاک مورد نیاز جهت عدم لغزش

همچنین داریم:

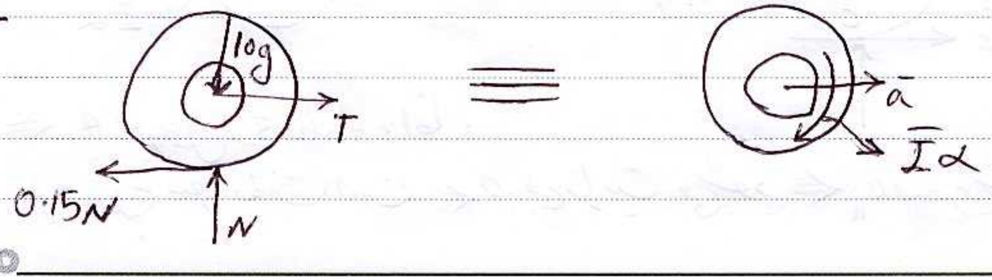
$$F_{s_{max}} = 0.3 \times 10g = 3g \rightarrow$$ فرض درست است!

دکتر حاج موسی:

با این μ_s هیچ مشکلی پیش نمی‌آید $\Leftarrow$ μ_s را برابر 0.2
می‌گیریم تا مشکل پیش بیاید:

$\Leftarrow$ با $\mu_s = 0.2$ ، جسم می‌لغزد $\Leftarrow$ F_s به N مربوط است!

$\Rightarrow$



$\Rightarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = 10g$

$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow -0.15 \times 10g \times 0.4 + 30 \times 0.2 = -10 \times 0.3^2 \times \alpha$

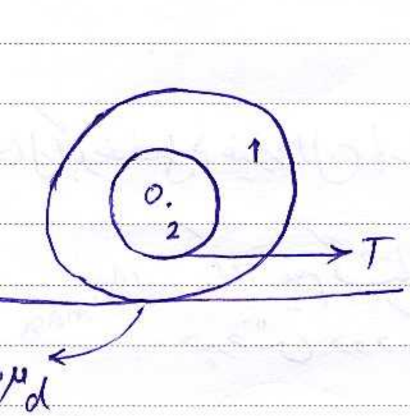
$\Rightarrow \alpha = -0.13 \Rightarrow$ جهت را اشتباه در نظر گرفتیم

$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow 30 - 0.15 \times 10g = 10\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = 1.52$

$v^2 = 2\bar{a}x \Rightarrow v = \sqrt{2 \times 1.2 \times 1.52}$

برای بدست آوردن ω، از فرمول $\omega^2 = 2\alpha\theta$ نمی‌توان استفاده کرد چون تکلیف θ مشخص نیست (چون لغزش داریم) $\Leftarrow$ حال باید t را از فرمول $v = at$ بدست می‌آوریم سپس از فرمول $\omega = \alpha t$، ω را می‌یابیم

مثال:



حال اگر در همان مثال قبلی دو دیسک به هم جوش نداده شده باشند (روی هم مفصل شده باشند و مفصل نیز روان باشد)

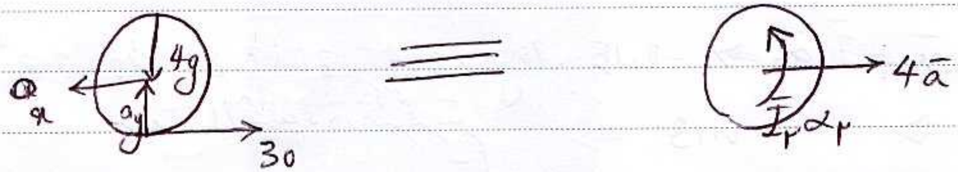
$m_1 = 6\,kg \quad r_1 = 0.4 \quad k_1 = 0.25$

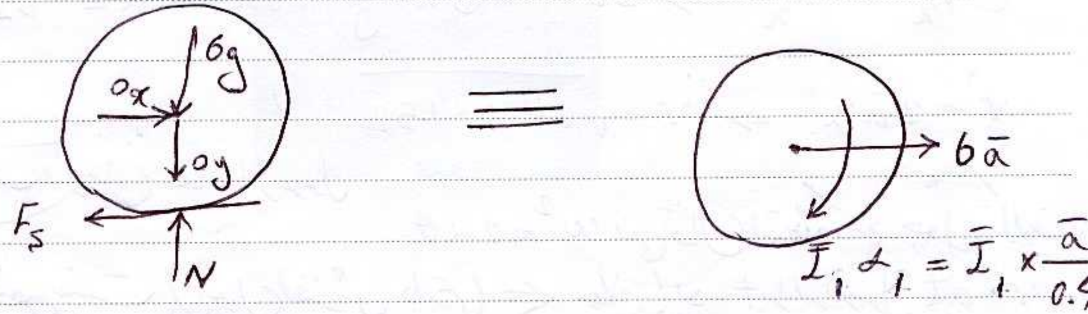
$m_2 = 4\,kg \quad r_2 = 0.2 \quad k_2 = 0.15$

$\mu_s = 0.2 \quad \mu_d = 0.15$

$\Leftarrow$ ω دو دیسک و

پیکره آزاد دو دیسک را رسم می‌کنیم (با فرض غلتش)

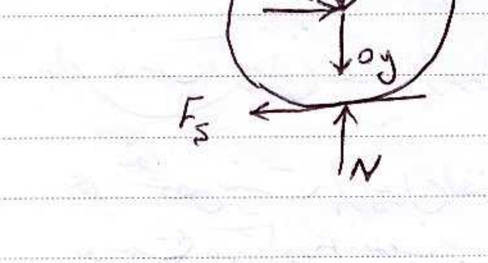




⇐ ۶ معادله و ۶ مجهول $(F_s, N, \alpha_2, \bar{a}, o_y, o_x)$

↘ مانند مثال قبل حل می‌شود!.....

حال اگر مفصل ۲ غیر روان باشد ⇐



$M_{s_{max}}$: ماکزیمم گشتاور جهت عدم چرخش دو دیسک نسبت به هم

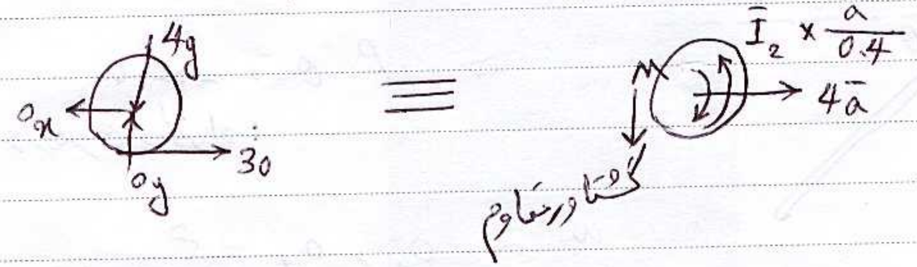
حال اگر در این مثال داشته باشیم:

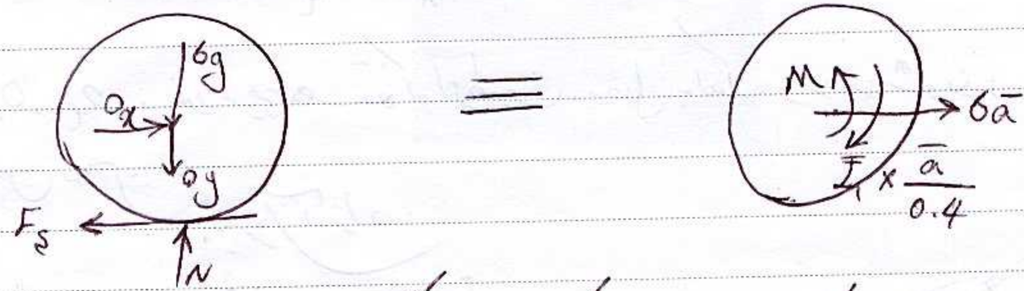
$M_{s_{max}} = 2\ N.m \quad , \quad M_{s_d} = 0.18$

حل:

نمی‌دانیم که سیستم یکپارچه عمل می‌کند (دو دیسک نسبت به هم نمی‌چرخند) یا نه!

⇐ با فرض غلتش کامل و یکپارچه عمل کردن سیستم داریم:





⇐ 4 حالت امکان دارد رخ دهد که باید بررسی گردد!!!!

1) غلتش و یکپارچه بودن سیستم　　　2) لغزش و یکپارچه بودن سیستم

3) غلتش و یکپارچه نبودن سیستم　　　4) لغزش و یکپارچه نبودن سیستم

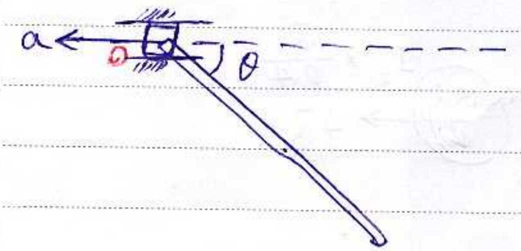
حال اگر در فرض اول (غلتش و یکپارچه بودن سیستم): $F_s > F_{s_{max}}$ ⇐

فرض غلتش بودن اشتباه است و اگر M (گشتاور مقاوم) $> M_{s_{max}}$ ⇐

فرض یکپارچه بودن سیستم اشتباه است و ...... به همین ترتیب مسائل را حل می‌کنیم

ex) حال اگر T را مسئله به ما نداده باشد ⇐ T را طوری تعیین کنید که سیستم در آستانه عدم یکپارچگی باشد؟

مثال:



$\Rightarrow$ if $\theta = 0 \Rightarrow \omega = 0$

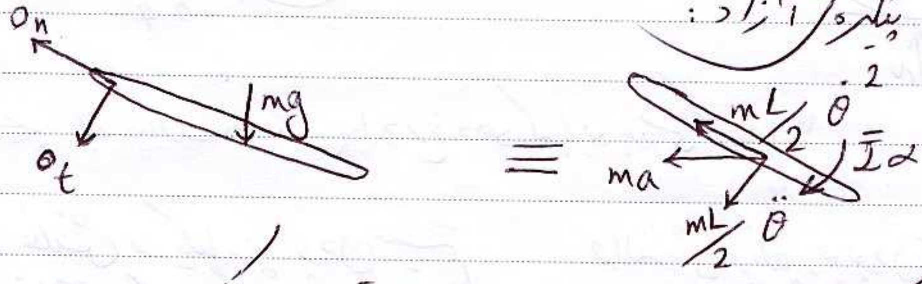
حال در هر θ دلخواه:

$$\omega, \alpha, O_n, O_t = ?$$

O_n و O_t : نیروهایی هستند که از طرف مفصل به لینک وارد می‌شوند:

اولین قدم:

پیکره آزاد:



نکته:

وقتی مرکز دائمی دوران داریم، $\bar{a}_t$ ، $\bar{a}_n$ تعریف می‌کنیم نه $\bar{a}_y$ ، $\bar{a}_x$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_o + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\dot{\omega}} \times \vec{r}$$

دستگاه را در O قرار داده و به لینک جوش می‌دهیم

O : مرکز دائمی دوران نیست.

$$\sum M_o = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$

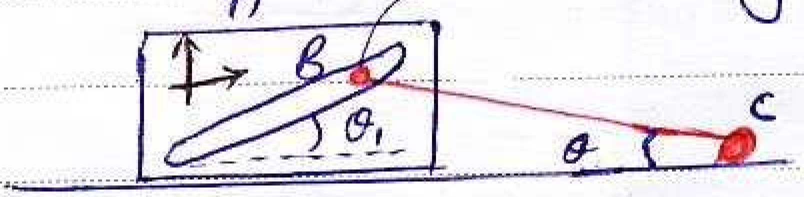
$$\Rightarrow mg\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} + \frac{mL^2}{4}\ddot{\theta} + ma\frac{L}{2}\sin\theta$$

$\ddot{\theta}$ برحسب θ یافت می‌شود $\Leftarrow$ با استفاده از فرمول $\omega d\omega = \alpha d\theta$

$\dot{\theta}$ برحسب θ یافت می‌شود

$\sum F_t = ma_t \Rightarrow O_t =$ پیدا میشه! ، $\sum F_n = ma_n \Rightarrow O_n =$ پیدا میشه

Month. Date. ( )



$m_B = 5\,kg$, $\theta_1 = 37$; $m_C = 1\,kg$

$m_A = 5\,kg$

$L_{BC} = 0.5\,m$, $\theta = 60$

جرم میله ناچیز است ,

اصطکاک ناچیز است .

موانعی داریم که سیستم تعادل استاتیکی دارد ← حال با برداشتن موانع حرکت آغاز می شود، θ در حال کم شدن است

$V_A , V_C = ?$ ⟸ $\theta = 30^\circ$ در موقعیتی که

اصطکاک ناچیز ⟸

$E_1 = E_2$

$$\Rightarrow 0 = -5g \times \frac{1}{2}(\sin 60 - \sin 30) + \frac{1}{2} \times 2 \times V_A^2 + \frac{1}{2} \times 5 \times V_B^2 + \frac{1}{2} \times 1 \times V_C^2$$

در راستای x هیچ نیرویی به سیستم وارد نمی شود ⟸ بقای اندازه حرکت خطی

$$\Delta G_x = 0 \Rightarrow G_{1x} = G_{2x} \Rightarrow$$

$0 = 1 \times V_C - 2 \times V_A + 5\,V_{Bx}$ جهت ها کاملاً فرضی هستند.

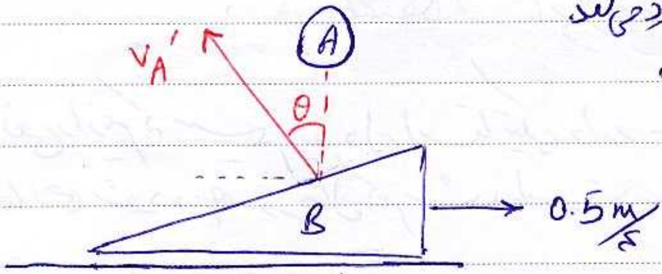
دستگاه را روی A می گذاریم ⟸

$$\overset{..}{V_B} = \overset{\checkmark}{V_A} + \overset{\checkmark}{V_{rel}}$$

حال دستگاه را روی c می گذاریم.

$$\ddot{v}_B = \dot{v}_C + \dot{\omega} \times r$$

مثال:



پس از اینکه A به B برخورد می کند
قبل از برخورد، B ثابت است
بعد از برخورد نیز، B در راستای
n نمی تواند حرکت کند

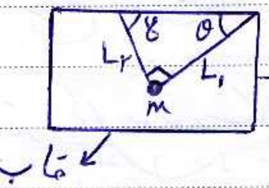
بعد از برخورد B با سرعت $0.5\,m/s$ به سمت راست حرکت می کند

Year. Month. Date. ( )

سوالات امتحان میان ترم دوم دینامیک دانشگاه سمنان (دانشکده مهندسی مکانیک)
سیستم ذرات

تاریخ آزمون: 12 آذر ۸۸ استاد: دکتر محمد علی حاج حسنی
13-16

تذکر: تمامی سوالات به صورت عددی بودند اما توسط اینجانب به صورت پارامتری تغییر یافت
به علت در دسترس نبودن سوالات

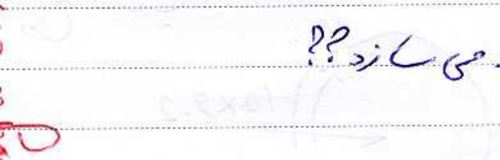


1) max شتاب ترمز و max شتاب پیشرو
را به گونه ای بیابید که شکل هندسی درون قاب
تغییر نکند.
L_1 و L_2 و θ و γ مشخص هستند

ب)
حال اگر قاب با 1.5 برابر max شتاب ترمز، ترمز کند ⇐ شتاب زاویه‌ای
یکی از این 2 طناب را بیابید:

---

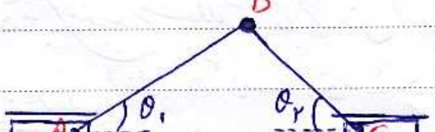
2) پس از برخورد گوی با سطح (با سرعت V_0)
سطح به اندازه d متر جابجا می‌شود



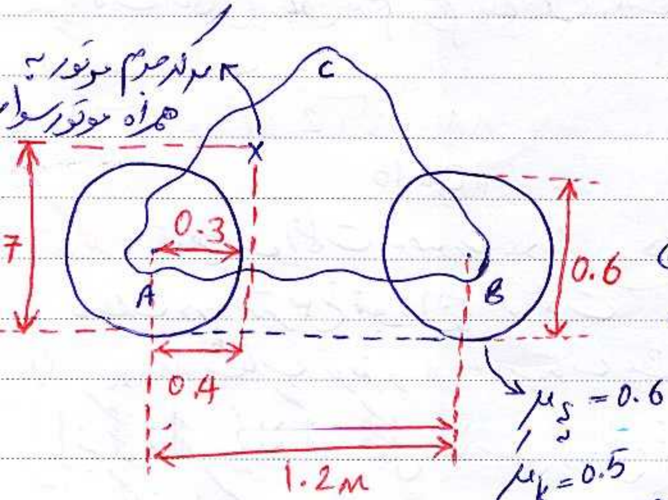
θ و k فنر هم معلوم هستند مطلوبست:
الف)
⇐ سرعت گوی پس از برخورد با سطح ؟؟
ب) زاویه ای که گوی با سطح افق پس از برخورد می سازد؟؟
پ) ضریب برخورد سطح؟ ($e=?$)

---

3) در A، B و C مفصل های غیر روان
قرار دارد. ابتدا سیستم تعادل دارد.
حال دستگاه رها می‌شود و θ_1 و θ_2 به
θ_1' و θ_2' تبدیل می‌شوند ⇐ α و ω
میله های AB و BC در وضعیت جدید؟؟



مثال:



موتورسیکلت با سرعت 120 km/h درحال حرکت است. ناگهان مانعی به فاصله 60m از خود می‌بیند (در لحظه‌ای که عکس العمل نشان می‌دهد فاصله اش از مانع همان 60m است)

ترمزهای موتورسیکلت دیسکی است (موتور هیچ محدودیتی از نظر ترمز ندارد)

همچنین موتورسیکلت ما، ترمز عقب ندارد!! (⇐ گشتاور مقاومی از طرف ترمز در پیکره آزاد وجود ندارد)

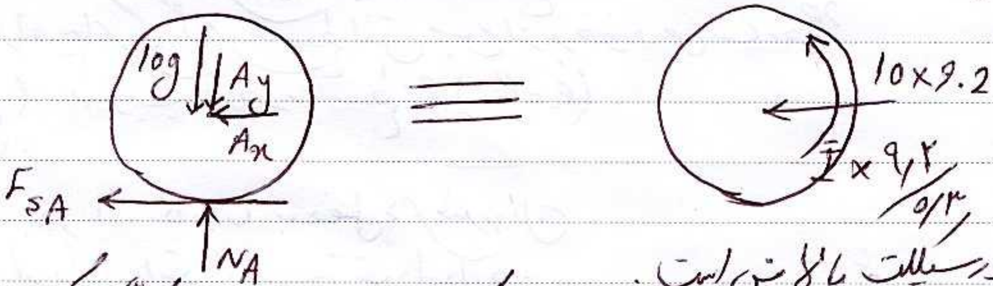
$m_A = m_B = 10kg$ $\qquad$ $m_C = 170kg$ جرم بدنه موتورسیکلت به جز چرخ‌ها، به همراه جرم شخص

$\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.25\,m$, $k_C = 0.5$

$V = 120\ m/s \Rightarrow v^2 - v_0^2 = -2a\Delta x \Rightarrow$ ترمز $a = -9.26\ m/s^2$

شتاب ترمز (حداقل شتاب ترمز، جهت برخورد نکردن با مانع)

چرخ عقب:



چرخ عقب موتورسیکلت بالانس است.

با فرض اینکه حرکت کند شدن موتورسیکلت نرمال باشد (نه کله می‌کند و نه سُر می‌خورد) ⇐ حرکت بدنه موتورسیکلت انتقالی است ⇐

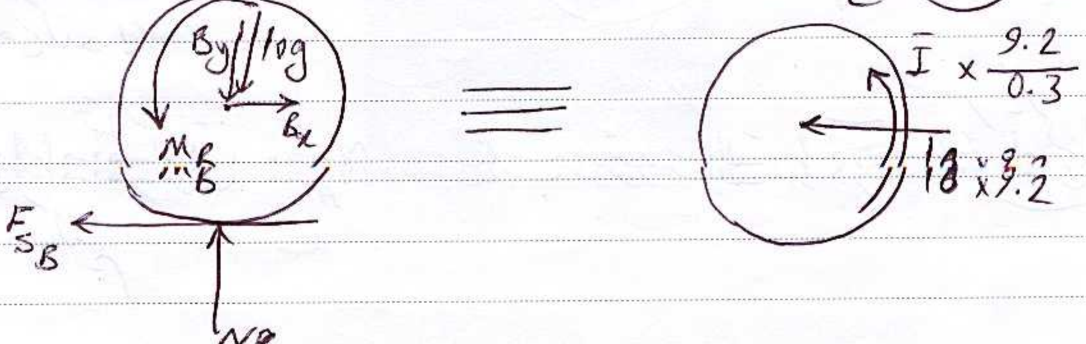
~~سرعت و شتاب تمام نقاط باهم یکی است ⇐ نقطه A از چرخ نیز همان شتاب~~

همچنین چون چرخ عقب غلتش دارد ⟸ a و α به هم مرتبط هستند

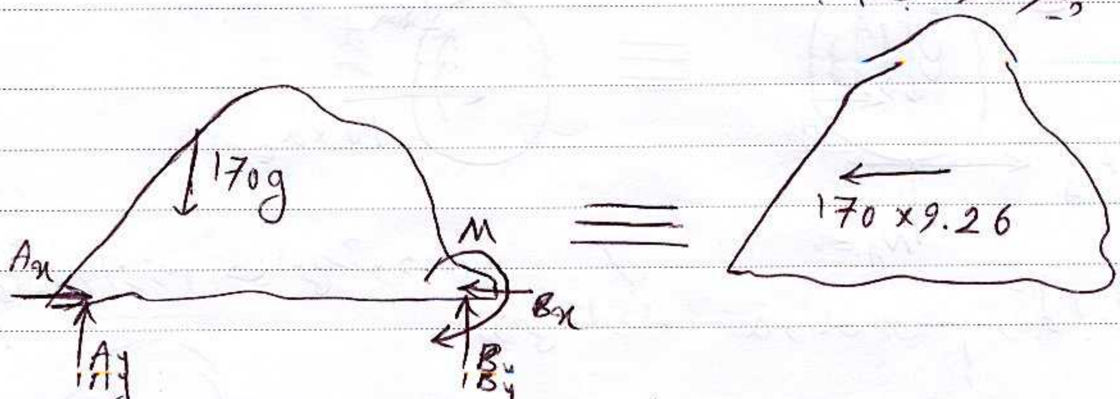
نکته: چرخ عقب غلتش توام با لغزش داشته باشد ⟸ دو مجهول داریم (a و α

نکته: در چرخ‌های عقب ترمز وجود داشت ⟸ یک گشتاور متقابل در پیکره آزاد بر روی چرخ قرار داده می‌شد

پیکره آزاد چرخ جلو:



پیکره آزاد بدنه:



حال: ۹ معادله داریم و ۹ مجهول:

اما:

چون F_{s_B} نیروی است که شتاب ترمز را ایجاد می‌کند ⟸ باید بررسی F_{s_B}

⟸

اگر $F_{s_B} < F_{s_{Max}}$ ⟸ نیروی اصطکاک جهت توقف موتور تامین می‌شود

else ⟸ " " " " نمی‌شود

⟸ موتورسیکلت به مانع برخورد می‌کند

همچنین N_A نیز باید مثبت شود تا موتورسیکلت کله نکند!

همچنین ترمز نیز باید توانایی ایجاد گشتاور M_B را داشته باشد (در اطلاعات مسئله باید حداکثر گشتاور مقاوم ترمز را به ما بدهند)

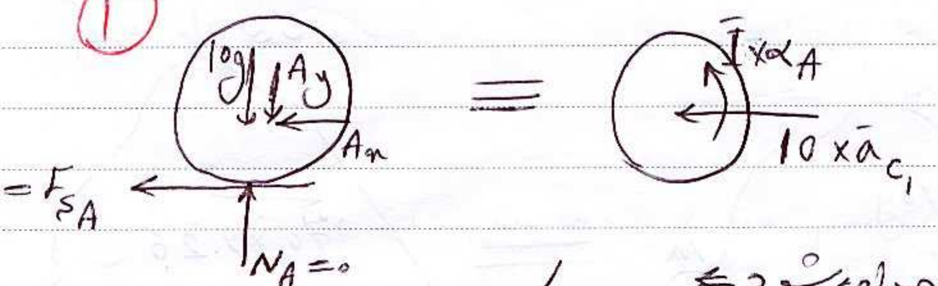
سوال:

اگر $N_A < 0$ شود ⇐ بدنه موتورسیکلت با چه سرعت زاویه ای کله می کند!؟

ابتدا با در نظر گرفتن $N_A = 0$ ، شتاب موتورسیکلت را در آستانه کله کنی! پیدا می کنیم

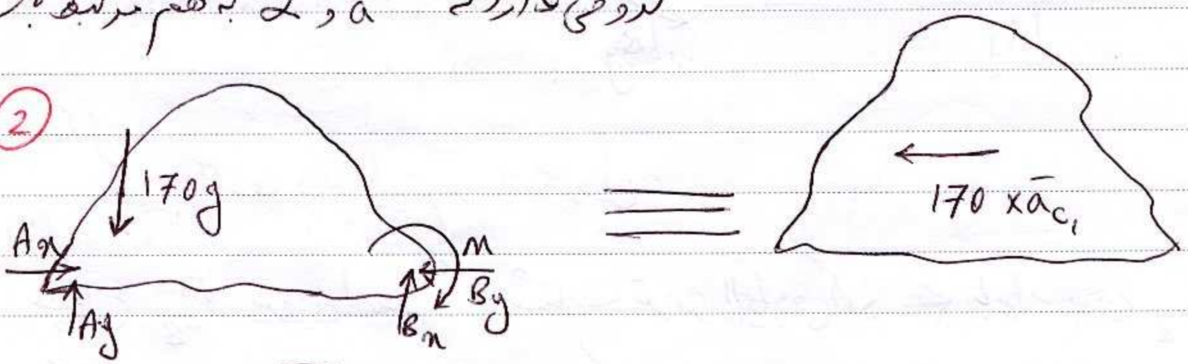
⇐

(1)

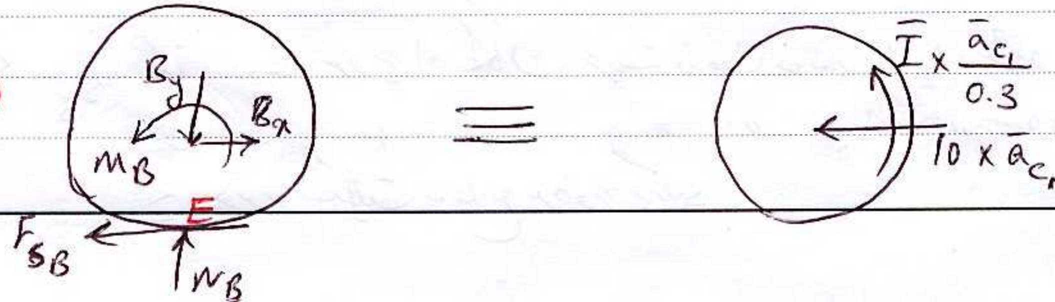


وقتی چرخ از زمین جدا می شود ⇐
لزومی ندارد که $\bar{a}$ و α به هم مرتبط باشند

(2)



(3)



$\bar{a}$; $\bar{a}_{c_1}$: قانون شتاب ... سه‌ی دهد!

① $\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow 0 = \bar{I}\alpha \Rightarrow \alpha_A = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -A_y - 10g = 0 \Rightarrow A_y = -10g$

$\Sigma \bar{F}_x = m a_x \Rightarrow A_x = 10\bar{a}_{c_1} \Rightarrow \bar{a}_{c_1} = \frac{A_x}{10}$

② $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 170g \xRightarrow{A_y = -10g} B_y = 180g$

$\Sigma F_x = m\bar{a}_{c_1} \Rightarrow A_x - B_x = -170\bar{a}_{c_1} \Rightarrow B_x = 180\bar{a}_{c_1}$

$\Sigma \bar{M}_B = m\bar{a}d \Rightarrow M_B - 10g \times 1.2 - 170g \times 0.8 = -170\bar{a}_{c_1} \times 0.4$

فاصله مرکز جرم تا مرکز جرم

$\Rightarrow M_B = 148g - 68\bar{a}_{c_1}$

③ $\Sigma F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow N_B - 10g - B_y = 0 \Rightarrow N_B = 10g + 180g = 190g$

$\Sigma M_E = I_E \alpha \Rightarrow -148g + 68\bar{a}_{c_1} + 180 a_{c_1} \times 0.3 = 10\left((0.25)^2 + (0.3)^2\right) \times \frac{a_{c_1}}{0.3}$

$\Rightarrow a_{c_1} = -12.42 \, m/s^2 \rightarrow$ شتابی که باعث کله شدن می‌شود!

کله نمی‌کند $\Leftarrow$ ۹٫۲۶ < ۱۲٫۴ چون

همچنین:

$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow -F_{s_B} + ۱۸۰\bar{a}_{c_1} = -10 \times ۱۲٫۴۲$

$\Rightarrow F_{s_B} = ۲۳۵۹٫۸ \, N$

$F_{s_{max}} = 0.6 \times 190\, g = ۱۱۱۸/۴$

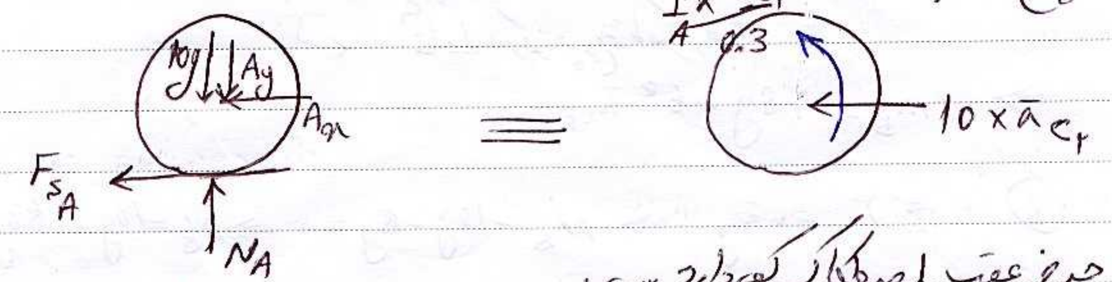
کاملا حال است که موتور در آستانه کله کردن قرار گیرد
چون F_{s_B} که نیاز داریم تامین نمی شود.

$\Rightarrow 2359.8 = \mu_s \times 190 g \Rightarrow \mu_{s_{Min}} = ۱/۲۶$

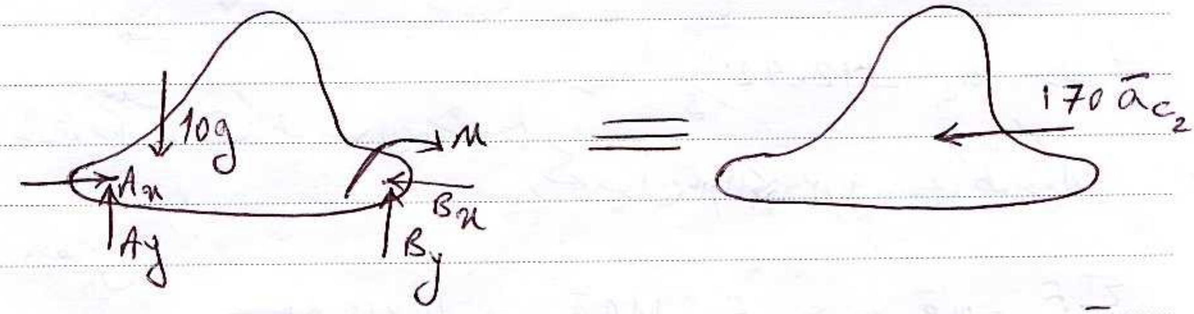
پس: برای اینکه در آستانه کله کردن باشیم $\mu_s > ۱/۲۶$

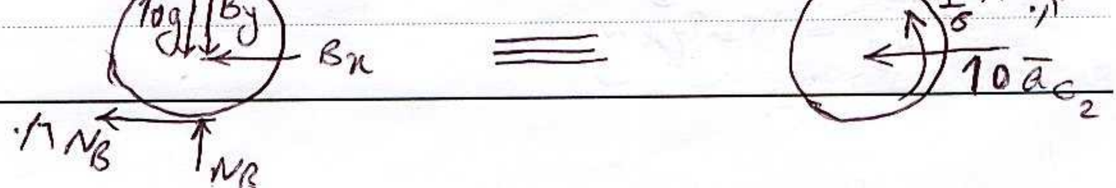
Tex داریم: در شتابی کمتر از ۱۲/۳۲ موتور شروع به سُرخوردن می کند. این شتاب چقدر است؟

چرخ عقب :



چرخ عقب اصطکاک کمی دارد پس: به راحتی می توان آنرا تامین کرد پس برای
چرخ عقب سُرخوردنی در کار نیست:





Month. Date. ( )

حال اگر $\bar{a}_{c_2} > 9.26$ بود ⇐ آن گاه موتور به مانع برخورد نمی‌کند

else:

به مانع برخورد می‌کند

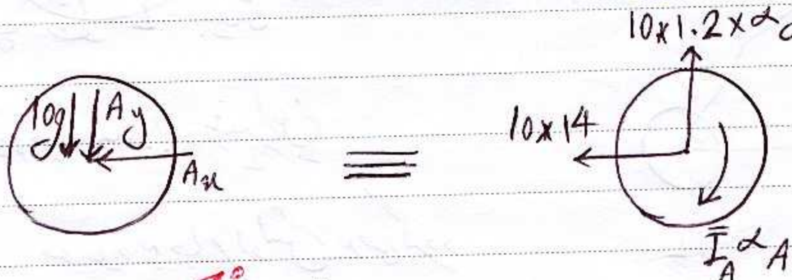
(ex) ⇐ در این شرایط سرعت آن در برخورد با موانع = ?

(ex) شتاب ترمز بین مرکز جرم چرخ جلو

حال اگر $\mu_s = 1.8$ و $\bar{a} = 14 \frac{m}{s}$ ⇐ بدنه موتور سیکلت با چ...

شتاب زاویه‌ای شروع به کار کردن می‌کند:

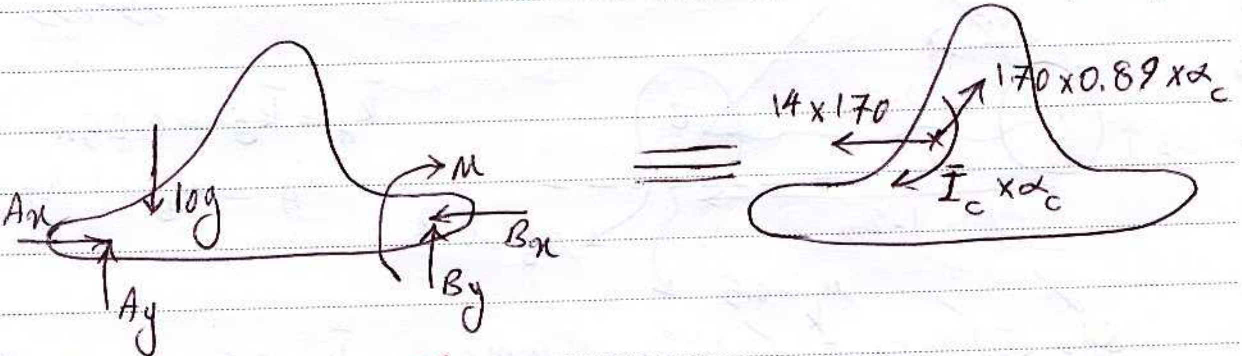
چرخ عقب:



$$a_A = a_B + \cancel{\omega \times (\omega \times r)} + \dot{\omega} \times r_{AB}$$

چون شتاب زاویه‌ای را در لحظه شروع به کار کردن می‌خواهد ⇐ ω ...

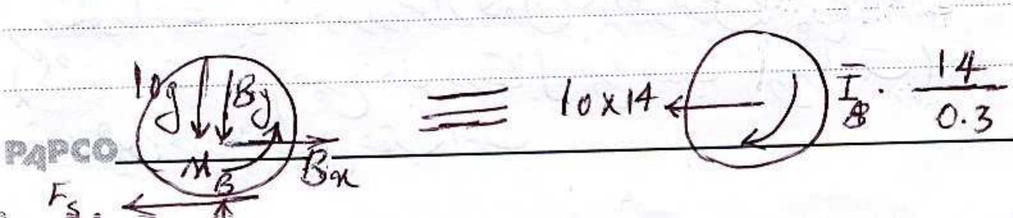
بدنه موتور:



$$a_G = a_B + \cancel{\omega \times (\omega \times r)} + \dot{\omega} \times r_{BC}$$

عمود بر BC

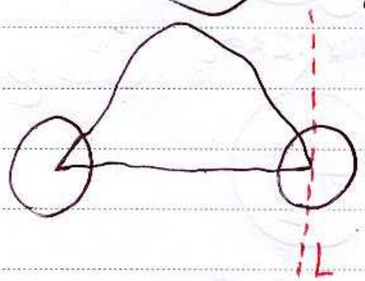
چرخ جلو:



⇐ ۹ معادله و ۹ مجهول ⇐ α_c را می یابیم

سوال:
حال با این شتاب وقتی گاز می کند، آیا موتورسیکلت به حالت اولیه بر می گردد یا به جلو بر می گردد ...... ؟

به وسیله ی α ای که بدست آوردیم، باید θ ماکزیمم را بدست بیاوریم سپس اگر به ازای آن max زاویه بگیرد گاز بدهد! مرکز جرم بدنه ی موتورسیکلت سمت چپ خط L بیفتد

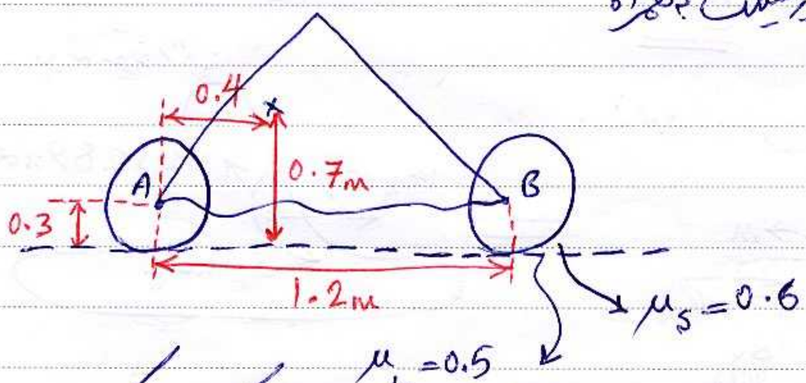


که موتور می افتد!! در غیر این صورت: موتور به جای اولش بر می گردد

مثال:

حل شده در کلاس بعد از ظهر!

x : مرکز جرم موتورسیکلت به همراه موتورسوار



$\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.25m$

$m_A = m_B = 10kg$

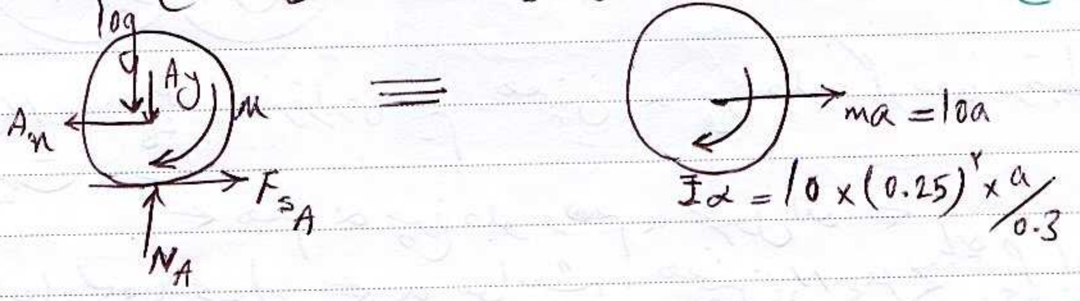
$m_c = 170$ ، $\bar{k}_c = 0.5m$ ، $a = 10\ m/s^2$ شتابی که شروع به حرکت می کند

منظور از c بدنه و موتورسوار بدون در نظر گرفتن چرخ ها ست.
(گشتاور تماس چرخ جلو در مقابل چرخ عقب ناچیز است)
موتور، دیفرانسیل عقب است

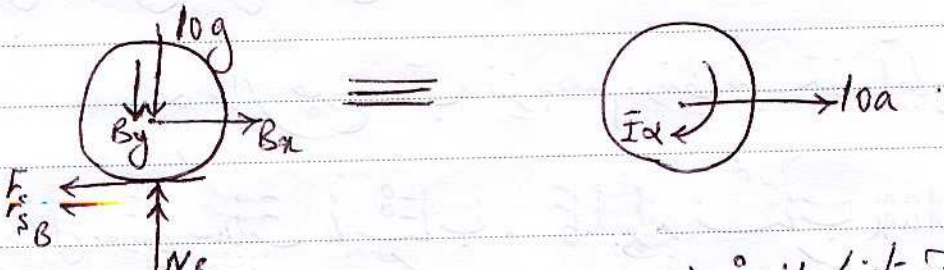
ex) فرض بدون اینکه حرکتی به بدن خود بدهد موفق به بلند کردن جلو موتورسیکلت می‌شود یا نه؟

پیکره آزاد تک تک اجزا را می‌کشیم:

چرخ عقب: (با فرض غلتش کامل و اینکه موتورسوار موفق به تک چرخ زنی شده است)

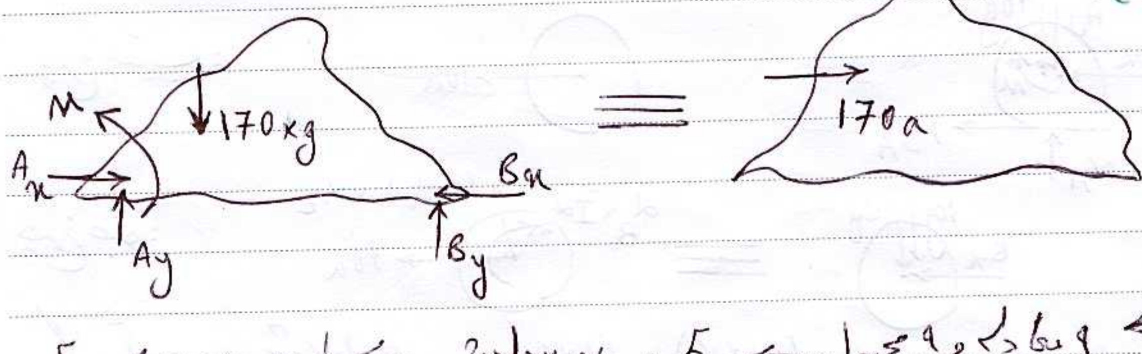


چرخ جلو:



(نکته: آستانه بلند شدن ⇐ F_{s_B} نداریم، همچنین $N_B = 0$)

بدنه:



⇐ ۹ معادله و ۹ مجهول ⇐ F_{s_A} و N_A پیدا میشه ⇐ باید $F_{s_A} < \mu_s N_A$ تا فرض غلتش کامل درست باشد.

همچنین:

if N_B : منفی بشود، موتورسوار موفق به تک‌چرخ زنی شده.

else: موتورسوار، موفق به زدن تک چرخ نشده است!

ex) حداکثر شتابی که موتورسیکلت می‌تواند در آستانه حرکت داشته باشد برای اینکه جلوی آن بلند نشود را بیابید:

N_B و f_{s_B} را صفر قرار می‌دهیم، همچنین α چرخ جلو دیگر به a مرتبط نیست

⇐ هم α چرخ جلو و هم a مجهول اند ⇐

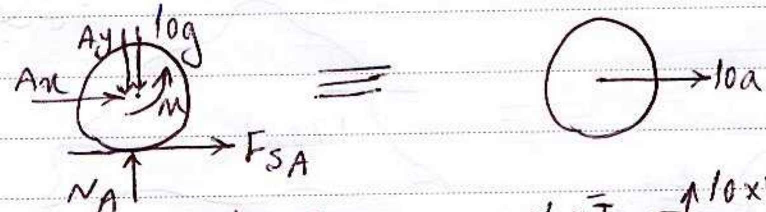
۹ معادله و ۹ مجهول ⇐ a پیدا میشه، همچنین $f_{s_A} < \mu_s N_A$ باید باشد تا فرض غلتش کامل داشتن، درست باشد

else:

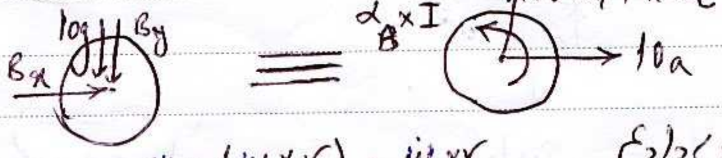
a و α برای چرخ عقب نیز به هم مرتبط نیستند اما $f_{s_B} = \mu_s N_B$

ex) حال موتورسیکلت با شتاب: 5 برابر شتاب Max که در مثال قبل یافتیم شروع به حرکت می‌کند ⇐ بدنه موتورسیکلت با چه شتاب زاویه‌ای شروع به حرکت می‌کند؟؟ α_c را می‌یابیم:

چرخ عقب:



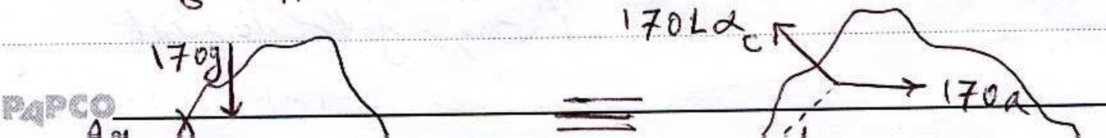
چرخ جلو:



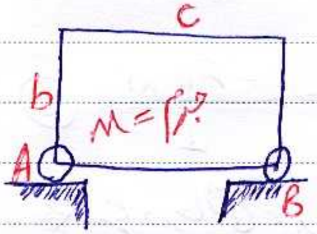
دستگاه را به بدنه جوش دادیم

$a_B = a_A + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$

بدنه:



مثال:



جعبه روی دو غلتک روان با جرم ناچیز قرار دارد

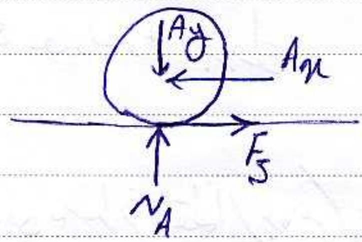
به یکباره سکوی B فرو می‌ریزد

بلافاصله پس از فروریختن سکوی B عکس‌العمل تکیه‌گاهی در A را بیابید:

نکته:

غلتک روان با جرم ناچیز، حکم سطح صیقلی (سطح بدون اصطکاک) را دارد

زیرا:



$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \times r = 0 \times \alpha$$
$$\Rightarrow F_s = 0$$

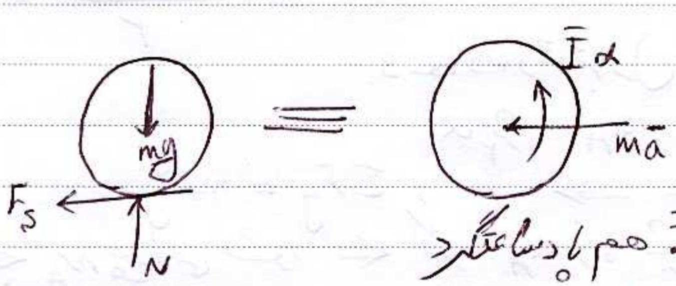
اما:

اگر روان نباشد:

$$\sum \bar{M} = I\alpha = 0 \rightarrow F_s \times r - M = 0 \Rightarrow F_s = M/r \neq 0$$

ex)

غلتک صلبی با جرم مشخص، روی زمین غلت می‌دهیم که طی چه مسافتی متوقف می‌شود:



$\bar{a}$: شتاب توقف است

چون $\bar{a}$ به سمت چپ است

با توجه به اینکه غلتش داریم پس $\bar{I}\alpha$ هم پادساعتگرد است (a و α هم جهت هستند)

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow +F_s = +m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \frac{F_s}{m} \quad ①$$

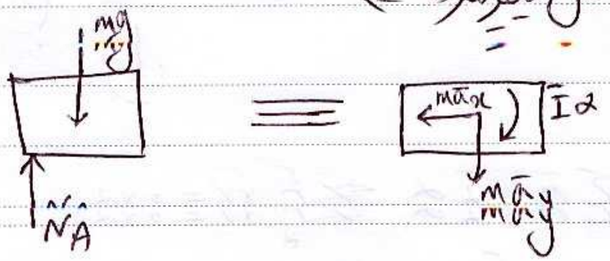
$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow -F_s \times r = \bar{I}\,\frac{\bar{a}}{r} \Rightarrow \bar{a} = \frac{-F_s \times r}{\bar{I}} \quad ②$$

⇐ تنها در حالتی، روابط ① و ② همزمان برقرار هستند که $F_s = 0$ باشد

$\bar{a} = 0$ ⇐ تا ابد به حرکت خود ادامه می‌دهد

حال به حل مثال می‌پردازیم

چونکه گفته "بلافاصله" پس هندسه شکل تغییر نکرده ⇐ (ω نیز صفر است)

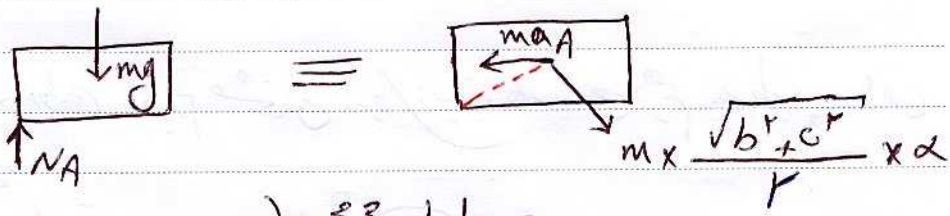


$\Rightarrow$ 3 معادله و 4 مجهول

باید به سراغ نقطه‌ای برویم که اطلاعاتی را از آن داشته باشیم ⇐ چون مسیر حرکت نقطه A مشخص است ⇐ دستگاه را روی A می‌گذاریم

$$a_G = a_A + \cancel{\omega \times (\omega \times r)} + \dot{\omega} \times r_{AG}$$

$\Rightarrow$



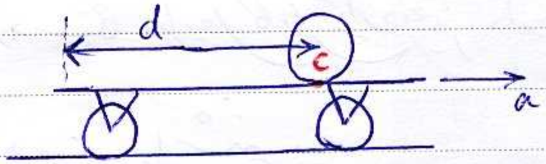
$\Rightarrow$ 3 معادله و 3 مجهول

$$\rightarrow \sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow a_A = \frac{b}{2}\alpha$$

$$\sum M_A = \bar{I}\alpha \pm m\bar{a}d \Rightarrow \dots \quad , \quad \sum F_y = m\bar{a}_y$$

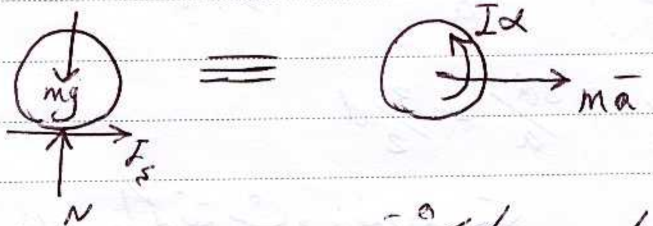
مثال:

گاری با شتاب a به حرکت درمی‌آید



⇐ وقتی گوی فاصله d را طی می‌کند، گاری چه مسافتی را طی کرده است

(فرض: غلتش کامل)



دستگاه را روی c که متعلق به غلتک است گذاشتیم:

$$\bar{a} = a_c + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

$$\Rightarrow \bar{a}i = a_c i + a_c j - r\omega^2 j - r\alpha i \Rightarrow \bar{a} = a - r\alpha$$

⇐ 3 معادله و 3 مجهول

$$\Rightarrow \Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_s = m(a - r\alpha)$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \times r = \frac{1}{2} m r^2 \times \alpha \Rightarrow F_s = \frac{1}{2} m r \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m r\alpha = m(a - r\alpha) \Rightarrow \frac{3}{2} r\alpha = a \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3r} a$$

$$\bar{a} = a - r\alpha \Rightarrow \bar{a} = \frac{1}{3} a$$

a_{rel} اگوی نسبت به گاری ا همان $r\alpha$ است زیرا:

اگر دستگاه را روی گاری قرار دهیم، داریم:

$\bar{a} = a - a_{rel}$

همچنین داشتیم:

$\bar{\bar{a}} = a - \ddot{r}\alpha$

$\Rightarrow a_{rel} = r\alpha = r \times \frac{2}{3r} a = \frac{2}{3} a$

$d = \frac{1}{2} a_{rel} . t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{3d}{a} \Rightarrow$

$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \times \frac{3d}{a} = \frac{3}{2} d$

جهت ها در نظر گرفته شده فرضی هستند

سوال:

حداقل ضریب اصطکاک برای داشتن غلتش کامل:

$\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0 \Rightarrow N = mg$

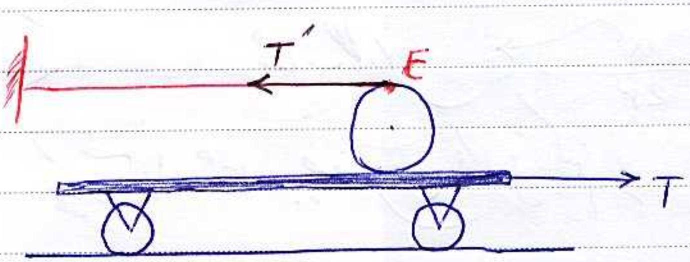
$F_s = \frac{1}{2} mr \times \alpha = \frac{1}{2} mr \times \frac{2a}{3r} \Rightarrow F_s = \frac{ma}{3}$

در آستانه لغزش $\Rightarrow \frac{ma}{3} = \mu_s N \Rightarrow \mu_{s_{min}} = \frac{a}{3g}$

حال اگر $\mu_s < \mu_{s_{min}} \Leftarrow$ لغزش داریم $\Leftarrow$ بین $\bar{a}$ و α هیچ

رابطه ای نیست

مثال :
طناب به موازات سطح است
فرض : غلتش کامل



$m_1 =$ جرم غلتک
$r_1 =$ شعاع غلتک

$m_2 =$ جرم بدنه گاری
$m_3 =$ جرم هر چرخ

r_2 : شعاع هر چرخ

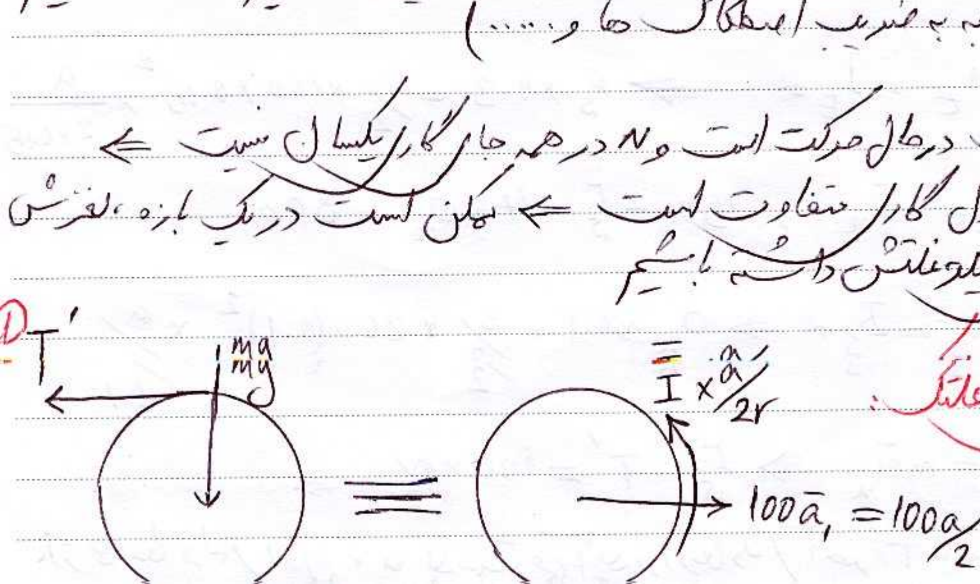
حل :

$$T = 1500\,N \quad , \quad m_1 = 100\,kg \quad , \quad m_2 = 80\,kg \quad , \quad m_3 = 20\,kg$$
$$r_1 = 0.15\,m \quad , \quad r_2 = 0.1\,m$$

← شتاب حرکت گاری و $T' = ?$

اگر فرض را بر غلتش کامل نمی گذاشت ⇐ باید تعیین می کردیم که لغزش داریم یا غلتش (با توجه به ضریب اصطکاک ها و .....)
اما :
چون غلتک در حال حرکت است و N در همه جای گاری یکسان نیست ⇐ μ ها در طول گاری متفاوت است ⇐ ممکن است در یک بازه لغزش و در بازه ای دیگر غلتش داشته باشیم

پیکره آزاد غلتک :



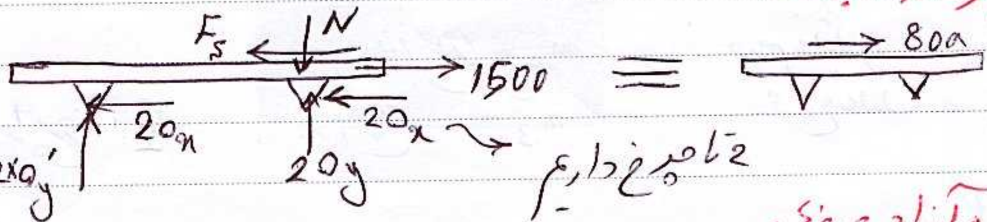
نقطه E، نقطه‌ای است که هم مرکز آنی دوران است، هم نقطه شتاب تانژانت صفر

$\alpha = \frac{\bar a}{r}$, $\alpha = \frac{a}{2r}$ → شتاب گاری ⇐

$\Rightarrow \bar a = a/2 \Rightarrow$ پیکره آزاد شتاب صفحه قبل را کامل می‌کنیم

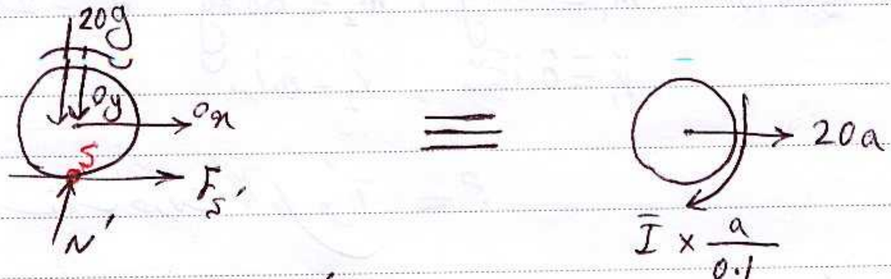
پیکره آزاد تخته:

(2)



پیکره آزاد چرخ‌ها:

(3)



جهت F_s دیمی است (البته می‌شه حدس زد)

① : $\sum M_E = I_E \alpha \Rightarrow F_s \times 0.3 = \frac{3}{2}\times 100 \times 0.15^2 \times \frac{a}{2\times 0.15}$

② : $\sum F_x = m\bar a_x \Rightarrow 1500 - F_s - 4\times O_x = 80a$

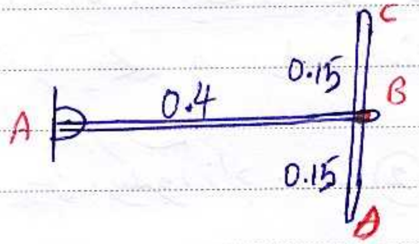
③ : $\sum M_S = I_S \alpha \Rightarrow O_x \times 0.1 = \frac{3}{2}\times 20\times (0.1)^2 \times \frac{a}{0.1}$

① : $\sum F_x = m\bar a_x \Rightarrow F_s - T' = 100\times \frac{a}{2} \Rightarrow$

از 3 معادله اول، a بدست می‌آید و از معادله آخر، T' یافت می‌شود

بقیه معادلات باقی‌ها فده که خرج نکردیم، برای چک کردن داده‌های بدست آمده است

مثال:

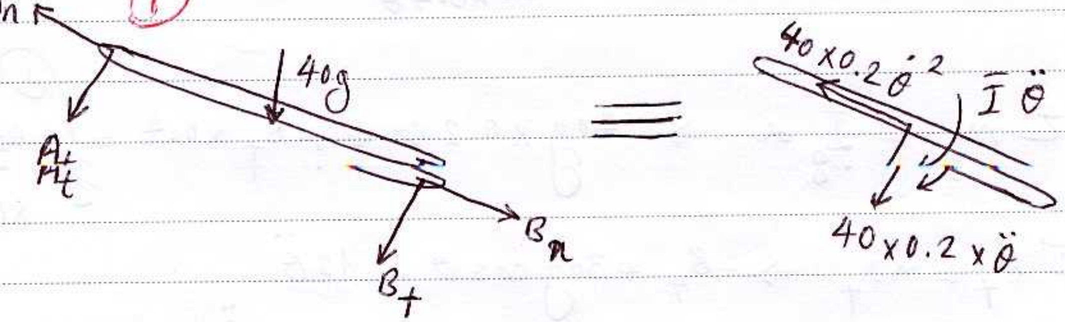


در B مفصل هستند،
تمامی مفاصل، روان هستند
و مقاومت هوا ناچیز است
و $m = 100 \, kg/m$

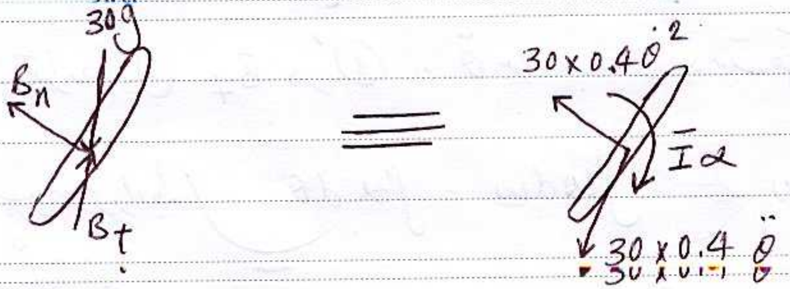
وقتی AB با افق زاویه θ ساخت، سازه را تجزیه و تحلیل کنید

(حالت اولیه: AB افقی است و CD عمود است)

1



2



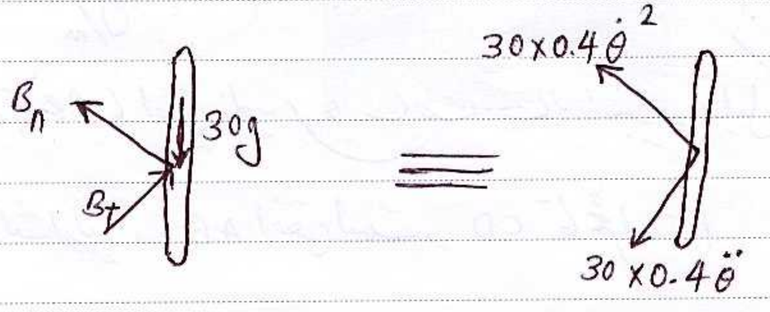
2 : $\sum \bar M = \bar I \alpha \; , \; \sum \bar M = 0 \Rightarrow \bar I \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$\Leftarrow \omega$ ثابت است

یعنی لینک CD نیز به همان صورت قائم خواهند ماند یعنی تنها انتقال دارد

اما اگر: لینک CD به AB جوش نخورد ⇐ CD، همراه AB حرکت خواهد نکرد ⇐ تتا خواهد داشت

پس، پیکره آزاد حالت ② تصحیح می‌کنیم:



①′

① $\Sigma M_O = I_O\,\alpha \Rightarrow 40g\times 0.2\cos\theta + B_t\times 0.4 = \frac{1}{3}\times 40\times(0$

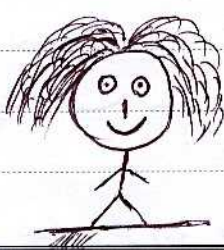
② $\Sigma F_t = m\bar{a}_t \Rightarrow -B_t + 30g\cos\theta = 12\ddot{\theta}$

$\Rightarrow B_t = 30g\cos\theta - 12\ddot{\theta}$

با قرار دادن B_t در ①′، $\ddot{\theta}$ برحسب θ بدست می‌آید ⇐

سپس از رابطه $\int \omega\, d\omega = \int \alpha\, d\theta$ ⇐ ω هم برحسب θ یافت می‌شود

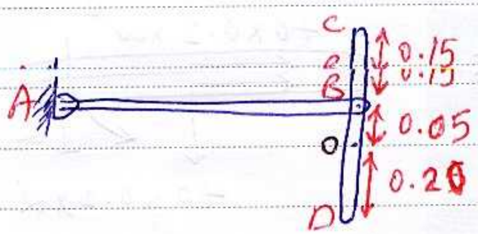
بقیه هم به همین ترتیب پیدا می‌شوند



اگه به مشکل برخوردید، بعداً از من بپرسید!!!

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال مرکز جرم لینک CD را منطبق با لینک AB در نظر نفی گیریم یعنی:



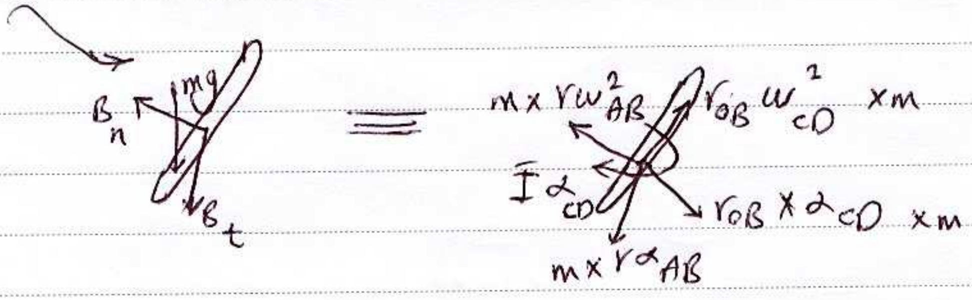
حال با همان (اطلاعات قبلی) مسئله را تجزیه و تحلیل کنید:

ابتدا دستگاه را روی A گذاشته و به لینک AB جوش می دهیم و B را بررسی می کنیم ⇐

$$a_B = r\omega^2_{AB} + r\alpha_{AB}$$

سپس با قرار دادن دستگاه روی B و جوش دادن به لینک CD داریم:

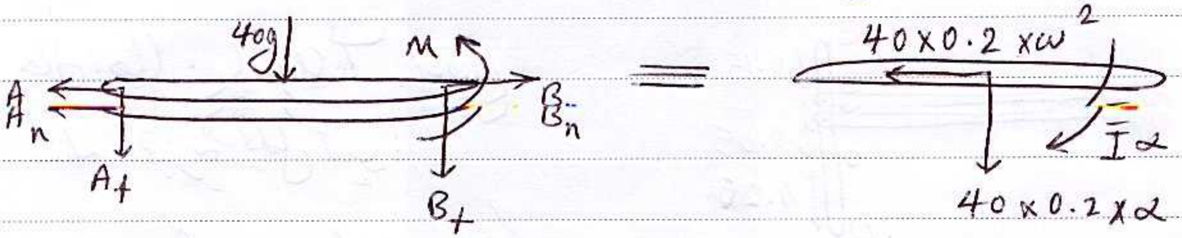
$$a_O = a_B + r\omega^2_{CD} + r\alpha_{CD}$$



$$\Rightarrow \quad \Sigma M_B = \bar{I}\alpha \pm mad$$

Year. Month. Date. ( )

ex) حال مسأله اول را با فرض اینکه مفاصل غیر روان باشند حل کنید:



نکته:

α ، ω ، دو مجهول نیستند زیرا می توانیم از فرمول های $\omega=\alpha t+\omega_0$ یا $\alpha d\theta=\omega d\omega$ یکی را برحسب دیگری یافت

۲شنبه

متد انرژی در سینتیک اجسام صلب :

Energy Method

داشتیم :

$U = E_2 - E_1$

$$E = V_e + V_g + T$$

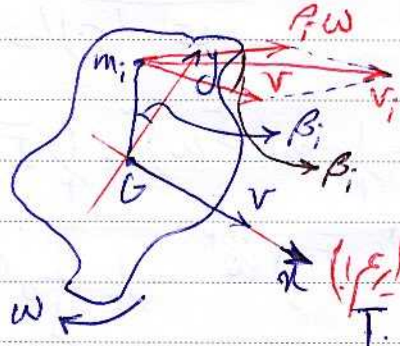
V_g : مبنای سطح پتانسیل، مرکز جرم است. $V_g = mgh$

V_e : $V_e = \frac{1}{2} k x^2$ x: انحراف نسبت به طول آزاد

T : جسم صلب هر نقطه اش، سرعت خاص خودش را دارا است ⇐

در سینتیک اجسام صلب : $T \neq \frac{1}{2} m v^2$

داریم :



$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

می توان نوشت :

$$v_i = \bar{v} + \omega \times r + \cancel{v_{rel}}$$

۰ (چون با جسم صلب سروکار داریم!)

پس داریم :

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \left(\bar{v}^2 + (\rho_i \omega)^2 + 2 \times \bar{v} \times \rho_i \omega \cos\beta_i\right)$$

$\rho_i \cos\beta_i$: تصویر ρ_i است بر روی محور y ⇐ $\rho_i \cos\beta_i = y_i$

$$\rightarrow T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\bar{v}^2 + (\rho_i \omega)^2 + 2 \bar{v} y_i \omega\right)$$

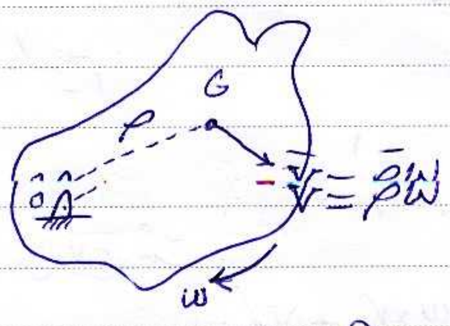
$$\Rightarrow T = \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 + \sum m_i \bar{v} y_i \omega$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 + \bar{v} \omega \cancel{\sum m_i y_i}$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m \bar{v}^2}_{\text{ناشی از انتقال جسم صلب است}} + \underbrace{\frac{1}{2} \bar{I} \omega^2}_{\text{مربوط به دوران جسم صلب است}}$$

نکته: جسم صلبی که تنها انتقال دارد ⇐ این Term حذف می‌شود و $T = \frac{1}{2} m$

می‌توان آن را در مبحث سینتیک ذرات تجزیه و تحلیل کرد



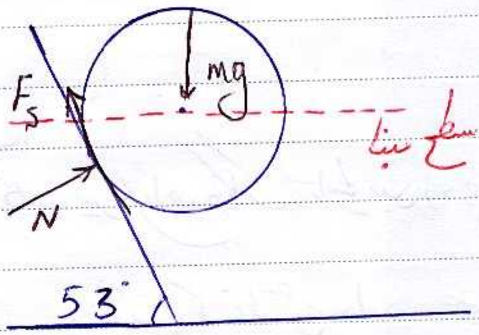
O = مرکز دائمی دوران یا مرکز آنی دوران است.

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (\bar{\rho}\omega)^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} (m\bar{\rho}^2 + \bar{I}) \omega^2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

I حول مرکز دائمی یا مرکز آنی دوران است

مثال:



$m_{دیسک} = 5\ kg$

$r_{دیسک} = 0.1m$

دیسک یکنواخت است

غلتش کامل است.

دستمان زیر دیسک است

پس از اینکه دستمان را می‌کشیم

دیسک شروع به حرکت می‌کند

← که پس از 1.2m جابه‌جایی، ω را بیابید:

اگر در دینامیکی را مسئله به ما بدهد ← تکلیف ما از اینکه غلتش داریم یا غلتش همراه با لغزش! مشخص نیست ← بهترین روش: روش نیرو

درصورتی که در این مسئله غلتش داشته باشیم (درصورت مسئله ذکر شده باشد که غلتش داریم) ← بهترین روش: روش انرژی است

⇐

F_s برای ما کار انجام نمی‌دهد!! می‌پرسی چرا؟؟!

چون که غلتش داریم ← در محل تماس بین دیسک و سطح، سرعت در آن نقطه صفر است ← جابه‌جایی F_s صفر است زیرا ملاک جابه‌جایی نیرو سرعت در جهت نیرو است.

$$W = E_2 - E_1 \Rightarrow 0 = E_2 - E_1 \Rightarrow 0 = E_2 - 0$$

$$\Rightarrow E_2 = 0 \rightarrow E_2 = -mgh + \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

$v = r\omega$

$$\Rightarrow 0 = -5g \times 1.2 \sin 53 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 5 \times 0.1^2 \times \omega^2$$

$$\omega =$$

(ex

کار نیروی اصطکاک ایستایی (در صورت لغزش جسم روی سطح)

نکته:

ماشینی که غلتش دارد ⇐ کار نیروی اصطکاک صفر است ⇐ پس چه عاملی باعث حرکت ماشین می‌شود؟

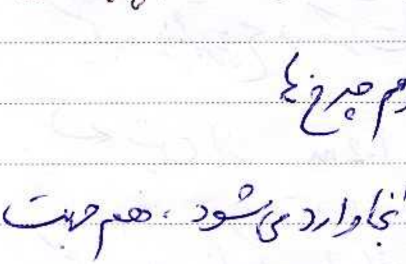
گشتاور مقاوم چرخ‌ها

نکته:

if: نیرو و سرعت در نقطه‌ای که نیرو به آنجا وارد می‌شود، هم جهت باشند ⇐ کار آن نیرو، مثبت است

else: کار آن نیرو، منفی است.

نکته:



if: غلتش کامل

$\rightarrow \bar{v} = r\omega$

if: غلتش توأم با لغزش

$\rightarrow r\omega \gtrless \bar{v}$

Take off

$$v_c = \bar{v} + r\omega = \bar{v} i - r\omega i$$

$\Rightarrow v_c = \bar{v} - r\omega \Rightarrow$ کار F_s در بوکسواد، منفی است.

هم در غلتش و هم در غلتش همراه لغزش:

Subject:

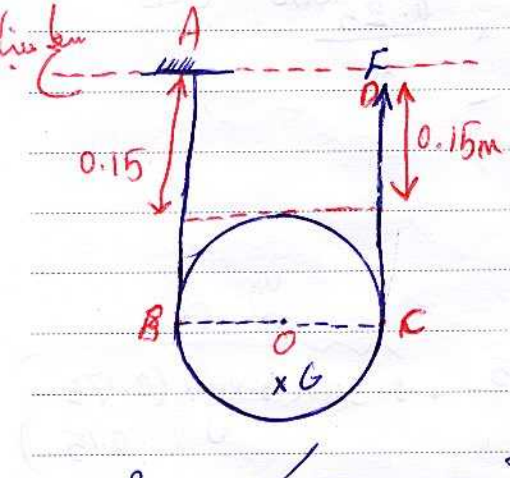
Year. Month. Date. ( )

چون تنها نیرویی که به ماشین از خارج وارد می‌شود، نیروی اصطکاک چرخ‌های محرک است
← F_s (نیرویی که زمین به چرخ‌ها وارد می‌کند) چرخ‌های محرک به سمت شتاب ماشین است

سوال: کار نیروی اصطکاک در ترمز کردن چیست؟ (غلتش توام با لغزش)
در این حالت:

$\bar{v} > v\omega$ ← v_c به سمت راست است

اما در این حالت (ترمز کردن) نیروی اصطکاک به سمت چپ است ⇐
باز هم کار نیروی اصطکاک منفی است.



ex)

$m_{\text{دیسک}} = 5\,kg$ $\quad r_{\text{دیسک}} = 0.1$

$\text{جرم طناب} = 6\,kg/m$

$F = 300\,N$

پس از اینکه مرکز دیسک، $0.1m$ جابه‌جا شود ← سرعت مرکز جرم = ؟

فرض: G: مرکز جرم، نیم‌حلقه‌ی پایینی است که فاصله‌اش از O برابر $\frac{2r}{\pi}$
لغزشی بین طناب و دیسک وجود ندارد.

نکته:
مجموع کار نیروی اصطکاک بین طناب و دیسک که به صورت زوج عمل و عکس العمل

هستند صفر است چون:
غلتش داریم ⇐ دیسک و طناب نسبت به هم سرعتی
ندارند ⇐ جابجایی آنها یکسان است
که ⇐ کار این دو نیروی اصطکاک (عمل
و عکس العمل) یکی است و در خلاف جهت هم

نکته:

B مرکز آنی دوران ⇐ $v_C = 2v_0$ ⇐ جابجایی طناب
۲ برابر جابجایی مرکز دیسک است.

$$\to u = 300 \times (2 \times 0.1) = 60\ N.m \quad (u = F.d)$$

$$E_1 = \overbrace{-5g \times 0.25}^{V_{g_o}} \overbrace{- 2 \times \underbrace{0.25 \times 6}_{m} \times g \times \frac{0.25}{2}}^{V_{g_{AB}} + V_{g_{CD}}}$$

$$\overbrace{- \pi \times 0.1 \times 6 \times g \times \left(0.25 + \frac{2 \times 0.1}{\pi}\right)}^{V_{g_{BC}}}$$

$$E_1 = mgh + \cancel{T}^{\to 0}$$

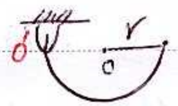
$$E_2 = \overbrace{-5g \times 0.15}^{V_{g_o}} \overbrace{- 0.15 \times 6 \times g \times \frac{0.15}{2}}^{V_{g_{AB}}} \overbrace{+ 0.35 \times 6 \times g \times (0.175 - 0.15}^{V_{g_{CD}}}$$

$$\underbrace{- \pi \times 0.1 \times 6 \times g \times \left(\frac{2 \times 0.1}{\pi} + 0.15\right)}_{V_{g_{BC}}}$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 5 \times (0.1)^2 \times \omega^2}_{T_o} \underbrace{+ 0}_{T_{AB}} \underbrace{+ \frac{1}{2} \times 0.35 \times 6 \times (2 \times 0.1 \times \omega)}_{T_{CD}}$$

T_{AB} ↓

طناب AB دوران ندارد، همچنین: $v_B = 0$: در طول طناب AB : $v = 0$

T_{CD}:  $I_o = mr^2 \Rightarrow I_{o'} = 2mr^2$

$$\Rightarrow \underbrace{+\frac{1}{2}\times\left[2\times(0.1\times\pi\times6)\times(0.1)^2\right]\times\omega^2}_{T_{BC}}$$

ضریب ۲ به کار رفته شده:

← نیم حلقه است

$m_{BC} = \frac{2\pi r}{2}\times 6$, $E_1 = mgh = m_{\text{دیسک}}\, gh + m_{BC}\, gh + 2m_{AB}\, gh$

$m_{AB}\, gh = m_{CD}\, gh$

$E_2 = mgh + T$, $T_{CD} = \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} m (2r\omega)^2$

$T_o = \frac{1}{2} I_B\, \omega^2$

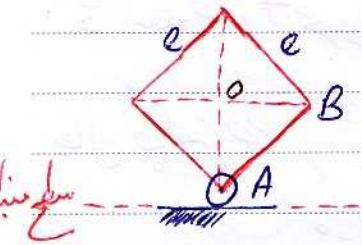
ex) plate ای با جرم m و ابعاد exe موجود است

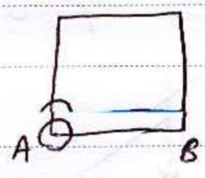
غلتک روان است و جرم ندارد

غلتک روان و بی جرم حکم سطح بدون اصطکاک را دارا است

در لحظه‌ی قبل از برخورد نقطه‌ی B با زمین

سرعت نقطه‌ی A = ?





$\dot{u} = 0$, $E_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} mge$

$E_2 = mg\frac{e}{2} + \frac{1}{2} m\times\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m(2e^2)\right)\omega^2$

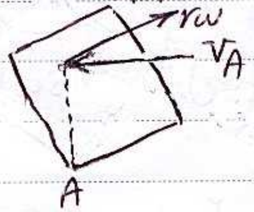
$I_o = \frac{1}{12} m(a^2+b^2)$

یک معادله و 2 مجهول ← از سینماتیک کمک می‌گیریم: داریم

: Dr Hajmusa

برای 1000 اُمین بار: به سراغ نقطه‌ای میرویم که بیشترین اطلاعات را راجع به آن داشته باشیم (از مسیر حرکت که از همه مهمتر است گرفته تا زن و بچه و ...... !!)

در حالت میانی داریم: دستگاه را روی A گذاشته و به plate جوش می‌دهیم پس:



$$\vec{v} = \vec{v}_A + r \times \vec{\omega}$$

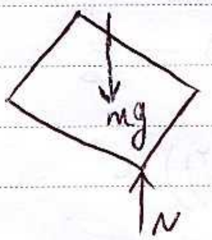
پس:
در حالت ثانویه (حالت نهایی) داریم:

$$\bar{v}_x = v_A + \frac{\sqrt{2}}{2} e\omega \times \cos 45 = v_A + e\omega$$

$$\bar{v}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} e\omega \times \sin 45 \Rightarrow \bar{v}_y = \frac{e\omega}{2}$$

3 معادله و 4 مجهول ($\bar{v}_x$ ، $\bar{v}_y$ ، v_A ، ω)

حال چه کنیم ؟؟
پیکره آزاد نیرو را برای حالت میانی می‌کشیم:



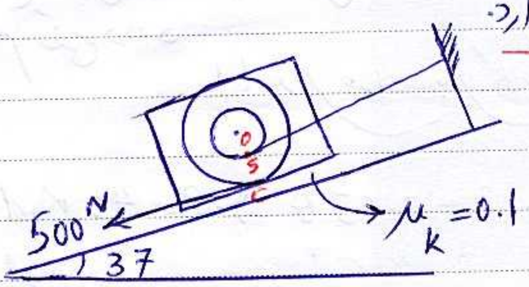
$\Rightarrow \sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow m\bar{a}_x = 0 \Rightarrow \bar{a}_x = 0 \Rightarrow$ $\bar{v}_x$ ثابت است

چون $\bar{v}_x$ در حالت ابتدایی صفر است $\Leftarrow$ $\bar{v}_x$ در حالت نهایی هم صفر است $\Leftarrow$

$$v_A + \frac{e\omega}{2} = 0$$

دوشنبه: 13-16 بعد از ظهر !!

مثال: هیچ لغزشی بین طناب و قرقره وجود ندارد.



جرم جعبه بدون قرقره $m_1 = 10\,kg$

جرم قرقره $m_2 = 3\,kg$

$r_1 = 0.05\,m$

$r_2 = 0.15\,m$

شعاع ژیراسیون قرقره $\bar{k} = 0.1\,m$

گشتاور مقاوم دینامیکی قرقره $M_k = 3\,N.m$

" " استاتیکی قرقره $M_s = 3.5\,N.m$

⇐ فرض براین است قرقره حتماً می چرخد!!

مرکز هندسی قرقره، همان سرعت جعبه را دارا است و از آنجایی مرکز آنی در نقطه c است (طناب بالایی، سرعت ندارد) ⇐ سرعت مرکز قرقره به سمت راست است ⇐ جعبه به سمت بالا حرکت می کند

با اعمال نیروی 500N که در طول حرکت ثابت است ⇐ سرعت جعبه پس از 2 متر جابجایی جعبه به سمت بالا بدست آورید؟

قرقره حتماً می چرخد (فرض مسأله)

$U = E_2 - E_1$

* برای محاسبه کار، جابجایی نیرو مد نظر است ⇐ کار نیروی 500N مثبت است

$v_c = (0.15 - 0.05)\times\omega \quad , \quad v_0 = 0.05\times\omega \Rightarrow \frac{v_c}{v_0} = 2$

جابجایی نیروی 500N به سمت چپ است چون V در نقطه c به سمت چپ است

جابجایی نیروی 500 نیوتونی، 2 برابر جابجایی جعبه است ⇐

$U = 500\times 4 - 0.1\times 13g\cos 37\times 2 - \underbrace{3\times 40}_{M\theta}$

گشتاور مقاومی به جعبه وارد می‌شود که با گشتاور مقاومی که به قرقره وارد می‌شود زوج عمل و عکس العمل هستند که چون جعبه نمی چرخد ⇐ گشتاورش، کار انجام نمی دهد

اما برای محاسبه کار گشتاور قرقره داریم:

$W = M\theta$

پس جابجایی قرقره داریم $S = r\theta \Rightarrow 2 = 0.05\theta \Rightarrow \theta = 40\,rad$

$E_1 = 0$

داریم:

$E_2 = mgh + \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}[\bar{I} + md^2] \times \omega^2$

$\rightarrow E_2 = 2 \times 13 g \times \sin 37 + \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}\left(\underbrace{3 \times (0.1^2 + 0.05^2)}_{k^2}\right)(\frac{\ }{\ }$

$\rightarrow$ v_0 یافت می‌شود !!

(New ex

اگر در همان مثال قبلی، الکتروموتور را در O قرار دهیم که گشتاوری پادساعتگرد به اندازه 750 N.m را روی قرقره اعمال می‌کند

⇐ چون گشتاور نیروی 500N حول O برابر 75 N.m است ⇐

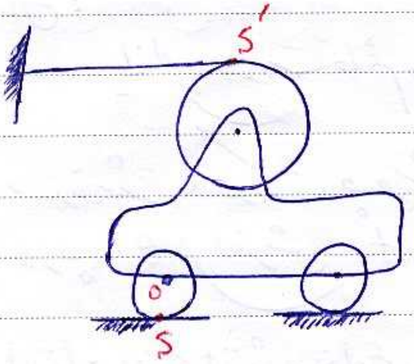
گشتاور الکتروموتور به گشتاور نیروی 500N می چربد ⇐ کل پادساعتگرد خواهد بود

⇐ سرعت در نقطه C به سمت راست خواهد بود

⇐ کار نیروی 500N منفی است (چون جابجایی اش خلاف جهت نیرو است)

همچنین چون جهت سرعت در O به سمت چپ است ⇐ جعبه به سمت پایین حرکت می‌کند

مثال:



قرقره : $m_1 = 100kg$

$r_1 = 0.4m$

$\bar{k}_1 = 0.3m$

جرم چرخ $= m_2 = 40kg$

$r_2 = 0.3m$

$\bar{k}_2 = 0.15$

جرم بدنه $= m_3 = 500kg$

فرضیات:

مرکز جرم بدنه به گونه‌ای است که کار کردن منتفی است

گشتاوری که موتور به چرخ عقب وارد می‌کند $M = 600_{N.m}$ است

اصطکاک و باد هم منتفی است ؛ سیستم اتلافاتی ندارد.

بعد از 20m جابه‌جایی اتومبیل، سرعت اتومبیل چقدر است.

غلتش داریم ⇐ کار نیروی اصطکاک صفر است

$$u = M\theta, \quad \theta = \frac{S}{r} = \frac{20}{0.3} \Rightarrow u = ۶۰۰ \times ۶۶,۶$$

$$E_1 = 0$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m_3 v^2 + \frac{1}{2}\left(m_1\left(\bar{k}_1^2 + r_1^2\right)\right)\left(\frac{v}{0.4}\right)^2$$

$$+ 4 \times \frac{1}{2}\left(m_2\left(\bar{k}_2^2 + r_2^2\right)\right)\left(\frac{v}{0.3}\right)^2$$

در S و S' ، $V = 0$ ⇐ حکم مرکز آنی دوران را دارند ⇐

$$I_S = I_O + mr^2$$

$I_O \rightarrow k^2 m$

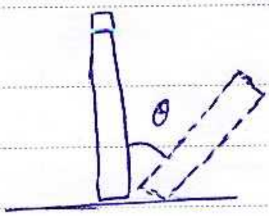
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

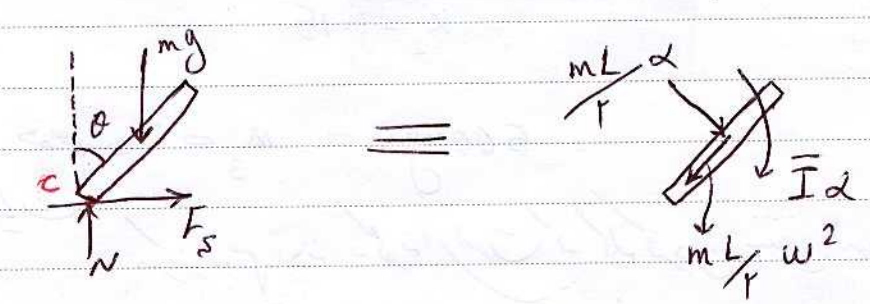
میله‌ای به صورت قائم داریم به طول L و جرم m با ضریب اصطکاک μ_s

سرنوشت حرکت چه می‌شود؟!

در چه θای لغزش start می‌خوره؟!



در ابتدا زمانی که لغزش نداریم:



$$\sum M_c = I_c\,\alpha \Rightarrow mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{12}mL^2\alpha + \frac{mL^2}{4}\alpha$$

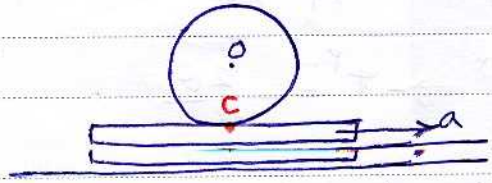
$$\rightarrow mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}mL^2\alpha$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow mg - N = \frac{mL}{2}\alpha\cdot\cos\theta + \frac{mL}{2}\omega^2\cdot\sin\theta$$

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_s = \frac{mL}{2}\alpha\cdot\sin\theta - \frac{mL}{2}\omega^2\cdot\cos\theta$$

مثال:

دیسکی روی plate قرار دارد. plate را با شتاب a می‌کشیم (غلتش کامل بین دیسک و قطعه) ← کار نیروی اصطکاک plate روی دیسک طی $360°$ دوران دیسک چقدر است؟



دارم: (نیروی اصطکاک به نقطه‌ای وارد می‌شود که آن نقطه سرعت دارد ⇐ F_s برای ما کار انجام می‌دهد)

دستگاه را روی c گذاشته و به plate جوش می‌دهیم

$$\bar{a}\, i = a_c\, j + a_c\, i - r\omega^2 j - r\alpha\, i$$

$$\rightarrow \bar{a} = a - r\alpha$$

مسیر حرکت plate یک خط افقی است ← $\bar{a}_n$ نداریم

حال داریم:

$$\Sigma F_n = m\bar{a}_n \Rightarrow F_s = m(a - r\alpha)$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow +F_s \times r = +\frac{1}{2} m r^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2F_s}{mr}$$

$$\rightarrow F_s = m\left(a - \frac{2F_s}{m}\right) \Rightarrow F_s = \frac{ma}{3}$$

ن غلتش کامل داره پس :

جابه‌جایی دیسک و plate یکی است .

می پرسی چرا ؟؟؟؟

 !! ...... زیرا بی دلیل اینکه

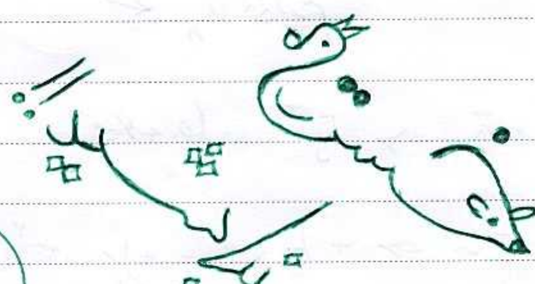
$$\Rightarrow \alpha = \frac{+2F_s}{mr} \quad \left(F_s = \frac{ma}{3}\right) \Rightarrow \alpha = +\frac{2}{3}\,\frac{a}{r}$$

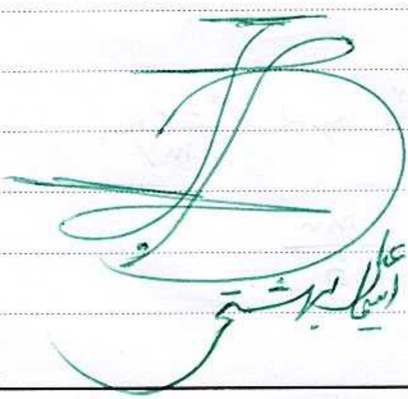
$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2\theta}{\alpha}$$

$$\rightarrow t^2 = \frac{2 \times 2\pi}{\frac{2}{3} \times \frac{a}{r}} = \frac{6\pi r}{a} \Rightarrow$$

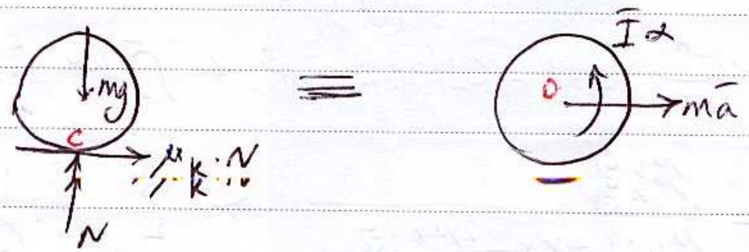
جابه‌جایی plate $d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a \times \frac{6\pi r}{a} = 3\pi r$

$\rightarrow$ کار نیروی اصطکاک $= F_s \cdot d = \pi r ma$





مثال:
همان مثال قبلی را با فرض اینکه بین قطعه و Plate لغزش وجود داشته باشد حل کنید:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg \Rightarrow F_s = \mu_k \, mg$$

$$\Sigma F_x = m\bar a_x \Rightarrow \mu_k \cdot mg = m\bar a \Rightarrow \bar a = \mu_k \cdot g$$

$$\Sigma \bar M = \bar I \alpha \Rightarrow \mu_k \cdot mg \times r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\mu_k g}{r}$$

برای یافتن مسافت پیموده شده قطعه پایینی (در واقع همان جابه‌جایی نیروی اصطکاک) داریم:

ابتدا جابه‌جایی مرکز دیسک را می‌یابیم:
برای این کار: دستگاه o را روی مرکز دیسک قرار داده و نقطه c را بررسی می‌کنیم

$$v_c = \bar v + r\omega \quad , \quad a_{c_t} = \bar a + r\alpha$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow 2\pi = \frac{1}{2} \times \frac{2\mu_k \cdot g}{r} \times t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2\pi r}{\mu_k \cdot g}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \mu_k \cdot g \times \frac{2\pi r}{\mu_k \cdot g} = \pi r$$

ل داریم: اگر L جابه‌جایی قطعه زیری باشد (جابه‌جایی F_s)

$$\rightarrow \frac{s}{L} = \frac{\bar{v}}{v_c} = \frac{\bar{a}}{a_{c_t}}$$

چون v_0 نداریم ⇐ نسبت جابه‌جایی‌ها با نسبت شتاب‌ها برابر است

$$\Rightarrow \frac{s}{L} = \frac{\mu_k g}{\mu_k \cdot g + r \times \frac{2\mu_k \cdot g}{r}} \rightarrow \frac{s}{L} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow L = 3s = 3\pi r$$

L در حالتی که غلتش داشتیم با حالتی که لغزش داشتیم یکی شد پس می‌توان
که نتیجه گرفت که:

L هیچ ربطی به μ_k ندارد؛ چون که:

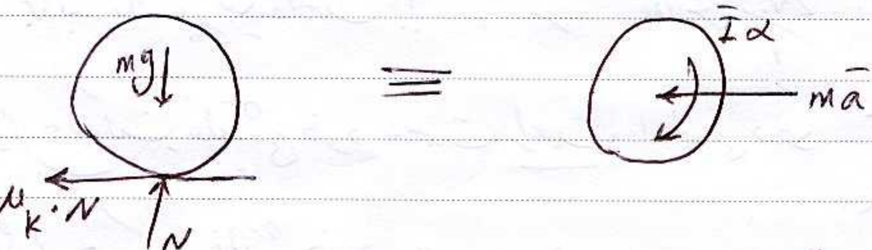
با افزایش μ_k ⇐ F_s زیاد می‌شود ⇐ α زیاد می‌شود اما از طرفی t^2
کاهش می‌یابد

مثال:

دیسکی را با دست خود چرخانده
سپس با سرعت V به سمت جلو پرتابش می کنیم
که دیسک بر روی سطحی با μ_s ، μ_k قرار می گیرد
⇐ سرنوشت حرکت بلافاصله پس از تماس
با سطح را تجزیه و تحلیل کنید.

وقتی لغزش نداریم، هیچ لزومی ندارد که جهت اصطکاک را درست انتخاب کنیم
و دقت به خرج بدهیم چون:
F_s مجهول است

حال:



ω پادساعتگرد است و V به سمت راست است
که دیسک تمایل دارد که به سمت
چپ حرکت کند (مخالفت با حرکت کند)

$\Rightarrow$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow +\mu_k \cdot mg = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \mu_k \cdot g$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow \mu_k \cdot mg \times r = \frac{1}{2} m r^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2\mu_k \cdot g}{r}$$

Year: Month: Date: ( )

$$v = v_0 - at \Rightarrow v = v_0 - \mu_k g t$$

$\Rightarrow$

$$\omega = \omega_0 - \frac{2\mu_k g}{r} t$$

حرکت تا زمانی ادامه دارد که لغزش تبدیل به غلتش شود

زمانی که دیگر بوکس و یا دکردش تمام می شود و به حرکت خود ادامه می دهد

حرکت دورانی گوی تمام می شود و حرکت انتقالی اش شروع می شود.

$\Rightarrow$

$$r\omega = v_0 - \mu_k g t_c \quad , \quad \omega = \omega_0 - \frac{2\mu_k g}{r} t_c$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{2}{r}(v_0 - r\omega) \Rightarrow \omega = \frac{2v_0}{r} - \omega_0$$

$\Rightarrow$

if: $\frac{2v_0}{r} > \omega_0 \Rightarrow$!! ω به v بستگی دارد

گوی به حرکتِ غلتشی خود به سمت راست ادامه می دهد

else:

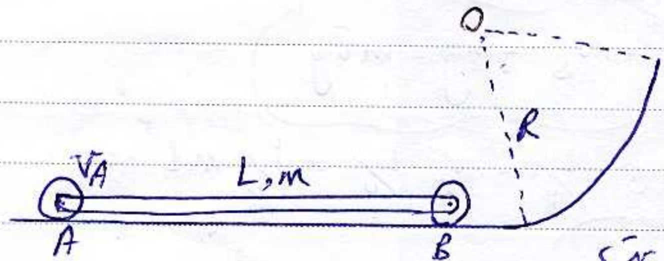
گوی به حرکت غلتشی خود " " چپ " "

$0 - t_c$; (بوکس و یا دا) لغزش داشتیم

$t_c - \infty$; غلتش داریم

New example:

مثال:



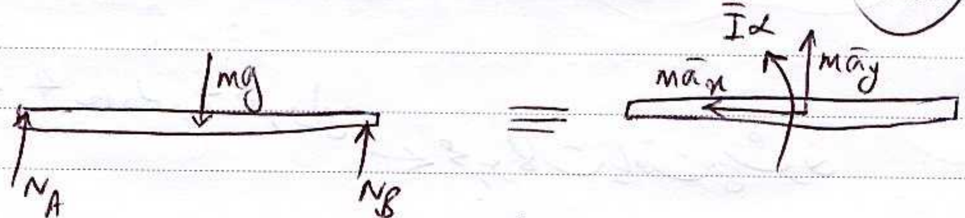
بلافاصله پس از ورود چرخ جلو به قوس

$\to N_B , N_A = ?$

A دارای سرعت ثابتی است:

اگر الکتروموتور به چرخ عقب متصل است.

میله آزاد:



A دارای سرعت ثابتی است و در حال حرکت به سمت راست است.

B نیز مسیر حرکتش مشخص است

حال: دستگاه را روی A گذاشته و به میله جوش می‌دهیم:

$$\bar a = \cancel{a_A}^{\,0} + \omega \times (\cancel{\omega \times r}) + \dot\omega \times r \Rightarrow \boxed{\bar a_y = \tfrac{L}{2}\alpha\, j}$$

$$\Rightarrow \bar a_x = 0$$

0 (بلافاصله پس از ورود به قوس α داریم اما ω نداریم)

حال: دستگاه را روی B گذاشته و به میله جوش می‌دهیم:

$$\bar a = a_B + \omega \times (\cancel{\omega}^{\,0} \times r) + \dot\omega \times r \Rightarrow$$

$$\bar a_y = a_{B_t}\, i + \frac{v_A^2}{R}\, j - r\alpha\, j \qquad (a_B = a_{B_t} + \cancel{a_{B_n}})$$

$\frac{v_B^2}{\ldots}$

Year . Month . Date . ( )

$$\Rightarrow a_{B_t} = 0 \quad , \quad \bar{a}_y = \frac{V_A^2}{R} - \frac{L}{2}\alpha$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow N_A + N_B - mg = m\bar{a}_y$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow N_B \times \frac{L}{2} - N_A \frac{L}{2} = \frac{1}{12} mL^2\alpha$$

$$\rightarrow N_B - N_A = \frac{1}{6} mL\alpha$$

4 معادله، 4 مجهول که مجهولات یافت می‌شوند

PAPCO

یکشنبه

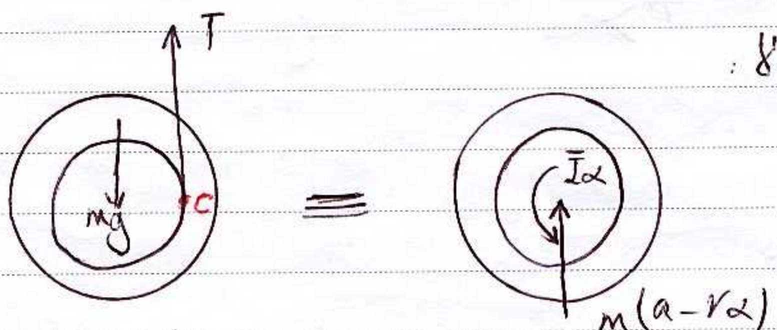
مثال:

تحلیل حرکت یویو:

جرم یویو $= m$
شعاع یویو $= r$
شعاع ژیراسیون یویو $= \bar{k}$

شتاب دست ما: a است که می‌تواند به سمت بالا یا پایین باشد

a (i به سمت بالا:



دستگاه را روی c قرارداده و به یویو جوش می‌دهیم ⟸ مرکز جرم را بررسی می‌کنیم.

$$\bar{a} = \hat{a}_{c_y}\,\hat{j} + \hat{a}_{c_x}\,\hat{i} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

$$\rightarrow \bar{a}_y = a_{c_y} + \dot{\omega} \times r \rightarrow \bar{a}_y = a - r\alpha$$

با $\bar{a}_x$ کاری نداریم!!

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \rightarrow 0 = m\bar{a}_x \Rightarrow \bar{a}_x = 0$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow mg - T = m(a - r\alpha)$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow T \times r = \bar{I}\alpha = m\bar{k}^2\alpha$$

$$\Rightarrow T = \frac{m\bar{k}^2\alpha}{r}$$

$$\Rightarrow -m\frac{\bar{k}^2}{r}\alpha + mg = m(a - r\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{a+g}{r - \frac{\bar{k}^2}{r}}$$

$$\rightarrow T = \frac{m\bar{k}^2}{r}\left(\frac{a+g}{r - \frac{\bar{k}^2}{r}}\right) \Rightarrow T = \frac{m(a+g)}{\left(\frac{r}{\bar{k}}\right)^2 - 1}$$

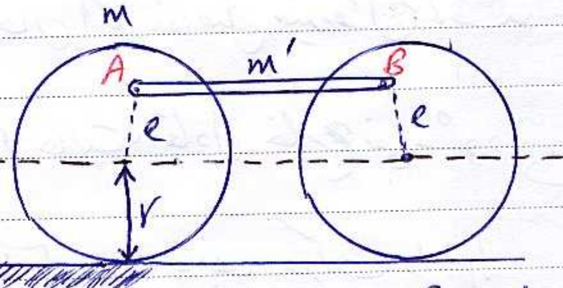
$\Rightarrow$

if $|-a| > g \Rightarrow T < 0$ طناب شل می‌شود

else

$T > 0$

مثال:

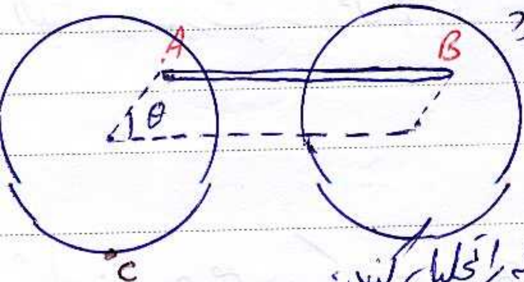


میله در نقطه A و B به 2 دیسک مفصل شده است و تمامی نقاط محل روان هستند

اصطکاک به اندازه کافی داریم

با یک انحراف جزئی سیستم از حالت تعادل خارج می شود

پس از اینکه سیستم از حالت تعادل خارج شود و به حالت روبه رو در بیاید



(جرم دیسک ها m است و دارای شعاع r هستند

طول لینک L است و دارای جرم m' است) مساله را تحلیل کنید:

$$E_2 - E_1 = U \rightsquigarrow U = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$$

$$E_1 = m'ge$$

لینک AB تنها انتقال دارد $\leftarrow T = \frac{1}{2} m v^2$ و تمامی نقاطش دارای سرعت یکسانی هستند

$$E_2 = \underbrace{m'ge\sin\theta}_{V_g\ \text{لینک}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{T\ \text{لینک}} + \underbrace{2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m r^2\right)\times \omega^2\right]}_{T\ \text{دیسک ها}}$$

C: مرکز آنی دوران است (غلتش داریم) $\leftarrow$

$$v_A = s\omega \rightsquigarrow v_A = \sqrt{e^2 + r^2 + 2er\sin\theta}\ \omega$$

Year. Month. Date. ( )

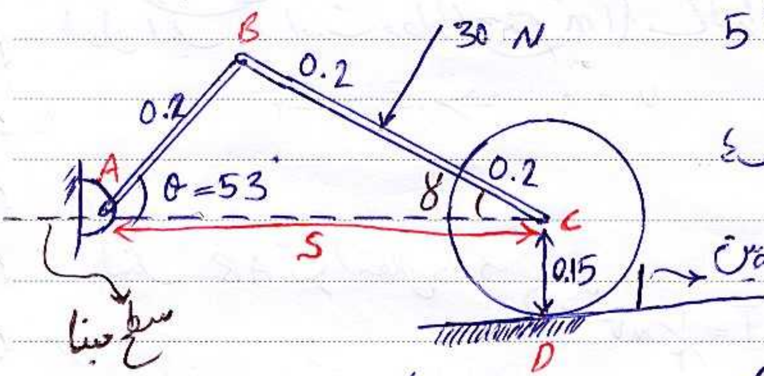
ل اگر مفاصل غیرایده‌آل باشند ⇐

با یک انحراف جزئی دیگر سیستم

حالت تعادل خارج نمی‌شود ← criticle θ را می‌یابیم ⇐

ان θ به بعد حرکت داریم!

بته در صورت مسئله باید M_s و M_d را به ما بدهند



ل: جرم دیسک = 5 kg

A و B و C مفصل

هستند و $m = 10\ kg/m$ لینک‌ها

برداشتن پین،

ی

$\theta = 20°$

⇐ کلیه اطلاعات سینماتیکی را بیابید؟!! (اصطکاک به اندازه کافی داریم!)

$$u = E_2 - E_1$$

حال داریم:

$$E_1 = 0.1 \sin 53 \times 2g + 0.1 \sin 53 \times 4g$$

$$0.1 \sin\theta = 0.2 \sin 8_1 \Rightarrow 8_1 = 23.57°$$

$$E_2 = 0.1 \sin 20 \times 2g + 0.1 \sin 20 \times 4g + \underbrace{\tfrac{1}{2}\big(\underbrace{\tfrac{3}{2} \times 5 \times 0.15}_{I_D}}_{T_c}$$

P4PCO

I_{BC}

$$+\frac{1}{2}\times 4\times \bar{v}_{BC}^{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}\times 4\times 0.4^{2}\times \omega_{BC}^{2}$$

$(\bar{v}_x^2+\bar{v}_y^2)$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\times 2\times 0.2^{2}\right)\omega_{AB}^{2}$$

⇐ ابعاد دل، 5 مجهول ⇐ از سینماتیک کمک می‌گیریم!!

دستگاه را روی B قرار داده و به لینک BC جوش می‌دهیم و C را بررسی می‌کنیم.

$$V_C=V_B+\omega\times r \rightarrow 0.15\,\omega_C\, i=0.2\,\omega_{AB}(\sin 20 i-\cos 20 j)$$
$$+0.4\,\omega_{BC}(\sin 9.85 i+\cos 9.85 j)$$

داشتیم:

$$0.2\sin 20=0.4\sin\gamma_2 \Rightarrow \gamma_2=9.85$$

$$\rightarrow 0.15\,\omega_C=0.2\,\omega_{AB}\sin 20+0.4\,\omega_{BC}\sin 9.85$$
$$0=0.2\,\omega_{AB}(-\cos 20 j)+0.4\,\omega_{BC}(\cos 9.85)$$

حال دستگاه را روی B قرار داده و مرکز جرم CB را بررسی می‌کنیم و به لینک BC جوش می‌دهیم.

$$\bar{v}_x i-\bar{v}_y j=0.2\,\omega_{AB}(\sin 20 i-\cos 20 j)$$
$$+\omega_{BC}\times 0.2(\sin 9.85 i+\cos 9.85 j)$$

$$\Rightarrow \bar{v}_x=0.2\,\omega_{AB}\cdot\sin 20+0.2\,\omega_{BC}\cdot\sin 9.85$$

$$\bar{v}_y=0.2\,\omega_{AB}\cos 20-0.2\,\omega_{BC}\cos 9.85$$

...برای محاسبه u داریم:

نیروی 30N را به نقطه c منتقل می‌کنیم ⇐

...پل ایجاد شده را نیز در c قرار می‌دهیم.

...ن کار را به این دلیل انجام دادیم که: مسیر نقطه‌ای که نیروی 30N روی آن

...ت، مشخص نیست!

...کار نیروی 30N و کوپل مربوطه را محاسبه می‌کنیم:

$$U = +6 \times \underbrace{\frac{(23.57-9.85)}{180}}_{\text{کار کوپل مربوطه}} - \underbrace{\int 30 \sin \gamma \, ds}_{\text{کار نیروی } 30N}$$

...ت:

$$\text{کار } M = \int M \, d\theta = M\theta$$

...$30 \sin \gamma$ کار را انجام می‌دهد

$$\text{کوپل } M = F \times r = 30 \times 0.2 = 6 N$$

$$s = 0.2 \cos\theta + 0.4 \cos\gamma \; ,$$

$$\frac{0.4}{\sin\theta} = \frac{0.2}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\theta = 2\sin\gamma \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-4 \ldots}$$

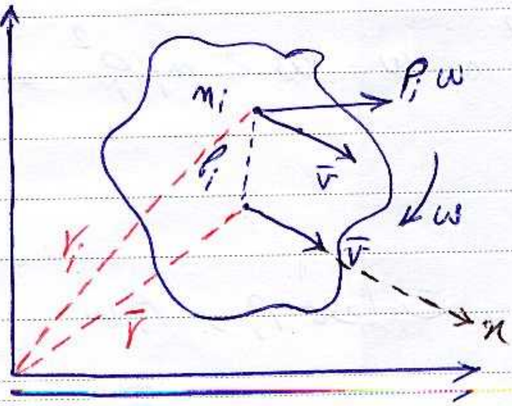
$$\Rightarrow s = 0.2\sqrt{1-4\sin^2\gamma} + 0.4\cos\gamma$$

Subject:
Year. ۸۸ Month. آذر Date. ۲۳

دوشنبه ۷ صبح

Momentom method:

بحث اندازه حرکت:



جسم صلب هم دارای انتقال است هم دارای دوران

اندازه حرکت m_i برابر است با:

$$G_i = m_i V_i \Rightarrow G = \Sigma m_i V_i = \frac{d}{dt} \Sigma m_i r_i$$

$$= \frac{d}{dt} m\bar{r} = m\bar{v}$$

$\bar{r}$: بردار موقعیت مرکز جرم است

$$\Rightarrow \int \Sigma F . dt = \Delta G \begin{cases} \int \Sigma F_x dt = \Delta G_x \\ \int \Sigma F_y dt = \Delta G_y \end{cases}$$

حال برای اندازه حرکت زاویه‌ای داریم:

$$H_i = \underbrace{\rho_i \times}_{\text{ضرب خارجی}} m_i V_i = \rho_i \times m_i (\vec{\bar{V}} + \vec{\rho_i \omega})$$

(سرعت ذره m_i را با قرار دادن دستگاه بر روی مرکز جرم می‌یابیم)

$$\Rightarrow \bar{H} = \Sigma \rho_i \times m_i (\bar{V} + \rho_i \omega)$$

داریم:

$$\Sigma \rho_i \times m_i \bar{V} = -\bar{V} \times \Sigma m_i \rho_i = -\bar{V} \times m\bar{\rho}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(_o = \bar{\rho}\ )_o = m\bar{\rho}\times\bar{v} \Leftarrow$: فاصله مبدا تا مرکز جرم است

$$\sum \rho_i \times m_i(\rho_i \omega) = \sum \rho_i^2 m_i \omega = \omega \sum m_i \rho_i^2 = \bar{I}$$

$$\longrightarrow \quad \bar{H} = \bar{I}\omega$$

ت:

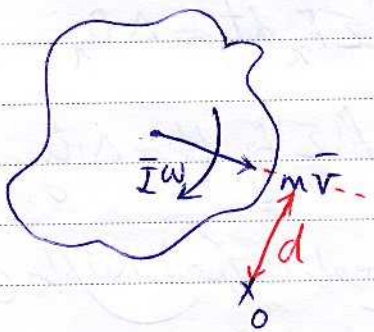
$\rho_i\omega$ بر ρ_i عمود است و $m_i\rho_i^2 = I_i$

در حالت کلی:

$$\int \sum \bar{M}\, dt = \Delta \bar{H}$$

فرمول محدودیت دارد چون گشتاور گیری حول مرکز جرم است

رفع این محدودیت داریم:



$$\Rightarrow H_o = \pm\bar{I}\omega \pm m\bar{v}d$$

خطر!

در این روش جهت ها بسیار مهم هستند

وش انرژی:

دیدیم که اندازه‌ای بود اما در این روش باید برداری باشد!

در ادامه آن محدودیت داریم:

$$\int \sum M_B\, dt = \Delta H_B$$

PAPCO

ما باز خودِ نقطه‌ی o محدودیت دارد زیرا برای اینکه بتوانیم از این فرمول استفاده
...نیم که ⟸

shoulde:

$$\bar{V}_o = 0 \quad \text{یا} \quad \bar{V}_o \parallel \bar{V}$$

...اصلاً داشته باشیم:

$\bar{V} = 0$ (مرکز جرم، مرکز دوران هم باشد)

نکته:

در این روش، همانند سینتیک ذرات،

if:

سیستمی متشکل از چند عضو داشته باشیم، می‌توانیم، اندازه حرکت
خطی یا زاویه‌ای را برای تک تک اعضای سیستم بنویسیم یا برای کل سیستم
بنویسیم زیرا:

در نقاطی که اعضای سیستم به هم متصل هستند، اندازه
حرکت خطی یا زاویه‌ای، زوج عمل و عکس العمل هستند

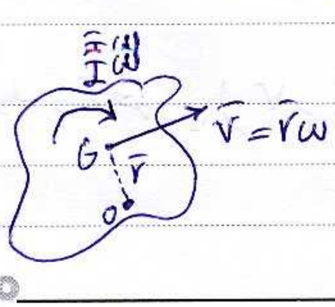
همچنین اگر در نقاط اتصال گشتاور نیز داشته باشیم (مفاصل غیر دوّار)

⟸ G و H را باز هم می‌توان برای تک تک اعضا نوشت یا برای کل
سیستم زیرا:

در اینجا dt یعنی زمان اثرگذاری نیرو مهم است

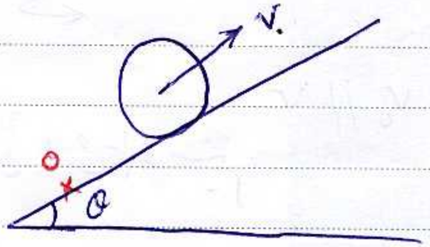
برعکس: در بحث انرژی، جابه‌جایی (کار نیرو!) مهم بود!!

اگر مرکز آنی یا دائمی دوران داشته باشیم:



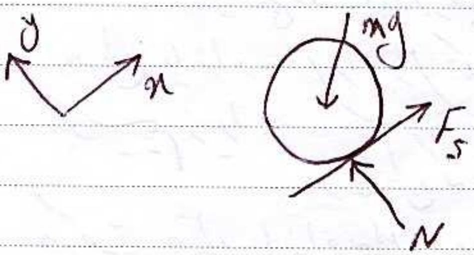
$$\Rightarrow H_O = \bar{I}\omega + m\bar{r}^2\omega \Rightarrow H_O = I_O\,\omega$$

example:



... را روی سطح شیبدار
... سرعت اولیه $v_\circ$ به سمت
... غلت می دهیم

... سرعت دیسک را برحسب
... ی از زمان بیابید (با فرض
... تن غلتش کامل)
... م دیسک m و شعاع آن r است.



$$\Rightarrow (F_s - mg\sin\theta)t = \Delta G$$

$$\left[\Delta G = \int_0^t F_x \, dt\right]$$

... حالت داریم:

در زمان t گوی هنوز در حال بالا رفتن است
" " در حال پایین آمدن است

... ر زمان توقف را t_c بنامیم که با فرض $t > t_c$

$$\to (F_s - mg\sin\theta)t = -mV - mV_\circ = -m(V + V_\circ)$$

$$\to (mg\sin\theta - F_s)t = m(V + V_\circ)$$

... دله و 2 مجهول (F_s و V) که از اندازه حرکت زاویه‌ای کمک می گیریم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\int_0^t \Sigma M_o \, dt = \Delta H_o$$

$$\Rightarrow mg \sin\theta \times r \times t = \Delta H_o$$

گشتاور نسبت به O صفر است ← $\cos\theta \times mg = N$

گشتاور نسبت به O، پیدا کنید، صفر است ← $\cos\theta \times mg = N$

$$\Rightarrow mg \sin\theta \times r \times t = \overbrace{\underbrace{\pm \tfrac{1}{2} m r^2 \omega}_{\bar{I}\omega} \pm \underbrace{m r \omega \times r}_{m\bar{v}d}}^{H_{O_2}}$$

$$- \left[-\tfrac{1}{2} m r^2 \omega_0 - m r^2 \omega_0 \right] \qquad \left(\omega_0 = \frac{v_0}{r}\right)$$

$$\rightarrow (g \sin\theta) \cdot t = \tfrac{3}{2} r\omega + \tfrac{3}{2} r\omega_0 \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{2}{3r} g \sin\theta \times t - \omega_0 \Rightarrow$$

$$\text{if } \omega = 0 \Rightarrow \frac{2}{3r} g \sin\theta \cdot t - \omega_0 = 0 \Rightarrow$$

$$t_c = \frac{3 r \omega_0}{2 g \sin\theta} \Rightarrow t_c = \frac{3 V_0}{2 g \sin\theta}$$

از علامت‌ها صرف‌نظر کردیم

در حالت اول:

اگر $\omega < 0$ ← دیسک در حال پایین آمدن است (فرض براین بود که دیسک در حال پایین آمدن است)

else : دیسک همچنان در حال بالا رفتن است (خلاف فرض)

$\rightarrow$ V برحسب t یافت شد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

New example:

همان مثال قبلی، اما با فرض لغزش

در این حالت، باید را هم داریم $t \Leftarrow$?? $v = f(t)$

$$\int_0^t \Sigma M_o \, dt = \Delta H_o \Rightarrow \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + m \bar{v} \times r - \left[-\frac{1}{2} m r^2 \omega_0 - m \bar{v}_0 \times r \right] = mg \sin\theta \times r \times t$$

همچنین:

$$\int_0^t \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x \Rightarrow$$

$$(\mu_k \, mg \cos\theta - mg \sin\theta)\, t = -mv - mv_0$$

$\Leftarrow$ 2 معادله و 2 مجهول (ω, v)

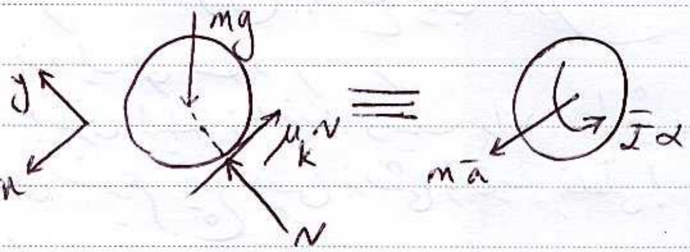
t_c': زمانی است که حرکت جسم به سمت پایین آغاز می‌شود و این حالت در زمانی اتفاق می‌افتد که:

لغزش تبدیل به غلتش بشود

$if \quad t > t_c \Rightarrow$ غلتش خواهیم داشت

New example:

آیا در مثال قبلی، در نیمه راه، لغزش به غلتش تبدیل می‌شود؟
(مثلا در ابتدا غلتش توام با لغزش داشته باشیم آیا حرکت تا ابد ادامه پیدا می‌کند؟)



$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow$$
$$-\mu_k mg\cos\theta + mg\sin\theta = m\bar{a}$$
$$\Rightarrow \bar{a} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \rightarrow \mu_k \cdot mg\cos\theta \times r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha$$

(ابتدا با فرض لغزش، شروع به حل کردن مسأله کردیم)

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{2\mu_k g\cos\theta}{r}$$

داریم:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + g(\sin\theta - \mu_k \cdot \cos\theta)t \qquad (v = v_0 + at)$$
$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{2}{r}\mu_k g\cos\theta\right)t \qquad (\omega = \omega_0 + \alpha t)$$

هر وقت این دو به هم برسند، غلتش آغاز می‌شود

$$\Rrightarrow \bar{v}_0 + g(\sin\theta - \mu_k \cdot \cos\theta)t_c = r\left(\omega_0 + \left(\frac{2}{r}\mu_k g\cos\theta\right)t_c\right)$$

$$\rightarrow t_c = \frac{v_0 - r\omega_0}{g(3\mu_k \cdot \cos\theta - \sin\theta)}$$

$$\rightarrow \text{if } v_0 > r\omega_0 \Rightarrow 3\mu_k \cdot \cos\theta - \sin\theta > 0 \xRightarrow{\text{یا}} \mu_k > \frac{\tan\theta}{3}$$

که تحت این شرایط لغزش تبدیل به غلتش می‌شود

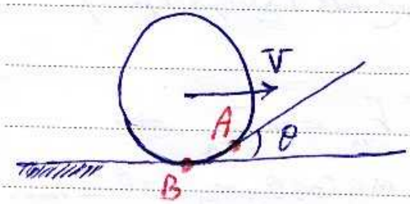
else: $\mu_k < \frac{\tan\theta}{3}$

example:

یسکی در حال غلتش با سرعت v

ست

ناگهان به سطح شیب دار



ر دیسک می شود

با فرض اینکه زمانی که دیسک وارد سطح شیب دار

ی شویم هیچ پس زنشی (تعبیر فلفلی! نره هوا!!) نداشته باشیم سرعت

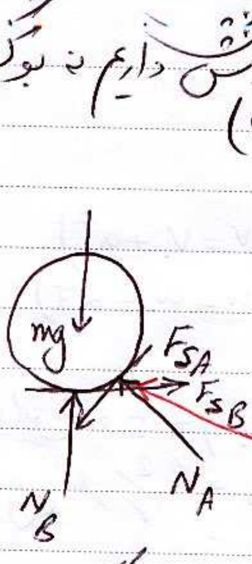
یسک را پس از ورود به سطح شیب دار بیابید:

بل از ورود به سطح شیب دار، مرکز آنی دوران نقطه B است اما در لحظه ای که

ارد سطح شیبدار می شود با فرض اینکه نه پس زنش داریم نه بوکس و باد

ردن (در لحظه $t \to 0$ که بسیار کوتاه است)

$$\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A$$



$Q_A = \int_0^t F_A \, dt$

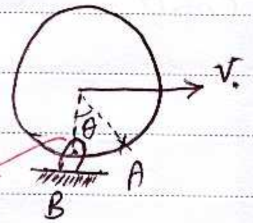
گشتاور mg و N_B حول A گشتاور معمولی است (با گشتاور وزن مقایسه

می شوند!!) که زمان نیز بسیار کوتاه است

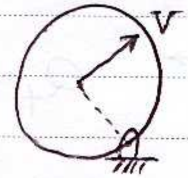
$\rightsquigarrow \Delta H_A = 0 \Rightarrow$

$$H_{A_1} = H_{A_2} \Rightarrow$$

①: در لحظه صفر



②: در لحظه t



①:

$$H_{A_1} = \frac{1}{2} m r^2 \times \frac{v_0}{r} + m V_0 \times r\cos\theta \Rightarrow$$

②:

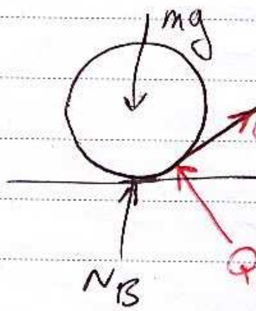
$$H_{A_2} = \frac{3}{2} m r^2 \omega$$

$$\omega = \frac{2}{3r}\left(\frac{1}{2} V_0 + V_0 \cos\theta\right) = \frac{2V_0}{3r}\left(\frac{1}{2} + \cos\theta\right)$$

برای اطمینان از درستی مسئله، به سراغ نقطه ای می رویم که تکلیف اش مشخص است

در $\theta = 0$ داریم: $\omega = \frac{V_0}{r}$ ✓

حال برای یافتن Q داریم:



$$Q_t = \int_0^t \Sigma F_t \, dt$$

$$Q_n = \int \Sigma F_n \, dt$$

$$\int \Sigma F_n \, dt = \Delta G_n \quad , \quad Q_n = G_{n_2} - G_{n_1}$$

$$\Rightarrow Q_n = 0 - (-m V_0 \sin\theta) = m V_0 \sin\theta$$

ثانویه اولیه

$$Q_t = \frac{2mV_0}{3}\left(\frac{1}{2} + \cos\theta\right) - mV_0\cos\theta$$

$$\longrightarrow \quad Q_t = \frac{mV_0}{3}\left[1 - \cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow \quad Q = \sqrt{Q_t^2 + Q_n^2}$$

در طراحی‌ها، Q_{max} مهم است نه Q متوسط !!

$$\frac{Q_t}{Q_n} = \frac{\int_0^t F_t \cdot dt}{\int_0^t F_n \cdot dt} \simeq \frac{F_t}{F_n} = \frac{F_s}{N} = \mu_{s\,min}$$

← نیروی اصطکاک مورد نیاز جهت عدم لغزش و بازتابش شود

حداقل ضریب اصطکاکی که باید داشته باشیم تا

این مسأله تا θهای کمتر از 10°، این گونه حل می‌شود زیرا در θهای بزرگ، فرضِ عدم پس زنش، غلط است!

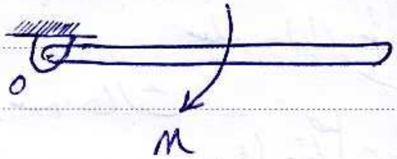
بعد از ظهر

دوشنبه:

مقدار اندازه حرکت:

example)

لینکی داریم که در نقطه o مفصل شده است که طول آن L و جرمش m است

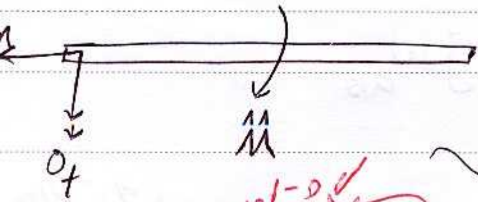


حالت اولیه میله افقی است و همچنین در صفحه افقی قرار داریم. به میله گشتاور ثابت M وارد می‌کنیم که ω لینک را بر حسب تابعی از زمان بیابید:

فرضیات:

مقاومت هوا و گشتاور مقاوم لینک ناچیز است.

داریم:



$$\rightarrow \Sigma M_o \, dt = \Delta H_o$$

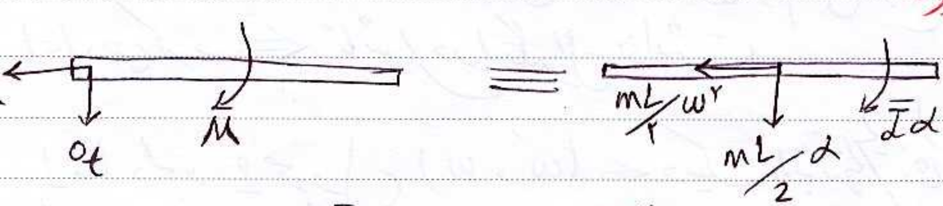
$$\rightarrow M t = I_o \omega = \tfrac{1}{3} m L^2 \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{3 \overset{\text{گشتاور}}{M} t}{\underset{\text{جرم}}{m} L^2}$$

$$\int \Sigma F_t \, dt = \Delta G_t \rightarrow \int_0^t O_t \, dt = m \bar{v} = m \times \frac{L}{2} \times \frac{3Mt}{mL^2}$$

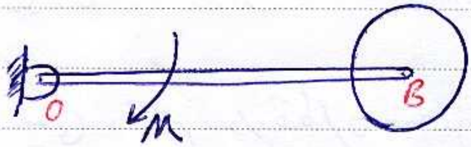
$$\rightarrow O_t \cdot t = \frac{3Mt}{2L} \rightarrow O_t = \frac{3M}{2L}$$

تحلیل از نظر نیرو:



New example)

به میله گشتاور M وارد می شود



که اگر دیسک دارای شعاع r و جرم m' باشد و میله دارای طول L و جرم m باشد

در سه حالت

1) مفصل روان 2) مفصل غیر روان 3) دیسک و لینک جوش شود

ω_{OB} را بیابید (در صفحه افقی هستیم و مقاومت هوا ناچیز است)

حالت 3: در این حالت، لینک و دیسک تبدیل به یک عضو می شوند

$$\int \sum M_O \, dt = \Delta H_O \Rightarrow Mt = (I_{\text{دیسک حول O}} + I_{\text{میله حول O}})\,\omega$$

$$Mt = \left[\frac{1}{3} mL^2 + \frac{1}{2} m' r^2 + m' L^2\right] \omega_{OB}$$

حالت 1:

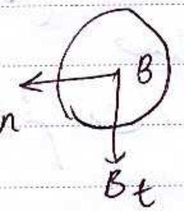
$$\int \sum M_O \, dt = \underbrace{\Delta H_O}_{\bar{I}\omega + m\bar{v}d} \Rightarrow$$

$$Mt = \frac{1}{3} mL^2 \omega + \frac{1}{2} m' r^2 \omega' + m' \times L\omega \times L$$

منظور سرعت زاویه ای مطلق دیسک است

اگر مفصل B روان نبود که چون گشتاور مقاوم آن، زوج عمل و عکس العمل ایجاد می کرد ⇐ تاثیری در انتگرال نداشت

1 معادله و 2 مجهول (ω و ω') ⇐ دیسک را به تنهایی نشان دهیم



$$\int \Sigma \bar{M}\, dt = \Delta H_B \Longrightarrow 0 = \Delta H_B$$

$$\rightarrow H_{B_1} = H_{B_2} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m' r^2 \omega' \Rightarrow \omega' = 0$$

دیسک فقط انتقال دارد (دوران ندارد)

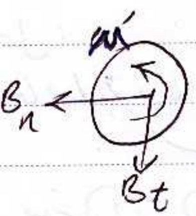
حالت 2 : اگر گیر مفاصل زیاد باشد (منظور مفصل B است) ⇐ مثل حا

از روش نیرو حداقل M' لازم برای یکپارچه حرکت کردن سیستم را می‌یابیم

با فرض اینکه M' کوچک است و سیستم یکپارچه عمل نمی‌کند داریم:

$$Mt = \frac{1}{3} mL^2 \omega + \frac{1}{2} m' r^2 \omega' + m' L^2 \omega$$

داریم:

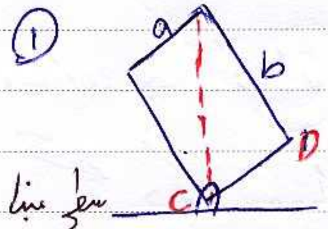


$$\int \Sigma \bar{M}\, dt = \Delta H_O \rightarrow$$

$$M' t = \frac{1}{2} m' r^2 \omega'$$

مثال:

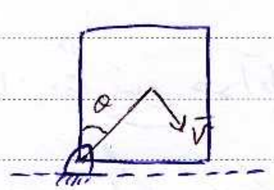
جعبه‌ای با ابعاد $a \times b$ داریم، قطر آن به صورت قائم است.



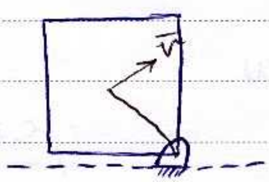
انحراف جزئی ایجاد می‌کنیم، حول c شروع به دوران می‌کند

ضریب اصطکاک در c، جهت عدم لغزش به اندازه‌ی کافی است

داریم:



(2) لحظه‌ی قبل از برخورد گوشه‌ی D با زمین (پرش زدن هم نداریم)



(3) لحظه‌ی بعد از برخورد گوشه‌ی D با زمین

← که کله کردن حول نقطه‌ی D با چه ωای آغاز می‌شود؟

حل:

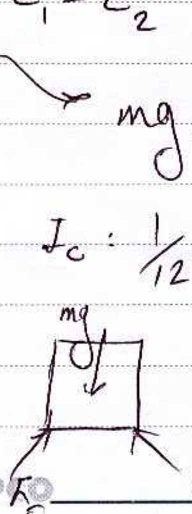
فاصله‌ی زمانی بین (2) و (3) خیلی کوتاه است.

بین (1) و (2) اتلاف انرژی نداریم (کار خارجی نداریم) پس: $E_1 = E_2$

$$mg\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = mg\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}m(a^2+b^2)\right]\omega_2^2$$

نکته: $I_c: \frac{1}{12}(a^2+b^2)m + m(a^2+b^2)/4 = \frac{1}{3}m(a^2+b^2)$

بین (2) و (3) F_D نجومی است و F_c به صفر میل می‌کند



$F_D \Rightarrow Q = \int_0^t F_D\, dt$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \int_0^t \Sigma M_D \, dt = \Delta H_D$$

از گشتاور mg و N نیز به علت معمولی بودن آن در مقابل نیروی ضربه‌ای F_D صرف نظر می‌کنیم

$$\longrightarrow \Delta H_D = 0 \Rightarrow H_{D_2} = H_{D_3}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{12} m(a^2+b^2)\omega_2 - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_2 \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \frac{b}{2} \times m$$

$$+ \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2} \times \omega_2 \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \frac{a}{2} = -\frac{1}{3} m(a^2+b^2)\omega_3$$

$\Leftarrow$ ω_3 یافت می‌شود!!

$\Leftarrow$ حال می‌توانیم Q و همچنین $\mu_{s_{min}}$ جهت عدم لغزش در t را بیابیم

$$\Rightarrow \int_0^t \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x \Rightarrow$$

$$-Q_x = \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_3 \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_2 \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\int_0^t \Sigma F_y \, dt = \Delta G_y \Rightarrow$$

$$+Q_y = \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2} \times \omega_3 \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{-m\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_2 \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

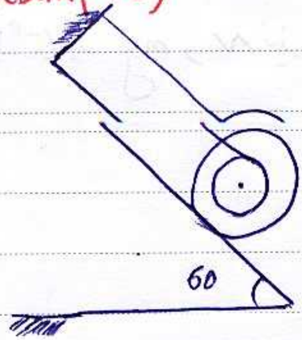
$$\Rightarrow Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$$

داریم: $\frac{Q_x}{\;} \simeq \frac{F_x}{\;} = \frac{F_s}{\;} = \mu$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

example)



$m = 5\,kg$ $\quad r_1 = 0.1\,m$

$r_2 = 0.15\,m$

$\bar{k} = 0.11\,m$

$\mu_s = 0.05\ ,\ \mu_d = 0.04$

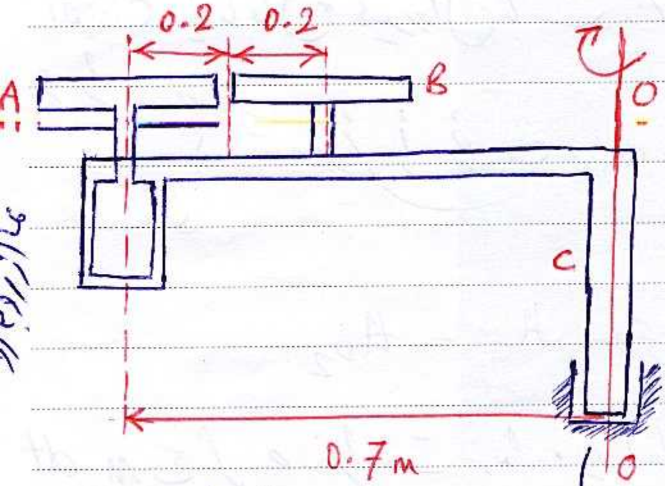
سرعت مرکز دیسک برحسب تابعی از زمان = ?

فرض مسئله:

طناب نسبت به قرقره لغزش ندارد.

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۹ Date. ۲۸

شنبه



این یاتاقان روان است

$\bar{m}_A = 18\,kg$
$\bar{k}_A = 85\,mm$
$r_A = 0.2\,m$

$m_B = 5\,kg$
$\bar{k}_B = 0.14\,m$
$r_B = 0.2\,m$

$m_c = 24\,kg$ $\quad k_{oo} = 0.45$

شعاع ژیراسیون c حول oo

$$\omega_{1c} = \frac{2\pi \times 38}{60}\ rad/s$$

$$\omega_{A/c} = \frac{2\pi \times 1720}{60}\ rad/s$$

A: شامل چرخ‌دنده، روتور و یک محور است

c: شامل لینک L شکل و استاتور الکتروموتور است

c حول oo می‌چرخد و الکتروموتور خاموش است (A, B نسبت به c دوران ندارند) حال:
کلید الکتروموتور را می‌زنیم. هنگامی که دور الکتروموتور به 1720 دور بر دقیقه برسد ← ω_c را در این حالت بیابید:

(دور الکتروموتور، دوری است که روتور نسبت به استاتور دارد)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر در C یا تاقان غیر روان باشد، باز هم برای ما مشکلی ایجاد نمی کند زیرا، گشتاوری را B به C و C به B وارد می کند که زوج عمل و عکس العمل هستند

$$\int \sum M_O \, dt = \Delta H_O \Rightarrow H_{O_1} = H_{O_2}$$

$\sum M_O$ را صفر است زیرا، یاتاقان اصلی را روان فرض کردیم و از مقاومت هوا صرف نظر کردیم!!

نکته: گشتاوری که روتور به استاتور وارد می کند و برعکس، استاتور به روتور وارد می کند، زوج عمل و عکس العمل هستند که دارای چرخش یکسان نیستند که کار آنها همدیگر را خنثی نمی کند $\Leftarrow E_1 \neq E_2$

حال ادامه مسأله:

$H_{O_1} = {}^{کل}I_{OO} \cdot \omega \leftarrow$ چون سیستم یکپارچه عمل می کند

$$\rightarrow H_{O_1} = \frac{\pi}{}(\underbrace{24 \times 0.45^2}_{\bar{I}_{C_{OO}}} + \underbrace{5 \times 0.14^2 + 5 \times 0.3^2}_{\bar{I}_{B_{OO}}} + \underbrace{18(0.085^2 + \cdots}_{I_{A_{OO}}}$$

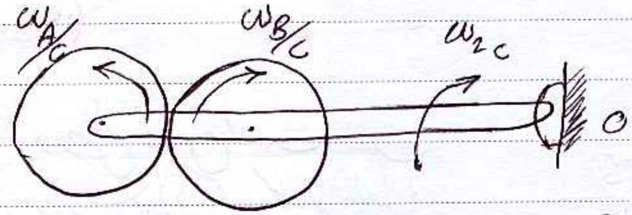
با فرض اینکه جهت ω_C عوض نشود داریم:

$H_O = 24 \times 0.45^2 \, \omega \quad + \quad \bar{I}\omega + m\bar{v}d$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

تمارین ۸۴ :



$\omega_{A/C} = \omega_{B/C}$ $\Leftarrow$ چون بین دو دیسک غلتش داریم و شعاع دو دیسک برابر است

$$\ldots + \bar{I}\omega = \underbrace{5 \times 0.14^2 (57\pi + \omega_{2c}) + 5 \times 0.3\,\omega_{2c} \times 0.3}_{H_{O_B}}$$

$$H_{O_A} = \bar{I}\omega + m\bar{v}d$$

$$H_{O_A} = 18 \times 0.085^2 (\omega_{2c} - 57\pi) + 18 \times 0.7^2\,\omega_{2c}$$

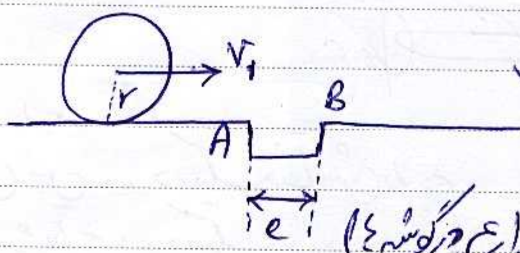
$$\longrightarrow H_{O_2} = 24 \times 0.45^2\,\omega_{2c} + H_{O_A} + H_{O_B}$$

$\longrightarrow$ یک معادله یک مجهول $\Leftarrow$ ω_{2c} یافت می‌شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴ هندسه شکل تغییر کند (زمان کوتاه نباشد) ←

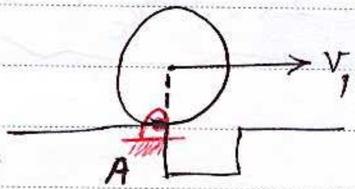
important) (example



دیسکی که در حال غلتش است به چاله‌ای می‌رسد (دیسک کاملاً صلب!)

مسأله را تجزیه و تحلیل کنید (لغزش نداریم در گوشه‌ها) (پرش زدن هم نداریم) V_4 را بیابید!

1:



در وضعیت 1، دیسک حول O می‌چرخد!

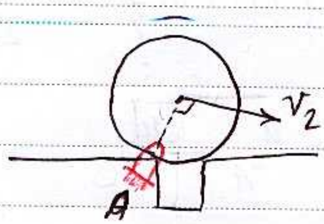
زمان قابل توجه $t_2 - t_1$ و

زمان بسیار کوچک $t_3 - t_2$

زمان قابل توجه $t_4 - t_3$

زمان‌ها نسبت به هم سنجیده می‌شوند

2:

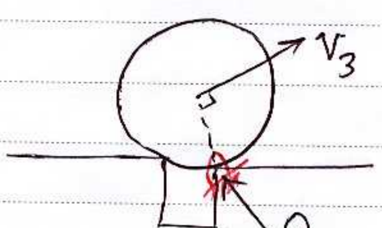


در وضعیت 2، دیسک مماس بر گوشه دوم است (B)

بین ① و ② اتلاف انرژی نداریم

$\Rightarrow E_1 = E_2 \rightarrow$ V_2 یافت می‌شود

3:



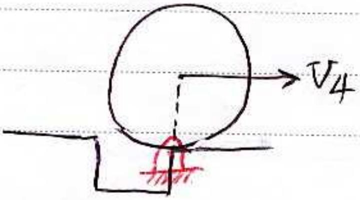
بین ② و ③، چون به مرور زمان N_A کاهش و N_B افزایش می‌یابد ⇐ در B ضربه خواهیم داشت

$$\Rightarrow \int \sum \cancel{M_B}\, dt = \Delta H_B$$

0 ← زمان بسیار کوتاه است

$\Rightarrow H_{O_2} = H_{O_3} \Rightarrow$ V_3 یافت می‌شود

4:

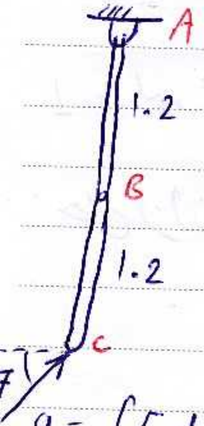


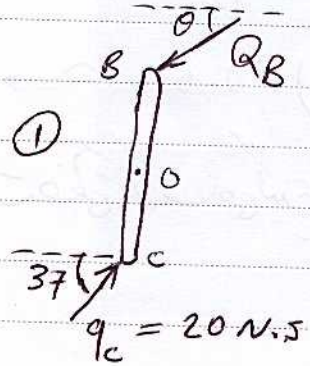
تمرین:

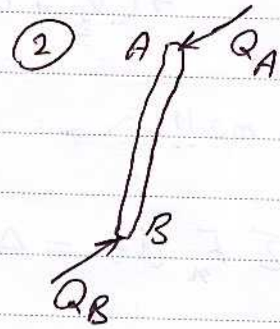
example)

ω هر کدام از لینک ها پس از وارد شدن ضربه (m = 4kg) زمان بسیار کوتاه است (0–t)

حل:







$q = \int F.dt = 20\,N.s$

حال داریم:

① $\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B$

* وقتی ضربه را به c وارد می کنیم یک α نجومی در لینک ها ایجاد می شود، چون زمان بسیار کوتاه است ← ω نجومی نیست ⇐ این ω نمی تواند θ به ما بدهد ⇐ هندسه شکل تغییر نمی کند (طی زمان 0–t)

(چرخش میله ناشی از ω است نه α)

پس:

با قرار دادن دستگاه بر روی B داریم:

$\bar{V}_{BC} = V_B + \omega_{BC} \times r_{OB}$ ⇒ چون میله نچرخیده است ← V_B در راستای x است

همچنین ω×r نیز در راستای x است ← $\bar{V}$ در راستای x است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Rightarrow \int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B$ ✓ برقرار است !!

$\rightarrow +20\cos 37 \times 1.2 = \frac{1}{12} \times 4 \times (1.2)^2 \, \omega_{BC} +$

$4(v_B + 0.6\,\omega_{BC}) \times 0.6$ ⟶ ۱ معادله و ۲ مجهول

help me!! ⟶ حال از اندازه حرکت خطی کمک می‌گیریم

$\int \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x \Rightarrow$

$20\cos 37 - Q_{B_x} = 4(v_B + 0.6\,\omega_{BC})$

② : $\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A \Rightarrow$

$Q_{B_x} \times 1.2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 1.2^2 \times \frac{v_B}{1.2}$

⟸ 3 معادله و 3 مجهول $(\omega_{BC}, Q_{B_x}, v_B)$

همچنین با خرج کردن معادله بعد $(\int_0^t \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x)$ می‌توانیم Q_{A_x}

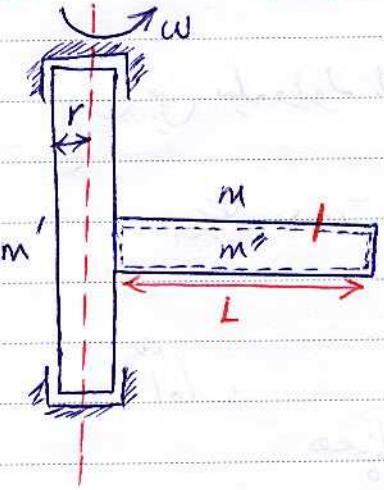
را نیز بدست آوریم که اگر این کار را انجام دهیم، خواهیم دید که:

$Q_{C_x} > Q_{B_x} > Q_{A_x}$

همچنین:

① $\Sigma F_y \, dt = \Delta G_y \longrightarrow (\Delta G_y = 0) \; \Sigma F_y \, dt = 0$

New example)



پین مانع حرکت لوله با جرم m'' داخل لوله m می باشد!

به یکباره پین می شکند، حال اگر میله به اندازهٔ $L/2$ از داخل لوله بیرون بیاید

$\Leftarrow$ سرعت نسبی که میله نسبت به لوله دارد و همچنین ω میله را بیابید.

فرضیات مسئله: یاتاقان ها روان هستند و مقاومت هوا ناچیز است

Solve :

$$\int \Sigma M_o \, dt = \Delta H_o$$

$\Delta H_o = 0 \Leftarrow \int \Sigma M_o \, dt = 0 \Leftarrow$ با توجه به فرضیات مسئله

$\longrightarrow H_{o_1} = H_{o_2} \Rightarrow$ (1: حالتی است که پین می شکند)

$$\frac{1}{2} m' r^2 \omega_0 + \left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(\frac{L}{2} + r\right)^2\right)\omega_0 + \left(\frac{1}{12} m'' L^2 + m''\left(\frac{L}{2} + r\right)^2\right)\omega_0 = H_{o_1}$$

$$H_{o_2} = \frac{1}{2} m' r^2 \omega + \left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(\frac{L}{2} + r\right)^2\right)\omega + \frac{1}{12} m'' L^2 \omega + \underbrace{m''(L+r)\omega \times (L+r)}_{m'' \bar{v} d}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{rel} + (L+r)\vec{\omega}$$

$\Rightarrow H_{O_1} = H_{O_2} \Rightarrow$ ω بدست می‌آید

چون بین میله و لوله، اصطکاک وجود ندارد $\Leftarrow E_1 = E_2$
$\Leftarrow$ v_{rel} بدست می‌آید

if: بین میله و لوله، اصطکاک وجود داشته باشد :

$\Rightarrow E_1 \neq E_2$

اما :

همچنان : $H_{O_1} = H_{O_2}$ زیرا

نیروی اصطکاک بین لوله و میله زوج عمل و عکس العمل هستند $\Leftarrow$ گشتاورشان حول O همدیگر را خنثی می‌کنند

حال برای محاسبه v_{rel} داریم :

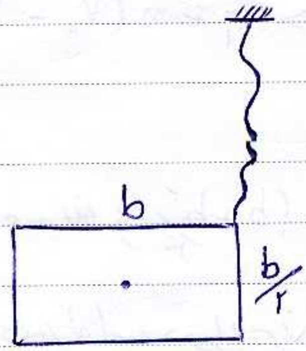
$$E_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m' r^2\right)\omega_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(r + \frac{L}{2}\right)^2\right)\omega_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m'' L^2 + m''\left(r + \frac{L}{2}\right)^2\right)\omega_0^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m' r^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(r + \frac{L}{2}\right)^2\right)\omega^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m'' L^2\right)\omega^2}_{\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2} + \underbrace{\frac{1}{2} m''\left(v_{rel}^2 + ((L+r)\omega)^2\right)}_{\frac{1}{2} m\bar{v}^2 ,\quad \bar{v}^2 = v_{rel}^2 + ((L+r)\omega)^2}$$

$\rightsquigarrow E_1 = E_2 \Rightarrow$ v_{rel} یافت می‌شود

نکته: اگر یاتاقان‌ها غیر روان باشند اما گشتاور مقاوم ثابتی داشته باشد

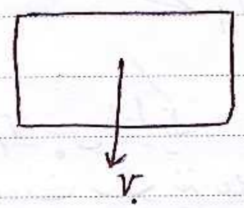
مثال:

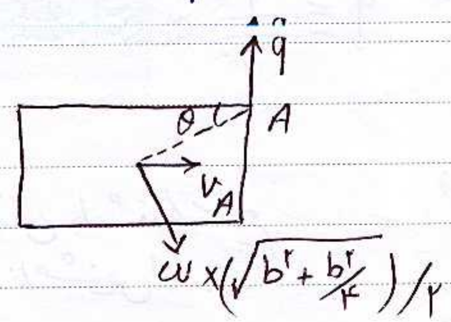


جرم جعبه m است و در ابتدا
طناب شل است

سرعت مرکز جعبه پس از اینکه طناب کاملاً
سفت شد؟
(پس زنش هم نداریم)

①





$\bar{V} = V_A + \omega \times r$

چون پس زنش نداریم ← سرعت نقطه A عمود بر طناب است چون جعبه
پس از سفت شدن طناب با فرض عدم پس زنش، حول نقطه A می‌چرخد

حال داریم:

$$\int_0^t \cancel{\sum F_x}\, dt = \Delta G_x \Rightarrow \left(\sin\theta = \frac{b}{2\sqrt{b^2+\frac{b^2}{4}}}\right)$$

$$0 = m\left(V_A + \omega b \times \frac{\sqrt{1.25}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{1.25}}\right) \Rightarrow V_A = \frac{-\omega b}{4}$$

حال 2 مجهول داریم و 1 معادله !!

$$\int^t \sum F_y\, dt = \Delta G_y$$

نیروی وزن در مقابل q، معمولی است

$$\Rightarrow q = m\left(-\frac{\omega b\sqrt{1.25}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1.25}} + V_0\right) \Rightarrow q = m\left(V_0 - \frac{\omega b}{2}\right)$$

$$\int \sum \bar{M}\, dt = \Delta \bar{H} \Rightarrow q \times \frac{b}{2} = \frac{1}{12} m \left(b^2 + \frac{b^2}{4}\right) \omega - 0$$

در لحظه اول، دوران نداریم (فقط انتقال داریم) ⇐ ω صفر است

$\Rightarrow$

$$q = \frac{1}{7} m \times 1.25 \times b\omega \Rightarrow$$

3 معادله و 3 مجهول

v_A یافت می‌شود.

if: پیش‌زنش داشته باشیم ⇐ جهت v_A پس از اینکه طناب سفت شد نیز علاوه بر اندازه‌اش نامشخص است

یک مجهول دیگر به معادلات ما اضافه خواهد شد ⇐ 3 معادله و 4 مجهول

در ادامه حل این مسأله داریم:

$$\dots \Rightarrow \omega = \frac{V_0}{0.7b}, \quad V_A = -0.35\, V_0$$

$$\bar{V} = \left(-0.35 V_0 + \frac{V_0}{4 \times 0.7}\right) i - \frac{V_0}{1.4} j = \frac{-V_0}{1.4} j$$

$\Rightarrow$

$$E_1 = \frac{1}{2} m V_0^2, \quad E_2 = \frac{1}{2} m \bar{V}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m \frac{V_0^2}{1.96} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m \left(b^2 + \frac{b^2}{4}\right)\right) \frac{V_0^2}{b^2 \times 0.49}$$

$$E_2 = 0.36\, m V_0^2 \Rightarrow E_1 \neq E_2$$

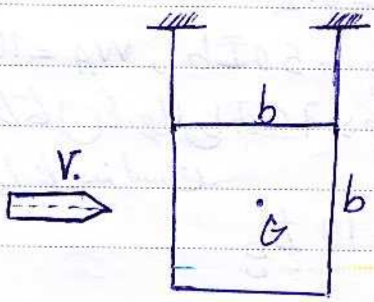
example)

good!!

گلوله‌ای با جرم m و با سرعت اولیه V_0

به جعبه‌ای با ابعاد $b \times b$ و جرم M

برخورد می‌کند

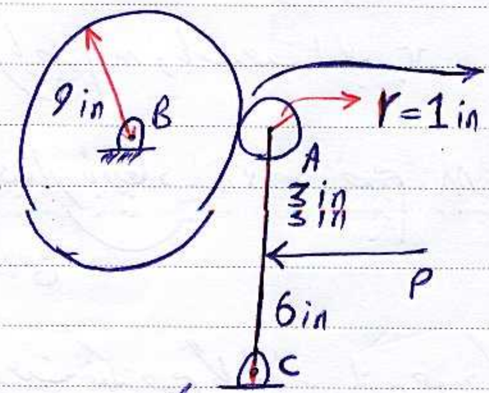


که سرعت مرکز جرم گلوله را پس از برخورد گلوله

بیابید:

زمان برخورد گلوله با جعبه بسیار کوتاه است $\Leftarrow$ هندسه شکل تغییر نمی‌کند

~ New example ~



$\mu_k = 0.2$

$W_B = 50\,Lb$, $W_A = 10$

تاکان ٤ روان هستند و مقاومت هوا ناچیز است.

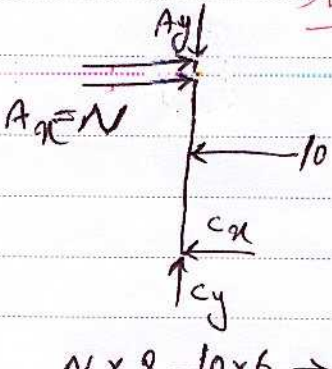
$P = 10\,Lb$

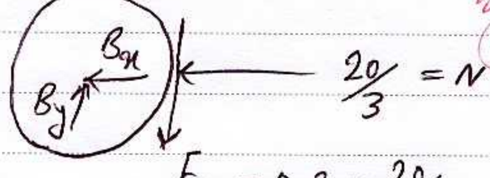
(الکتروموتور به A متصل است) ثابت است $\omega_A = \frac{1200 \times 2\pi}{60} = 40\pi\ rad/s$

در ابتدا 2 دیسک باهم تماس ندارند ⇐ با اعمال نیروی P ، دو دیسک را به هم تماس می دهیم ⇐ سازه را تجزیه و تحلیل کنید!! (هر چیزی را که می توانید بدست بیاورید)

در ابتدا :

لغزش داریم و سپس با افزایش ω_B ⇐ لغزش به غلتش تبدیل می شود و دو دیسک با سرعت ثابت نسبت به هم خواهند چرخید :





$F_s = 0.2 \times \frac{20}{3}$

$N \times 9 = 10 \times 6 \Rightarrow N = \frac{20}{3} \Leftarrow \Sigma M_c = 10 \times 6$

پس از 10 s ، سرعت زاویه ای دیسک بزرگ را بیابید :

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ابتدا زمان تبدیل لغزش به غلتش را می‌یابیم ⇐

if: $t_c < 10$ ⇒ ω دیسک بزرگ، ω ای است که غلتش داریم

else: ⇝ باید محاسبه کنیم!! (hard!)

$$\Rightarrow \int_0^t \sum M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3}\times\frac{9}{12}\right)t = \frac{1}{2}\times\frac{50}{32.2}\times\left(\frac{9}{12}\right)^2 \omega_2 \qquad (1)$$

وقتی لغزش تبدیل به غلتش می‌شود ⇐ ω تغییر نخواهد کرد ⇐ f_s باید صفر شود زیرا شتاب زاویه‌ای‌مان صفر خواهد شد!

البته اگر حالت ایده‌آل را در نظر نگیریم (یاتاقان‌ها روان و مقاومت هوا ناچیز!)

⇐ حتی اگر لغزش به غلتش تبدیل شود باز هم f_s خواهیم داشت

یعنی به طور کلی:

f_s مرتبط با گیر سیستم است (پس از لغزش)

f_s در غلتش می‌تواند بین ۰ و $f_{s_{max}}$ تغییر کند. ok!!

در لحظه‌ای که غلتش آغاز خواهد شد ⇐ $\omega_1 = \omega_2$

$$\Rightarrow r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1200\times 2\pi}{60\times 9}$$

$$\left(\frac{4}{3}\times\frac{9}{12}\right)t_c = \frac{1}{2}\times\frac{50}{32.2}\times\left(\frac{9}{12}\right)^2\times\frac{1200\times 2\pi}{60\times 90}$$

$1200\times 2\pi$

Subject:

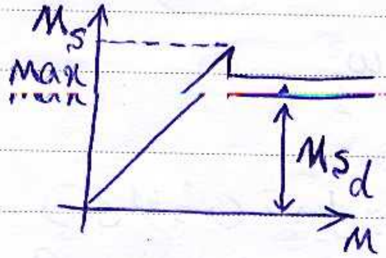
Year. Month. Date. ( )

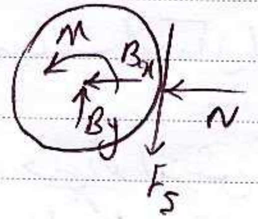
if $t < t_c \Rightarrow$ زمان را مستقیماً در معادله 1 گذاشته و ω را محاسبه می‌کنیم

good example)

مثال درادامه همان مثال، اگر مفصل B غیر روان باشد ⇐ مسأله را تحلیل کنید!

نمودار گشتاور مقاوم مفصل B ⟵





$$\sum M_B = M \Rightarrow F_s \cdot r = M$$

$$M = \frac{4}{3} \times \frac{9}{12} = 1 \ \text{Lb.Ft}$$

if $M > M_s \Rightarrow$ دیسک بزرگ خواهد چرخید

else,

دیسک بزرگ نخواهد چرخید

⇐ با در نظر گرفتن،

$M_{s_d} = 0.7$ ، $M_{s_{max}} = 0.8$ جلو می‌رویم!!

$$\int_0^t \sum M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{9}{12} - 0.7\right) t = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 \omega_2$$

WOW example) ⇒ اگر ۰ → μ_s ⇐ مسأله گولاخ می‌شود!!

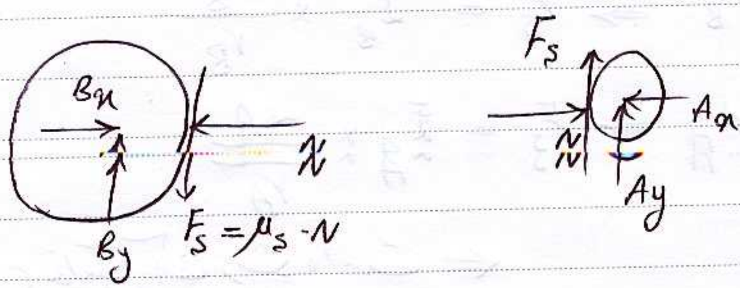
$2! \frac{\mu}{\mu_s}$

حال اگر در همان مثال اول، اگر ω_A ثابت نباشد (الکتروموتور به A متصل نباشد)

که با تجزیه و تحلیل مسأله، هر چیزی را که می‌توانید (تا پتانسیلش را دارید!!) بیابید:

ω_A ثابت نیست ⇐ ω_A قبل از برخورد دو دیسک با هم، همان ω_A ای است

که در مثال به ما داده‌اند



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow N = \frac{20}{3}$$

حال:

$$\int_0^t \sum M_A \, dt = \Delta H_A \Rightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{12}\right)t = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \omega_A + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \times 40\pi$$

همچنین:

$$\int_0^t \sum M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow \left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{12}\right)t = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 \omega_B$$

حال اگر بخواهیم t_c را بیابیم داریم:

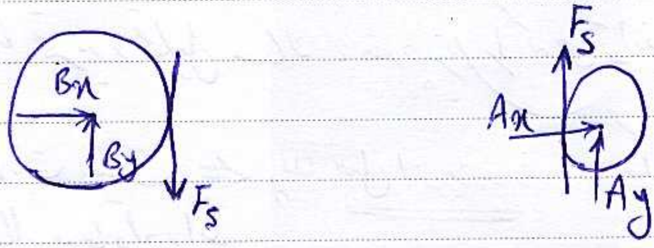
$$1 \times \omega_A = 9 \times \omega_B$$

t_c پیدا می‌شود!!

question)

چرا وقتی غلتش آغاز می‌شود ، $F_s = 0$

زیرا:



$$F_s \times r_B = \bar{I}_B \alpha_B \Rightarrow F_s = \bar{I}_B \times \frac{\alpha_B}{r_B}$$

$$F_s \times r_A = \bar{I}_A \alpha_A \Rightarrow F_s = \bar{I}_A \times \frac{\alpha_A}{r_A}$$

چون غلتش آغاز شده است $\Leftarrow$ $r_A \alpha_A = r_B \alpha_B$

$$\rightarrow \bar{I}_B \frac{r_A \alpha_A}{r_B^2} = \bar{I}_A \frac{\alpha_A}{r_A} \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{I}_B}{\bar{I}_A} = \frac{r_B^2}{r_A^2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} m_B r_B^2}{\frac{1}{2} m_A r_A^2} \Rightarrow m_B = m_A$$

لزومی ندارد که $m_B = m_A$ $\Leftarrow$
F_s باید صفر باشد

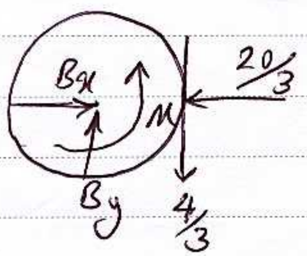
تذکر: در مهندسی ، بررسی نقطه یا لحظه یا شرایط خاص ، ملاکی برای حل مسأله نیست

Subject:
Year. Month. Date. ( )

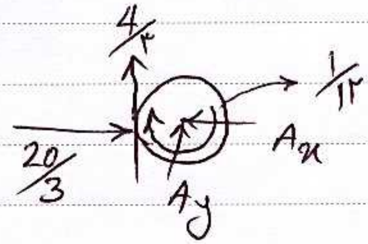
top example)

دوباره در همان مثال !
اگر در مفاصل A و B گشتاور مقاوم وجود داشته
باشد (غیر روان باشند) ← زمان توقف سیستم را بیابید (آیا ۲ دیسک
باهم متوقف می‌شوند؟)

B:



A:



$M_{sd_A} = 1/12$

Solve:

Ⓑ: $\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$

$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{9}{12} - 0.7\right) t = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\right)\left(\frac{9}{12}\right)^2 \omega_B$$

Ⓐ: $\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A \Rightarrow$

$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) t = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \omega_A +$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \times 40\pi$$

با فرض، تبدیل لغزش به غلتش ←

$1 \times \omega_A = 9\,\omega_B$

else:

با هم متوقف خواهند شد!

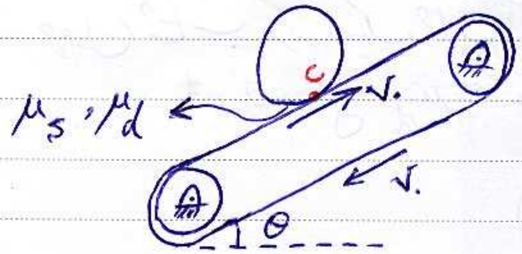
حال این زمان توقف را چگونه بیابیم؟؟

13-16 بعد از ظهر

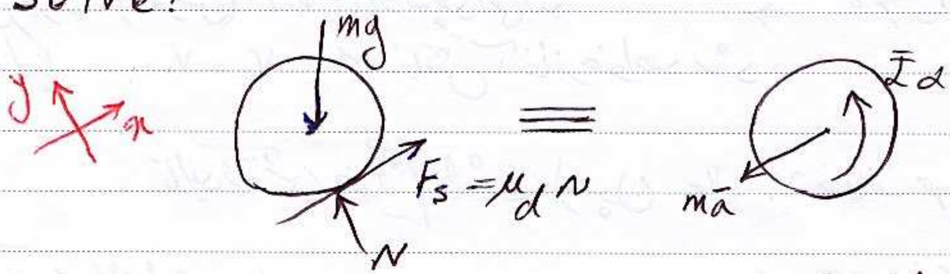
دوشنبه:

مثال:

دیسکی به جرم و شعاع: m و r
بر روی تسمه نقاله ای قرار گرفته است
که تسمه با سرعت ثابت می چرخد
← بررسی حرکت دیسک :



Solve:



قطعاً در ابتدا لغزش داریم چون در ابتدا سرعت دیسک صفر است اما سرعت تسمه v_0 است اما از لحظه ای که سرعت دیسک برابر $\bar{v}$ شود ← غلتش خواهیم داشت

با فرض لغزش:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow \mu_d \times mg\cos\theta - mg\sin\theta = -m\bar{a}$$

$$\Rightarrow \bar{a} = g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \longrightarrow \mu_d\, mg\cos\theta \times r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = (2\mu_d\, g\cos\theta)/r$$

$V_c = \bar{V} + \omega \times r$

با فرض $\sin\theta > \mu_d \cos\theta$:

$V_c = -\bar{V} + r\omega$

چون شتاب مرکز دیسک ثابت است ($\bar{a} = ect$ ، $\alpha = ect$) $\Leftarrow$ $\bar{V} = \bar{a} t \,,\ \omega = \alpha t$

$V_c = -g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)t + 2\mu_d g\cos\theta \cdot t$

$\rightsquigarrow V_c = gt(3\mu_d \cos\theta - \sin\theta)$

if: $V_c > 0 \Rightarrow$ این حرکت (لغزش) تا زمانی ادامه پیدا می‌کند
تا اینکه $V_c = V_0 \Rightarrow$ غلتش آغاز خواهد شد

else:

تا ابد لغزش خواهیم داشت (چون V_c و V_0 خلاف جهت هم هستند)

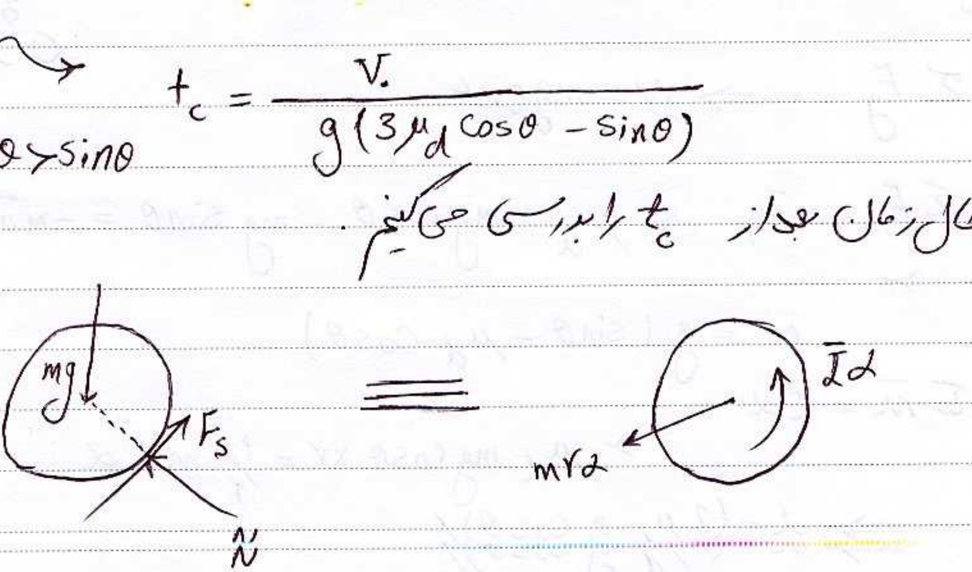
$\Leftarrow$ با افزایش زمان V_c همان طور افزایش خواهد یافت (غلتش نداریم)

حال در حالت اول، زمانی که لغزش به غلتش تبدیل می‌شود (ما می‌خواهیم این گونه بشود)

$V_c = V_0 \rightsquigarrow t_c = \dfrac{V_0}{g(3\mu_d \cos\theta - \sin\theta)}$

$\Rightarrow 3\mu_d \cos\theta > \sin\theta$

حال زمان بعد از t_c را بررسی می‌کنیم.



$\sum F = m\bar{a} \Rightarrow F_s - mg\sin\theta = -mr\alpha \Rightarrow F_s = -mr\alpha + mg\sin\theta$

3: لحظه ای که غلتش داریم

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \cdot r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \Rightarrow F_s = \frac{1}{2} m r \alpha$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} r\alpha = -r\alpha + g\sin\theta \Rightarrow \frac{3}{2} r\alpha = g\sin\theta \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3r} g\sin\theta$$

$$\rightarrow F_s = \frac{1}{2} m \times \frac{2}{3} g\sin\theta \Rightarrow F_s = \frac{mg}{3}\sin\theta$$

حال سرعت مرکز دیسک را در لحظه ابتدایی غلتش (لحظه آخر لغزش) را می یابیم

$$\bar{v} = r\omega - v_c = r\omega - v_0 \quad , \quad \omega = \alpha t_c \, , \; \alpha = \frac{2\mu_d g\cos\theta}{r}$$

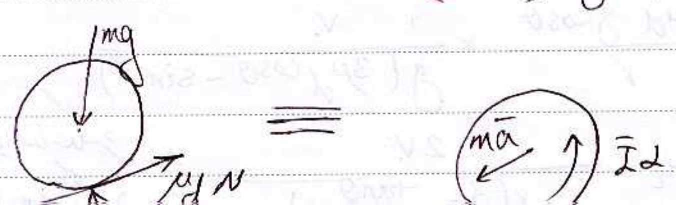
$$\rightarrow \bar{v}_2 = v_0 \left(-1 + \frac{2\mu_d \cos\theta}{3\mu_d \cos\theta - \sin\theta} \right)$$

حال $\bar{v}$ را در موقعیت 3 می یابیم:

$$\bar{v}_3 = v_0 + r\omega \, , \quad \omega = \omega_2 + \alpha t \Rightarrow \bar{v}_3 = v_0 + (\omega_2 + \alpha t) r$$

نیروی اصطکاک بین 1-2 و 2-3 باهم کاملاً متفاوت است.

DY حاج موسی یک مثال را دو بار ه حل کرده: $\Leftarrow$ صفحه 112 صفحه 88 نو



$\Rightarrow N = mg\cos\theta$,

$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow \mu_d \cdot mg\cos\theta - mg\sin\theta = -m\bar{a}$

$\rightarrow \bar{a} = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)$ با فرض: $\sin\theta > \mu_d\cos\theta$

$\sum \bar{M} = I\alpha \Rightarrow \mu_d \cdot mg\cos\theta \times r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \Rightarrow$

$\alpha = \dfrac{2\mu_d \cdot g\cos\theta}{r}$

حال در پایان لغزش:

$V_c = \bar{V} + \omega \times r \Rightarrow V_c = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)t + (2\mu_d\, g\cos\theta)t$

$V_c = at + V_0 \Rightarrow V_c = gt(-\sin\theta + 3\mu_d\cos\theta)$

با فرض: $3\mu_d\cos\theta > \sin\theta$

if $V_c = V_0 \rightarrow$ غلتش آغاز می‌شود

else: هیچ گاه غلتش آغاز نخواهد شد!

$\Rightarrow V_0 = V_c \Rightarrow t_c = \dfrac{V_0}{g(3\mu_d\cos\theta - \sin\theta)}$

criticle

① لغزش داریم ② غلتش آغاز می‌شود ③ غلتش داریم

$\Rightarrow \omega_2 = \alpha t_c = \dfrac{2\mu_d\, g\cos\theta}{r} \times \dfrac{V_0}{g(3\mu_d\cos\theta - \sin\theta)}$

$(\omega_2 = \alpha t + \omega_1) \Rightarrow \omega_2 = \dfrac{2V_0}{(3 \ldots \tan\theta \ldots}$ چون باید ساعتگرد [illegible]

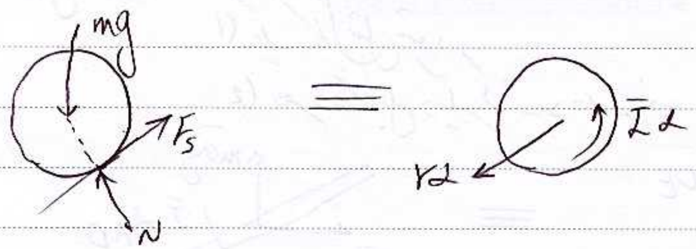
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\bar{v}_2 = \bar{a}t + \cancel{\bar{v}_1}^{\,0} \Rightarrow \bar{v}_2 = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)\frac{v_0}{g(3\mu_d\cos\theta - \sin\theta)}$$

$$\to \bar{v}_2 = v_0\frac{\sin\theta - \mu_d\cos\theta}{3\mu_d\cos\theta - \sin\theta} \Rightarrow \bar{v}_2 = v_0\frac{\tan\theta - \mu_d}{3\mu_d - \tan\theta}$$

چون $\bar{a}$ به سمت پایین بدست آمد $\bar{v}_2$ هم به سمت پایین است.

حال وضعیت 3



$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_s - mg\sin\theta = -mr\alpha$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \cdot r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mr\alpha - mg\sin\theta = -mr\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}r\alpha = g\sin\theta \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3r}g\sin\theta$$

$$\Rightarrow \omega_3 = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega_3 = \frac{2v_0}{r\left(3 - \frac{\tan\theta}{\mu_d}\right)} + \frac{2}{3r}g\sin\theta \cdot t$$

$$\Rightarrow \bar{v}_3 = v_0 - r\omega_3 \to \bar{v}_3 = v_0 - \left(\frac{2v_0}{3 - \frac{\tan\theta}{\mu_d}}\right) - \frac{2}{3}g\sin\theta \times t$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

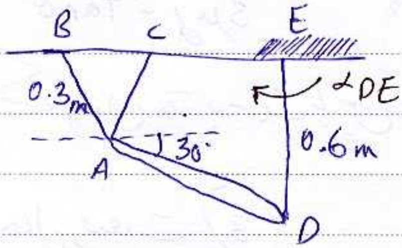
example)

میله توسط 3 کابل مهار شده است، طول میله 1.2m و m=12kg

⇐ یکی از 3 کابل را به دلخواه پاره می‌کنیم

وضعیت حرکت پس از پاره شدن یکی از کابل‌ها

(بحث پاره شدن دو کابل دیگر منتفی است)

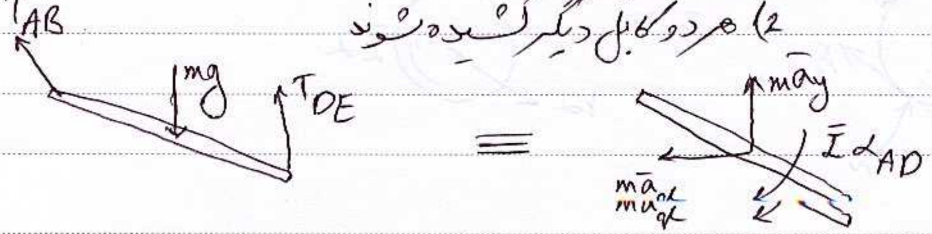


کابل AC را پاره می‌کنیم:

2 فرض محتمل است:

1) یک کابل شل شود

2) هر دو کابل دیگر کشیده شوند



⇐ 3 معادله و 5 مجهول

$$\bar a = a_{A_t} + \dot\omega \times r \Rightarrow$$

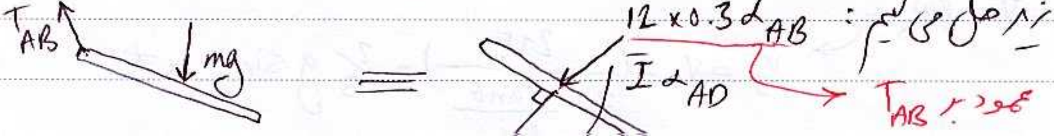
$$\bar a = 0.3\,\alpha_{AB}(-\cos 30\, i - \sin 30\, j) + 0.6\,\alpha_{AD}(-\sin 30\, i - \cos 30\, j)$$

$$\bar a_x\, i + \bar a_y\, j = -0.6\,\alpha_{DE}\, i + 0.6\,\alpha_{AD}(\sin 30\, i + \cos 30\, j)$$

⇐ 7 معادله و 7 مجهول

T_{DE} ، T_{AB} پیدا می‌شود ⇐ اگر هر دو مثبت شد مسئله تمام است و هیچ کدام از کابل‌ها از سیستم خارج نمی‌شود

اما اگر یکی از دو کابل منفی شد ⇐ یعنی آن کابل از مدار خارج شده است و مسئله را مجدداً به صورت زیر حل می‌کنیم:

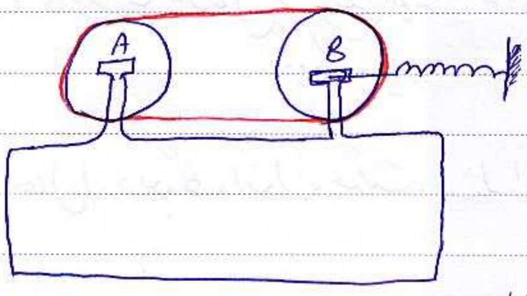


Subject:
Year. Month. محرم Date. 12 ( )

صبح 7-10

example)

تسمه و چرخ دنده‌ی مطلوب است
2 پولی و یک تسمه و دو دیسک یکنواخت
که وزن آنها معلوم است، توسط یک
فنر کشش اولیه در تسمه‌ی ایجاد می‌شود



$W_A = W_B = 30\ Lb$

فنر $F = 15\ Lb$ $\quad r = 1.5\ Ft$

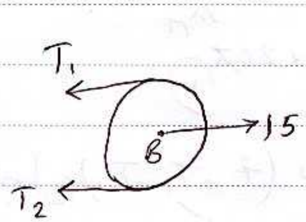
گشتاور $M_A = 20\ Lb.Ft$

$\Rightarrow \begin{cases} t = ? \\ \omega = 600\ rpm \end{cases}$ ← دور سیستم

کشش در دو طرف تسمه $\begin{cases} T_1 = ? \\ T_2 = ? \end{cases}$

فرض: جرم تسمه ناچیز است؛

./solve/.

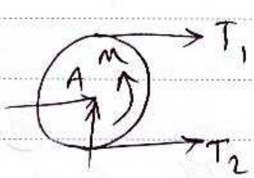


$\Rightarrow \sum M_B = 0 \Rightarrow T_1 r - T_2 r = 0$

$\Rightarrow T_1 = T_2 = T$

$\Rightarrow 15 = 2T \Rightarrow T = 7.5$

حال دستگاه را روشن می‌کنیم (الکتروموتور روی A می‌باشد):



$\sum M_A = M + T_2 r - T_1 r = 0$

* اگر دور ثابت باشد در نهایت $\alpha = 0$ می‌شود و
عبارت بالا برابر صفر خواهد شد

$\Rightarrow$

$M = (T_1 - T_2) r$ ⇝ زمانی صحیح است که دور ثابت باشد

* هرچی M بیشتر ⇐ $T_1 - T_2$ بیشتر می‌شود یعنی T_1 همین طور بیشتر از T_2 می‌شود
تقریباً شبیه به زنجیر دوچرخه، که البته حالت خوبی نیست چون امکان دررفتن وجود دارد

سیستم از کار بیفتد.

ولی در اینجا به دنبال شرایطی میگردیم که دور ثابت نشده، یعنی

$M + T_2 r - T_1 r = I\alpha$ ⟵ دین گاه بیرون

حال از دید گاه اندازه حرکت، مسئله را بررسی میکنیم:

$$\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A$$

$$\Rightarrow (M + T_2 r - T_1 r)\, t = H_{2A} - \cancel{H_{1A}}^{\,0}$$

در سیستم انگلیسی هیچگاه جرم را نمی‌دهند

$$(M + T_2 r - T_1 r)\, t = H_{2A} \quad , \quad H_{2A} = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{30}{32.2}}_{m_A} \times \underbrace{(1.5)}_{r}{}^2 \times \underbrace{\left(\frac{2\pi \times 600}{60}\right)}_{\omega}$$

$$\Rightarrow \left(20 + 1.5(T_2 - T_1)\right) t = \frac{15}{32.2} \times 1.5 \times 20\pi \qquad (1)$$

یک معادله و 3 مجهول (t و T_2 و T_1) پس به سراغ B میرویم و همین معادله را تکرار میکنیم

* باید ببینیم که در B مصرف کننده داریم که در این صورت باید گشتاور مقاوم در B قرار دهیم ولی در غیر این صورت گشتاور مقاوم نداریم.

$$\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$$

$$(T_1 r - T_2 r)\, t = H_{2B} = \frac{1}{2} \times \frac{30}{32.2} \times (1.5)^2 \times \left(\frac{2\pi}{60} \times 600\right) \qquad (2)$$

ω ها برابر است زیرا شعاع ها یکسان است و بین تسمه و چرخ تسمه لغزش وجود ندارد.

⟵ 2 معادله و 3 مجهول ⟸ باید به دنبال معادله سوم باشیم ⟸

Subject:
Year. Month. Date. ( )

*** در شرایط دینامیکی، چرخ دنده B در راستای x دارای شتاب نیست پس $\sum F_x = 0$

- تا زمانی معتبر است که T_2 صفر نشود. $\Rightarrow$ $T_1 + T_2 = 15$ (3)

3 معادله و 3 مجهول

* حال اگر دور را مجهول قرار دهیم اگشتاور تعادم متناسب دور می باشد)

بین تسمه و چرخ دنده لغزش نداریم. برای این کار نیاز به حداقل اصطکاک داریم:

static: $\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu \beta}$ β: زاویه ی بین T_1 و T_2 که برحسب رادیان است

باشرط $T_1 > T_2$

$\Rightarrow \ln \frac{T_1}{T_2} = \mu \beta \Rightarrow$

هرچی اختلاف T_1، T_2 بیشتر باشد $\Rightarrow$ $\ln$ بزرگتر $\Rightarrow$ $\mu \beta$ برای عدم لغزش باید بیشتر

که باید یا μ را زیاد کنیم یا β، که این اوصاف در شرایط استاتیکی بود و در دینامیک اگر وزن تسمه مطرح شود $\Rightarrow$ کار کمی فرق می کند

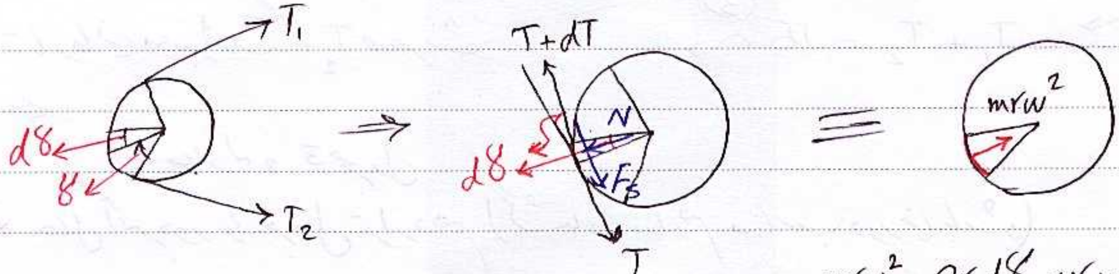
* گشتاور انتقالی به اختلاف T_1 و T_2 بستگی دارد.

اگر یکی از pull ها گشتاور ماکزیمم اندازه اش فرق داشته باشد، شکل به صورت روبه رو تبدیل می شود

$\Rightarrow$ لغزش در پولی اتفاق می افتد که زاویه تماس کمتری داشته باشد

continue on the next page $\Rightarrow$

پیکره آزاد تیکه کوچک از تسمه را رسم می کنیم.



$$mr\omega^2 = \rho r d\theta \times r\omega^2$$

* شکل را در صفحه افق می گیریم تا از وزن صرف نظر کنیم
هدف : گشتاور انتقالی max را می خواهیم پیدا کنیم

محدودیت : گشتاور انتقالی max در لغزش و یا پاره کردن می باشد یعنی در آستانه لغزش
پس $F_s = \mu_s N$

زمانی که هنوز به دور نهایی نرسیده است و یا رسیده (2 حالت)

1) ابتدا دور ثابت ⇐ $\alpha = 0$ پس فقط شتاب نرمال داریم. (kg/m) ρ جرم واحد طول تسمه است

⇐ اگر چگالی را دادند ⇐ $\frac{kg}{m^3} \times m^2 = \frac{kg}{m} = \rho$

اصل دالامبر:

در پیکره آزاد هر چی وجود دارد برعکس می کنیم و در پیکره نیرو قرار می دهیم و می گوییم در پیکره نیرو، یک نیروی گریز از مرکز وارد می شود و پیکره آزاد شتاب را حذف می کنیم.

Continue on the next page

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دیگر محیط ذره می باشد چون المان کوچک می باشد:

$$\sum F_t = m a_t$$

$$\Rightarrow (T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} - T\cos\frac{d\theta}{2} - F_s = 0$$

دور ثابت است!

$$\Rightarrow dT = \mu_s N \quad (1)$$

$$\sum F_n = m a_n \Rightarrow N - (T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} - T\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = r^2\omega^2\rho\, d\theta$$

هم ارز بی نهایتی : $\sin\frac{d\theta}{2} = \tan\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2} \qquad \frac{d\theta}{2} \to 0$

$$\Rightarrow N - T\,d\theta = (r\omega)^2\rho\, d\theta \Rightarrow N = \left(T+\rho(r\omega)^2\right)d\theta \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow dT = \left(T+\rho(r\omega)^2\right)d\theta \times \mu_s$$

$$\Rightarrow \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T+\rho(r\omega)^2} = \int_0^{\beta} \mu_s\, d\theta \xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{انتگرال}}$$

β را از هندسه شکل بدست می آوریم

$$\Rightarrow \ln\left(T+\rho(r\omega)^2\right)\Big|_{T_2}^{T_1} = \mu_s\beta \Rightarrow \ln\frac{T_1+\rho(r\omega)^2}{T_2+\rho(r\omega)^2} = \mu_s\beta$$

$$\Rightarrow \frac{T_1-\rho(r\omega)^2}{T_2-\rho(r\omega)^2} = e^{\mu_s\beta} \longrightarrow \text{لازم}$$

منفی درست است

⇐ اگر لازم از اختیار کمتر بود، عملی است

در غیر این صورت عملی نیست

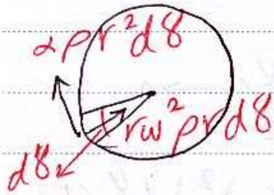
(منفی درست است چون جهت ε را اشتباه گرفته بودیم)

حال به ازای یک T_1 و T_2 ثابت، هرچی $\rho(r\omega)^2$ بیشتر شود کسر در کل بزرگتر می‌شود یعنی

۲. μ_s بیشتری نیازمند هستیم. هرچی تسمه سنگین‌تر باشد نیاز به μ بیشتری داریم
یعنی هر چی جرم را کمتر کنیم مناسب‌تر می‌باشد

رابطه با θ در کتاب طراحی اجزا آنزامی فوانیر (صفحه قبلی)

* حال اگر دور ثابت نباشد، در یک جزء شتاب داریم:



$$\Rightarrow \sum F_t = m a_t \Rightarrow$$

$$(T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} - T\cos\frac{d\theta}{2} - F_s = \rho r^2 \alpha\, d\theta$$

$$\rightarrow \boxed{\cancel{dT - F_s = \rho r^2 \alpha\, d\theta}}$$

اگر در شرایط $\max$ استاتیک باشیم $\Leftarrow$

$$dT - \mu_s N = \rho r^2 \alpha\, d\theta \quad (1)$$

$$\sum F_n = m a_n \Rightarrow -N + (T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} + T\sin\frac{d\theta}{2} = \rho r^2 \omega^2 d\theta$$

$$\rightarrow N = -\rho r^2 \omega^2 d\theta + T d\theta \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow dT = \mu_s (T - \rho r^2 \omega^2)\, d\theta + \rho r^2 \alpha\, d\theta$$

$$\Rightarrow dT = d\theta(\mu_s T - \mu_s \rho r^2 \omega^2 + \rho r^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{\mu_s T - \mu_s \rho r^2 \omega^2 + \rho r^2 \alpha} = d\theta \xRightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}}$$

$$Ln\,\frac{\mu_s T_1 - \mu_s \rho r^2 \omega^2 + \rho r^2 \alpha}{\mu_s T_2 - \mu_s \rho r^2 \omega^2 + \rho r^2 \alpha} = \mu_s \beta$$

چون در هر دو طرف μ_s داریم $\Leftarrow$ نمی‌توانیم زیاد روی آن بحث کنیم

μ_s ای که داریم باید در این رابطه صدق کند وگرنه به این مرحله نخواهیم رسید.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جمع بندی:

* اگر نیروی خواسته شد ⇐ روش نیرو
* شتاب = ؟ ⇐ روش نیرو

*
بعد از طی مسافت مشخص یا بعد از طی زمان مشخص یا زاویه مشخص ⇐ سرعت خواسته شود ⇐ Energy method ، روش اندازه حرکت
مسافت ← Energy method
زمان ← روش اندازه حرکت

* بعد از طی مسافت مشخص ← سرعت چند نقطه یا سرعت زاویه ای ⇐ روش انرژی ⇐ u کار عامل خارجی بود

اگر بحث کار نیروی اصطکاک پیش بیاید، موقعی که نیروی اصطکاک به نقطه ای وارد شود در آن نقطه سرعت داشته باشیم البته در راستای نیروی اصطکاک، در لغزش معمولاً این گونه است اما اگر لغزش نداشتیم دقت می خواهد

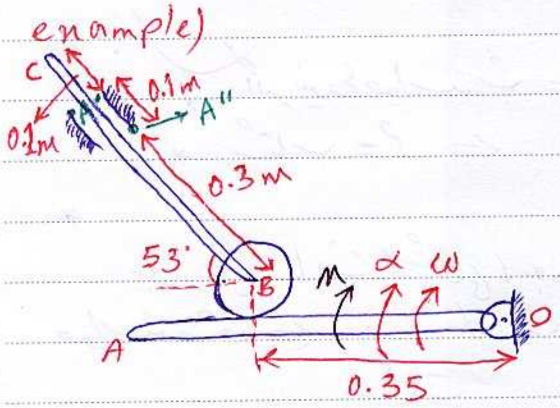
وقتی بحث لغزش پیش می آید $F_k = N\mu_k$ ، اگر N ثابت باشد کار راحت است ولی اگر ثابت نبود، دو حالت پیش می آید که N تابع موقعیت یا تابع طول باشد چون از متد انرژی استفاده می کنیم، طول و زاویه در روابط ظاهر می باشد پس برای محاسبه ی کار نیروی اصطکاک مشکلی به وجود نمی آید اما اگر N تابع سرعت باشد (بدترین حالت) که چنین حالتی در اکثر موارد زمانی پیش می آید که حرکت در مسیر منحنی می باشد که حتماً به معادله دیفرانسیل می رسیم

۱۲/اسفند/۸۸

اسماعیل بهشتی

PAPCO

example)



تحلیل نیروها در قسمت های مختلف:

$\begin{cases} m_{OA} = 10\,kg \\ OA = 0.5\,m \end{cases}$ $\begin{cases} m_B = 4\,kg \\ r_B = 0.1\,m \end{cases}$

$m_{CB} = 8\,kg$ $\begin{cases} \alpha = 10\,rad/s^2 \\ \omega = 4\,rad/s \end{cases}$

شکل در صفحه قائم قرار دارد. گشتاور M را بیابید که ω و α داده شده را ایجاد کند (راهنما (میله راهنما) صیقلی است)

: or

نیروی O چه نیرویی را تحمل می کند

: or

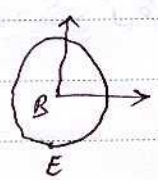
اگر غلتش کامل باشد حداقل اصطکاک را بیابید:

: or

نیروی موجود در مفصل B

* راه حل:

چون می خواهیم از متد نیرو استفاده کنیم و α، ω را داریم ⇐ اول باید α، ω هر جزء را مشخص کنیم:



$V_E = V_B + \omega \times r$

$\Rightarrow (0.35 \times 4)j = V_B(-\cos 53 i + \sin 53 j) + \omega_{دیسک} \times 0.1$

با فرض پادساعتگرد بودن ω_B

$\Rightarrow 1.4 = 0.8 V_B \Rightarrow V_B = 1.75$

$0 = -1.75 \times 0.6 + 0.1\omega_B \Rightarrow \omega_B = 10.5\,rad/s$

$$a_E = a_B + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

سرعت E و 'E یکی است ولی شتاب‌شان باهم متفاوت است.

$$\ddot{a}_E = \ddot{a}_B + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega}_B \times r$$

حال دستگاه را روی o قرار می‌دهیم و E را بررسی می‌کنیم

$$\ddot{a}_E = \cancel{a_o} + \omega_{oA} \times (\omega_{oA} \times r_{oE}) + \dot{\omega}_{oA} \times r_{oE} + \cancel{2\omega \times v_{rel}} + a_{rel}$$

سرعتی که 'E نسبت به دستگاه دارد صفر است (E و دستگاه هردو روی دیسک هستند) سرعت E نسبت به 'E هم صفر است (غلتش کامل داریم) پس v_{rel} صفر است

اما:

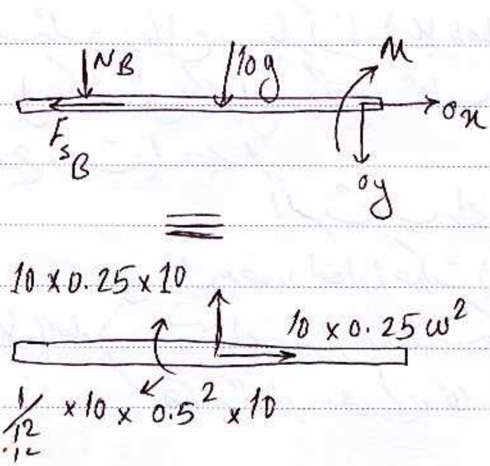
$$a_{rel} = a_{E/E'} + \cancel{a_{E'/o}}$$

$a_{E/E'}$ فقط در جهت نرمال داریم چون غلتش کامل داریم

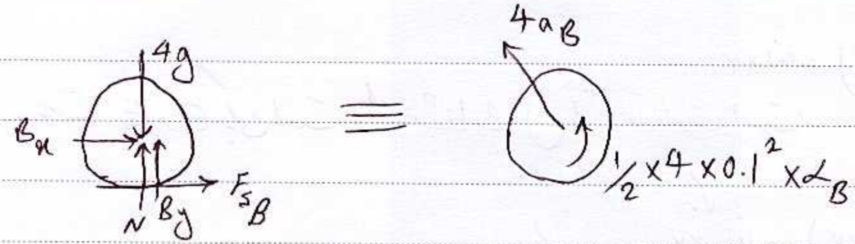
$$a_E = (0.35 \times 4^2)i + 0.35 \times 10 j + 0.1(10.5 + 4)^2$$

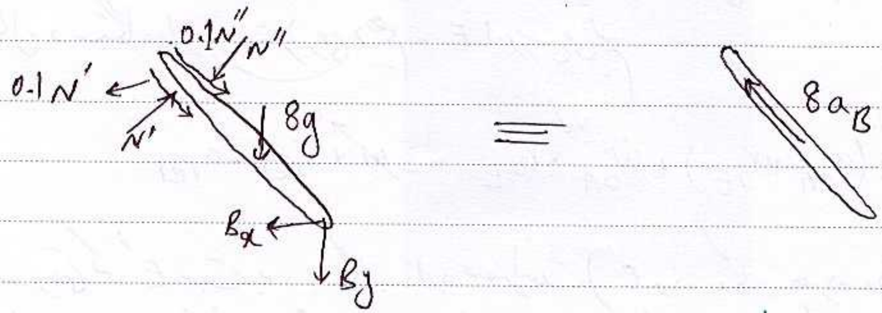
$\Leftarrow$ a_E را داریم که با گذاشتن در معادله بالا a_{B_t} پیدا می‌شود. نقطه B شتاب لینک BC است. لینک صرفاً دارای انتقال است.

داریم:



چون در صفحه قائم هستیم پس وزن داریم
مفصل P روان است
چپ یا راست بودن F_s را نمی‌دانیم
دیفی قرار دادیم!





7 معادله و 7 مجهول

.....

با فرض وجود اصطکاک:

در اثر چرخش، نیروهای تماس‌ها، در نقطه A' و A'' است (به دلیل وجود لقّی)

نکات کلی:

اگر نیروهای وارده به قسمت‌های مختلف مکانیزم را خواستند ⇐ مثل نیرو

اگر نیروها را دادند و شتاب را خواستند ⇐ مثل نیرو

مسئله در زمان بسیار کوتاه (بلافاصله) انجام می‌شود (مثلاً بلافاصله پس از پاره شدن کابل، کشش کابل دیگر یا شتاب زاویه‌ای لینک چقدر است که البته بحث برخورد مطرح نیست) ⇐

اگر شتاب را نخواهند، مثل نیرو و اگر نیرو را نخواهند، باز هم مثل نیرو

بلافاصله:

① بحث برخورد اندازهٔ حرکت (نیروی ضربه‌ای که خود نیرو را نمی‌توان یافت ولی ضربه آن را می‌توان محاسبه کرد)

② شتاب معمولی و ω ناچیز، ثابت ماندن ω و عدم تغییر هندسه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

متد نیرو: رسم پیکره آزاد تک تک اجزاء و فقط باید از سینماتیک بهره برد (از نقاطی که مسیر حرکت مشخص دارند غافل نشوید!)

مسائلی که صرفاً بحث سرعت دوران مطرح است متد انرژی یا اندازه حرکت متد انرژی:

زمانی مطرح می‌شود که بحث فاصله و زاویه مطرح است

در متد اندازه حرکت:

بحث زمان مطرح است.

متد انرژی:

$U = E_2 - E_1$. زمانی از این متد استفاده می‌کنیم که محاسبه U آسان است، از مواردی که پیدا کردن U را مشکل می‌سازد، کار نیروی اصطکاک است

اصطکاک زمانی کار انجام می‌دهد که نقطه اثر کننده در راستای نیروی اصطکاک دارای مولفه سرعت هست یا نه؟

اگر بود کار انجام می‌دهد، اگر نبود نه!

اگر اصطکاک لغزشی باشد قطعاً نیروی اصطکاک کار انجام می‌دهد، اما اگر لغزش نباشد کار اصطکاک در اکثر موارد صفر است.

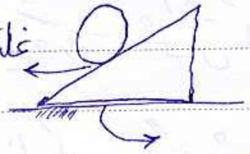
در موارد زیر صفر نیست:

دیسک روی سطح می‌غلتد اما خود سطح هم سرعت داشته باشد.

در مواردی که N ثابت است محاسبه کار نیروی اصطکاک سخت نیست اما اگر N تغییر کند (N تابعی از موقعیت باشد (زاویه یا طول)) خیلی سخت نیست! انتگرالی می‌شود اما اگر تغییرات N تابع سرعت باشد به معادله دیفرانسیل برخورد می‌کنیم و بهتر است از متد نیرو استفاده کنیم.

PAPCO

متد انرژی و اندازه حرکت، هم‌زمان استفاده می‌شود:

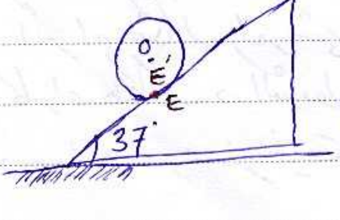


لغزش نداریم پس کار اصطکاک صفر است
(نیروی اصطکاک زوج عمل و عکس‌العمل اند
⇐ سرعت ها یکی است، جابه‌جایی ها یکسان
پس کار آنها همدیگر را خنثی می‌کنند)
اما اگر لغزش داشته باشیم ⇐ زوج عمل و عکس‌العمل با جابه‌جایی غیر یکسان، پس کار داریم ⇐ اگر لغزش بود از متد نیرو می‌رویم.

بعد از استفاده از بقاء انرژی مکانیکی و رابطه سینماتیکی ⇐ تعداد مجهول‌ها نمی‌خواند
⇐ در جهت x، کل سیستم بقاء اندازه حرکت خطی دارد

بحث برخورد: اندازه حرکت شل  !

example)



اگر بگویند
ضریب اصطکاک چقدر نیاز به منظور عدم لغزش وجود دارد
به سراغ متد انرژی و اندازه حرکت می‌رویم، چون غلتش کامل است و اصطکاک صفر

⇐ برای 0.3m جابه‌جایی، مسئله را تحلیل کنید. $r_0 = 0.2m$

راه حل:
فقط در راستای x بقاء اندازه حرکت دارد نه در راستای کل (به خاطر N وارده از زمین)

$$\Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow$$

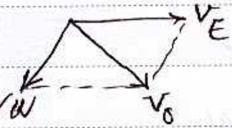
$$0 = -0.3 \times 4g\sin 37^\circ + \frac{1}{2}\times 3 \times V_E^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 4 \times 0.2^2\right)\omega^2}_{\text{دوران}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\times 4 \times\left[(V_E - 0.2\,\omega\cos 37)^2 + (0.2\,\omega\sin 37)^2\right]}_{\text{انتقالی}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دستگاه را روی o قرار می دهیم و داریم:

$V_E = V_0 + \omega \times r \Rightarrow \vec{V_0} = \vec{V_E} - \vec{\omega \times r}$

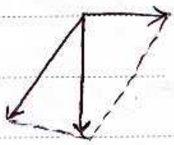


V_0 مطلق $= V_E - r\omega \cos 37$

حال در ادامه داریم:

$Q_{1x} = Q_{2x} \Rightarrow 0 = +3V_E + 4(V_E - 0.2\omega \cos 37)$

البته شکل صحیح تر به این صورت است

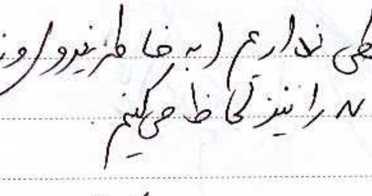


چون:
دیسک به راست و صفحه به چپ می رود

* اگر μ_s و μ_k را بدهند که باید تشخیص دهیم که لغزش داریم یا غلتش
(که البته باید این استنباط است) از مثلث نیرو استفاده کنیم

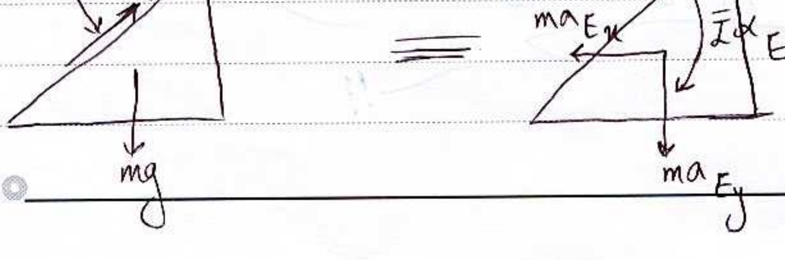
example)

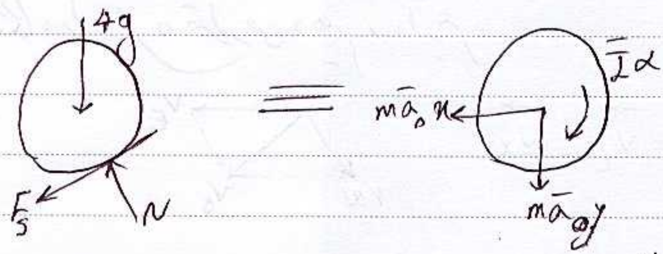
اگر در مثال قبل، سطح زیری فرو بریزد،
بعد از 1 یا 2 ثانیه، هر کدام از آنها دارای
چه سرعتی است؟



solve/.

در راستای y بقا اندازه حرکت خطی نداریم (به خاطر نیروی وزن)
بر مبنای اینکه همچنان دیسک و صفحه تماس دارد، N را نیز لحاظ می کنیم





چون مرجع را بر تماس دو جرم گرفتیم و با فرض غلتش حل کردیم ⇐

از سینماتیک کمک می‌گیریم ⇐ بلافاصله پس از فرو ریختن:

$$a_o = a_{E'} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + \cancel{2\omega \times v_{rel}}^{\,0} + \cancel{a_{rel}}^{\,0}$$

$$a_{E'} = a_E + r\omega_o^2$$

۱۳ / اسفند / ۸۸

!!

Subject:

Year. Month. Date. ( )

«بنام او که هستی جاوید از اوست»

«دینامیک»

Dynamics

استاد:

DR: حاج موسی

جزوه نویس: (به قلم) !!

اسماعیل بهشتی

اسماعیل بهشتی

سال تحصیلی !!

1388-89

882

Subject:
Year: ۸۸ Month: آبان Date: 2

بنام خدا

شنبه

استاتیک + سینماتیک = سینتیک

«سینتیک ذرات»

$$\Sigma F = ma \begin{cases} \Sigma F_x = ma \\ \Sigma F_y = ma \\ \Sigma F_z = ma \end{cases} \Rightarrow$$ سه مجهول می‌توان داشت

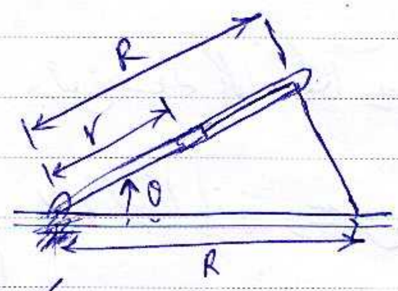
⇐ ابتدا پیکره‌ی آزاد جسم را می‌کشیم

پیکره آزاد نیرو ⟶   پیکره آزاد شتاب ⟶

مولفه‌ی شتاب

تحلیل مولفه‌ی شتاب سخت و مهم است.

مثال:



$\theta = 37^\circ$, $\dot{\theta} = 2\,rad/s$

$\ddot{\theta} = 5\,rad/s^2$, $R = 0.4\,m$

$\ddot{\theta} = ? \Rightarrow \ddot{r} = ?$

کشش طناب $T = ?$

با فرض اینکه هیچ اصطکاکی بین جرم و شیار وجود ندارد ⇐

if: $m_A = 0.5\,kg$

شکل در صفحه قائم است!

اگر شکل در صفحه افق باشد ⇐ نیروی وزن را عمود بر صفحه در نظر می‌گیریم

⇐ چون بحث ما در صفحه است ⇐ mg , N همدیگر را خنثی می‌کنند ، می‌دانیم که هیچ شتابی در راستای عمود بر تابلو نداریم)

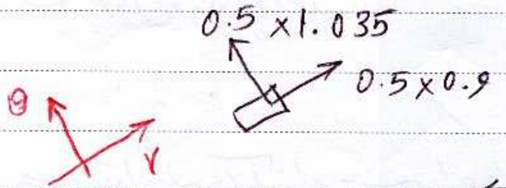
Subject:
Year. Month. Date. ( )

ابتدا پیکره آزاد کلی جسم برای نیروهای وارد بر آن:

با فرض تماس جسم با سطح زیرین

پیکره آزاد شتاب:

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \, , \, a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$



حال 2 مجهول (T، N) داریم و 2 معادله ⇐

$\sum F_r = ma_r \Rightarrow T - mg\sin\theta = 0.45$

$\Rightarrow T = 0.45 + 0.5 \times 9.81 \times \sin 37$

$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0.5 \times 1.035$

$\Rightarrow N = 0.5 \times 1.035 + 0.5 \times 9.81 \times \cos 37$

⇐

در این مسئله اگر اصطکاک وجود داشت ⇐ چون لغزش داشتیم ⇐

$f_s = \mu_s N \Rightarrow$

N را ابتدا یافته و سپس T را می‌یافتیم.

حال:

مسئله را به صورت پارامتری حل می‌کنیم. (سطح بالای لنگ شیاردار را نیز بررسی داریم یعنی N منفی معنی ندارد!)

$\sum F_r = ma_r \Rightarrow T - mg\sin\theta = ma_r$

$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow N - mg\cos\theta = ma_\theta$

$\Rightarrow T = m(g\sin\theta + a_r)$

(3) $N = m(g\cos\theta + a_\theta)$ $\Rightarrow$

حال با اطلاعات مسئله قبلی، حداکثر شتاب ترمز را بیابید،

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

T هیچگاه منفی نمی‌تواند باشد چون طناب نمی‌تواند تحت فشار قرار گیرد ⇐

$$|a_{r_{max}}| = g\sin\theta \Rightarrow a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = -g\sin\theta$$

$$r = 2R\sin\theta/2 \Rightarrow \dot r = \dot\theta R\cos\theta/2 \;,\; \ddot r = \ddot\theta R\cos\frac{\theta}{2} - \frac{R\dot\theta^2}{2}\sin\theta \quad (2)$$

$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = -g\sin\theta \Rightarrow \ddot r = -g\sin\theta + r\dot\theta^2 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{(1)} \text{ج.ب: } \ddot r = -5.058$$

$$\xrightarrow{(2)} -5.058 = \ddot\theta \times 0.4 \times \cos\frac{37}{2} - \frac{4}{2} \times 0.4\sin\frac{37}{2}$$

$$\Rightarrow \ddot\theta = -12.66$$

⇐ شتاب ترمز باید کمتر از $|\ddot\theta|$ باشد تا T منفی شود
اما امکان دارد قبل از شل شدن T ، N منفی شده باشد (القرنده که می‌کند!)
(البته اگر سطحی بالای لینک نباشد)

$$a_\theta = 2\times 0.773\times 2 - 0.207\times 12.66 \Rightarrow a_\theta = 0.47 \;\Leftarrow$$

N را از رابطه (3) می‌یابیم

$$\Rightarrow N > 0 \Rightarrow$$

شتاب ترمز باید کمتر از 12.66 باشد

حال اگر N منفی می‌شد ⇐ با در نظر گرفتن $N = 0$ ⇐ $\ddot\theta$ را می‌یافتیم که

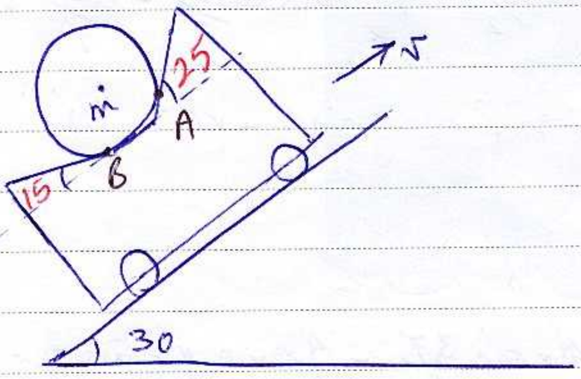
البته باید $|\ddot\theta| < 12.66$

یعنی اگر می‌خواستیم با در نظر گرفتن $N = 0$ پیش برویم ⇐ باید با آن $\ddot\theta$ای که می‌یافتیم ⇐ $T < 0$ می‌شد.

جسم صلب: (جسمی که تغییر شکل آن ناچیز و گستردگی جرم (دارای ابعاد) باشد) داشته باشد) که دارای انتقال است و

همچنین جسمی که گستردگی جرم ندارد را می‌توان ذره و روابطش را بر اساس سینتیک تجزیه و تحلیل کرد.

مثال:

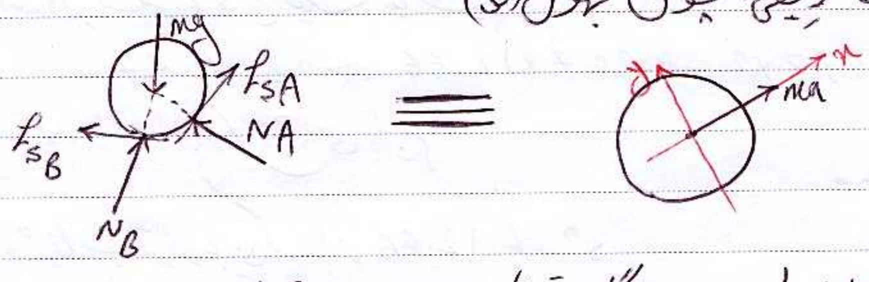


محدوده شتاب حرکت گاری را به گونه‌ای تعیین کنید که سیستم به صورت یکپارچه عمل کند

ماکزیمم شتاب ترمز $< a <$ ماکزیمم شتاب حرکت

سیستم یکپارچه ⇐ تمام عضوهای سیستم باید دارای یک شتاب باشند

داریم: (جهت‌ها دلبخواهیست چون مجهول‌اند)



چون سطح زیری صاف است ⇐ گاری تنها در جهت + شتاب دارد ⇐

چون سیستم یکپارچه است ⇐ گوی نیز تنها در جهت + شتاب دارد

وقتی شتاب حرکت max شود ⇐ N_A و f_{sA} صفر خواهد شد؛

چون غلتش داریم ⇐ f_s ، N به هم ربطی ندارند

← چون برای محاسبه a_{max} ، a_{min} ها f_s صفر می‌شود

~~اما اگر f_s ها صفر نمی‌شد ⇐ با یافتن f_s ها ⇐ نهایتاً $f_s < \mu_s N$ ⇐ لغزش داشتیم~~

اگر $f_s > \mu_s N$ ⇐ غلتش داشتیم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حال:

$$\sum \bar{M} = 0 \Rightarrow F_{s_B} \times r = 0 \Rightarrow F_{s_B} = 0$$

$$\Rightarrow \sum F_x = m a_x$$

$$m a_{max} = -mg\sin 30 + N_B \sin 45$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -mg\cos 30 + N_B \cos 45 = 0 \Rightarrow N_B = \frac{mg\cos 30}{\cos 45}$$

$$\Rightarrow a_{max} = 0.37g$$

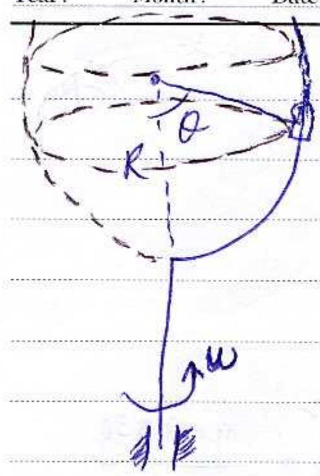
حال برای یافتن a_{Min} که در واقع همان ماکزیمم شتاب ترمز است داریم:

N_B و $f_{s_B} = 0$

PAPCO

Subject:

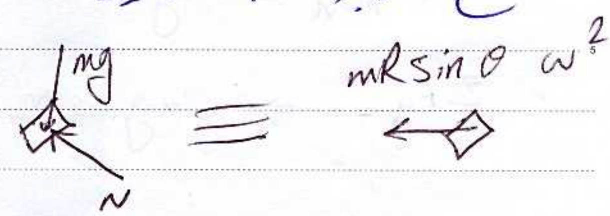
Year. Month. Date. ( )



با فرض عدم اصطکاک بین مهره و میله راهنما و ثابت بودن ω

$\Leftarrow$

تابع θ را بر حسب ω بنویسید:



DR حاجی:

ازاین مسیر لامذهب غافل نشوید!!

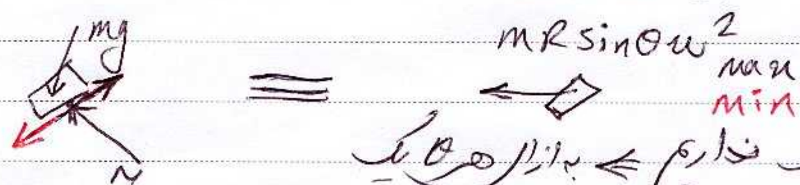
چون ω ثابت است $\Leftarrow$ مسیر حرکتمان دایره‌ای است به شعاع $R\sin\theta$

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow -mg + N\cos\theta = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow N\sin\theta = mR\sin\theta\,\omega^2 \rightarrow \cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}$$

$\Leftarrow$ هرگاه $\omega \rightarrow \infty$ $\Leftarrow$ $\theta \rightarrow 90$ $\Leftarrow$ هیچگاه $\theta = 90$ نمی‌شود

حال در صورت وجود اصطکاک:



وقتی اصطکاک نداریم $\Leftarrow$ به ازای هر θ یک ω منحصر به فرد داریم

اما وقتی اصطکاک داریم $\Leftarrow$ به ازای هر θ یک بازه از ω داریم

چون ω ماکزیمم یا مینیمم را می‌خواهیم به دست آوریم $\Leftarrow$ جسم در آستانه لغزش به سمت پایین یا بالا است.

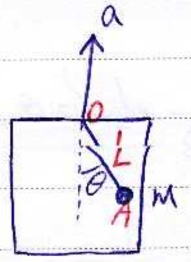
ω_{max} $\longleftarrow$ جسم در آستانه لغزش به سمت بالا

Subject: سلمان
Year: ۸۸ Month: ۱۰ Date: 4

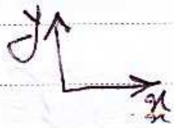
دوشنبه

در لحظه‌ی حرکت، شتاب داریم اما سرعت نداریم!!

مثال:

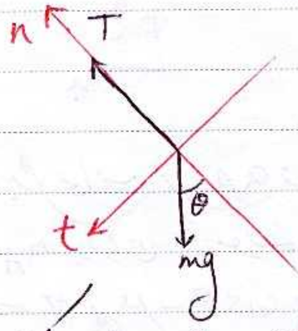


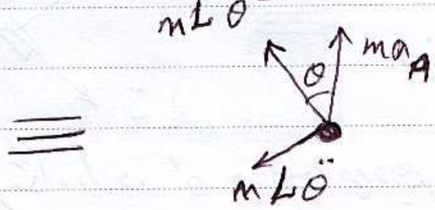
آسانسور با شتاب a در حال حرکت است
در هر θ دلخواه ⇐ $T = f(\theta)$ ؟



دستگاه را روی O قرار داده و به A جوش می‌دهیم!

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_0 + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r$$





۳ مجهول داریم و ۲ معادله اما
اگر راستاها را به گونه‌ی مشخص شده تعیین کنیم

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow mg\sin\theta = mL\ddot{\theta} - ma_0\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin\theta(g+a_0)}{L}$$

اگر آسانسور در خلا سقوط کند ⇐ $a_0 = -g$ ⇐ $\ddot{\theta} = 0$
یا کلا نمی‌چرخد یا با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد.

حال داریم:

$$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_{\theta_0}^{\theta} \ddot{\theta}\, d\theta \Rightarrow$$! $\dot{\theta}$ پیدا شد

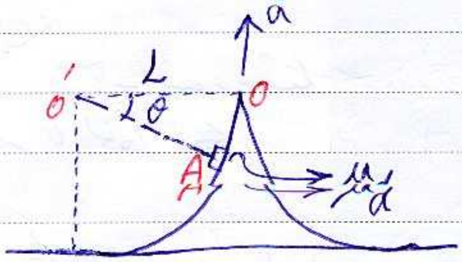
$$\sum F_n = ma_n \rightarrow \dots \rightarrow T = f(\theta)$$

$$a_A = a_0 + \dot{\omega}\times r + \cancel{\omega\times(\omega\times r)}_{0} + \cancel{2\omega\times V_{rel}}_{0} + a_{rel}$$

سوال: اگر آسانسور را یک دفعه قطع کنیم ⇐ شتاب زاویه‌ای و کشش طناب: بلافاصله
پس از قطع شدن = ?
چون گفته: بلافاصله بعد از قطع شدن ⇐ α داریم اما ω نداریم!!

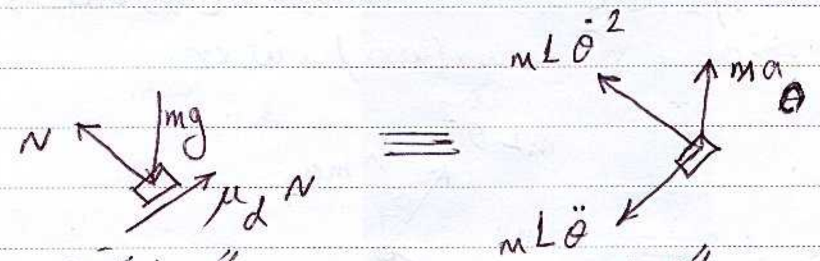
Subject:
Year. Month. Date. ( )

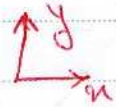
مثال:



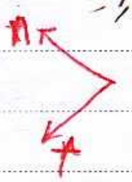
در هر θ دلخواه → $N = ?$

داریم:





(البته برای محاسبه a_A: دستگاه را در O' جوش می‌دهیم (دستگاه مختصات ثانویه)) که a_A دارای 3 مولفه می‌شود که در بالا نشان دادیم)



$$\Sigma F_t = ma_t \Rightarrow mg\cos\theta - \mu_d N = mL\ddot{\theta} - ma_0\cos\theta$$

$$\Sigma F_n = ma_n \rightarrow N - mg\sin\theta = mL\dot{\theta}^2 + ma_0\sin\theta$$

$$\rightarrow N = m(g\sin\theta + L\dot{\theta}^2 + a_0\sin\theta)$$

$$\xrightarrow{\Sigma F_t = ma_t} mg\cos\theta - m\mu_d(g\sin\theta + L\dot{\theta}^2 + a_0\sin\theta) = m(L\ddot{\theta} - a_0\sin\theta)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Sigma F_x = ma_x \rightarrow 7.36 \cos 30 - 18.4 \sin 30 - F_s' = 5.64$

$\Rightarrow F_s' = -8.46$

این نیروی اصطکاک ، نیروی اصطکاک مورد نیاز جهت عدم لغزش است.

اما با $\mu_s = 0.5$ ⇐ چون $f_{s_{max}} = \mu_s \cdot N$ ⇐ $f_{s_{max}} = 29.4$

⇐ هیچ مشکلی نداریم اما:

DR حاجی: μ بین گوه و گاری را به جای 0.5 ، 0.1 می دهم تا مشکل پیش بیاید!!!!

پس:

با این شتاب را کم کنیم تا گوه نلغزد اما از طرفی با کم کردن شتاب (شتاب min) ⇐ گوی بالایی ، روی گوه می لغزد ،

اما:

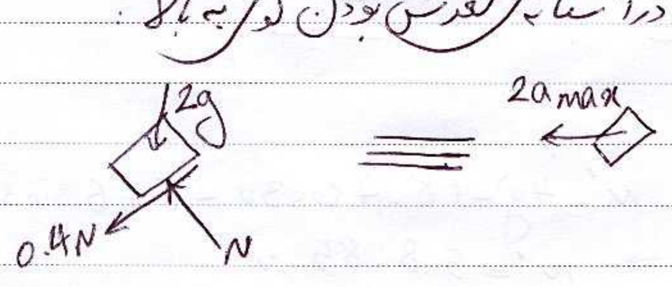
می توانیم ، μ بین گوی و گوه را طوری تعیین کنیم تا با آن شتاب a_{min} که برای گوه یافتیم ⇐ گوی نلغزد

اما:

کلاً حرف های DR حاجی را بیخیال می شیم و $a_{min} = 1.41 \, \frac{m}{s^2}$

حال برای a_{max}:

با فرض در آستانه لغزش بودن گوی به بالا .

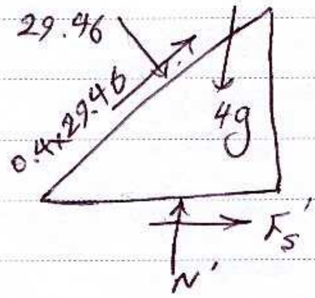


پس داریم:

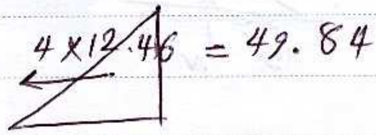
$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow N\cos 30 - 0.4\,N\sin 30 - 2g = 0$$
$$\Longrightarrow N = 29.46\ N$$

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow 29.46\sin 30 + 0.4 \times 29.46\cos 30 = 2a_{max}$$
$$\longrightarrow a_{max} = 12.46\ m/s^2$$

حال با این شتاب، برای گوه داریم:



$\equiv$



$$\longrightarrow \Sigma F_x = ma_x \Rightarrow$$
$$-F_s' - 11.78\cos 30 - 29.46\sin 30 = 49.84$$
$$\Rightarrow F_s' = -74.77\,N$$

این اصطکاک مورد نیاز بین گوه و گاری جهت عدم لغزش گوه است.

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow N' - 29.46\cos 30 + 11.78\sin 30 - 4g = 0$$
$$\Rightarrow N' = 58.86$$

$$\Rightarrow F'_{s_{max}} = 0.5 \times 58.86 = 29.$$

چون:

اصطکاک مورد نیاز تامین نمی‌شود $\Leftarrow$ $F_s' > F'_{s_{max}}$

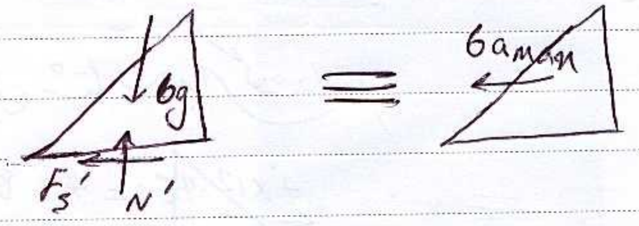
$\Leftarrow$

فرض غلط است $\Leftarrow$ روز از نو، روزی از نو.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای یافتن a_{max} : چون به ازای هر $a < a_{min}$ ، گوی و گوه روی هم نمی‌لغزند و چون فرض اولیه ما غلط شد (یعنی ابتدا گوی روی گوه بلغزد) $\Leftarrow$

برای یافتن a_{max} با فرض لغزش گوه روی گاری $\Leftarrow$ گوی و گوه را یکپارچه در نظر می‌گیریم $\Leftarrow$



$\rightarrow \Sigma F_x = ma_x \quad , \quad \Sigma F_y = ma_y$

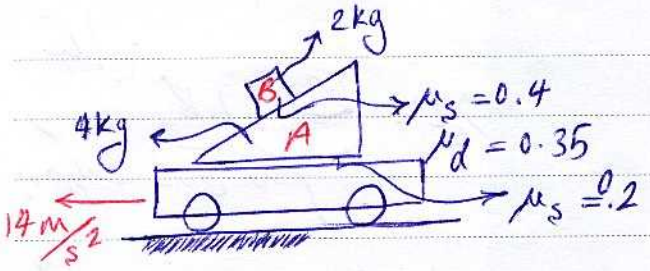
$\rightarrow 6g - N' = 0 \Rightarrow N' = 7g \Rightarrow f_{s'} = \mu_s N'$

$\Rightarrow F_{s'} = 3g$

$\rightarrow F_{s'} = 6a_{max} \rightarrow a_{max} = \frac{3g}{6} = g/2 = 4.9\ m/s^2$

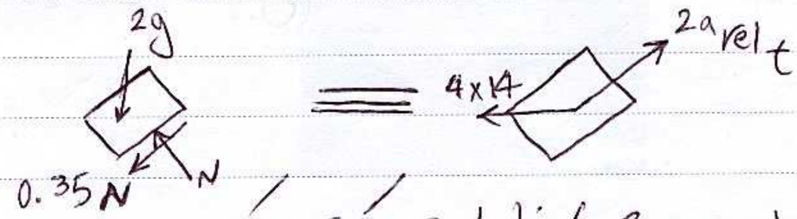
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



گاری را با شتاب $14\,m/s^2$ به حرکت درمی‌آوریم

شتاب نسبی جسم B را بیابید؟

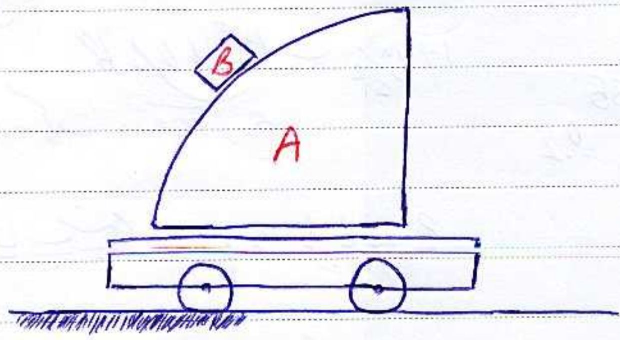


a_{rel_n} نداریم چون جسم B روی خط راست حرکت می‌کند

$a_B = a_A + a_{rel}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



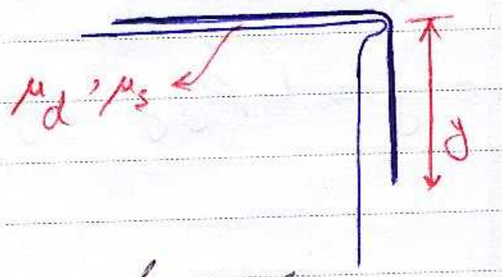
گاری را با شتاب $14\,m/s^2$ به حرکت درمی‌آوریم

شتاب نسبی جسم B را بیابید
(با همان اطلاعات مسئله قبل)

[redacted]

مثال:

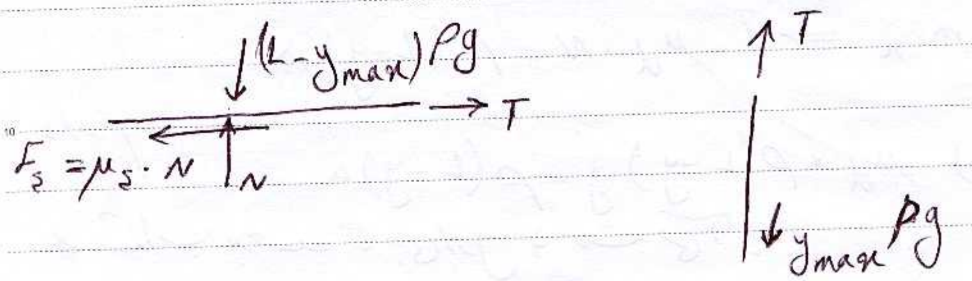
طول طناب L، جرم واحد طول آن ρ است



$$\Longrightarrow a = f(y) \quad ??$$

$$v_{max} = ?$$

ابتدا باید y_{max} جهت تعادل استاتیکی را بیابیم (y_{min} جهت حرکت دینامیکی $= y_{max}$) پس:

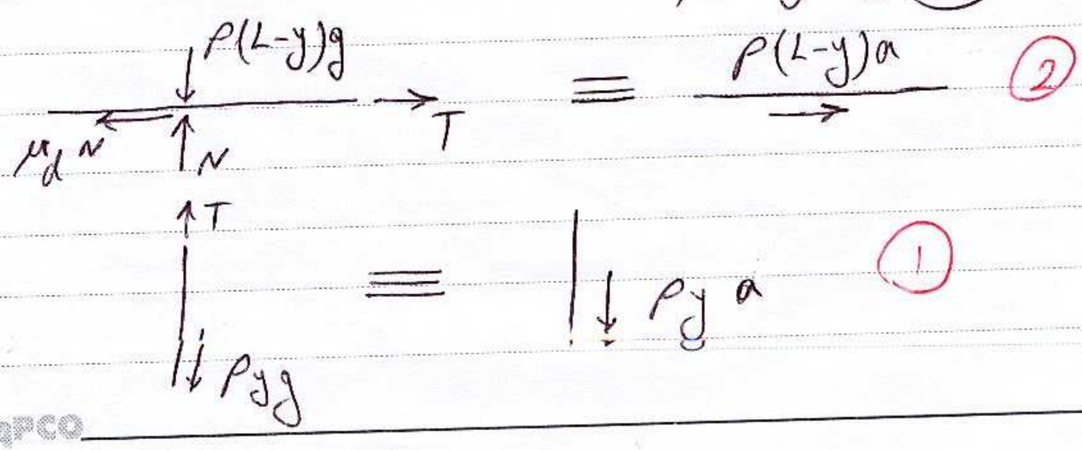


$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow N = (L - y_{max})\rho g$$

$$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow y_{max}\,\rho g = \mu_s (L - y_{max})\rho g$$

$$\longrightarrow \frac{L}{1+\frac{1}{\mu_s}} = y_{max} \Rightarrow \frac{1}{\mu_s} = \frac{L}{y_{max}} - 1$$

حال برای $y > y_{max}$ داریم:



Subject:
Year. Month. Date. ( )

a_n با a_y برابر است زیرا مثلاً اگر از قرقره (9) — استفاده کنیم ⇐ $a_x \neq a_y$

(1): $T = y_{max}\,\rho g$, $\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow T - \rho y g = -\rho y a$

$\Rightarrow$

$$T = \rho y (g-a)$$

(2):

$$\Sigma F_y = ma_y = 0 \Rightarrow N = \rho (L-y) g$$

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T - \mu_d \cdot N = \rho (L-y) a$$

داریم:

$$\rho y (g-a) - \mu_d \times \rho (L-y) g = \rho (L-y) a$$

⇐ شتاب برحسب تابعی از y بدست می‌آید.

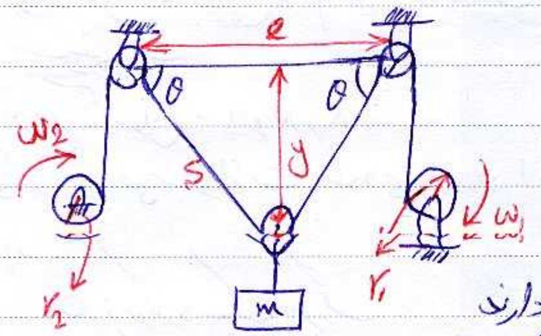
$$\int_0^{v_{max}} (v\,dv) = \int_{\frac{L}{(1+\frac{1}{\mu_s})}}^{L} (a\,dy) \Rightarrow$$

$$(v_{max})^2 = \frac{2aL}{\mu_s}$$

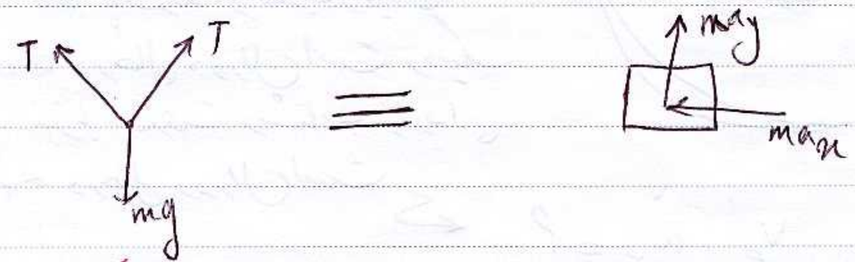
P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



کشش کابل برحسب تابعی از y؟
شعاع قرقره که در مقایسه با بقیه ابعاد ناچیز و
جرم کابل هم ناچیز است
و
قرقره ها نیز روان هستند و جرم ناچیز دارند
ω_1 و ω_2 نیز ثابت هستند
داریم:



پس:

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow ma_x = 0 \Rightarrow a_x = 0$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow -mg + 2T\sin\theta = ma_y$$

$$\rightarrow \quad -mg + 2T\frac{y}{\sqrt{(\frac{e}{2})^2 + y^2}} = m\ddot y \quad (1)$$

می توان نوشت:

$$s^2 = y^2 + e^2/4 \Rightarrow 2\dot s s = 2\dot y y \Rightarrow \dot s = \frac{y\dot y}{s} \Rightarrow \dot y = \frac{s\dot s}{y}$$

$$\dot s^2 + s\ddot s = \dot y^2 + y\ddot y \Rightarrow \ddot y = \frac{\dot s^2 + s\ddot s - \dot y^2}{y} = \frac{\dot s^2 + s\ddot s - \frac{s^2\dot s^2}{y^2}}{y}$$

داریم: $\dot s = \frac{-r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{2} \Rightarrow \ddot s = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \ddot y = f(y)$

با جایگذاری $\ddot y = f(y)$ در (1) $\longrightarrow \quad T = k(y)$

weblog: Mec20.blogfa.com ۸۸/۸/۱۲

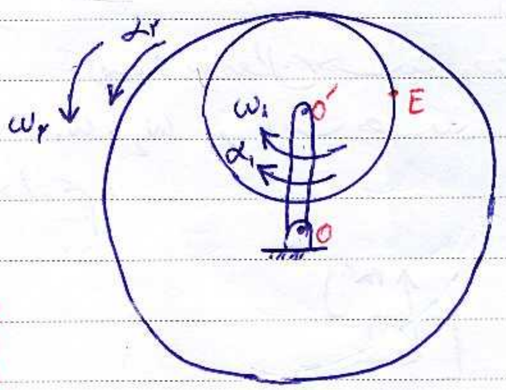
Subject:
Year. Month. Date. ( )

سوالات امتحان میان ترم اول دینامیک دانشگاه سمنان (دانشکده مهندسی مکانیک)
سینماتیک

تاریخ آزمون: ۸۸/۸/۱۱ استاد: دکتر محمد علی حاج موسی

تذکر: تمامی سوالات، عددی بودند اما توسط من به صورت پارامتری تغییر کرده اند!!!

۱)



O : مرکز دیسک بزرگ

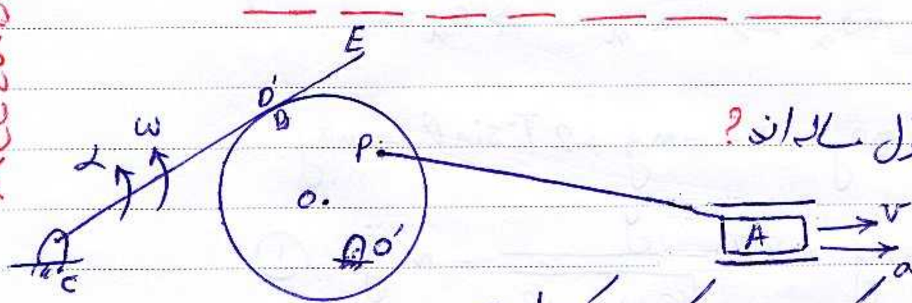
O' : مرکز دیسک کوچک

لینک OO' با سرعت و شتاب زاویه ای ω_1 و α_1 درحال دوران است و دیسک بزرگ نیز با سرعت و شتاب زاویه ای ω_2 و α_2 درحال دوران است

$V_E , a_E = ?$

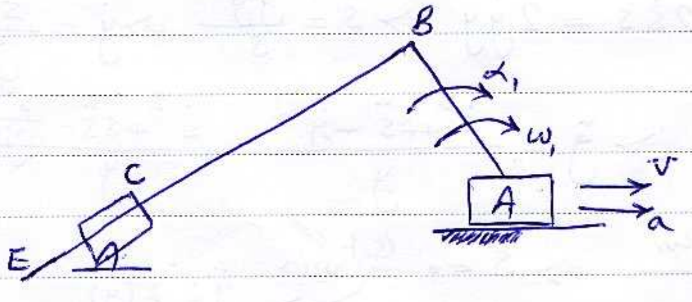
۲) v و a را داریم

⇐ α و ω مجهول مسائلند؟



O' : مرکز دوران دیسک و O مرکز دیسک است

۳) v و a ، α_1 و ω_1 را داریم



اگر میله BE از داخل غلاف عبور کرده باشد و با آن بچرخد

$\Leftarrow \alpha_{BE}, \omega_{BE} = ?$

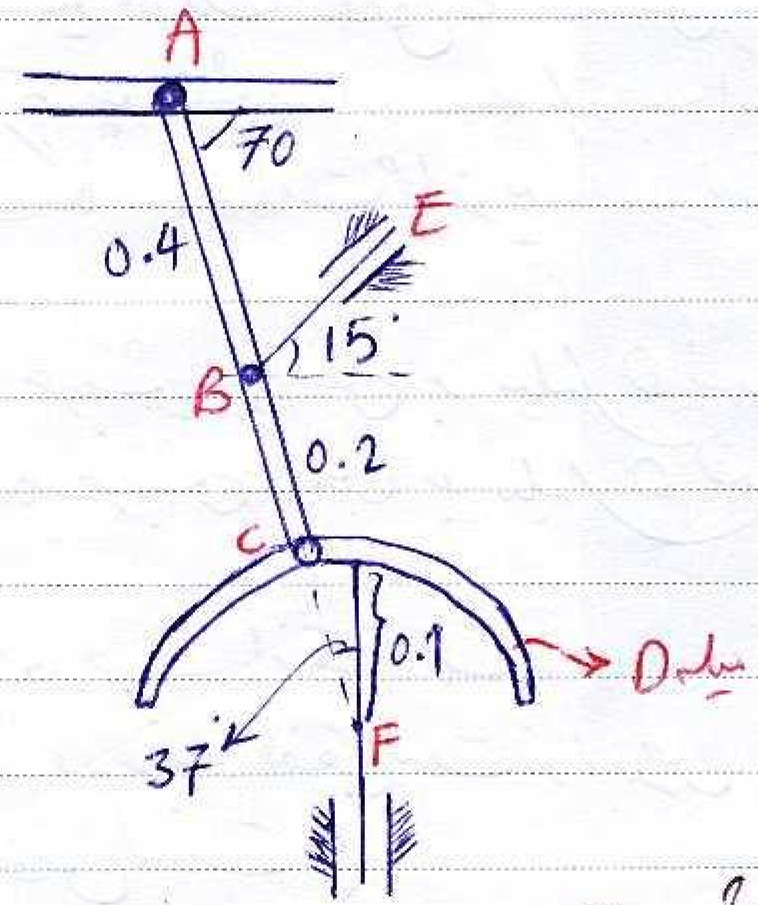
اسماعیل بهشتی

Subject: ۸۸ / ۸ / ۸+۱
Year. Month. Date. ( )

شنبه

مثال ۴

مثال



$v_F = 2\ \frac{m}{s} \uparrow$

$a_F = 3\ \frac{m}{s^2} \uparrow \rightarrow v_c , a_c = ?$

Dr حاج یوسفی:

در مسائل ۵، به نقاطی که مسیر حرکتشان مشخص است، بسیار زیاد توجه کن!!

برای یافتن v_c داریم:

ابتدا دستگاه را روی F قرار داده و به آن جوش می‌دهیم:

$$v_c = v_F + \cancel{\omega \times r} + v_{rel} \quad (1)$$

سپس دستگاه مختصات ثانویه را روی A قرار داده و به لینک AC جوش می‌دهیم

$$v_c = v_A + \omega_{AC} \times r_{AC} + \cancel{v_{rel}} \quad (2)$$

سپس دستگاه مختصات ثانویه را روی B قرار داده و به لینک AC جوش می‌دهیم

$$v_c = v_B + \omega_{AC} \times r_{BC} + \cancel{v_{rel}} \quad (3)$$

حال برای شتاب داریم:

$$a_c = a_F + a_{rel_n} + a_{rel_t}$$

$$a_c = a_A + \omega_{AC} \times (\omega_{AC} \times r_{AC}) + \dot{\omega}_{AC} \times r_{AC}$$

$$a_c = a_B + \omega_{AC} \times (\omega_{AC} \times r_{BC}) + \dot{\omega}_{AC} \times r_{BC}$$

Subject:

Year.　　Month.　　Date.　　(　)

① مسیر حرکت مطلق، مشخص نیست ← اندازه و جهت v_C مجهول است
لینک F چرخش ندارد ← با توجه به اینکه دستگاه را به لینک F جوش دادیم ← ω دستگاه مختصات ثانویه صفر است.

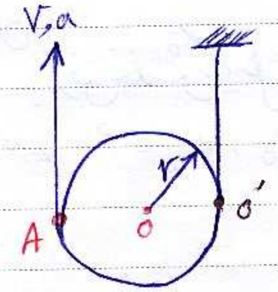
v_{rel} جهتش مماس بر مسیر D است.
a_{rel_t} جهتش مماس بر مسیر D است و a_{rel_n} جهتش، در جهت مرکز دایره است

② v_A در جهت افقی است و چون دستگاه را به لینک AC جوش داده‌ایم ← $\omega = 0$
a_A در جهت افقی است و با فرض پادساعتگرد بودن ω ← جهت $\omega \times r$ نیز مشخص است

③ v_B در جهت لینک BE است و با فرض ω_{AC} پادساعتگرد ← $\omega_{AC} \times r$ نیز جهتش مشخص است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



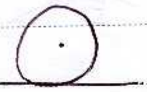
سرعت مرکز دایره (قرقره) = ?

با فرض غلتش کامل:

چون غلتش کامل داریم پس:

سرعت هر نقطه از قرقره در تماس با طناب برابر است با سرعت طناب در آن نقطه.

چون سرعت طناب در O' برابر صفر است ⇐ سرعت قرقره هم در آن نقطه صفر است و آن نقطه را می‌توان مرکز آنی دوران در نظر گرفت

در واقع این شکل را می‌توان با شکل  (غلتش چرخ بر روی سطح زمین) یکی گرفت

این نقطه (O') علاوه بر مرکز آنی دوران بودن، مرکز شتاب تانژانت صفر نیز است ⇐

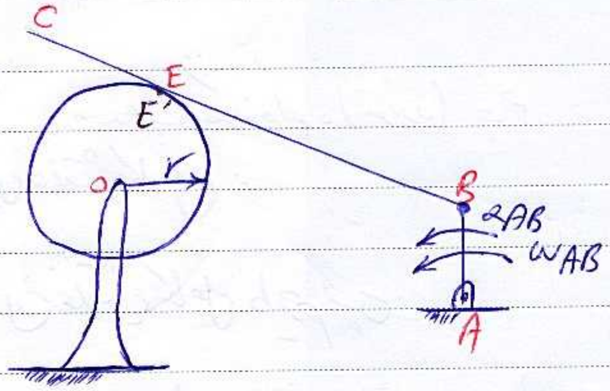
$$V_A = V = 2r\,\omega_{\text{دیسک}} \Rightarrow \omega = \frac{V}{2r}$$

$$a_{A_t} = a = 2r\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a}{2r}$$

$$V_O = r \times \frac{V}{2r} = \frac{V}{2} \quad , \quad a_O = r \times \frac{a}{2r} = \frac{a}{2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



با فرض غلتش کامل
$\omega_0 , \alpha_0 = ?$

چون غلتش کامل داریم

دستگاه مختصات نوع ۲ را روی B که ریشه L است و به لینک BC جوش دهیم $\rightarrow$ $v_{E'} = v_B + \omega_{BC} \times r_{BE} + v_{rel}$

که با توجه به غلتش کامل بودن:

$$v_{rel_{E'}} = \cancel{v_{rel_E}} + \cancel{v_{E/E'}} \rightarrow$$ چون غلتش داریم صفر شد

پس چون دستگاه را به لینک BC جوش دادیم

$$\rightarrow v_{E'} = v_B + \omega_{BC} \times r_{BE}$$

جهت $v_{E'}$: مماس بر لینک BC است

جهت v_B: عمود بر AB است و برابر است با $\omega_{AB} \times r_{AB}$

جهت $\omega_{BC} \times r_{BE}$ نیز با فرض پادساعتگرد بودن ω_{BC} معلوم است با توجه به قاعده دست راست: عمود بر BC و به سمت پایین (o) است.

حال برای a داریم:

$$a_{E'_t} + a_{E'_n} = a_{B_n} + a_{B_t} + \omega_{BC} \times (\omega_{BC} \times r_{BE})$$
$$+ \dot{\omega}_{BC} \times r_{BE} + a_{rel} + \cancel{2 \times \omega \times v_{rel}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توضیحات:

چون مسیر حرکت B و E' را می‌دانیم پس مولفه‌های شتابشان را به دو مولفه در راستای تانژانت و نرمال تجزیه می‌کنیم

پس:

$a_{E't}$: جهتش مماس بر لینک BC

$a_{E'n}$: اندازه: $= \frac{(V_{E'})^2}{r}$ (عمود بر لینک BC) جهتش به سمت مرکز دایره

a_{B_t} : جهتش عمود بر لینک AB ، $|a_{B_t}| = r_{AB} \times \alpha_{AB}$

a_{B_n} : جهتش مماس بر لینک AB ، $|a_{B_n}| = r_{AB} \times (\omega_{AB})^2$

$\omega_{BC} \times r_{BE}$; اندازه‌اش مجهول ، جهتش را با فرض پادساعتگرد بودن α_{BC} مشخص می‌کنیم

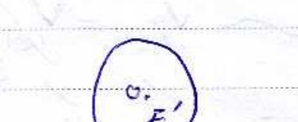
a_{rel} : جهتش در راستای مرکز دایره است (به سمت O) و اندازه‌اش برابر است با $r(\omega_O \pm \omega_{BC})^2$

اگر ω_O و ω_{BC} خلاف جهت هم ← $\omega_O + \omega_{BC}$

" " در جهت هم ← $\omega_O - \omega_{BC}$ (با فرض پادساعتگرد بودن ω_O)

برای درک بهتر a_{rel} :

چرخی که با زمین در تماسش است را در نظر بگیرید:



$a_{rel_{E'/E_t}} = 0$ است (غلتش داریم!)

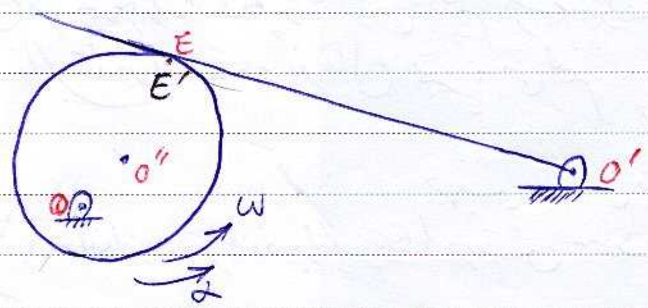
$\underbrace{a_{rel_{E'}}}_{\text{نسبت به زمین}} = \cancel{a_{rel_{E'/E}}} + \underbrace{a_{rel_E}}_{\text{نسبت به زمین}}$

$\rightsquigarrow a_{rel_E} + a_{rel_{E'}} = r(\omega_{\text{چرخ}} \pm \omega_{\text{سطح زمین}})^2$

جهت نیز به سمت مرکز دایره است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



دیسک حول مرکز دورانش
یعنی O در حال
دوران است
اگر "O" مرکز دیسک باشد

$? = \omega_{O'E}$ و $\alpha_{O'E}$

داریم:
راستای سرعت نقطه E' عمود بر $O'E$ است
درصورتی که راستای سرعت نقطه E در جهت $O'E$ است زیرا
عمود بر لینک

چون راستاهای E و E' ۱۰۰٪ متفاوت خواهد بود و هیچ گاه
باهم یکی نخواهد شد
با اطمینان کامل می توان گفت که لغزش داریم (لغزش کامل)

حال
با قرار دادن دستگاه مختصات نوع ۲ روی نقطه O

$$V_E = \cancel{V_O} + \omega_O \times r_{OE} + V_{rel}$$

$V_{rel} = \cancel{V_{rel_{E'}}} + V_{E'/E}$ ← که $V_{rel} = V_{E'/E}$ که جهت آن، در جهت لینک $O'E$ است

چونکه دیسک نمی تواند در شکم لینک فرو برود.

$$a_{E_t} + a_{E_n} = \cancel{a_O} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times V_{rel} + a_{rel_t} + a_{rel_n}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

a_{E_t} : عمود بر لینک $O'E$ است

a_{E_n} : در جهت لینک $O'E$ است

برای اینکه درک روشنی از a_{rel} داشته باشیم بهتر است که:

این شکل را با چرخی که روی زمین در حال غلتش توام با لغزش است مقایسه کنیم

پس:

هم a_{rel_t} داریم هم a_{rel_n}

همچنین جهت a_{rel_n} ، در جهت مرکز دایره است نه مرکز دوران

نکته:

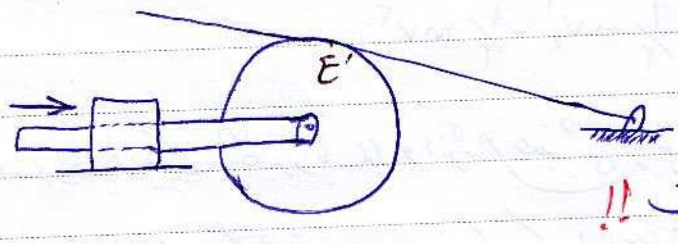
اگر دیسک در O فیکس نشده بود ⟸ امکان داشت که غلتش داشته باشیم

زیرا:

دیگر نمی‌توان گفت که:

100٪ جهت سرعت نقطه E'

مماس بر دایره (عمود بر OE') است !!



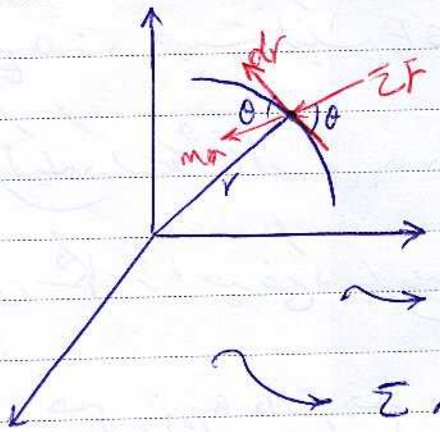
امتحان پایان ترم: ساعت 13-16 ← ساعت 7 صبح تا 10 صبح

دوشنبه

Subject:

Year. ۸۸ Month. ۸ Date. ۱۱ ( )

Energy method: بررسی میتد انرژی:



$\Sigma F = ma$ ← کلیه نیروهای خارجی وارد بر ذره

$\Sigma F \cdot dr = ma \cdot dr$

$\rightarrow ma \cdot dr = \Sigma F \cos\theta \; ds = \Sigma m a_t \, ds$

مقدار dr

$\rightarrow \Sigma F \cdot dr = m a_t \, ds$

می توان نوشت:

$a_t \, ds = v \, dv$ زیرا: $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} \rightarrow$

$$a_t \, ds = v \, dv$$

$\Sigma F \cdot dr = m v \, dv \rightarrow \int \Sigma F \cdot dr = \int_{v_1}^{v_2} m v \, dv$

$\hookrightarrow F_t \, ds$

$\Rightarrow \int \Sigma F \cdot dr = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

* در دینامیک کار را با u و انرژی جنبشی را با T نشان می دهیم

$\Sigma F \cdot dr = du \rightarrow$ کار کوچکی که یک جابجایی کوچک انجام می شود

$\rightarrow \Sigma F \cdot dr = T_2 - T_1 = \Delta T \rightarrow u = \Delta T$

*

$du = \Sigma F \cos\theta \; ds$

یکی از تعاریف کار: مولفه نیرو در راستای جابجایی × جابجایی نیرو

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

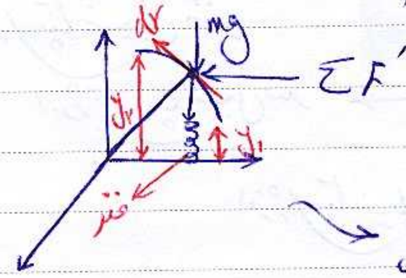
یا : مولفه جابه‌جایی در راستای نیرو × نیرو

$$\sum \vec F = \sum \vec{F'} + m\vec g$$

$\sum F'$: نیروهای خارجی وارد بر ذره به جز وزن

: نیرو و جابه‌جایی نیرو در جهت هم باشند کار + است

: " " در خلاف جهت هم باشند کار − است



$$U = \int (\sum F' + mg)\cdot dr = \Delta T$$

$$\to \int \sum F'_t \, dr + \int mg\cdot dr = \Delta T$$

$$\to \int \sum F'\cdot dr - \int_{y_1}^{y_2} mg\cdot dy = \Delta T$$

به خاطر خلاف جهت بودن mg و dy است

$$\to \int \sum F'\cdot dr = \Delta T + (mgy_2 - mgy_1)$$

* انرژی پتانسیل ثقلی: $V_g = mgy$

$$\to \int \sum F'\cdot dr = \Delta T + \Delta V_g$$

$$\sum \vec{F'} = \sum \vec{F''} + k\times n$$

n : تغییر طول فنر نسبت به حالت آزاد

$\sum F''$: کلیه نیروهای وارد بر جسم به جز نیروهای وزن و فنر

$$\to \int \sum F'\cdot dr = \int \sum F''\cdot dr + \int kn\cdot dr = \Delta T + \Delta V_g$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\rightsquigarrow \int \sum F''.dr - \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \Delta T + \Delta V_g$$

* dr در راستای فنر برابر dx است
* فنر تحت کشش است ← نیرو به سمت پایین است ← منفی است

$$\rightsquigarrow \int \sum F''.dr = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

* انرژی پتانسیل فنر: $V_e = \frac{1}{2} k x^2$

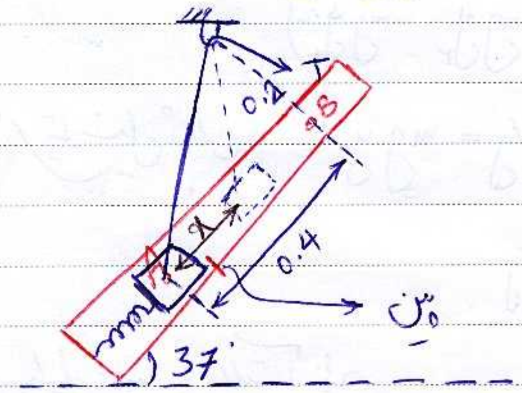
$$\rightsquigarrow E = T + V_g + V_e$$

انرژی مکانیکی ، انرژی جنبشی ، انرژی پتانسیل ثقلی ، انرژی پتانسیل فنر

$$\Rightarrow W = \int \sum F''.dr = \Delta E$$

کار کلیه نیروهای خارجی وارد بر ذره به استثنای وزن و فنر

* کار نیروهای خارجی وارد بر ذره به استثنای نیروی وزن و فنر برابر است با تغییرات انرژی مکانیکی



مثال:

شیاری صیقلی با افق زاویه 37 می‌سازد، فنر در ابتدا تحت کشش است، نیروهای رو به بالا بیشتر از نیروهای رو به پایین است آن‌ها را حساب کردیم

برای اینکه جسم حرکت نکند یک پین جلوی جسم می‌گذاریم حال پین را می‌کشیم

فنر به جسم متصل است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

→ سرعت جسم هنگام عبور از نقطه B چقدر است ؟

فرضیات :

T همواره ثابت است و در همه جا یکسان است و $T = 900N$

قرقره هم کاملاً روان است و دارای جرم ناچیزی است

$k = 1000\ N/m$, $m = 0.5\ kg$ = جرم جسم

x : انحراف فنر نسبت به طول آزاد $= +0.2m$

+ یعنی فنر تحت کشش است

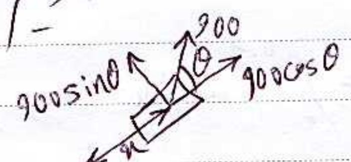
حل به روش بقای انرژی :

$$U = E_2 - E_1 \quad , \quad E_1 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (0.2)^2 = 20$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times V^2 + 0.5\, g \times 0.4 \sin 37 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (0.2 + 0.4)^2$$

سطح مبنا را روی خود جسم در حالت A در نظر گرفتیم

جسم در میانه راه :



$900 \sin\theta$ چون در راستای جابه جایی نیست، کار انجام نمی دهد

و نیروهای به جز وزن و فنر عبارت اند از T , N که

N نیز چون

در راستای خودش جابه جایی ندارد پس کارش برابر صفر است

$$\rightarrow U = \int_0^{0.4} 900 \times \frac{(0.4 - x)}{\sqrt{0.04 + (0.4 - x)^2}}\, dx$$

$$\left(U = \int 900 \cos\theta\, dx \quad , \quad \cos\theta = \frac{0.4 - x}{\sqrt{0.04 + (0.4 - x)^2}} \right)$$

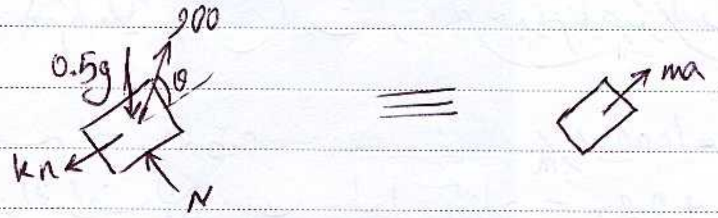
در این روش انتگرال سخت شد !!

Subject:

Year. Month. Date. ( )

2 راه داریم برای اینکه به انتگرال سخت برخورد نکنیم :

1) روش نیرو :



$$\rightarrow \sum F_x = ma_x \Rightarrow 900\cos\theta - k(x+0.2) - 0.5g\sin 37 = ma$$

$$, \cos\theta = \frac{0.4-x}{\sqrt{0.04+(0.4-x)^2}} \xrightarrow{\div m}$$

$$\frac{-1000(x+0.2)}{0.5} - \frac{0.3}{0.5}g + \frac{800}{0.5}\times\frac{0.4-x}{\sqrt{0.04+(0.4-x)^2}} = a$$

$$\rightarrow \int_0^{v} v\,dv = \int_0^{0.4} a\,dx \rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \int_0^{0.4} a\,dx$$

$\rightarrow$ حل می‌شه!!

حال با دیدگاه جدیدی از روش انرژی آشنا می‌شویم که دیگه به انتگرال سخت برخورد نکنیم و آن هم سیستم است

* اگر سیستم ما متشکل از چند عضو باشد آن گاه در اتصال‌ها اگر زوج نیروی عمل و عکس‌العمل جابه‌جایی یکسان داشته باشند ← کار آن‌ها همدیگر را خنثی می‌کند

نتیجه: اگر ما بخواهیم a را بنویسیم، کار نیروی داخلی را در نظر نمی‌گیریم

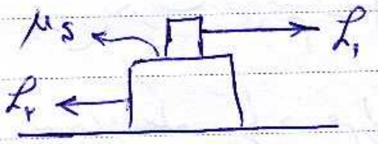
Subject:
Year. Month. Date. ( )

تغییر انرژی مکانیکی کل سیستم

$W = E_2 - E_1$

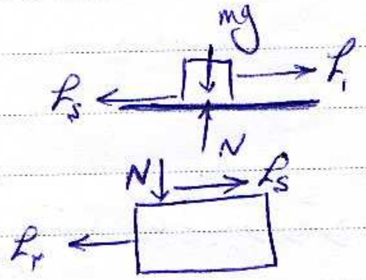
$W \rightarrow$ کار عوامل خارجی وارد بر جسم به جز وزن و فنر

داریم:



فرض می‌کنیم f_2 قوی‌تر از f_1

حال اگر لغزش پیش نیاد ⇐



f_s به سمت چپ و جابه‌جایی به سمت راست
⇐ علامت کار −

f_s به سمت راست و جابه‌جایی هم به سمت راست
⇐ علامت کار +

پس: کار نیروی داخلی (عمل و عکس‌العمل) همدیگر را خنثی می‌کند
چون هم جابه‌جایی‌ها و نیروها با هم برابرند اما $W_1 = -W_2$

حال: اگر فرض کنیم که لغزش داشته باشیم

⇐ که دیگر جابه‌جایی‌ها با هم برابر نمی‌شد ⇐ مجموع کار نیروهای عمل و عکس‌العمل صفر نمی‌شد!!

* سیستم: مجموعه‌ای از عناصر که به نوعی حرکتشان به هم وابسته است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال

سراغ مثال قبلی می‌رویم و داریم:

سیستمی تعریف می‌کنیم شامل جرم - فنر - طناب - قرقره.

به جای اینکه تنها جسم را منفرداً مورد بررسی قرار دهیم، کل سیستم را بررسی می‌کنیم

$U = E_2 - E_1$

$\hookrightarrow$ کار نیروهای خارجی وارد بر کل سیستم

فنر و طناب و قرقره جرمی ندارند $\Leftarrow$ انرژی جنبشی آن‌ها صفر است

اما:

برای محاسبه E_1 داریم:

$$E_1 = \frac{1}{2} \times 1000 \times (0.2)^2 + 0 + 0 + 0$$

انرژی جنبشی اولیه جسم صفر است چون $V_1 = 0$

طناب و قرقره هم نه انرژی جنبشی دارند نه پتانسیل

انرژی پتانسیل اولیه جسم نیز صفر است چون روی سطح مبنا است.

$$E_2 = \frac{1}{2}(1000)(0.6)^2 + \underbrace{0.4 \sin 37 \times 0.5g}_{\text{انرژی پتانسیل جسم}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times 0.5 \times V^2}_{\text{انرژی جنبشی جسم}} + \overset{\text{قرقره}}{0} + \overset{\text{طناب}}{0}$$

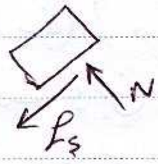
U: کار کلیه عوامل خارجی وارد بر سیستم به جز وزن و فنر

Subject:
Year. Month. Date. ( )

عکس العمل فنر : جابه‌جایی در راستای نیرو ندارد پس کارش صفر است

در قرقره‌ها نیز نیرو داریم اما جابه‌جایی نداریم پس کار صفر است

همچنین اگر قرقره‌ها روان نبود ⇐ گشتاور داشت و باید کار گشتاور را حساب می‌کردیم



N نیز کاری انجام نمی‌دهد چون در راستای N جابه‌جایی نداریم

همچنین چون سطح صیقلی است ⇐ f_s نداریم

حال: تنها کار طناب باقی ماند ⇐

طناب را می‌کشیم که دو مولفه داریم:
یکی در راستای شیار و دیگری عمود بر شیار که T در راستای عمود بر شیار مهم نیست زیرا کارش صفر است

$$U = 900\left(\underbrace{\sqrt{(0.4)^2 + (0.2)^2} - 0.2}_{\text{جابه‌جایی در راستای نیرو}}\right)$$

همچنین کار + است چون نیرو و جابه‌جایی هم جهت اند

سوال:

محل توقف جسم کجاست؟

$E_2 =$ داریم

$$E_3 = 0.5 g \sin 37 (0.4 + x_1) + \frac{1}{2} \times 1000 (0.6 + x_1)^2$$

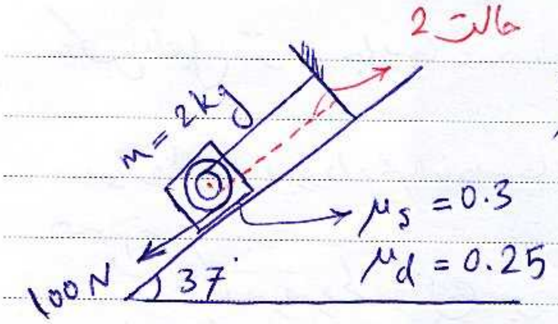
$$_2U_3 = -900\left(\sqrt{0.04 + x_1^2} - 0.4\right)$$

وقتی جسم از B عبور می‌کند ⇐ جهت T عکس می‌شود

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۸ Date. ۸x2

شنبه

مثال:



قرقره روان با جرم ناچیز و $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$

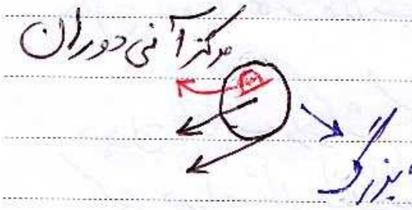
سرعت جعبه بعد از 1.2 m جابجایی = ?

با بقای انرژی سیستم، مثال را حل می‌کنیم

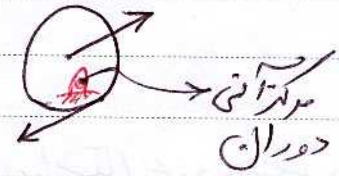
سطح مبدا (مبنا) را در همان وضعیت ۱ قرار می‌دهیم:

جسم به سمت پایین حرکت می‌کند چون:

مرکز آنی قرقره کوچک در نقطه تماسش با طناب است و چون مرکز قرقره زیر مرکز آنی است ← سرعتش در جهت ≠ جهت سرعت قرقره پایینی (بزرگ) است

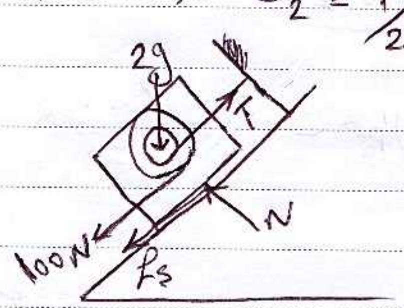


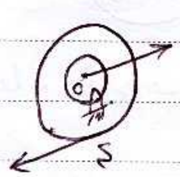
حالت 2 : اما :



برای حالت دوم، مثال را حل می‌کنیم:

$E_1 = 0 \quad , \quad E_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times v^2 + 2g \times 1.2 \sin 37$





$v_o = r_1 \omega$

$v_s = (r_2 - r_1)\omega$

$\rightarrow \frac{v_s}{v_o} = \frac{r_2}{r_1} - 1$

$\rightarrow \frac{v_s}{v_o} = 2 \rightarrow v_s = 2v_o$

پس وقتی جسم به اندازه x جابجا می‌شود نیروی 100N به اندازه 2x جابجا می‌شود

$\Rightarrow u=\int F\cdot ds \xrightarrow{ds=L\,d\theta} u=\int F L\, d\theta$: نکته

$\rightarrow u=\int M\, d\theta$

مفصل‌های غیر روان همواره کار منفی ایجاد می‌کنند

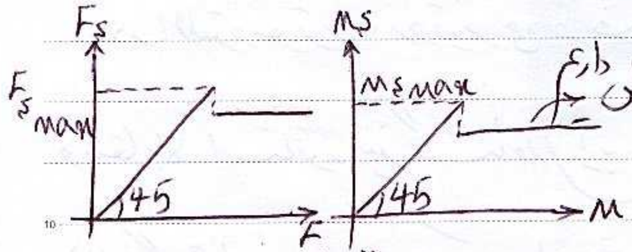
$$u=-0.25\times 2g\cos 37\times 1.2+100\times 2.4$$

کار نیروی $100N$ مثبت شد چونکه، کار برابر است نیرو ضرب در جابه‌جایی نیرو در راستای نیرو؛

$100N$

داریم: جابه‌جایی جسم به سمت بالا است اما جابه‌جایی نیروی به سمت پایین است.

.... ←



از این جا به بعد چرخش داریم

حال اگر قرقره‌ها روان نباشند:

با فرض:

$$M_d=2.5\,N.m,\quad M_s=3\,N.m,\quad r_2=0.2,\quad r_1=0.1$$

اصولاً باید ما ابتدا گشتاور مورد نیاز در قرقره جهت اینکه قرقره بچرخد را یافته و سپس اگر آن گشتاور از M_s بیشتر بود ⇐ قرقره خواهد چرخید

در غیر این صورت قرقره نخواهد چرخید و گشتاور، کاری انجام نخواهد داد

اما:

ما به طراح سوال اطمینان می‌کنیم و فرض را بر چرخش قرقره خواهیم گذاشت

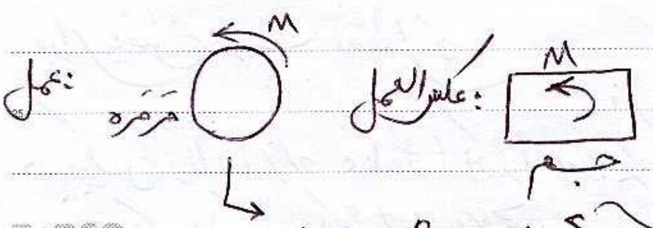
*

$u=\int M\omega\, dt \Leftarrow$ یا کار گشتاور $= u = \int M\, d\theta = M\theta$

M ← گشتاور

$d\theta$ ← تغییر زاویه طی گشتاور اعمال شده

در این جا داریم:



چون جسم نمی‌چرخد ⇐ کار گشتاور (گشتاور عکس العملی!!) صفر است

$u=M\theta=M\dfrac{S}{r}$ → جابه‌جایی

نکته : وقتی دو جسم نسبت به هم غلتش دارند ⟸ جابه‌جایی شان نسبت به هم صفر است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* اگر نیرو به نقطه‌ای از جسم که سرعت ندارد وارد شود ⟸ آن نیرو کار انجام نمی‌دهد

مثل :

کار نیروی اصطکاک در غلتش کامل با شرط ثابت بودن سطح زیرین صفر است (چون سرعت صفر است ⟸ جابه‌جایی صفر است)

* در الکتروموتور، روتور می‌چرخد و گشتاور را به استاتور وارد می‌کند

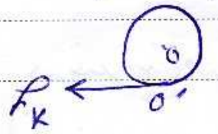
و متقابلاً استاتور نیز گشتاور را به روتور وارد می‌کند

(البته گشتاور روتور محرک است نه گشتاور مقاوم)

اما :

تنها گشتاور روتور کار انجام می‌دهد چون تنها روتور می‌چرخد

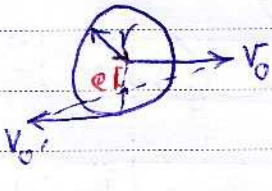
* ماشینی که در حال بوکس و باد است ⟸ (در چنین بوکس و باد، حرکت هم می‌کند!!)



$W_{f_k} = f_k \times d$

اما این جابه‌جایی با جابه‌جایی مرکز چرخ یکی نیست چون $V_{o'} \neq V_o$

اما می‌توانیم جابه‌جایی نیروی اصطکاک را با توجه به جابه‌جایی مرکز چرخ بیابیم



$$\frac{V_o}{e} = \frac{V_{o'}}{r-e}$$

برای یافتن جهت نقطهٔ o' :

$V_{o'} = (V_A - r\omega)\,i$

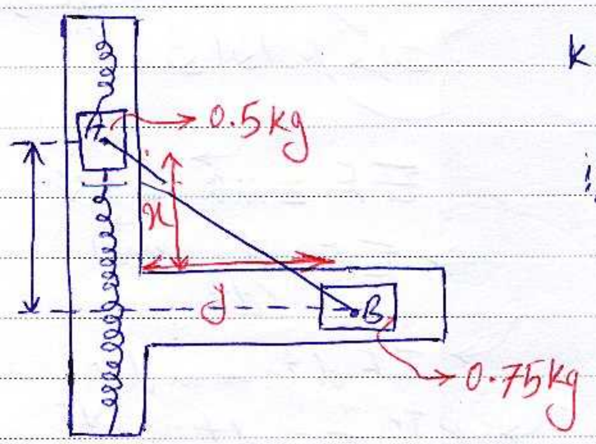
در بوکس و باد (take off) اگر $V_A < r\omega$ ⟸ ← : جهت f_k

اما در ترمز کردن، اگر $V_A > r\omega$ ⟸ → : جهت f_k

* بهترین مبنا برای تشخیص جابه‌جایی نیرو، بررسی سرعت در نقطهٔ مورد نظر است

Subject:

Year. Month. Date. ( )



$k = 10 \frac{N}{m}$

فنرها طول آزاد خود را ← در $x = 0$ دارند

جرم لینک ناچیز است

* اگر جرم لینک مطرح بود، چون هم گستردگی دارد هم دوران ← در این مبحث مسأله را نمی‌توان حل کرد (سینتیک ذرات)

$x_0 = 0.4\,m \rightarrow v_A = v_B = 0 \Rightarrow v_A , v_B = ?$ در هر x دلخواه

$W = E_2 - E_1$

تنها نیروی خارجی، N است که کار را انجام نمی‌دهد ← $W = 0$ ← $E_2 = E_1$

همچنین، چون شکل در صفحه افقی قرار دارد ⇐ بحث انرژی پتانسیل فرت

$\rightarrow E_1 = 2 \times \frac{1}{2} \times 10 \times (0.4)^2$

(چون 2 فنر داریم یکی فشرده می‌شود و دیگری کشیده)

$E_2 = 2 \times (\frac{1}{2} \times 10 \times x^2) + \frac{1}{2} \times 0.5 \times v_A^2 + \frac{1}{2} \times 0.75 \times v_B^2$

← معادله 2 مجهول

← باید از سینماتیک کمک بگیریم و رابطه بین V_A و V_B برقرار کنیم:

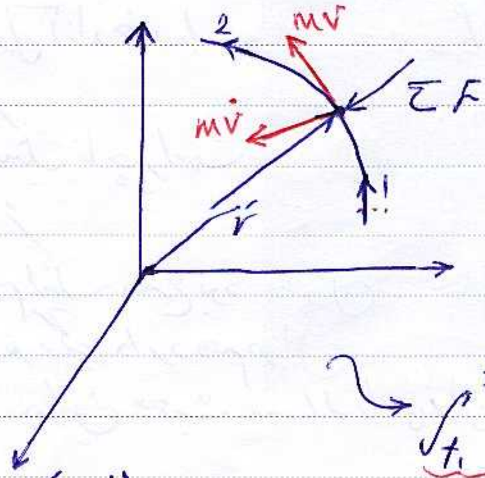
$x^2 + y^2 = 0.6 \rightarrow 2\dot{x}x + 2\dot{y}y = 0 \rightarrow \dot{x} = \frac{-y\dot{y}}{x}$

$\rightarrow v_A = \frac{-y v_B}{x} = \frac{-v_B \sqrt{0.36 - x^2}}{x}$

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۸ Date. ۱۸

دوشنبه

momentum method — متد اندازه حرکت:



$$\Sigma F = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}}$$

$$\rightarrow \Sigma F = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\rightarrow \Sigma F\, dt = m\, d\vec{v}$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F \cdot dt = \int_{v_1}^{v_2} m\, dv$$

$$\rightarrow \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F \cdot dt}_{\text{ضربه خطی}} = m(V_2 - V_1) = G_2 - G_1 = \Delta G$$

$t_1 - t_2$ زمانی است که نیرو به جسم وارد می شود

ΣF: کلیه نیروهای خارجی وارد بر جسم

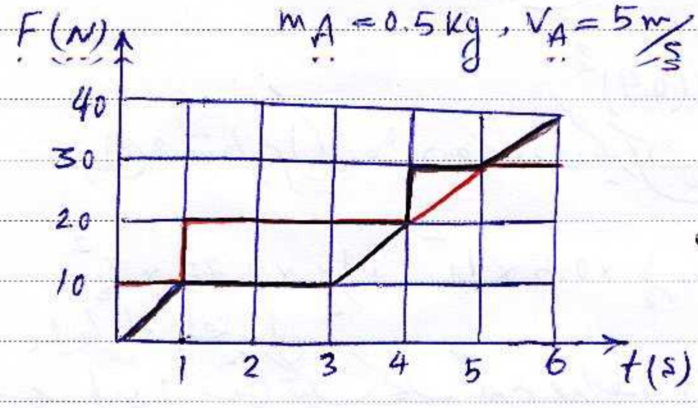
ΔG: اندازه حرکت خطی

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F \cdot dt \begin{cases} \int \Sigma F_x \cdot dt = \Delta G_x \\ \int \Sigma F_y \cdot dt = \Delta G_y \\ \int \Sigma F_z \cdot dt = \Delta G_z \end{cases}$$

مثال:

$m_A = 0.5\,kg$, $V_A = 5\,m/s$, $37°$

F_y, F_x, A



V_A بعد از ۶ ثانیه را بیابید = ?

$$\int \Sigma F_x\, dt = \Delta G_x$$

$$\rightarrow +125 = 0.5(V_x + 4) \quad (4 = 5\cos 37)$$

$$\Rightarrow V_x = 246$$

$$\int \Sigma F_y\, dt = \Delta G_y \Rightarrow 105 = 0.5(V_y - 3) \Rightarrow V_y = 213$$

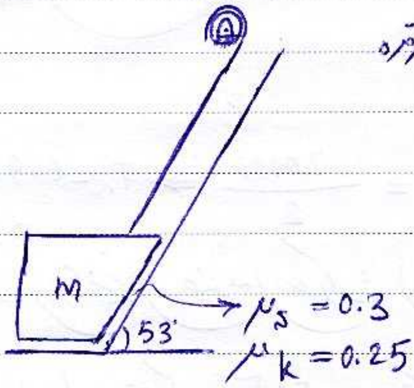
$$\rightarrow v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{213}{246}$$

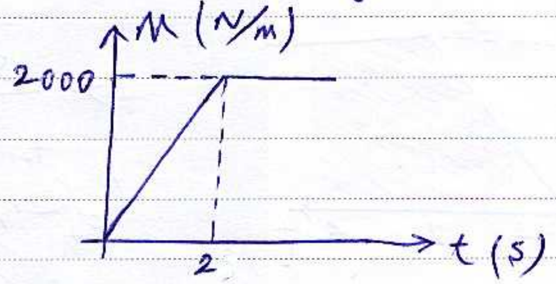
$$\Sigma F = \dot{G} \quad \leftarrow \text{نکته}$$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

مثال :

$r=0.1m$ شعاع قرقره ، $m=1000kg$



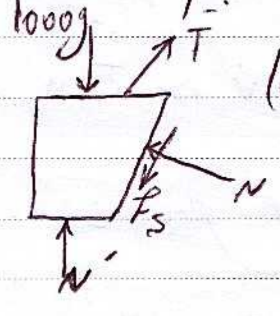


قرقره به یک الکتروموتور متصل شده است . نمودار تغییرات گشتاور وارده از الکتروموتور به قرقره نیز معلوم است

۶ ثانیه بعد از زدن کلید الکتروموتور ⇐ $v_{\text{جسم}} = ?$

وقتی ما کلید الکتروموتور را می زنیم ، بلافاصله قرقره حرکت نمی کند (کشش کابل باید به یک اندازه ی خاصی برسد)

⇐ زمان حرکت را با کمک گرفتن از استاتیک می یابیم :



وقتی حرکت می کنیم ⇐ N' صفر می شود (آستانه ی لغزش)

پس داریم :

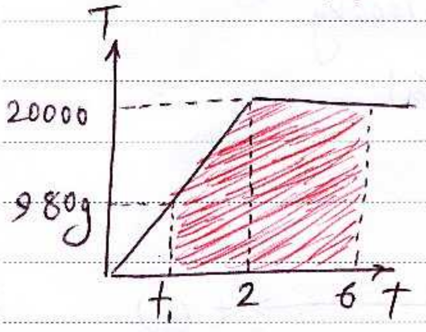
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - 1000g\cos 53 = 0$$
$$\Rightarrow N = 600g$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T - 1000g\sin 53 - 0.3\times 600g = 0 \Rightarrow T = 980g$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

از روی $M-t$ نمودار، $T-t$ را می‌یابیم ($\frac{M-t \text{ نمودار}}{r \text{ قرقره}}$) ($M=T.r$)

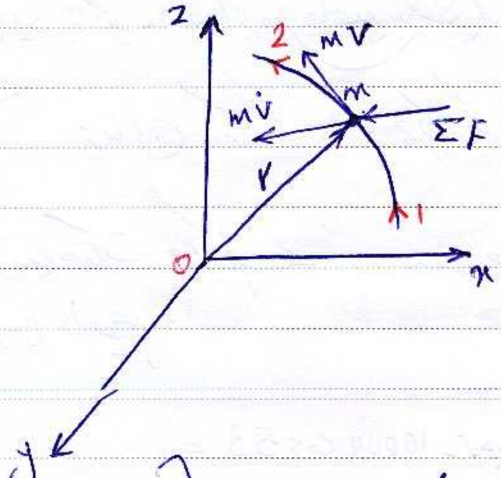


$$\Rightarrow \frac{980}{t_1} = \frac{20000}{2} \Rightarrow t_1 = 0.961$$

نکته: بازه‌ی زمانی ضربه‌ی حرکت ($\int_{t_1}^{t_2} \sum F_x \, dt$) بازه‌ای است که در آن به جسم نیرو وارد می‌شود

حال داریم:

$$20000 \times 4 + \left(\frac{2 \times 20000}{2} - \frac{980g \times 0.961}{2}\right) - 1000g \sin 53 \,(6-0.961)$$
$$- 0.25 \times 600g \,(6-0.961) = 1000 \times v_x \rightarrow v_x =$$



$$\Sigma M_O = r \times \Sigma F = r m \dot{V}$$
$$\dot{H}_o = \frac{d}{dt}(r \times mV) = \cancel{\dot{r} \times mV} + r \times m\dot{V} \Rightarrow \Sigma M_o = \dot{H}_o$$

$H_o = r \times mV$ اندازه حرکت زاویه‌ای

$$\Sigma M_o = \frac{d}{dt} H_o \Rightarrow \Sigma M_o \, dt = dH_o$$

$$\underbrace{\int \Sigma M_o \, dt}_{\text{ضربه زاویه‌ای}} = \int dH_o = H_{o_2} - H_{o_1} = \Delta H_o$$

گشتاور کلیه نیروهای خارجی حول O

PAPCO

بردار گشتاور عمود بر صفحه دوران است

$$\int \Sigma M_o \, dt \begin{cases} \int \Sigma M_{o_x} \, dt = \Delta H_{o_x} \\ \int \Sigma M_{o_y} \, dt = \Delta H_{o_y} \\ \int \Sigma M_{o_z} \, dt = \Delta H_{o_z} \end{cases}$$

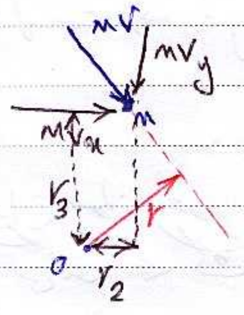
$$H_o = r \times mV = (xi + yj + zk) \times m(V_x i + V_y j + V_z k)$$

$$\rightarrow H_o = m \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \begin{cases} H_{o_x} = (yV_z - zV_y)m \\ H_{o_y} = (zV_x - xV_z)m \\ H_{o_z} = (xV_y - yV_x)m \end{cases}$$

* در صفحه فقط H_{o_z} داریم

همچنین در صفحه فقط ← ضربه زاویه‌ای در راستای محور z داریم

حال برای مسائل در صفحه داریم:



با فرض mv به عنوان یک نیرو اگر گشتاورش را حول o بیابیم

← اندازه حرکت زاویه‌ای را یافته‌ایم

$$\rightarrow H_{o_z} = mV \times r$$

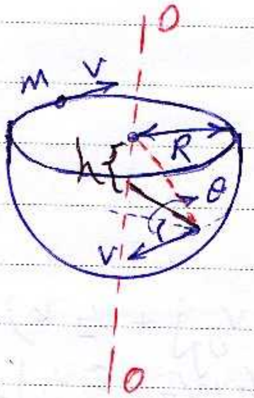
یا اینکه:

$$H_{o_z} = mV_y \times r_2 + mV_x \times r_3$$

ضرب معمولی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



گلوله‌ای درون این لیوان حرکت می‌کند (یک حرکت مارپیچی) تا به انتها برسد

سطح درون لیوان صیقلی است و

$0 < h < R$

$0 < r < R$

r: شعاعی است که گوی در هر لحظه از پایین آمدنش دارد.

θ: زاویه‌ای است که بردار سرعت با صفحه‌ای می‌سازد که محور عمود بر آن OO است

تنها نیروی خارجی N است که چون حرکتی در آن جهت نداریم ⇐

$U = E_2 - E_1 = 0 \rightarrow E_2 = E_1 \rightarrow$

$\frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

$\int_0^t \sum M_{O_0} \, dt = \Delta H_0$

نیروی وزن موازی محور OO است و نیروی عکس‌العمل عمودی سطح محور OO را قطع می‌کند ⇐ گشتاورشان حول محور OO صفر است

$\rightarrow \Delta H_0 = 0 \rightarrow H_{O_2} = H_{O_1} \rightarrow m v_0 R = m \sqrt{v_0^2 - 2gh} \times \cos\theta \times \sqrt{R^2 - h^2}$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{v_0 R}{\sqrt{(v_0^2 - 2gh)(R^2 - h^2)}}$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برخورد گوله ها (اجسام بهتره!!)

t_1: زمانی است که طول می‌کشد تا بیشترین تغییر شکل در دو جسم رخ دهد (Max انحراف رخ داده باشد)

t_1 زمانی است که Max انحراف اتفاق افتاده باشد که از نظر سینماتیکی یعنی در راستای برخورد، سرعت نسبی نداشته باشیم

t زمانی است که دو جسم در آستانه جدا شدن از هم هستند

$t_1 - 0$ را زمان هم‌رسی گویند (انرژی جمع می‌شود)

$t - t_1$ را زمان وارسی گویند (انرژی آزاد می‌شود)

$$\int_0^t F\,dt = \Delta G_A$$

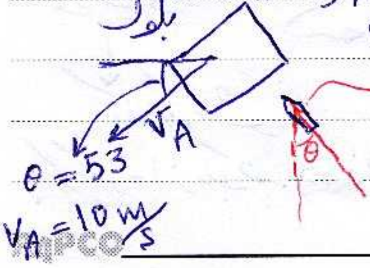
$$\Rightarrow \Delta G_A + \Delta G_B = 0$$

$$-\int_0^t F\,dt = \Delta G_B$$

اندازه حرکت خطی کلی تغییر نمی‌کند $\Delta G_{کل} = 0$

هنگام برخورد n جسم با هم در غیاب هرگونه ضربه خارجی

مثال: وقتی گلوله به بلوک برخورد می‌کند ⇐ با هم شروع به حرکت می‌کنند ⇐ V را در لحظه برخورد بیابید؟



گلوله

$V_B = 300 m/s$

$m_B = 0.05kg$

$\theta = 15$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$G_{x_1} = G_{x_2} \Rightarrow G_{x_1A} + G_{x_1B} = G_{x_2A} + G_{x_2B}$$

$$\hookrightarrow -5 \times 10\cos 53 - 0.05 \times 300 \sin 15 = -5.05\, V_x$$

$$G_{y_1} = G_{y_2} \Rightarrow -5 \times 10 \sin 53 + 300 \cos 15 \times 0.05$$
$$= 5.05 \times V_y$$

$$\hookrightarrow V_x = 6.7 \quad , \quad V_y = -5.05 \Rightarrow V = 8.39$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \times 0.05 \times 300^2 + \frac{1}{2} \times 5 \times 10^2 = 2500$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \times 5.05 \times 8.39^2 = 177.7 \qquad \Rightarrow E_1 \neq E_2$$

* تنها در برخورد الاستیک ؛ $E_1 = E_2$
برخورد الاستیک برخوردی است که در آن :
انرژی جمع شده در زمان همرسی
با انرژی آزاد شده در زمان وارسی برابر باشد

* در E تنها $|V|$ مهم است اما در G علاوه بر $|V|$ ، جهت V نیز مهم است

در این مثال اگر گلوله از شکم بلوک عبور کند یا اصلاً هنگام برخورد ، گلوله نابود شود !! ← مسأله غیرقابل حل !! است

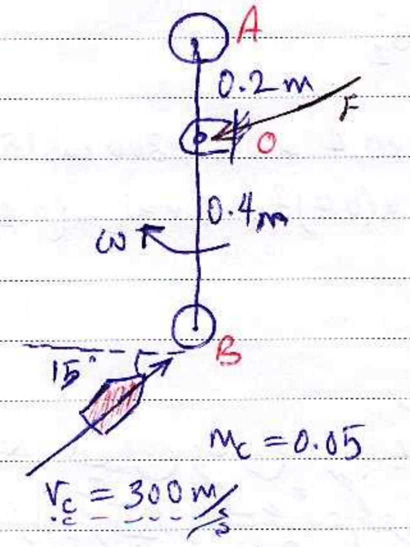
تکه تکه شود

اگر گلوله از بلوک (هنگام برخورد) خارج می‌شد ← 2 معادله ، 4 مجهول ← غیرقابل حل

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



مفصل O، کاملاً روان است

گلوله ای را به سمت B شلیک می کنیم

V_A را در لحظه برخورد بیابید ؟ ←

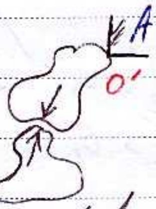
$m_A = m_B = 0.5\,kg$

$\omega = 10\,rad/s$

وقتی گلوله به B برخورد می کند، یک نیروی بسیار زیاد از طرف مفصل به سیستم وارد می شود ⇐ $G_1 \neq G_2$ زیرا: $Q_x = \Delta G_x$ ، $Q_y = \Delta G_y$ ، $Q = \int F\,dt$

$Q_x , Q_y \neq 0$

$\int_0^t F\,dt$ منظور است که t زمانی است که نوک گلوله به B برخورد کرده تا گلوله کاملاً داخل B فرو رفته باشد.



* اگر ۲ جسم برخورد کنند و ما گشتاور را حول O محاسبه کنیم

O. چون نیروهای برخورد زوج عمل و عکس العمل هستند پس گشتاور یکدیگر را خنثی می کنند

نیروهای وزن نیز با ضرب در یک مقدار کوچک، بسیار ناچیز خواهند شد و در نظر گرفته نمی شوند (البته اگر با افق زاویه دار باشد)

اما نیرویی که از طرف سطح A به جسم وارد می شود زیاد است و نمی توان از آن صرف نظر کرد پس ⇐ $H_{O_1} \neq H_{O_2}$

ما: گشتاور را حول O' محاسبه کنیم ⇐

$H_{O_1} \simeq H_{O_2}$ → زیرا اگر با افق زاویه ای می داشت که وزن دو گلوله باعث ایجاد گشتاور می شد که البته می شود از آنجا صرف نظر کرد (زیرا زمان برخورد بسیار کوتاه است)

$$\Rightarrow \int \Sigma M_o \, dt = \Delta H_o = 0 \rightarrow H_{O_1} = H_{O_2}$$

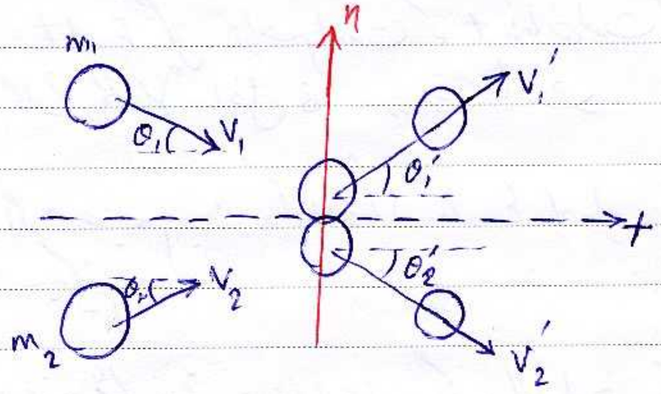
$$-0.5 \times 0.2 \times 10 \times 0.2 - 0.5 \times 0.4 \times 10 \times 0.4 + 0.5 \times 300 \cos 15 \times 0.4 = 5 \cdot 0.5\, \omega_2 \times (0.4)^2 + 5 \times \omega_2 \times (0.2)^2$$

ω_2 را می‌یابیم

* چون زمان t بسیار کوچک در نظر گرفته شده است و w نمی‌تواند تاثیر زیادی بگذارد که چشم‌گیر باشد
که پس از برخورد نیز پاندول را قائم در نظر گرفتیم

شنبه: ۲۳ آبان ۸۸

برخورد دو گوی



m_1 ، m_2 ، θ_1 ، θ_2 ، V_1 ، V_2 را داریم

V_1' ، V_2' ، θ_1' ، θ_2'

در راستای t نیرویی بین این دو تا وارد نمی‌شود زیرا سطح دو گوی صیقلی است
در راستای t، به هیچ کدام از گوی‌ها نیرویی وارد نمی‌شود

راستای n، راستای برخورد است

ضربه در راستای n وارد می‌شود. (با وصل کردن مرکز 2 گوی به هم ← راستای n را می‌یابیم) (t عمود بر n است)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

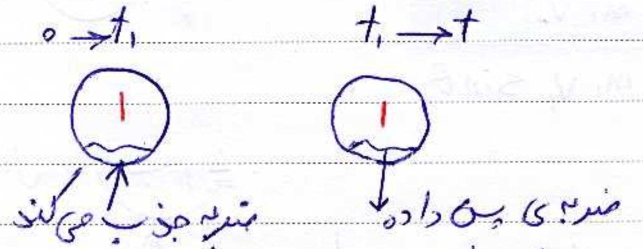
در راستای t :

$$\cancel{m_1} V_1 \cos\theta_1 = \cancel{m_1} V_1' \cos\theta_1'$$
$$\cancel{m_2} V_2 \cos\theta_2 = \cancel{m_2} V_2' \cos\theta_2'$$

در راستای n : (چون 2 گوی به هم ضربه وارد می کنند ← ΔG تک تک برابر صفر نیست!)

$$-m_1 V_1 \sin\theta_1 + m_2 V_2 \sin\theta_2 = m_1 V_1' \sin\theta_1' - m_2 V_2' \sin\theta_2'$$

معادله چهارم باید به حسب این 2 گوی بستگی داشته باشد



$$\int_0^{t_1} F\,dt \qquad \int_{t_1}^{t} F'\,dt$$

$$\Rightarrow e = \frac{\int_{t_1}^{t} F'\,dt}{\int_0^{t_1} F\,dt}$$

$0 < e < 1$

زیرا: ضربه همواره جذب می شود اما احتمال دارد هیچ ضربه ای پس ندهد (ضربه کاملاً پلاستیک ← مثل برخورد دو قطعه خمیر با هم) و یا اینکه کل ضربه جذب شده را پس دهد (ضربه کاملاً الاستیک!)

حال با داشتن e معادله چهارم را می سازیم:

نتیجه ضربه = تغییر اندازه حرکت خطی در راستای خودش

$\int_0^{t_1} F\,dt$ = تغییر اندازه حرکت خطی جسم! در راستای نرمال طی زمان 0 تا t_1

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در لحظه t_1، سرعت نسبی دو گوی صفر است.

$$V_{1n} = V_{2n}$$

سرعت جسم 1 در راستای نرمال در لحظه t_1 = V_0

سرعت جسم 2 در راستای نرمال در لحظه t_2 = V_0

با فرض به سمت بالا بودن V_0 داریم:

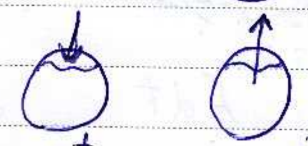
برای جسم 1:

ضریب برخورد

$$e = \frac{m_1 V_1' \sin\theta_1' - m_1 V_0}{+m_1 V_0 + m_1 V_1 \sin\theta_1}$$

حال برای جسم 2:

$$e = \frac{-m_2 V_2' \sin\theta_2' - m_2 V_0}{m_2 V_0 - m_2 V_2 \sin\theta_2}$$



$$\int_0^{t_1} F\,dt \qquad \int_{t_1}^{t} F'\,dt$$

5 معادله و 5 مجهول $\Leftarrow$ (V_0 نیز مجهول است)

می‌توانیم با حذف V_0 از 2 معادله بالا $\leftarrow$ 4 معادله و 4 مجهول خودمان برسیم (V_0 زیاد به درد ما نمی‌خورد!!)

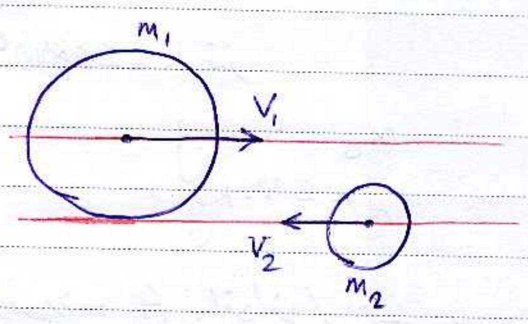
$$e = \frac{V_1' \sin\theta_1' + V_2' \sin\theta_2'}{V_1 \sin\theta_1 + V_2 \sin\theta_2}$$

نکته:

$$e = \frac{|\text{سرعت نسبی در راستای برخورد در هنگام دور شدن}|}{|\text{سرعت نسبی در راستای برخورد در هنگام نزدیک شدن}|}$$

PAPCO

مثال



$m_1 = 23\,kg \; , \; r_1 = 75$

$m_2 = 4\,kg \; ; \; r_2 = 50$

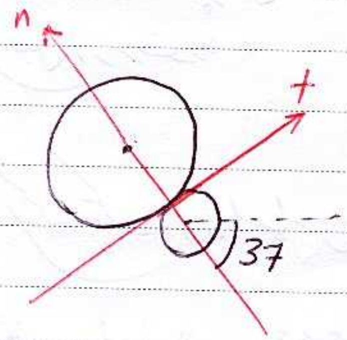
$V_1 = 4 \ m/s$

$V_2 = 12 \ m/s$

$e = 0.4$

ابتدا باید جهت n و t را می‌یابیم!!

اگر در هنگام برخورد 2 گوی با هم، مرکز گوی‌ها را به هم وصل کنیم ⇐ جهت n را یافته‌ایم



بقای اندازه حرکت گوی 1 در راستای t:

① $V_1 \cos 53^\circ = V'_{1t}$

جهت V'_{1t} را فرضی انتخاب کردیم

$\rightarrow V'_{1t} = 4\cos 53 = 2.4$

حال: (جهت V'_2 را به سمت پایین + گرفتیم)

② $-V_2 \cos 53 = -V'_{2t} \rightarrow V'_2 = 7.2 \rightarrow V'_{2t} = 7.2$

بقای اندازه حرکت خطی کل در راستای n:

③ $-m_1 V_1 \cos 37 + m_2 V_2 \cos 37 = V'_{1n} \cdot m_1 - m_2 \cdot V'_{2n}$

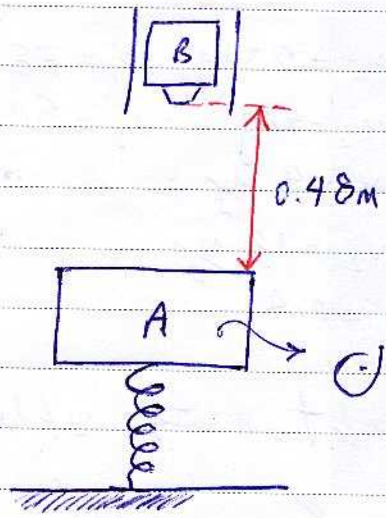
فرض کردیم، گوی 1 پس از برخورد به سمت بالا و گوی 2 به سمت پایین می‌آیند.

④ $e = \dfrac{V'_{2n} + V'_{1n}}{4\cos 37 + 12\cos 37} = 0.4 \rightarrow$ V'_{1n} و V'_{2n} را می‌یابیم

Subject:

Year.　　Month.　　Date.　( )

مثال:



فنر $k = 2.88\times10^{6}\ N/m$

$m_B = 500kg$

$m_A = 3000kg$

پس از برخورد، A به اندازه 0.02m پایین می‌آید

⟸ الف) $e = ?$

ب) Max پرش B پس از برخورد با A = ?

لحظه قبل از برخورد:

$v_{1B} = \sqrt{2gh} = 3.07\ m/s$

لحظه‌ای که چکش (B) تماس بر سندان (A) شود را $t = 0$ در نظر می‌گیریم

انحراف سندان (0.02m) از $0 \le t$ رخ می‌دهد

داریم: $t_1 \le 0$: زمان اثرگذاری B بر A (زمان برخورد است که بسیار کوتاه است)

$t_1 \le t$: زمانی است که سندان، مستقل در حال پایین آمدن است (چکش پرش کرده و سندان به تنهایی در حال پایین آمدن است)

چون $t_1 << t$ ⟸ می‌توان از انحراف سندان بین زمان $0 \le t_1$ صرف نظر کنیم ⟸ $t_1 \le t \simeq 0 \le t_1$

P4PCO

لحظه‌ی پس از برخورد:

A جرم: $W = \overset{t}{E_2} - \overset{t_1}{E_1}$

طی زمان $t_1 - t$ هیچ نیروی خارجی به جرم A وارد نمی‌شود $\Leftarrow W = 0$

$$\rightarrow E_{A_{t_1}} = E_{A_t}$$

y در زمان t_1 را سطح مبنا می‌گیریم:

$$\rightarrow E_{A_t} = -3000g \times 0.02 - \frac{1}{2} \times 2.88 \times 10^6 \times \left(0.02 + \frac{3000g}{2.88 \times 10^6}\right)^2$$

نکته:

(Δ استاتیکی: میزان تغییرات فنر نسبت به حالت آزاد، وقتی که جرم روی فنر است)

$0.02 + \frac{mg}{k} =$ تغییرات فنر نسبت به حالت آزاد فنر

داریم:

$$E_{A_{t_1}} = \frac{1}{2} \times 3000 \times V_{A_{t_1}}^2 + \frac{1}{2} \times 2.88 \times 10^6 \times \left(\frac{3000g}{2.88 \times 10^6}\right)^2$$

$\rightarrow$ سرعت جرم A را در لحظه‌ی جدایش تیک از سلول می‌یابیم

حال داریم:

$$\int_0^{t_1} \Sigma F_y \, dt = \Delta G_y$$

$\int_0^{t_1} \Sigma F_y \, dt$: تقریباً برابر صفر است زیرا:

PAPCO

Subject:

Year.   Month.   Date.   ( )

ضربه‌ای که فنر به سیستم وارد می‌کند برابر است با

$k \times \Delta x$

Δx = انحرافی است که فنر در زمان 0 تا t_1 دارد که چون این جابه‌جایی خیلی کوچک است و k نیز محدود است $\Leftarrow$ 0 می‌توان در نظر گرفت

(اما اگر جسم A روی زمین باشد $\Leftarrow$ ∞ $\Leftarrow$ $k \to \infty$!!

$\int_0^{t_1} \Sigma F_y \, dt \neq 0$ می‌شود)

حال می‌توان نوشت:

$$G_{0y} = G_{t_1 y}$$

$$-500 \times 3.07 = -3000 \times V_{A t_1} + 500 \, V_{B t_1}$$

معلوم

(با فرض اینکه پس از جدایش A و B، B به سمت بالا پرتاب شود)

با یافتن $V_{B t_1}$:

if $V_{B t_1} > 0$ → فرض درست ✓

else → فرض غلط ×

که یک با سرعت کمتری نسبت به سلول به سمت پایین می‌آید

$$e = \frac{V_{A t_1} + V_{B t_1}}{3.07}$$

$V_{B t_1} = \sqrt{2gh}$ → ارتفاع اوج‌گیری می‌آید

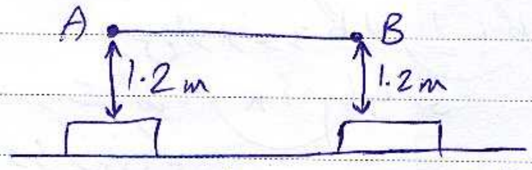
PAPCO

Subject: سال
Year. ۸۸ Month. آبان Date. 25

دوشنبه

مثال:

سرعت زاویه‌ای میله AB پس از برخورد با موانع:

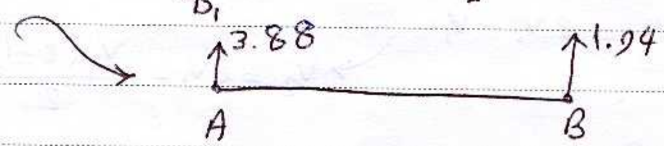


$e_A = 0.۸$ $\quad e_B = 0.4$

$$V_{A_1} = V_{B_1} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g \times 1.2} = 4.85 \ m/s$$

$$0.8 = \frac{V_{A_2}}{V_{A_1}} \longrightarrow V_{A_2} = 0.8 \times 4.85 = 3.88$$

$$0.4 = \frac{V_{B_2}}{V_{B_1}} \longrightarrow V_{B_2} = 0.4 \times 4.85 = 1.94$$

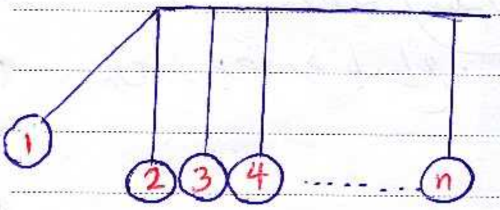


$$\longrightarrow V_B = V_A + \omega \times r \longrightarrow 1.94i = 3.88i - 0.8\omega i$$

$$\Longrightarrow \omega = 2.4$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



پس از برخورد گلوله ۱ با گلوله ۲
سرعت گلوله n اُم را بیابید
درصورتی که:
گلوله ۱ دارای سرعت V_0 باشد

ابتدا فرض می‌کنیم گوی ۱ هنگام برخورد به گوی ۲، برگشت داشته باشد
حال داریم:

$$mV_0 = -mV_1 + mV_2 \Rightarrow V_2 = V_0 + V_1$$

V_1: سرعت گلوله ۱ پس از برخورد است

V_2: سرعت گلوله ۲ پس از برخورد است

$$e = \frac{V_1 + V_2}{V_0} \Rightarrow V_2 = eV_0 - V_1 \rightarrow V_2 = eV_0 - \frac{V_0(e-1)}{2}$$

چون $e-1<0$ ⇐ V_2 منفی می‌شود یعنی گلوله شماره ۱ پس از برخورد برنمی‌گردد

حال برای بقیه گلوله‌ها داریم:

$$V_0 + V_1 = eV_0 - V_1 \Rightarrow 2V_1 = V_0(e-1) \Rightarrow V_1 = \frac{V_0(e-1)}{2}$$

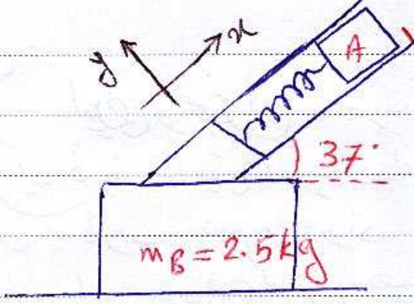
→ گلوله ۱ برنمی‌گردد → $V_1 = \frac{V_0(1-e)}{2}$

$$V_2 = \frac{eV_0}{2} + \frac{V_0}{2} = V_0\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$\rightarrow V_n = V_0\left(\frac{1+e}{2}\right)^{n-1}$$

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

مثال:



$m_A = 1.5 kg$, $k = 400$ N/m

فنر را 0.5m فشرده کرده و مانعی جلوی آن می گذاریم ⇐

حال با رها کردن مانع، سرعت پس زنش جرم B و همچنین سرعت گلوله A را بیابید:
(با فرض هیچ گونه اتلاف انرژی (عدم وجود اصطکاک))

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 400 \times 0.5^2 = \frac{1}{2} \times 2.5 V_B^2 + \frac{1}{2} \times 1.5 V_A^2 + 1.5 g \times 0.5 \sin 37$$

E_1: قبل از پرتاب ، E_2: بعد از پرتاب

کل سیستم در جهت x، بقای اندازه حرکت خطی دارد چون هیچ نیرویی در جهت x به جسم وارد نمی شود پس:

$$G_{x_1} = G_{x_2} \longrightarrow 0 = -2.5 v_{B_x} + 1.5 v_{A_x}$$

($G_{y_1} \neq G_{y_2}$ زیرا در راستای y، نیروی N به جسم وارد می شود و $G_1 \neq G_2$)

سرعت مطلق A در راستای شیار قرار ندارد، سرعت نسبی A با افق زاویه 37 می سازد.

حال 2 معادله داریم و 3 مجهول (V_{A_y} ، V_{A_x} ، V_B) ⇐ معادله سوم را از سینماتیک می یابیم ⇐

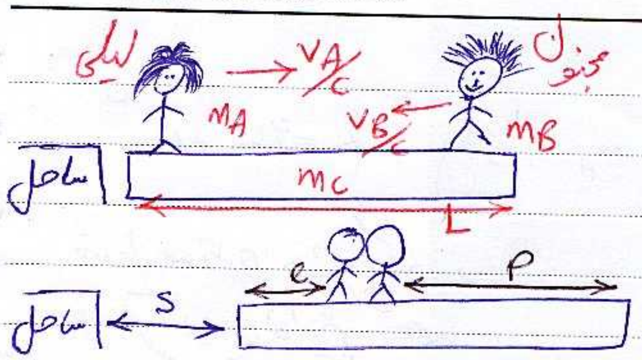
$$V_A = V_B + V_{rel} \Rightarrow V_{A_x} i + V_{A_y} j = -V_B i + V_{rel} (\cos 37 i + \sin 37 j)$$

⇐ 4 معادله و 4 مجهول (V_{rel} را نیز می یابیم)

[redacted]

Subject:

Year. Month. Date. ( )



مثال:

لیلی و مجنون، هر کدام روی یک طرف قایقی ایستاده‌اند!! سپس به طرف هم می‌دوند حال پس از رسیدن این دو به هم تخته چه فاصله‌ای از ساحل گرفته است؟

$$S = ?$$

با قرار دادن دستگاه بر روی تخته داریم:

$$V_A = V_C + V_{A/C} \quad , \quad V_B = V_C - V_{B/C}$$

$$\rightarrow m_C V_C + m_A (V_C + V_{A/C}) + m_B (V_C - V_{B/C}) = 0$$

$$\rightarrow S = V_C t \ , \ e = V_{A/C}\, t \ , \ P = V_{B/C}\, t \ , \ P + e = L$$

$$\rightarrow (V_{A/C} + V_{B/C})\, t = L \Rightarrow t = \frac{L}{V_{A/C} + V_{B/C}}$$

همچنین داریم:

$$V_C (m_C + m_A + m_B) = m_B (V_{B/C}) - m_A V_{A/C}$$

$$\rightarrow V_C = \frac{m_B V_{B/C} - m_A V_{A/C}}{m_C + m_A + m_B} \Rightarrow$$ V_C پیدا میشه!

اگر $m_B V_{B/C} < m_A V_{A/C}$ ⇐ تخته تمایل به حرکت به طرف چپ را دارد

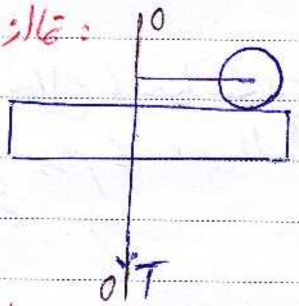
⇐ که تخته جابه جا نشود (با توجه به اینکه جرم لیلی کمتر از جرم مجنون است ⇐ مجنون باید با سرعت بیشتری به سمت لیلی بدود تا قایق حرکت نکند و ..... (!!!)

$$\rightarrow S = V_C \times t \Rightarrow$$ S پیدا می‌شود

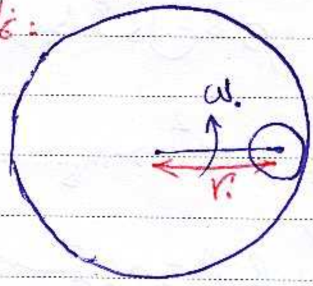
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: گلوله کوچکی بر روی یک صفحه دیسک مانند با سرعت زاویه ای ω در حال چرخش است و نخی به آن متصل کرده و از مرکز دیسک عبور می دهیم، حال نخ را با کشش T می کشیم

نما از روبرو :



نما از بالا :



الف) به ازای هر r دلخواه که $r<r_0$ ، v را بیابید؟

ب) سرعت پایین آمدن طناب و ω جدید طناب ؟

داریم:

$T \longleftarrow \bullet \qquad \overset{mr\omega_0^2}{\longleftarrow} \bullet \quad \Rightarrow$

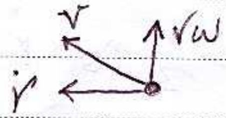
تا وقتی که $T = mr\omega_0^2$ ، طول طناب تغییر نمی کند

$$U = E_2 - E_1 \rightsquigarrow$$

$$\text{if} \quad T > mr\omega \Rightarrow T(r_0 - r) = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

پس:

$$(r_0 \omega_0)^2 + \frac{2T(r_0 - r)}{m} = v^2$$



ب) با گشتاور گیری حول محور oo داریم:

$$\int \Sigma M_0 \, dt = \Delta H_0 \Rightarrow \Delta H_0 = 0 \Rightarrow H_{0_1} = H_{0_2}$$

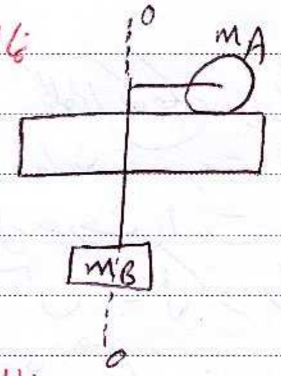
$$\Rightarrow m r_0^2 \omega_0 = m r^2 \omega \quad (H_0 = r \times mv, \; v = r\omega) \Rightarrow \omega = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \omega_0$$

سرعت پایین آمدن طناب $= \dot{r} \Rightarrow \dot{r}^2 = v^2 - (r\omega)^2$

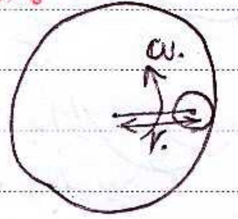
مثال:

حال با جدا شدن $\frac{1}{3}$ جرم B، مسأله را تجزیه و تحلیل کنید!!

نما از روبرو



نما از بالا



حل:

قبل از جدا شدن جرم:

$$m_B g = m_A r_. \omega_.^2 \Rightarrow m_B = m_A \frac{r_. \omega_.^2}{g}$$

الان سیستم را جرم A، B و دیسک و .... در نظر می‌گیریم که

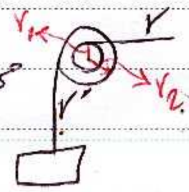
$u = 0$

در سؤال قبل، سیستم A بود $\Leftarrow$ T (نیروی دست ما) عامل خارجی بود؛

$\rightarrow E_1 = E_2 \leftarrow$ بعد از جدا شدن جرم

$$\rightarrow \frac{1}{2} m_A (r_. \omega_.)^2 = \frac{2}{3\times 2} m_B \times \dot{r}^2 + \dots$$

نکته: اگر در نقطه o، قرقره‌ای به شکل



می‌داشتیم $\Leftarrow$ $\dot{r}' \neq \dot{r}$

$$\rightarrow \left(\dot{r}' = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)\dot{r} \Leftarrow r_1 \omega = \dot{r} \,,\, r_2 \omega = \dot{r}'\right) \Rightarrow \frac{1}{3} m_B \times \dot{r}'$$

اما ادامه‌ی سؤال:

$$\frac{1}{2} m_A (r_. \omega_.)^2 = \frac{1}{3} m_B \times \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_A (\dot{r}^2 + r^2\omega^2) + \frac{2}{3} m_B g (r - r_.)$$

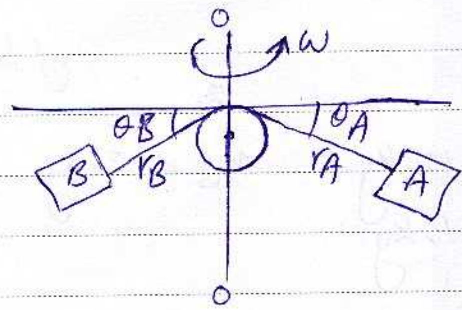
ایراد دارد یا ۲ مجهول $\Leftarrow$ $\dot{r}$ و ω مجهول اند $\Leftarrow$

$$H_{O_1} = H_{O_2} \Rightarrow m r_. (r_. \omega_.) = m r (r\omega) \Rightarrow \omega = \left(\frac{r_.}{r}\right)^2 \omega_.$$

سوال: در چه r ای $\dot{r} = 0$ (حالت تعادل ثانویه) $= ?$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

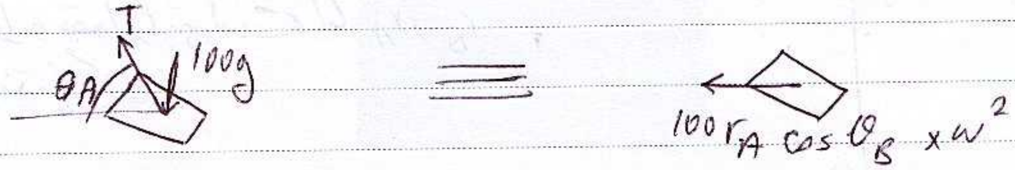


رابطه بین این ها (ω ، θ_A ، ...)!!

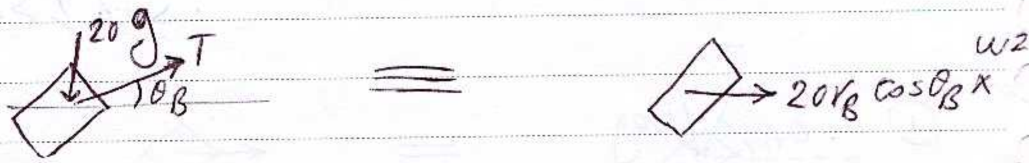
حسابید:

$m_A = 100kg$ $m_B = 20kg$

1



2



$① \rightsquigarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 100g = T \sin\theta_A$

$② \rightsquigarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 20g = T \sin\theta_B$

$\Rightarrow 5 = \dfrac{\sin\theta_A}{\sin\theta_B}$

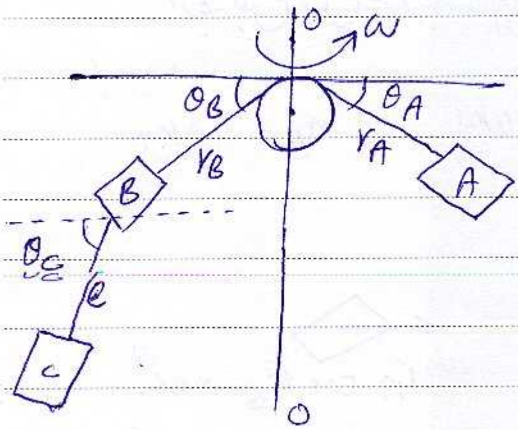
$① \rightsquigarrow \Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T\cos\theta_A = 100 r_A \cos\theta_A \times \omega^2$

$② \rightsquigarrow \Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T\cos\theta_B = 20 r_B \cos\theta_B \times \omega^2$

$\Longrightarrow \dfrac{r_A}{r_B} = 1/5 \rightsquigarrow r_B = 5 r_A$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

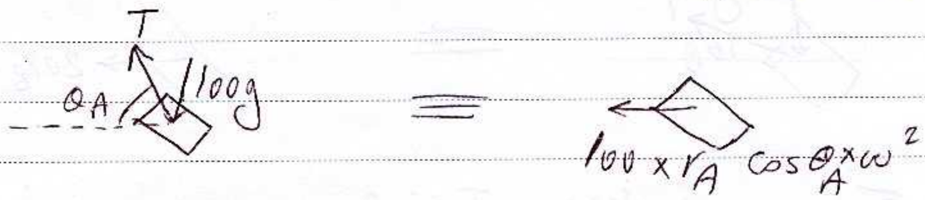
مثال،

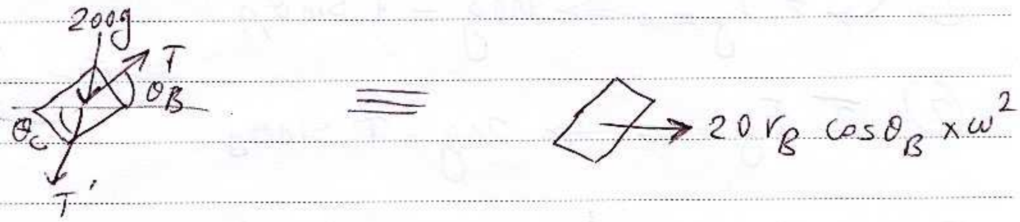


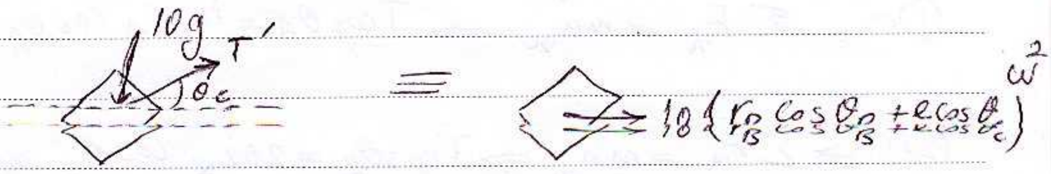
$m_A = 100\,kg$ $m_B = 20\,kg$
$m_C = 10\,kg$

e همواره مقدار ثابتی است اما r_A و r_B می توانند تغییر کنند.

رابطه بین این ها را بیابید:

① 

② 

③ 

① : $\sum F_y = 0 \Rightarrow -100g + T\sin\theta_A = 0 \Rightarrow T\sin\theta_A = 100g$

② : $\sum F_y = 0 \Rightarrow -20g + T\sin\theta_B - T'\sin\theta_C = 0$

$\Rightarrow T\sin\theta_B = T'\sin\theta_C + 20g$

③ :

$T'\sin\theta_C - 10g = 0 \Rightarrow T'\sin\theta_C = 10g$

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

②,③ $\longrightarrow \left(T' \sin\theta_C - 10g = 0 \Rightarrow T' \sin\theta_C = 10g\right)$

$$T \sin\theta_B = 30g \xrightarrow[\text{اول}]{\text{با توجه}} \frac{\sin\theta_A}{\sin\theta_B} = \frac{10}{3}$$

①: $\sum F_x = m a_x \Rightarrow (100 r_A \cos\theta)\omega^2 = T\cos\theta_A$

$\Rightarrow T = (100 r_A)\omega^2$

②: $\sum F_x = m a_x \Rightarrow T\cos\theta_B - T'\cos\theta_C = 20 r_B \cos\theta_B \times \omega^2$

③: $\sum F_x = m a_x \Rightarrow T'\cos\theta_C = 10(r_B\cos\theta_B + e\cos\theta_C) \times \omega^2$

$\longrightarrow T\cos\theta_B = \left(10(r_B\cos\theta_B + e\cos\theta_C) + 20 r_B \cos\theta_B\right)\omega^2$

PAPCO