توابع مثلثاتی

پروژه دات کام

www.Prozhe.com

ارتفاع مثلث ALTITUDE OF A Triangle

هر ارتفاع مثلث، پاره خطي است که يك سر آن يك رأس مثلث، و سر ديگر آن، پاي عمودي است که از آن رأس بر ضلع مقابل به آن رأس فرود مي‌آيد؛ مانند ارتفاع AH_1 هر مثلث، سه ارتفاع دارد، AH_1 ، BH_2 و CH_3 که در يك نقطة مانند AH_1 به نام مرکز ارتفاعي مثلث همرسند. اندازة ارتفاعهاي AH_1 ، BH_2 و CH_3 را بترتيب با h_a ، h_b و h_c نشان مي‌دهند.

اصل نامساوي مثلثي Axiom Triangle Inequality

هر گاه A، B و C سه نقطة دلخواه باشند، آن‌گاه $AC \le AB + BC$. تساوي، وقتي برقرار است که سه نقطه روي يك خط راست، و نقطة B بين دو نقطة A و C باشد.

انتقال) توابع مثلثاتي Axiom Triangle Inequality

براي محاسبة مقادير نسبتهاي مثلثاتي در ربعهاي دوم، سوم و چهارم مي‌توان از رابطه‌هاي زير استفاده کرد:

$$\sin(۱۸۰-\theta)^\circ = \sin\theta^\circ, \sin(۱۸۰-\theta)^\circ = -\sin\theta^\circ$$
$$\cos(۱۸۰-\theta)^\circ = -\cos\theta^\circ, \cos(۱۸۰-\theta)^\circ = -\cos\theta^\circ$$
$$\tan(۱۸۰-\theta)^\circ = -\tan\theta^\circ, \tan(۱۸۰-\theta)^\circ = \tan\theta^\circ$$
$$\sin(-\theta)^\circ = \sin\theta^\circ, \cos(-\theta)^\circ = \cos\theta^\circ$$
$$\tan(-\theta)^\circ = -\tan\theta^\circ$$

توابع کسینوس و سینوس دوره‌اي، با دورهٔ 360° هستند:

$$\sin(۳۶۰+\theta)^\circ = \sin\theta^\circ, \cos(۳۶۰-\theta)^\circ = \cos\theta^\circ$$

تابع تانژانت دوره‌اي، با دورهٔ 180°است:

$$\tan(۱۸۰+\theta)^\circ = \tan\theta^\circ$$

همچنین از تبدیلهاي زیر نیز مي‌توان استفاده کرد:

$$\sin(۹۰-\theta)^\circ = \cos\theta^\circ, \cos(۹۰-\theta)^\circ = -\sin\theta^\circ$$
$$\sin(۲۷۰-\theta)^\circ = -\cos\theta^\circ, \cos(۲۷۰-\theta)^\circ = -\sin\theta^\circ$$
$$\sin(۹۰-\theta)^\circ = \cos\theta^\circ, \cos(۹۰-\theta)^\circ = \sin\theta^\circ$$
$$\sin(۲۷۰-\theta)^\circ = -\cos\theta^\circ, \cos(۲۷۰-\theta)^\circ = -\sin\theta^\circ$$

اندازهٔ زاویه — Measure of an angle

نسبت آن زاویه است، به زاویه‌اي که به عنوان واحد زاویه اختیار شده است.

اندازهٔ شعاع کرهٔ محاطي چهار وجهي منتظم

← چهار وجهي منتظم

اندازهٔ شعاع کرهٔ محیطي چهار وجهي منتظم

← چهار وجهي منتظم

اندازهٔ مساحت مثلث Area of a Triangle

برابر است با نصف حاصلضرب اندازهٔ هر ضلع مثلث در اندازهٔ ارتفاع نظیر آن ضلع. اگر مساحت مثلث ABC را با S نمایش دهیم، داریم:

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

با توجه به این که $h_c = a\sin B\ ,\ h_b = c\sin\hat{A}, h_a = b\sin\hat{C}$ است، داریم:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$$

براي محاسبهٔ مساحت مثلث از دستور $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(p-c)}$ که در آن $2P = a+b+c$ و به دستور هرون Heron مرسوم است، نیز استفاده مي‌کنند.

اندازهٔ نیمسازهاي زاویه‌هاي بروني مثلث Measure of external angle bisectors of triangle

تصفیه: در هر مثلث، مربع اندازهٔ نیمساز هر زاویهٔ بروني، برابر است با حاصلضرب اندازه‌هاي دو پاره خطي که آن نیمساز بر ضلع سوم پدید مي‌آورد، منهاي حاصلضرب اندازه‌هاي دو ضلع آن زاویه.

یعني اگر در مثلث ABC AD'نیمساز زاویهٔ بروني A باشد داریم:

$$AD'^2 = D'B.D'C - AB.AC$$

اگر اندازهٔ نیمسازهاي زاویه‌اي بروني A، B و C از مثلث ABC را بترتیب با ، d'_a و d'_b و d'_c محیط مثلث را با 2P نشان دهیم، داریم:

$$d'_a = \frac{۲}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$d'_b = \frac{۲}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$

$$d'_c = \frac{۲}{|a-b|}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

اندازة نيمسازهاي زاويه‌هاي بروني مثلث Measure of internal angle bisectors of triangle

قضيه: در هر مثلث، مربع اندازة نيمساز هر زاوية دروني برابر است با حاصلضرب اندازة دو ضلع آن زاويه، منهاي حاصلضرب دو پاره خطي كه آن نيمساز بر ضلع سوم پديد مي‌آورد. يعني اگر AD نيمساز زاوية دروني A از مثلث ABC باشد، داريم:

$$AD^{۲} = AB, AC - DB.DC$$

اگر اندازهٔ نیمسازهاي زاويه‌هاي دروني A، B و C از مثلث ABC به ضلعهاي AC=b, BC=a و AB=c را بترتیب d_a، d_b و d_c بنامیم، داريم:

$$d_a = \frac{۲}{b+c}\sqrt{bcP(p-a)}$$

$$d_b = \frac{۲}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$

$$d_c = \frac{۲}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

تابع تانژانت Tangent function

این تابع به صورت $y = tgx$ مي‌باشد. دورهٔ تناوب آن π است. کافي است نمودار تابع را در فاصلهٔ $o \le x \le \pi$ رسم کنیم. براي رسم نمودار در فاصلهٔ $\pi \le x \le ۲\pi$ منحني را در امتداد xها به اندازهٔ π در سمت راست xها انتقال مي‌دهیم؛ چون $y' = ۱ + tg^۲x > o$ مي‌باشد، منحني تابع اکسترمم نسبي ندارند و در $x = \frac{\pi}{۲}$ داراي مجانب است.

تابع سینوس Sine function

این تابع به صورت y=sin x مي‌باشد. دورهٔ تناوب آن 2π است. کافي است نمودار تابع را در فاصلهٔ $o \le x \le ۲\pi$ رسم کنیم و براي رسم منحني در فاصلهٔ $۲\pi \le x \le ۲\pi$ منحني را در امتداد xها به اندازهٔ 2π در سمت راست xها انتقال مي‌دهیم. و براي رسم منحني در فاصلهٔ $-۲\pi \le x \le o$ منحني را به اندازهٔ 2π در سمت چپ xها انتقال

مي‌دهيم. تابع روي $[0,2\pi]$ در $x=\frac{\pi}{2}$ ماكزيمم نسبي و در $x=\frac{3\pi}{2}$ مي‌نيمم نسبي و در $x=\pi$ داراي عطف مي‌باشد.

تابع كتانژانت Cotangent function

اين تابع به صورت y=cotg x مي‌باشد. دورة تناوب آن π است. كافي است نمودار را در فاصلة $0<x<\pi$ رسم كنيم. براي رسم نمودار در فاصلة $\pi<x<2\pi$ منحني را در امتداد xها به اندازة π در سمت راست xها انتقال مي‌دهيم؛ چون $y'=-(1+\cot g^2x)<0$ مي‌باشد. منحني تابع اكسترمم نسبي ندارد و در $x=0$ و $x=\pi$ داراي مجانب و در $x=\frac{\pi}{2}$ عطف دارد.

تابع كسينوس Cosine function

اين تابع به صورت y=socx مي‌باشد. دورة تناوب آن 2π است. كافي است نمودار را در فاصله $0<x<2\pi$ رسم نماييم و براي رسم منحني در فاصلة $-2\pi<x<0$ منحني را به اندازة 2π در سمت چپ xها انتقال مي‌دهيم.

تابع روي $[0,2\pi]$ در $x=\pi$ مي‌نيمم نسبي و در $x=\frac{3\pi}{2}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ داراي عطف مي‌باشد.

تابع مثلثاتي Trigonometric function

تابعهايي كه ضابطة آنها به كمك نسبتهاي مثلثاتي تعريف شده باشد.

هر يك از تابعهاي زير مثلثاتي است:

$$f_{۱} : IR \to IR \qquad f_{۲} : IR \to IR \qquad f_{۳} : IR \to IR$$

$$f_{۱}(x) = \sin x \quad , \quad f_{۲}(x) = \sin x - tgx \quad , \quad f_{۳}(x) = \cos x + ۱$$

توابع مثلثاتي ()

توابع $f(x)= \sin x$ و $g(x)=\cos x$ و $h(x)\ tgx$ و $\varphi(x)=cotg\ x$ يا تركيبي از آنها را توابع مثلثاتي نامند. مثلاً $f۹x۰=\sin^{۲}-۲tgx+۱$ تابع مثلثاتي مي‌باشد.

مثال 1: دامنة تابع گنگ مثلثاتي $f(x)=\sqrt{۲\sin x-۱}$ روي $[o,۲\pi]$ كدام است؟

$$۲\sin x - \geq o \to \sin x \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow D_f = \left[\frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}\right]$$

مثال 2: برد تابع $y = a\sin x + b\cos x + c$ برابر است با:

$$c - \sqrt{a^{۲} + b^{۲}} \leq y \leq c + \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$$

مثال 3: برد تابع $۴\sin^{۲} x - ۲\sin x \cos x + ۶\cos^{۲} x$ كدام است؟

$$y = ۴ \times \frac{۱ - \cos ۲x}{۲} - \sin ۲x + ۶ \times \frac{۱ + \cos ۲x}{۲} \Rightarrow y = -\sin ۲x + \cos ۲x + ۵$$

$$۵ - \sqrt{۲} \leq y \leq ۵ + \sqrt{۲} \Rightarrow R_f = \left[۵ - \sqrt{۲}, ۵ + \sqrt{۲}\right]$$

مثال 4: مطلوب است نمودار $y = \frac{\sin x}{\sin x - ۱}$ در يك دورة تناوب

$$T = ۲\pi, o \leq x \leq ۲\pi, y' = \frac{\cos x(\sin x - ۱) - \cos x \sin x}{(\sin x - ۱)^{۲}} = \frac{-\cos x}{(\sin x - ۱)^{۲}}$$

توابع معكوس مثلثاتي Inverse trigonometric functions

1.تابع با ضابطة $y=\sin x$ در فاصله $-\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲}$ يك به يك بوده و داراي معكوسي به صورت $y=f^{-۱}(x)=Arc\sin x$ يا $\begin{cases} x=\sin y \\ -\frac{\pi}{۲}\le y\le\frac{\pi}{۲}\end{cases}$ و نمودار آن و مشتق آن $y'=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ مي‌باشد.

2.تابع با ضابطة $y=\cos x$ به ازاء $o\le x\le\pi$ ، تابع يك به يك بوده، معكوس آن وجود داشته به صورت $y=f^{-۱}(x)=Arc\cos x$ يا $x=\cos y$ و نمودار آن و مشتق آن به صورت $y'=\frac{-۱}{۱-x^{۲}}$ مي‌باشد.

3. تابع با ضابطة $y=tgx$ به ازاء $-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$ تابع يك به يك بوده و معكوس آن به صورت $y=f^{-۱}(x)=Aretgx$ يا x=tg y و نمودار آن و مشتق آن $y'=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ مي‌باشد.

4. تابع با ضابطة y=cotg x به ازاء $o<x<\pi$ يك به يك بوده و معكوس آن به صورت $y=f^{-۱}(x)=Arc\cot gx$ يا $x=\cot gy$ و نمودار آن و مشتق آن $y'=\frac{-۱}{۱+x^{۲}}$ مي‌باشد.

حالتهاي تشابه دو مثلث

1.اگر دو زاويه از يك مثلث، با دو زاويه از مثلث ديگر برابر باشند.

2.اگر يك زاويه از يك مثلث، با يك زاويه از مثلث ديگر برابر، و ضلعهاي مجاور به اين زاويه در دو مثلث نظير به نظير متناسب باشند.

3.اگر سه ضلع از يك مثلث، با سه ضلع نظير آنها از مثلث ديگر متناسب باشند.

حالتهاي همنهشتي دو مثلث States of congruent triangles

دو مثلث در يكي از سه حالت زير همنهشت خواهند بود:

حالت اول. هر گاه دو زاويه و ضلع بين آنها از مثلثي، با دو زاويه و ضلع بين آنها از مثلث ديگر، نظير به نظير مساوي باشند.

به عنوان مثال، اگر در دو مثلث ABC و BC, DEF و $BC=EF$ و $\hat{B}=\hat{B}$ اين دو مثلث همنهشتند.

حالت دوم. اگر دو ضلع و زاوية بين آنها از مثلثي، با دو ضلع و زاوية بين آنها از مثلثي ديگر، نظير به نظير برابر باشند.

به عنوان مثال، اگر در دو مثلث ABC و AC=DF,AB=DE,DEF و $\hat{A}=\hat{D}$ اين دو مثلث همنهشتند.

حالت سوم. هرگاه سه ضلع از مثلثي، نظير به نظير با سع ضلع از مثلثي ديگر، مساوي باشند.

به عنوان مثال، اگر در دو مثلث ABC و BC=EF,AB=DE,DEF و AC=DF باشد، دو مثلث ABC و DEF همنهشتند.

حد توابع سادة مثلثاتي

حد $\sin x = \sin a$ و حد $\cos x = \cos a$

$x \to a \qquad x \to a$

$(\,)\ a \in\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, حد $tgx = tga$, $a \in\ ]0,\pi,$ حد $\cot gx = \cot ga$

$x \to a \qquad x \to a$

اين حدود نشان مي‌دهند تابع $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ در هر نقطه پيوسته و تابع f(x)=tg x روي فاصلة $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ پيوسته و تابع f(x)=cotg x روي فاصله $(0,\pi)$ پيوسته است.

مثال: مطلوب است $(2\sin^2 x+3\cot gx)$ حد، با استفاده از قضاياي حدود داريم:

$$x \to \frac{\pi}{4}$$

$$\text{حد}\,(2\sin^2 x+3\cot gx)=2\sin^2\frac{\pi}{4}+3\cot g\frac{\pi}{4}=2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+3(1)=4$$

خطهاي همرس در مثلث Concurrent lines in a triangle

1. سه عمود منصف ضلعها،
2. سه نيمساز زاويه‌هاي دروني،
3. نيمسازهاي دو زاوية بروني با نيمساز زاوية دروني سوم،
4. سه ارتفاع،
5. سه ميانه.

دايره‌هاي محاطي بروني مثلث Excircles

دايره‌هايي هستند كه بر يك ضلع و امتداد دو ضلع ديگر مثلث مماسند. مركز اين دايره‌ها، نقطه‌هاي برخورد نيمسازهاي دو زاويه خارجي و نيمساز زاوية دروني

سوم است. هر مثلث سه دايرة محاطي بروني دارد. شكل صفحه بعد، دايرة محاطي بروني مثلث، مماس بر ضلع BC را نشان مي‌دهد.

دايرة مثلثاتي Reigonometric circle

دايره‌اي به شعاع واحد است كه روي آن نقطه‌اي به عنوان مبدأ و جهتي به عنوان جهت مثبت حركت، اختيار شده باشد. در حالت عمومي، انتهاي سمت راست قطر افقي را به عنوان مبدأ حركت (نقطة A) و خلاف جهت حركت عقربه‌هاي ساعت را جهت مثبت اختيار مي‌كنند.

دايرة محاطي داخلي مثلث Inscribed circle

دايره‌اي است كه بر ضلعهاي مثلث مماس است. مركز اين دايره، محل برخورد نميسازهاي زاويه‌اي داخلي مثلث است.

دايرة محيطي مثلث Circumscribed circle

دايره‌اي است كه بر سه رأس مثلث مي‌گذرد. مركز آن، نقطة بر خورد عمود منصفهاي ضلعهاي مثلث است.

دستگاه‌هاي مثلثاتي كلاسيك Classic trigonometric systems

براي حل دستگاه‌هاي مثلثاتي چند مجهولي، هيچ‌گونه قاعدة كلي كه در حل تمام دستگاه‌ها بتوان از آن استفاده كرد، وجود ندارد. ولي در اين مورد، براي حل

دستگاه‌هاي چند مجهولي مثلثاتي، مي‌توان دستگاه‌هاي دو معادلة دو مجهولي را به سه نوع كلاسيك دسته‌بندي كرد و طريقه حل هر يك را در حالت كلي بيان كرد.

1 - دستگاه‌هاي مثلثاتي كلاسيك نوع اول:

$$۱)\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \pm \sin y = a \end{cases} \qquad ۲)\begin{cases} x \pm y = \beta \\ \cos x \pm \cos y = b \end{cases}$$

$$۳)\begin{cases} x \pm y = y \\ \tan x \pm \tan y = c \end{cases} \qquad ۴)\begin{cases} x \pm y = \varphi \\ \cot x \pm \cot y = d \end{cases}$$

براي حل اين نوع دستگاه‌ها از اتحادهاي تبديل حاصل جمع به حاصل ضرب استفاده مي‌كنيم. براي مثال، دستگاه زير را حل مي‌كنيم:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{۳} \\ \sin x + \sin y = ۱ \end{cases}$$

$$\sin x + \sin y = ۲\sin\frac{x+y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲}$$

$$= ۲\sin\frac{\pi}{۶}\cos\frac{x-y}{۲}$$

$$= ۲(\frac{۱}{۲})\cos\frac{x-y}{۲} = ۱$$

$$\frac{x-y}{۲} = ۲k\pi \Rightarrow x - y = ۴k\pi$$

بنابر اين،دستگاه كلاسيك، به دستگاه سادة زير تحويل مي‌شود:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{۳} \\ x-y=۴k\pi \quad \Rightarrow ۲x=۴k\pi+\frac{\pi}{۳}; x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

$$y=\frac{\pi}{۳}-x=\frac{\pi}{۳}-۲k\pi-\frac{\pi}{۶}=-۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$$

2- دستگاه‌هاي مثلثاتي كلاسيك نوع دوم:

$$\begin{cases} x \pm y=\beta \\ \cos x \cos y=b \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y=\alpha \\ \sin x \sin y=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y=\varphi \\ \tan x \tan y=d \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y=y \\ \sin x \sin y=c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y=\theta \\ \cot x \cot y=k \end{cases}$$

براي حل اين نوع دستگاه‌ها، از اتحادهاي تبديل حاصلضرب به حاصل جمع استفاده مي‌كنيم. برا مثال، دستگاه زير را حل مي‌كني:

$$\begin{cases} x-y=\frac{۵\pi}{۶} \\ \cos x \ \cos y=-\frac{\sqrt{۳}}{۴} \end{cases}$$

$$\text{coaax} \cos y=\frac{۱}{۲}[\cos(x+y)+\cos ۹x-y)]$$

$$=\frac{۱}{۲}[\cos(x+y)+\cos(\frac{۵\pi}{۶})]$$

$$=\frac{۱}{۲}\cos(x+y)+\frac{۱}{۲}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})==-\frac{\sqrt{۳}}{۴};$$

$$\Rightarrow \cos(x+y)=۰; x+y=k\pi+\frac{\pi}{۲}(k \in Z)$$

بنابراين، دستگاه كلاسيك، به دستگاه سادة زير تحويل مي‌شود:

$$\begin{cases} x - y = \frac{۵\pi}{۶} \\ x + y = k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

از جمع معادله‌هاي اين دستگاه، نتيجه مي‌شود:

$$۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{۵\pi}{۶} = k\pi \frac{۸\pi}{۶}; x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{۲\pi}{۳}$$

$$y = k\pi + \frac{\pi}{۲} - x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{k\pi}{۲} - \frac{۲\pi}{۳} = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}$$

3- دستگاه‌هاي مثلثاتي كلاسيك نوع سوم:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\sin\ x}{\sin\ y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \beta \\ \frac{\cos x}{\cos y} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \gamma \\ \frac{\text{tamx}}{\tan y} = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \varphi \\ \frac{\cot x}{\cot y} = d \end{cases}$$

براي حل اين نوع دستگاه‌هاي مثلثاتي، در دو طرف معادلة دوم دستگاه، به وسيلة تركيب نسبت در صورت و تفضيل نسبت در مخرج، آن را به صورت كسري كه در صورت و مخرج آن، مجموع و تفاضل دو نسبت مثلثاتي همنام است، تبديل مي‌كنيم و پس از تبديل صورت و مخرج كسر به حاصل ضرب، با استفااده از $x \pm y = \alpha$ مقدار $x \mu y$ را تعيين نموده و از آن جا مقادير x و y از حل يك دستگاه ساده به دست مي‌آيند.

براي مثال، دستگاه زير را حل مي‌کنيم:

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{۳} \\ \frac{\sin x}{\sin t}=۲ \qquad \frac{\sin x}{\operatorname{suny}}=۲; \frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{۲+۱}{۲-۱}=۳; \end{cases}$$

$$\frac{۲\sin\frac{x=y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲}}{۲\sin\frac{x-y}{۲}\cos\frac{x+y}{۲}}=\frac{\sin\frac{x+y}{۲}\cos(\frac{\pi}{۶})}{\sin(\frac{\pi}{۶})\cos\frac{x+y}{۲}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin\frac{x+y}{۲}}{\frac{۱}{۲}\cos\frac{x+y}{۲}}=۳;$$

$$\tan\frac{x+y}{۲}=\sqrt{۳}=\tan\frac{\pi}{۳}; \frac{x+y}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۳}:$$

$$x+y=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}(k\in Z)$$

بنابراین، دستگاه کلاسیك، به دستگاه سادة صفحة بعد تحویل مي‌شود:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{۳} \\ x + y = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۲x = xk\pi + \frac{۲\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}; x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ y = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} - (k\pi + \frac{\pi}{۲}) = k\pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

مثالي دیگر:

$$\begin{cases} y - x = -\frac{\pi}{۳} \\ \tan x \ \tan y = -۳ \quad ; \frac{\sin x \ \sin y}{\cos x \ \cos y} = -۳; \end{cases}$$

$$\frac{\frac{۱}{۲}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{۱}{۲}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]} = -۳; \frac{\frac{۱}{۲} - \cos(x+y)}{\cos(x+y) + \frac{۱}{۲}} = -۳$$

$$\cos(x + y) = -۱; x + y = ۲k\pi + \pi (k \in Z)$$

بنابراین، دستگاه کلاسیك، به دستگاه سادة زیر تحویل مي‌شود:

$$\begin{cases} y - x = -\frac{\pi}{۳} \\ y + x = ۲k\pi + \pi \quad ۲y = ۲k\pi + \pi; y = k\pi + \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$$x = ۲k\pi + \pi - (k\pi + \frac{\pi}{۳}) = k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$$