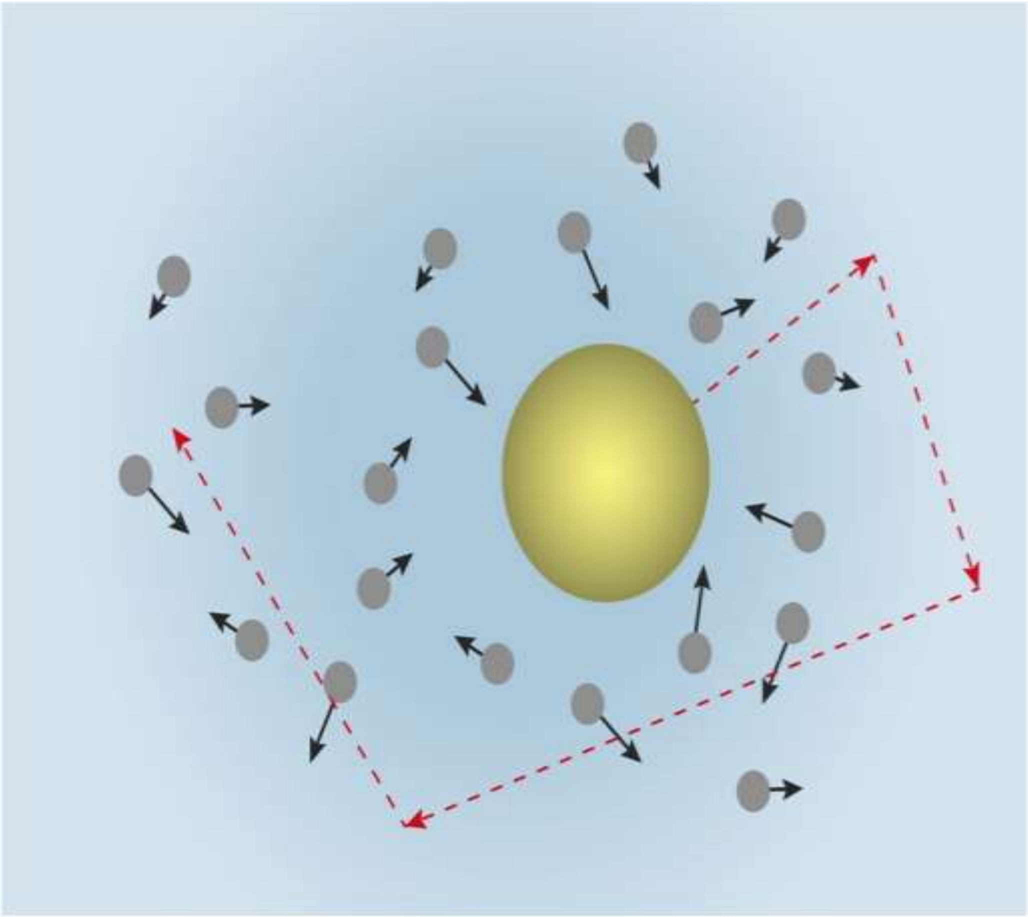
2016

شبیه سازی فرآیند تصادفی حرکت براونی



بهادر احمدپور

مقدمه:

کمیت های مرتبط با ریاضیات مالی مانند قیمت سهام اغلب فرآیندهای تصادفی می باشند. بنابراین داشتن ابزارهایی برای شبیه سازی مسیر چنین فرآیندهایی مهم و اساسی می باشد. در این مطالعه در ابتدا به تعریف دقیق فرآیند و مسیر تصادفی پرداخته شده است. یکی از فرآیندهای تصادفی بسیار مهم در چارچوب کاربردهای ریاضیات مالی حرکت براونی می باشد که در مطالعات بسیاری از کمیت های تصادفی با استفاده از این فرآیند تولید می شوند.در این مطالعه انواع حرکت براونی از جمله حرکت براونی استاندارد، حرکت براونی یک بعدی با یک گام تصادفی، حرکت براونی یک بعدی با پل براونی، حرکت براونی با ابعاد بالاتر و حرکت براونی هندسی مورد بررسی قرار گرفته است.همچنین در این تحقیق انواع حرکت براونی مقایسه و تفاوت و کاربرد هریک تجزیه و تحلیل خواهد شد.

تاریخچه:

حرکت براونی نامی است که به حرکت نامنظم گرده ی گیاهان که در آن معلق هستند داده شده است.نخستین مدل ریاضی حرکت براونی به سال 1900 باز میگردد که در یک مدل اقتصادی مطرح شد.حرکت براونی یک فرآیند تصادفی است که مسیرهای پیوسته داشته و مشتق آن در هیچ نقطه ای وجود ندارد.امروزه حرکت براونی از مطالعات ذرات معلق میکروسکوپی بسیار فراتر رفته و شامل مدلسازی قیمت های سهام و اختلالات تصادفی در انواع دیگری از سیستم های فیزیکی، زیستی، اقتصادی و مدیریت شده است.بسیاری از مهمترین فرآیندهای تصادفی که در ریاضیات مالی وجود دارد به حرکت براونی نسبت داده می شود.با توجه به اهمیت به کارگیری این فرآیند تصادفی در این مطالعه به بررسی انواع حرکت براونی پرداخته شده است.

کاربرد حرکت براونی در تحلیل بازار مالی:

برای اولین بار لوئیس باچلیر(1900) نشان داد که بازارهای مالی از فرآیند گام تصادفی تبعیت می کنند.بنابراین میتوان برای الگوسازی بازارهای مالی از حساب احتمالات استاندارد استفاده کرد.فرآیند گام های تصادفی اساساً یک حرکت براونی می باشند که تغییرات گذشته مستقل از تغییرات مقدار متغیر در آینده و گذشته می باشد.

حرکت براونی دارای ویژگی خوش رفتار ریاضـی اسـت، به گونه ای که در آن یک الگو را بادقت بالا برآورد و همچنین احتمالات را محاســبه کرد.از اینرو تحلیلگران اغلب وقتی با تجزیه و تحلیل یک فرآیند چندبعدی با منشــاء ناشــناخته مواجه می شــوند مانند بازار ســهام، به روندهای مســتقل همانند حرکت براونی روی می آورند.تئوری حرکت براونی و الگوی گام تصادفی به طور گسترده در مدلسازی بازارهای مالی مورد استفاده قرار می گیرد در بینشـی که حدس و گمان ها مدلسـازی می شـود، می توان از احتمالات بسـط داده شده ی باچلیر استفاده کرد، که تا به امروز کاربردهای این الگو ادامه داشته است.

کاربرد حرکت براونی در بازار سهام:

همانطورکه گفته شـداز جمله مهمترین کاربردهای حرکت براونی در بازار سـهام می باشـد. کارهای انجام شده توسـط آزبورن نشـان داده است که لگاریتم طبیعی قیمت سهام و ارزش پول، می تواند تحت تأثیر یک سری از تصـمیمات در تعادل آماری قرار گیرد.و این گروه از لگاریتم قیمت ها(که در طول زمان به وجود آمده اسـت)، شـباهت بسـیار زیادی از مولکول های یک ماده دارد. با استفاده از تابع توزیع احتمال و قیمت سهام به صورت تصادفی انتخاب شده در یک زمان تصادفی، تابع توزیع احتمال در یک حالت پایدار قابل محاسبه است، که دقیقاً توزیع احتمال برای یک ذره(مولکول) در حرکت براونی اســت.یک توزیع مشــابه برای ارزش پول می توان در نظر گرفت، به شـکلی که این توزیع تقریبی با اسـتفاده از شـاخص های بازار سهام اندازه گیری شده است.این شرط لازم است نه کافی. شرط کافی برای بدست آوردن این توزیع کمی با توجه به شرایط معامله و قانون وبر- فرنچر تعیین می شـود. قانون وبر-فرنچر بیان می دارد که نسبت های برابر از محرک های فیزیکی قابل محاسبه اسـت. برای مثال فرکانس های صـوتی در واحد ارتعاشات به زمان، مربوط به فواصل مساوی از احساس ذهنی مانند زیر و بمی صــدا اســت.ارزش احســاســی ذهن مانند درجه مطلق در فضــای فیزیکی، قابل اندازه گیری

نیست.اما تغییرات یا تفاوت های موجود در احساس قابل محاسبه است. بنابراین با انجام آزمایش های مختلف آنها می توانند برابر دانسته و تکرار شوند. در نتیجه معیارهای اندازه گیری برآورده خواهد شد.یکی از نتیجه های تابع توزیع افزایش ارزش انتظاری قیمت با افزایش فواصل زمانی (t) با نرخ 3 تا 5 درصد درسال با افزایش نوسانات یا پراکندگی قیمت می باشد.این افزایش در تورم های بلند مدت برقرار نمی باشد. یا رشد دارایی در اقتصاد سرمایه داری از قیمت های متقابل انتظاری یا سهم های قابل خرید در آینده بر دلار با زمان به صورت یکسان افزایش میابد.

بنابراین در مقاله آزبورن نشان داده شده است که قیمت ها در یک بازار مالی همانند حرکت براونی مولکول های یک ماده می باشد.در مقالاتی دیگر نشان داده شده است که شواهد قطعی دوره ای در ساختار زمانی(از قیمت ها در یک حرکت براونی) مربوط به فواصل یک روز،هفته،سه ماهه یا سالانه وجود دارد.

با ترکیب شواهد و پذیرش گسترده ی این موضوع که حرکت براونی در ساختار بازار وجود دارد، تعداد بسیاری از تحقیقات و مطالعات از آن زمان در زمینه این نظریه صورت گرفته است.

معادلات دینامیکی بهینه با محدودیت های اهرمی:

از دیگر کاربردهای حرکت براونی محاسبه مقدار بهینه معاملات دینامیکی با محدودیت اهرمی می باشد.تعدادی از مطالعات به دنبال پیدا کردن یک جواب برای استراتژی مبادله دینامیکی بهینه برای یک سرمایه گذار است که با محدودیت های اهرمی روبرو است.در این مطالعه ها فرض شده است که ارزش دارایی ریسکی از حرکت براونی هندسی تبعیت می کند. همچنین این فرض اجازه ی تجزیه و تحلیل کمی را به ما می دهد.بنابراین با استفاده از حرکت براونی هندسی می توان به راه صریح و روشن برای مسأله ی پرتفوی بهینه با محدودیت های اهرمی و محدودیت حداقل بازگشت پرتفوی رسید.

سرمایه گذاری، عدم اطمینان و طرح های ثبات قیمت:

از دیگر کاربردهای حرکت براونی در مطالعات انجام شـده توسـط اسمیت قابل مشاهده است.در این مطالعه از روش حرکت براونی کنترول شـده به منظور تجزیه و تحلیل تأثیر ثبات قیمت بر سـرمایه گذاری در تقاضـای نامطمئن استفاده شده است.در مقاله اسمیت رفتار سرمایه گذاری وقتی قیمت تصادفی ولی با سقف معیین برونزا و با کمک ریاضـیات حرکت براونی کنترول شـده مورد بررسی قرار گرفته است.نتایج این مطالعه نشان می دهد که با کنترول قیمت پاسـخ سـرمایه گذاری با تغییر در قیمت کاهش می یابد.نتایج این مطالعه به هر موقعیت اقتصـادی با هزینه های هموار از سـهام تعدیل شده وقتی قیمت ها نامطمئن ولی با کنترول دولتی قابل بسط می باشد(به عنوان مثال:کنترول اجاره، تصمیم برای اخراج یا استخدام با وجود حداقل دستمزد)

با توجه به کاربردهای مطرح شـده، چگونگی تولید متغیرها در فرآیندهای تصـادفی با استفاده از حرکت براونی امری ضـروری اسـت در ادامه این تحقیق ابتدا به تعریف مطالب اولیه حرکت بروانی می پردازیم و سپس انواع آن را مورد بررسی قرار می دهیم.

چند تعریف و مفهوم اولیه:

در این بخش به تعریف های مورد نیاز به منظور بررسی انواع حرکت براونی پرداخته شده است.

تعریف 1: فرض می کنیم (Ω, A, P) یک فضای احتمال باشد و $d \in N$.

در فرآیند تصادفی $W_t: \Omega \to R^d$. $(W_t)_{t\geq 0}$ یک حرکت براونی d بعدی نامیده می شود؛ اگر وفقط اگر سه شرط زیر برقرار باشد:

1- برای تمام $\omega \in \Omega$، مسیر $t \to W_t(\omega)$ پیوسته باشد.

2- هـر گـروه از بـازه هـای $(W_{t0}, W_{t1} - W_{t0}, \dots, W_{tk} - W_{tk-1})$ بـا فـرض $(0 \leq t0 < t1 < \cdots < tk)$ مستقل باشند.

3- برای هر $0 \leq s < t$ ، تفاضل $W_t - W_s$ توزیع نرمال با میانگین صفر و ماتریس واریانس-کوواریانس واحد با واریانس ثابت دارد. بنابراین می توان گفت:

$$(W_t - W_s) \sim N(0, (t-s)I_d)$$

همچنین حرکت براونی، حرکت براونی استاندارد است اگر و فقط اگر رابطه (*) به طور قطع برقرار باشد.

$$W_0 = 0 \quad (*)$$

اگر $\alpha \epsilon R^d$ و $\sum$ یک ماتریس $d \times d$ شبه معیین مثبت متقارن از اعداد حقیقی باشد، سپس فرآیند تصادفی $(W_t)_{t\geq0}$ حرکت براونی با انحراف α و ماتریس کوواریانس $\sum$ نامیده می شود اگر شرایط زیر برقرار باشد:

1- برای تمام $\omega \in \Omega$، مسیر $t \to W_t(\omega)$ پیوسته باشد.

2- هر گروه از بازه های $(W_{t0}, W_{t1} - W_{t0}, \dots, W_{tk} - W_{tk-1})$ با فرض $(0 \leq t0 < t1 < \cdots < tk)$ مستقل باشند.

3- برای هر $0 \leq s < t$ ، تفاضل $W_t - W_s$ توزیع نرمال با میانگین $(t-s)\alpha$ و ماتریس واریانس-کوواریانس $(t-s)\sum$ دارد. بنابراین خواهیم داشت:

$$(W_t - W_s) \sim N\big((t-s)\alpha, (t-s)\textstyle\sum\big)$$

حرکت براونی روی بازه ی $[0, T]$ که $T > 0$ یک حرکت براونی روی R_0^+ می باشد که بازه ی زمانی $[0, T]$ محدود شده است.

قضیه 1: $(X_t)_{t\geq0}$ که در رابطه(**) نشان داده شده است،یک حرکت براونی d بعدی با انحراف α و ماتریس کوواریانس $\sum$ می باشد اگر شرایط زیر برقرار باشد:

1- اگر (Ω, A, P) یک فضای احتمال باشد و $d \in N$.

2- اگر $(W_t)_{t\geq0}$ یک حرکت براونی d بعدی باشد.

3- $\alpha \epsilon R^d$ و $\sum$ یک ماتریس $d \times d$ شبه معیین مثبت متقارن می باشد که می توان آنرا براساس یک ضرب ماتریس مربع در ترانهاده ی آن ماتریس نوشت یعنی $\sum = AA^t$.

$$\forall\, X_t = \alpha t + AW_t \qquad (**)$$

$$t \,\epsilon\, R_0^+$$

فرآیند تصادفی مفروض در معادله (**) حل یک معادله دیفرانسیل تصادفی (SDE) به صورت رابطه زیر بوده است:

$$dX_t = \alpha dt + AdW_t$$

این مفهوم به منظور تعمیم حرکت براونی برای حالت انحراف وابسته زمان $\alpha(t)$ و کوواریانس ماتریس وابسته به زمان $\sum(t)$ مورد استفاده قرار می گیرد. حرکت براونی با انحراف $\alpha(t)$ و ماتریس کوواریانس $\sum(t) = A(t)A(t)^t$ جوابی برای معادله دیفرانسیل زیر می باشد:

$$dX_t = \alpha(t)dt + A(t)dW_t$$

حل معادله دیفرانسیل فوق مسیری پیوسته و همچنین بازه های مستقل بر اساس تعریف 1 قسمت دوم را نشان می دهد.از طرف دیگر برای هر $0 \le s < t$ توزیع $X_t - X_s$ برای هر $t \ge 0$ به صورت رابطه زیر است:

$$X_t - X_s \sim N\left(\int_s^t \alpha(u)du, \int_s^t \sum(u)du\right)$$

قضیه2: اگر $(X_t)_{t\geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد d بعدی با انحراف α و ماتریس کوواریانس $\sum$ باشد. بنابراین X_t برای هر $t \ge 0$ دارای توزیع نشان داده شده در رابطه زیر می باشد:

$$X_t \sim N(t\alpha, t\sum)$$

قضیه3: فضای احتمال (Ω, A, P) مفروض است. اگر $d \in N$ و $\alpha \epsilon R^d$ و $\sum$ یک ماتریس $d \times d$ شبه معیین مثبت متقارن باشد. یک بردار تصادفی $Z: \Omega \to R^d$ دارای توزیع نرمال با میانگین α و ماتریس واریانس-کوواریانس $\sum$ باشد(رابطه ی زیر)

$$Z \sim N(\alpha, \sum)$$

در صورتیکه $k \, \varepsilon \, N$ و $\beta \, \varepsilon \, R^k$ و A یک ماتریس حقیقی $k \times d$ باشد$(A: R^d \to R^k)$. بردار تصادفی X به صورت زیر قابل تعریف می باشد.

$$X: \Omega \to R^k, \quad X = \beta + AZ$$

که در رابطه ی فوق بردار X دارای توزیع نرمال به صورت زیر است:

$$X \sim N(\beta + A\alpha, A\sum A^t)$$

قضیه4: اگر $(X_t)_{t\geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد یک بعدی با انحراف $\alpha\, \varepsilon\, R$ و واریانس σ^2 فرض شود. در ادامه با درنظر گرفتن $(0 \leq t0 < t1 < \cdots < tk)$ به دنبال توزیع مشترک $\left(X_{t_i}\right)_{i=0}^{k}$ می باشیم.

از آنجایی که $(X_{t0}, \dots, X_{tk})$ یک تبدیل خطی از $(X_{t0}, X_{t1} - X_{t0}, \dots, X_{tk} - X_{tk-1})$ می باشد.

بنابراین بردار X_t را می توان به صورت زیر نوشت:

$$X_t = \begin{bmatrix} X_{t0} \\ X_{t1} \\ \vdots \\ X_{tk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t0} \\ X_{t1} - X_{t0} \\ \vdots \\ X_{tk} - X_{tk-1} \end{bmatrix}$$

با توجه به قضیه ی 3 توزیع مشترک نرمال چند متغیره قابل محاسبه است.بردار امید ریاضی برابر با$a(t0, \dots, t0)$ می باشد.علاوه بر این اگر $0 \leq s < t$ باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$Cov(X_s, X_t) = E(X_s X_t) - E(X_s)E(X_t) = E\left(\left(X_t - X_s\right)X_s + {X_s}^2\right) - \alpha^2 st$$

$$= E\big((X_t - X_s)X_s\big) - \alpha^2 s(s-t) + E\left({X_s}^2\right) - \alpha^2 s^2$$

$$= Cov(X_t - X_s, X_t) + Cov(X_s, X_s) = Cov(X_s, X_s) = \sigma^2 s = \sigma^2 \min(s,t)$$

بنابراین ماتریس کوواریانس توزیع مشترک $(k+1) \times (k+1)$ را می توان به صورت رابطه زیر نوشت:

$$\sum = \left(\sigma_{ij}\right)_{(i,j)\epsilon\{1,..,k+1\}},\ \sigma_{ij} = \sigma^2 min\left\{t_{i-1}, t_{j-1}\right\}$$

تجزیه چولسکی به صورت $\sum = AA^t$ می باشد که در این رابطه:

$$A = \left(A_{ij}\right) = \sigma \begin{bmatrix} \sqrt{t0} & 0 \quad \dots & & 0 \\ \sqrt{t0} & \sqrt{t_1 - t_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & & \vdots \\ \sqrt{t0} & \sqrt{t_1 - t_0} & \dots & \sqrt{t_k - t_{k-1}} \end{bmatrix}$$

یا به عبارتی

$$A_{ij} = \begin{cases} \sigma\sqrt{t0} & for\ j = 1 \\ \sigma\sqrt{t_{j-1} - t_{j-2}} & for \quad i \geq j > 1 \\ 0 & j > i \end{cases}$$

در ادامه به بررسی انواع فرآیندهای تصادفی براونی و چگونگی تولید آنها با توجه به مفاهیم اولیه گفته شده می پردازیم.

حرکت براونی استاندارد یک بعدی توسط گام تصادفی:

اولین هدف در بخش حاضر شبیه سازی یک فرآیند براونی یک بعدی $(W_t)_{t\geq 0}$ با مقدار اولیه مشخص $W_t = \omega_0 \epsilon R$ می باشد. بافرض $0 = t_0 < \cdots < t_k$ گام تصادفی با شروع از ω_0 ساخته می شود وگام تصادفی از ω_0 تا ω_1 نشان دهنده ی مقدار W_{t1} و همینطور تا رسیدن به ω_k نشان دهنده ی مقدار W_t است.

این گام تصادفی طوری باید انتخاب شود که نتایج دقیقاً دربرگیرنده ی تعریف شماره 1 باشد.

درحالیکه شبیه سازی یک فرآیند پیچیده ممکن است مشکل یا غیرممکن باشد، با به کارگیری حرکت براونی به آسانی یک شبیه سازی دقیق با استفاده از ویژگی های بازه ای به دست آید. در ادامه به بررسی چگونگی شبیه سازی پرداخته شده است.

دنباله $(Z_1, Z_2, \dots.)$ را از مقادیر مستقل، یکسان توزیع شده متغیر تصادفی توزیع نرمال N(0,1) در نظر می گیریم.پس از آن مقادیر $(\omega_0, \omega_1, \dots., \omega_k)$ را از رابطه ی زیر به طور بازگشتی تعریف می کنیم.در این رابطه مقدار ω_0 یک مقدار اولیه معین است.

$$\begin{cases} \omega_0 & i = 0 \\ \omega_i = \omega_{i-1} + Z_i\sqrt{t_i - t_{i-1}} & i = 1,2, \dots, k \end{cases}$$

ساختاری مشابه رابطه فوق برای یک حرکت براونی $(X_t)_{t\geq 0}$ با انحراف α و واریانس σ^2 به صورت رابطه زیر نوشته می شود.بنابراین رابطه بازگشتی حرکت براونی به صورت زیر نوشته می شود.

که در این رابطه مقدار اولیه x_0 مفروض در نظر گرفته می شود.

$$\begin{cases} x_0 & i=0 \\ x_i = x_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1}) + z_i\sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}} & i = 1,2,\dots,k \end{cases}$$

و برای انحراف α و واریانس σ^2 وابسته به زمان به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} x_0 & i=0 \\ x_i = x_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i}\alpha(u)du + z_i\sqrt{\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sigma^2(u)du} & i = 1,2,\dots,k \end{cases}$$

در ادامه اگر ... $Z_1, Z_2,$ متغیرهای تصادفی یکسان مستقل با توزیع N(0,1) باشند، بنابراین داریم:

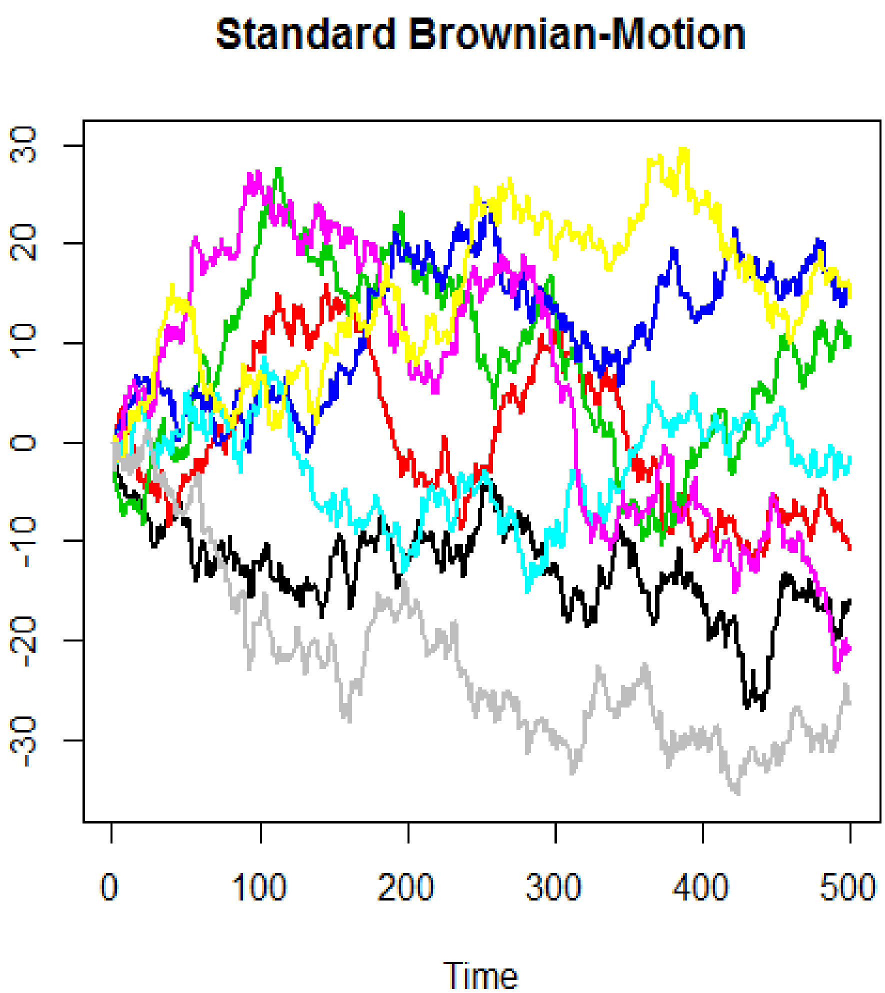
$$\begin{cases} X_0 = x_0 & i=0 \\ X_i = X_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i}\alpha(u)du + z_i\sqrt{\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sigma^2(u)du} & i = 1,2,\dots,k \end{cases}$$

که در رابطه فوق به طور مشخص $X_i - X_{i-1}$ دارای توزیع نرمال $N\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\alpha(u)du, \int_{t_{i-1}}^{t_i}\sigma^2(u)du\right)$ می باشد که به طور مشخص یک گام تصادفی است.

با توجه به وابستگی α وσ به زمان، انتگرال رابطه فوق ممکن است به سادگی قابل حل نباشد.می توان با فرمول های مربع سازی آنها را جایگزین کرد در ساده ترین حالت α وσ به صورت $\alpha(t_{i-1})$ و $\sigma(t_{i-1})$ روی بازه ی $[t_{i-1}, t_i]$ تقریب زده می شوند.در این صورت معادله انتگرال فوق را به این صورت جایگزین می کنیم:

$$x_i = x_{i-1} + \alpha(t_{i-1})(t_{i-1} - t_i) + z_i\sigma(t_{i-1})\sqrt{t_i - t_{i-1}}$$

در شکل شماره(1) مقادیر متغیر تصادفی بر اساس گام تصادفی رسم شده است:



شکل (1) حرکت براونی استاندارد با شروع از نقطه صفر

حرکت براونی یک بعدی توسط پل براونی:

متغیر تصادفی W_u از یک حرکت براونی شرطی روی توزیع W_s و W_t با $s < u < t$ به پل براونی اشاره می کند. این نوع از نمونه گیری به طور واضح نیازمند به دست آوردن $\omega_1, \ldots, \omega_k$ برای یک ترتیب غیر افزایشی روی $\{1, \ldots, k\}$ است، که به این دلیل یک ساختار پل براونی نامیده می شود.

نمونه گیری شرطی برای حرکت براونی به دلیل قضیه زیر با توزیع نرمال شرطی امکان پذیر است.

قضـــیـه5:(فرمول شـــرطی برای نرمال های چند متغیره): بافرض فضـــای احتمال (Ω, A, P) و همچنین در نظرگرفتن $(d,k)\epsilon N$ و $k < d$. فرض کنید که بردار تصـادفی $Z{:}\,\Omega \to R^d$ به صورت $N(\alpha, \sum)$ توزیع شـــده بـاشـــد کـه $\epsilon\alpha R^d$ و $\sum$ یـک مـاتریس $d \times d$ مثبـت نیمـه معیین نـامتقـارن حقیقی اســـت. افراز $Z = (Z_{[1]}, Z_{[2]})$ نسـبت به طرح مقداردهی R^k با $Z_{[1]} = (Z_1, \dots, Z_k)$ و یک طرح مقداردهی R^{d-k} به صورت $Z_{[2]} = (Z_{k+1}, \dots, Z_d)$ را داریم.به همین صورت داریم:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{[1]} \\ \alpha_{[2]} \end{bmatrix} \quad , \quad \sum = \begin{bmatrix} \sum_{[11]} & \sum_{[12]} \\ \sum_{[21]} & \sum_{[22]} \end{bmatrix}$$

یعنی بـه طور مشـــخص، $\alpha_{[1]}\epsilon R^d$ ، $\alpha_{[2]}\epsilon R^{d-k}$ و $\sum_{[11]}$ یـک مـاتریس $k \times k$ و $\sum_{[12]}$ یـک ماتریس $k \times (d-k)$ ، $\sum_{[21]}$ یـک مـاتریس $(d-k) \times k$ و $\sum_{[22]}$ یـک ماتریس $(d-k) \times (d-k)$ می باشد.بنابراین برای هر $x\epsilon R^{d-k}$ توزیع $Z_{[1]}$ تحت شرایط $\{x = Z_{[2]}\}$ به صورت زیر است:

$$N\left(\alpha_{[1]} + \sum_{[12]}\sum_{[22]}{}^{-1}\left(x - \alpha_{[2]}\right), \sum_{[11]} - \sum_{[12]}\sum_{[22]}{}^{-1}\sum_{[21]}\right)$$

در ادامه به خاصـیت های بیشتری از حرکت براونی به نام ویژگی های مارکوف در حرکت براونی پرداخته شده است.

قضـــیه6(ویژگی های مارکوف از حرکت براونی): با فرض $\epsilon\alpha R^d$ و $d\epsilon N$ و و $\sum$ یک ماتریس $d \times d$ نیمه معیین مثبـت متقـارن. $(X_t)_{t\geq 0}$ را یـک حرکت براونی با انحراف α و ماتریس کواریانس $\sum$ در نظر بگیرید و $(0 \leq t0 < t1 < \cdots < tk)$ ، $k\epsilon N$ ، $k \geq 2$ و $s\epsilon[t_{i-1}, t_i]$ برای $i\epsilon\{2, \dots, k\}$. آنگـاه برای هر $(x_1, \dots, x_k)\epsilon(R^d)^k$ برابری توزیع شرطی زیر وجود دارد:

$$\left(X_s | X_{t_1}, \dots, X_{t_k} = x_k\right) = \left(X_s | X_{t_{i-1}} = s_{i-1}, X_{t_i} = x_{t_i}\right)$$

به عبارت دیگر شـرطی شدن X_s روی همه ی زمان های $t1, \dots, tk$ برابر با شرطی شدن X_s فقط روی زمان های درست قبل و بعد از s است.

در n امین مرحله از ساختار پل براونی ما برای بدست آوردن ω_j به ω_{t_j} نیاز داریم. اگر t_j از همه ی t_i های قبلی بزرگتر باشد با توجه به ساختار گام تصادفی که قبلاً مطرح شد آنگاه ω_j از ω_i متعلق به بزرگترین t_i های قبلی بدست می آید.از سوی دیگر اگر t_j بین t_i از قبل درنظر گرفته شده قرار گیرد، آنگاه طبق رابطه ای که قبلاً بیان شد ما فقط به تعیین $\left(W_{t_j}|W_{t_M}=\omega_M, W_{t_N}=\omega_N\right)$ نیاز داریم، که M بزرگترین اندیس است به طوریکه $t_M < t_j$ و ω_M قبلاً ساخته شده است، درحالیکه N کوچکترین اندیس است به طوریکه $t_j < t_N$ و ω_N قبلاً ساخته شده است.

اگر $u=t_M < s=t_j < t=t_N$ را در نظر بگیریم،گزاره ی زیر را که از قضیه 5 بدست می آید را به کار می بریم.

گزاره: اگر $(W_t)_{t\geq 0}$ یک حرکت براونی یک بعدی استاندارد باشد با انحراف(عرض از مبداء) $\epsilon\alpha R$ و واریانس $\sigma^2>0$ ، آنگاه برای هر $0\leq u<s<t$ و $x,y\,\epsilon R$ تزیع شرطی $(W_s|W_u=x, W_t=y)$ مستقل از انحراف α است و به صورت رابطه زیر می باشد:

$$N\left(\frac{(t-s)x+(s-u)y}{t-u}, \frac{\sigma^2(s-u)(t-s)}{t-u}\right)$$

اثبات گزاره ی فوق از طریق قضیه 4 توزیع(غیرشرطی) از (W_u, W_s, W_t) به صورت زیر می باشد:

$$N\left(\alpha\begin{pmatrix}u\\s\\t\end{pmatrix}, \sigma^2\begin{pmatrix}u & u & u\\ u & s & s\\ u & s & t\end{pmatrix}\right)$$

با پذیرفتن قضیه 5 ترتیب حروف را اینگونه تغییر می دهیم:

$$N\left(\alpha\begin{pmatrix}s\\u\\t\end{pmatrix}, \sigma^2\begin{pmatrix}s & u & s\\ u & u & u\\ s & u & t\end{pmatrix}\right)$$

$$\alpha_{[1]}=\alpha s, \alpha_{[2]}=\begin{pmatrix}\alpha & u\\ a & t\end{pmatrix}, \qquad \textstyle\sum_{[11]}=\sigma^2 s\,, \sum_{[12]}=\sigma^2(u,s)$$

$$\textstyle\sum_{[21]}=\sigma^2\begin{pmatrix}u\\s\end{pmatrix}, \qquad \sum_{[22]}=\begin{pmatrix}u & u\\ u & t\end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{[22]}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(ut-u^2)}\begin{pmatrix} t & -u \\ -u & u \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma^2(t-u)}\begin{pmatrix} t/u & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

برای $\Sigma_{[22]} = \sigma^2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ و u=0 معکوس ناپذیر است و معکوس کلی به صورت زیر می باشد.

$$\Sigma_{[22]}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2 t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین بر اساس قضیه 5 مقدار امید توزیع شرطی برای $u > 0$ به صورت زیر است:

$$b_{[1]} + z_{[12]}z_{[22]}^{-1}\begin{pmatrix} x-\alpha u \\ y-bt \end{pmatrix} = \alpha s + \frac{(u,s)}{t-u}\begin{pmatrix} \dfrac{tx}{u} - t\alpha - y - \alpha t \\ -x+\alpha u + y - \alpha t \end{pmatrix}$$

$$= \alpha s + \frac{tx - uy - sx + asu + sy - ast}{t-u} = \frac{(t-s)x + (s-u)y}{t-u}$$

به همان صورت که در روابط قبل داشتیم برای u=0 و با داشتن x=0 برای محاسبه ی حرکت براونی استاندارد رابطه ی زیر را خواهیم داشت:

$$b_{[1]} + z_{[12]}z_{[22]}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ y-bt \end{pmatrix} = \alpha s + \frac{(0,s)}{t-u}\begin{pmatrix} 0 \\ y-bt \end{pmatrix} = \frac{ast + sy - ast}{t} = \frac{sy}{t}$$

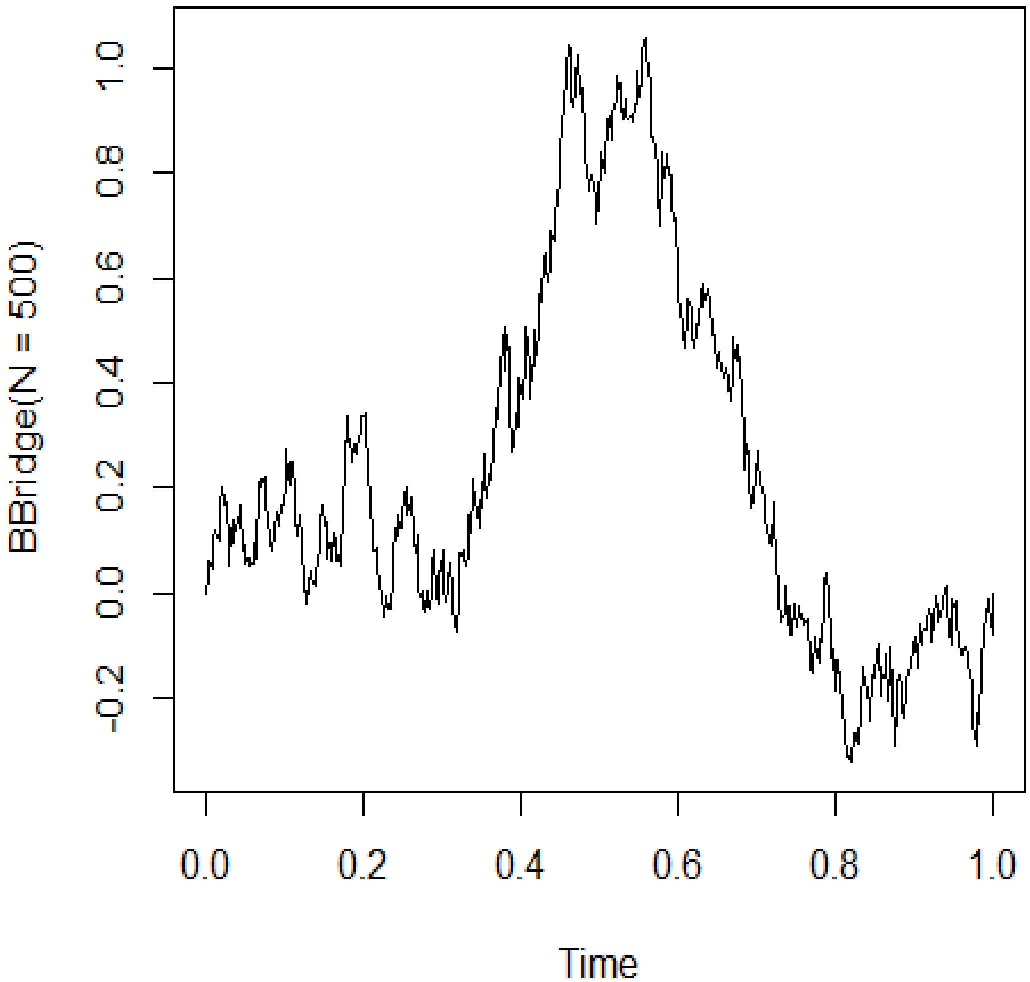
همچنین بر اساس قضیه شماره 5 خواهیم داشت:

$$\sigma^{-2}\left(\Sigma_{[11]} - \Sigma_{[12]}\Sigma_{[22]}{}^{-1}\Sigma_{[21]}\right) = s - \frac{(u,s)}{t-u}\begin{pmatrix} t-s \\ -u+s \end{pmatrix} = \frac{st - su - ut + su + su - s^2}{t-u}$$

$$= \frac{(s-u)(t-s)}{t-u}$$

به این ترتیب اثبات کامل می شود.

در شکل شماره(2) حرکت براونی توسط پل براونی شبیه سازی شده است.



شکل(2) حرکت براونی توسط پل براونی

حرکت براونی هندسی:

یکی از انواع فرآیندهای تصادفی مهم که در اکثر مدل های ریاضیات مالی به کار می رود حرکت براونی هندسی می باشـد.در بخش مقدمه در خصـوص کاربرد این نوع از فرآیندها به طور مفصـل بحث شد. براساس تعریف ارزش فرآیند تصـادفی $(X_t)_{t\geq 0}$ یک حرکت براونی هندسی با انحراف $a\epsilon R$ و واریانس $\sigma^2 > 0$ می باشد، اگر و فقط اگر $(X_t)_{t\geq 0}$ جوابی برای معادله دیفرانسیل تصادفی زیر باشد:

$$\frac{dX_t}{X_t} = adt + \sigma dW_t$$

که در رابطه ی فوق $(W_t)_{t\geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد یک بعدی با $a = 0$ و $\sigma = 1$ است.

جهت شبیه سازی این فرآیند همانطورکه در بالا ذکر شد،باید معادله ی دیفرانسیل تصادفی فوق حل شود. نکته ی قابل توجه در خصـوص معادلات دیفرانسـیل تصـادفی این است که جواب اینگونه معادلات به صورت یک فرآیند تصادفی می باشد؛ و تفاوت اساسی این نوع معادلات دیفرانسیل در مقایسه با معادلات دیفرانسیل معمولی در همین نکته نهفته است.

برای حل معادله دیفرانسیل فوق از روشی مرسوم به نام(لِم ایتو) استفاده می کنیم به صورت زیر:

$$\frac{dX_t}{X_t} = adt + \sigma dW_t$$

با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$\int_0^t \frac{dX_t}{X_t} = ta + \sigma W_t$$

حال برای محاسبه انتگرال سمت چپ لم ایتو را برای x>0 به کار می گیریم با فرض:

$$F(t, X_t) = \ln(X_t)$$

$$d(\ln(X_t)) = \frac{1}{X_t}dX_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{{X_t}^2}\right)(dX_t)^2 \quad (*)$$

حالا با توجه به عبارات زیر:

$$dt.dt = dt.dw_t = dw_t.dt = 0\ , dw_t.dw_t = dt$$

$$(dX_t)^2 = dX_t\ .dX_t$$

حالا معادل عبارت فوق را در (*) جایگذاری می کنیم:

$$\frac{dX_t}{X_t} = d(\ln(X_t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

حال با جایگذاری کل عبارت فوق در معادله انتگرال اولیه داریم:

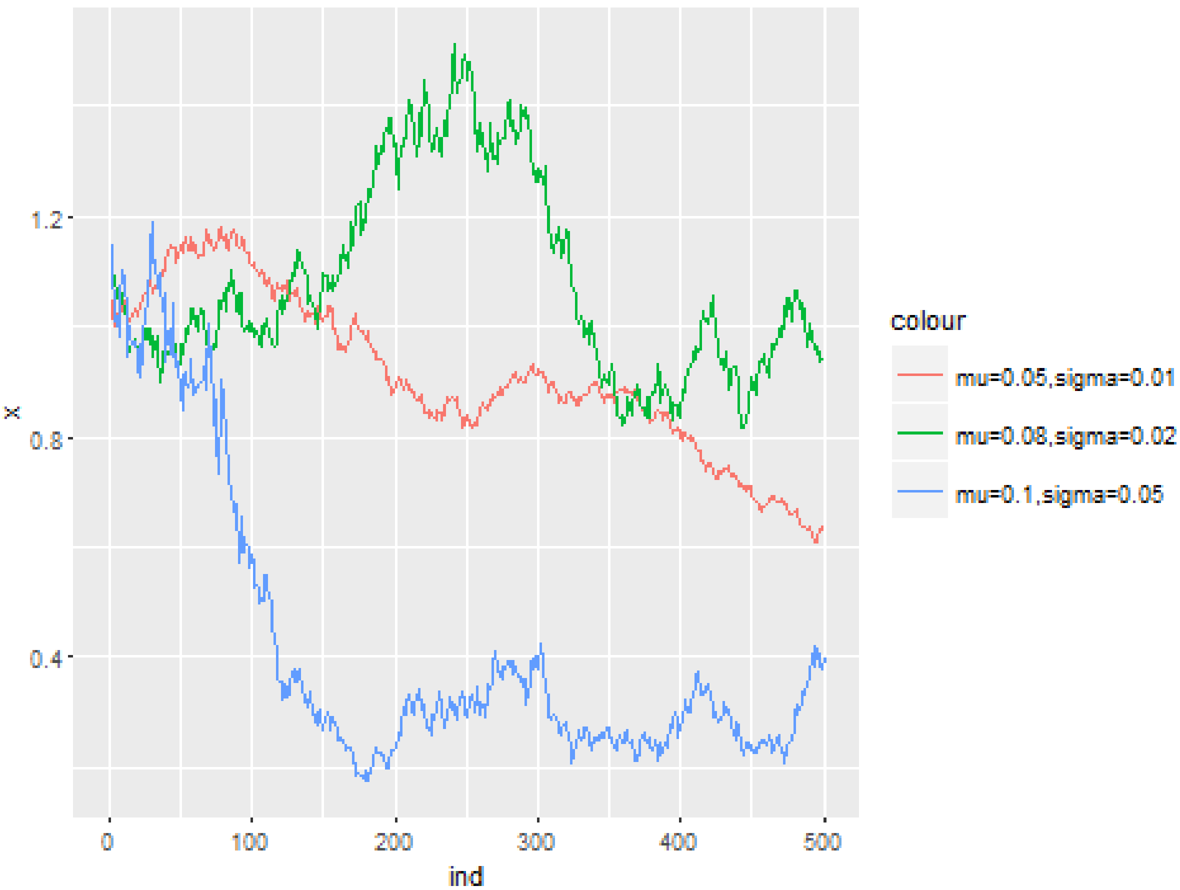
$$\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) = \left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$$

حالا کافیست که تنها از طرفین یک exp بگیریم:

$$X_t = X_0 * e^{\left\{\left(a-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t\right\}}$$

که عبارت فوق جواب معادله دیفرانسیل تصادفی $\frac{dX_t}{X_t} = adt + \sigma dW_t$ یا همان حرکت براونی هندسی است.

شکل(3) نمونه ای از حرکت براونی هندسی با پارامترهای متفاوت است. لازم به ذکر است که برنامه ی کامپیوتری تهیه شده تحت نرم افزار R می باشد و کدهای برنامه در انتهای همین بخش ضمیمه شده است.



شکل(3) شبیه سازی حرکت براونی هندسی

حرکت براونی هندسی با پرش(حرکت انتشار پرش مرتن):

مدل حرکت براونی هندسی برای آن دسته از سری های زمانی که در آنها پرش ها یا تکان های تصادفی شدید وجود دارد مناسب نمی باشد. در حقیقت این مدل قادر به برازش پرش در روند سری زمانی نیست. مرتن با افزودن بخش پواسن به مدل حرکت براونی هندسی مدل انتشار-پرش را به صورت زیر معرفی کرد:

$$\frac{dX_t}{X_t} = adt + \sigma dW_t + kdN_t$$

که در معادله فوق N_t فرآیند تصــادفی پواســن و در حقیقت بیانگر تعداد پرش های موجود در سری زمانی می باشد.لازم به ذکر است که در معادله فوق k اندازه ی پرش در روند سری زمانی را مشخص می کند.

تابع چگالی احتمال فرآیند N_t به صورت زیر تعریف می شود:

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

به منظور حل این معادله نیز مجدداً می توان از لم ایتو بهره جســت؛ که پس از به کارگیری این لم جواب نهایی به صورت زیر خواهد شد:

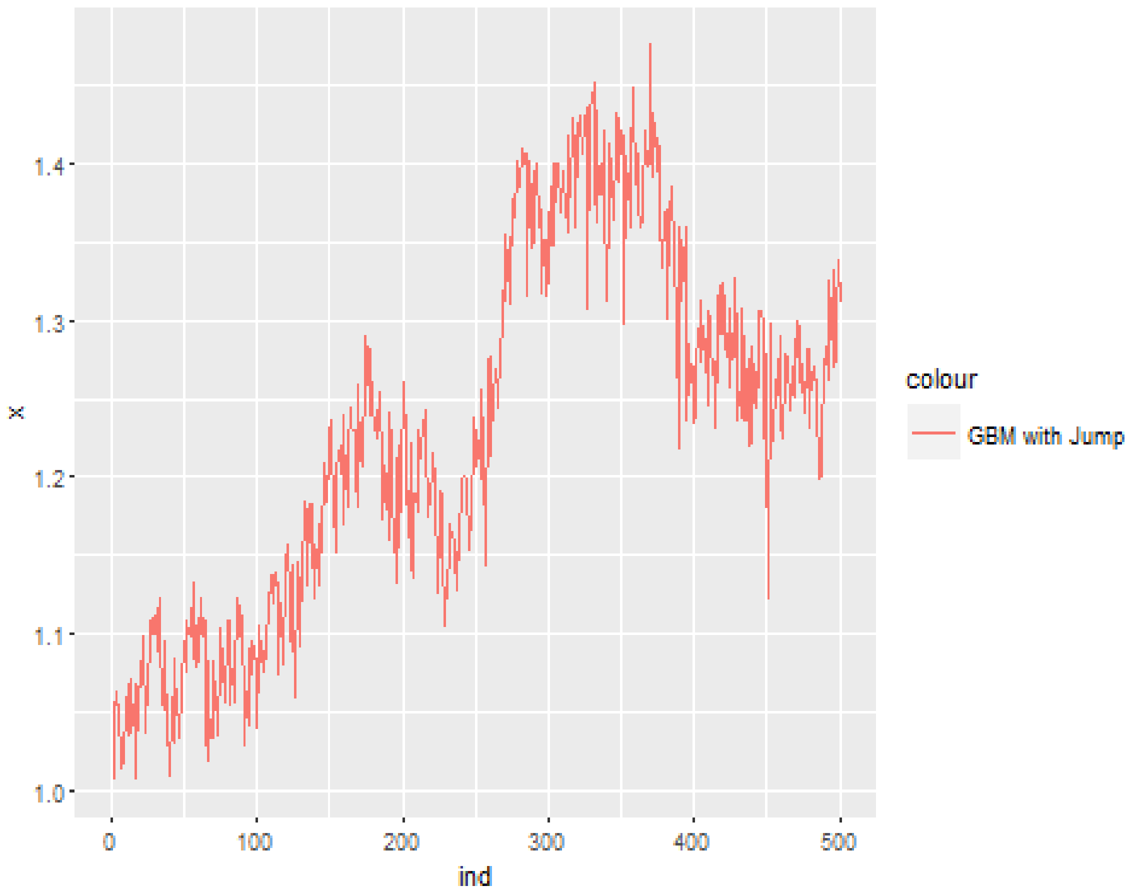
$$F(t, X_t) = \ln(X_t)$$

$$d\ln(X_t) = \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t + \ln(1 + k_n)\, dN_t$$

$$X_t = X_0 * e^{\left\{\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t + \sum_{n=1}^{N_t} \ln(1 + k_n)\right\}}$$

همانطورکه مشاهده می شود جواب نهایی دارای سه بخش است، قسمت اول روند زمانی که مربوط به تغییرات میانگین ســری زمانی می باشد، بخش دوم نوسانات و شوک های تصادفی و قسمت سوم پرش های موجود در سری زمانی را برازش می کند.

شکل(4) شبیه سازی این فرآیند را نشان می دهد.



شکل(4) حرکت براونی هندسی با پرش(مدل انتشار- پرش)

نتیجه گیری:

کمیت ها و متغیرهای مرتبط با ریاضـیات مالی مانند قیمت سـهام اغلب فرآیندهای تصـادفی می باشـند.در این تحقیق سـعی شـده تا به برخی از مهمترین مدل های مربوط به خانواده فرآیند تصـادفی حرکت براونی پرداخته شـود و ضـمن بررسی موارد کاربردی این مدل ها به تفاوت های آنان نیز اشاره شود.با بررسی کاربردهای فوق این نتیجه حاصـل شد که داشتن ابزارهایی برای شبیه سازی مسیر چنین فرآیندهایی که از حرکت براونی تبعیت می کنند مهم و اساسی می باشد.

در پایان از زحمات و کمک های علمی دو دوست بسیار ارزشمند جناب آقایان محمد علیزاده و محمدعلی مرادی کمال قدر دانی و سپاس را دارم.

```
## GBM model
GBM=function(x0,mu,sigma,N){
  sigma2=sigma^2
  drift=(mu-(sigma2/2))
  w=cumsum(rnorm(N))
  r=drift+(sigma*w)
  xt=x0*exp(r)
  tx=ts(xt)
  return(tx)
}
x=GBM(1,0.05,0.01,500)
y=GBM(1,0.08,0.02,500)
z=GBM(1,0.1,0.05,500)

library(ggplot2)
ind=1:500
d=data.frame(ind,x,y,z)
a=ggplot(d,aes(ind))
a=a+geom_line(aes(y=x,colour="mu=0.05,sigma=0.01"))
a=a+geom_line(aes(y=y,colour="mu=0.08,sigma=0.02"))
a=a+geom_line(aes(y=z,colour="mu=0.1,sigma=0.05"))
a
############ END Geometric Browinian Motion(GBM)
```

```
##GBM with Jump
GBMJ=function(x0,mu,sigma,landa,delta,N){
  sigma2=sigma^2
  drift=(mu-(sigma2/2))
  w=rnorm(N)
  Nt=rpois(N,landa)
  wt=cumsum(w)
  r=drift+(sigma*wt)
  p=(1-delta)^Nt
  S=x0*exp(r)*p
  S=ts(S)
  return(S)
}
x=GBMJ(1,0.05,0.01,1,0.02,500)
ind=1:500
df=data.frame(ind,x)
g=ggplot(df,aes(ind))
g+geom_line(aes(y=x,colour="GBM with Jump"))
END GBM with Jump ##
```


Bahador.ahmadpour@gmail.com