http://Barghiran.persianblog.com
http://groups.yahoo.com/group/barghiran_electronic

اسیلوسکوپ

از آنجائی که فهم دقیق نحوهٔ کارکرد اسیلوسکوپ مستلزم آشنائی کافی با اشکال لیساژور می‌باشد، در اینجا سعی می‌کنیم مبانی نظری اشکال لیساژور را به طور دقیق مرور نمائیم. ابتدا از یک تک ذرهٔ نوسانگر هماهنگ ساده در یک بعد شروع می‌کنیم. فرض کنید ذره‌ای به جرم m توسط نیروی بازگردانندهٔ خطی F = -kx به سمت مبدأ کشیده می‌شود. معادلهٔ حرکت عبارتست از $m\ddot{x} = -kx$ و یا $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ که در آن $\omega_0^2 = k/m$ فرکانس زاویه‌ای نوسان است. کلی‌ترین حل معادلهٔ بالا که در واقع یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی درجهٔ دوم است، به صورت ترکیب خطی جملات سینوسی و کسینوسی زیر است:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \qquad (1)$$

که در آن ثابت‌های A و B با توجه به شرایط اولیه تعیین می‌شوند. می‌توان با تقسیم و ضرب عبارت بالا در عبارت $\sqrt{A^2 + B^2}$ آن را به صورت زیر درآورد:

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos\omega_0 t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin\omega_0 t\right)$$

حال با توجه به این که $-1 \le \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ و $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \le 1$ می‌توان فرض کرد:

$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\theta_0$ در نتیجه خواهیم داشت: $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\theta_0$. اگر $\sqrt{A^2+B^2}$ را نیز با D نشان دهیم، داریم:

$$x(t) = D\cos(\omega_0 t - \theta_0) \qquad (۲)$$

که در واقع شکل ساده‌تر شدهٔ رابطهٔ (۱) است. دو ثابت D و θ_0 که به ترتیب دامنه و فاز اولیهٔ نوسانگر خوانده می‌شوند از روی شرایط اولیه تعیین می‌گردند. با قرار دادن $t = 0$ در رابطهٔ (۲) داریم:

$$x(0) = x_0 = D\cos\theta_0 \Rightarrow \theta_0 = \cos^{-1}\frac{x_0}{D} \qquad (۳)$$

و با مشتق گرفتن از رابطهٔ (۲) و قرار دادن $t = 0$ داریم:

$$\dot{x}(0) = \upsilon_0 = +\omega_0 D\sin\theta_0 \qquad (۴)$$

با حل دو رابطهٔ (۳) و (۴) ثابت‌های D θ_0 برحسب شرایط اولیهٔ x_0 و υ_0 و فرکانس زاویه‌ای ω_0 تعیین می‌گردند. حال فرض کنیم ذرهٔ مورد نظر دارای دو درجهٔ آزادی است. یعنی می‌تواند در صفحهٔ x-y حرکت کند. نیروی بازگرداننده را متناسب با فاصله از مبدأ می‌گیریم. یعنی $\vec{F} = -k\vec{r}$ که در آن $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ بردار مکان لحظه‌ای ذره است.

با نوشتن معادلهٔ حرکت خواهیم داشت:

$$m\ddot{\vec{r}}=-k\vec{r}\Rightarrow\begin{cases} m\ddot{x}=-kx & (5)\\ m\ddot{y}=-ky & (6)\end{cases}$$

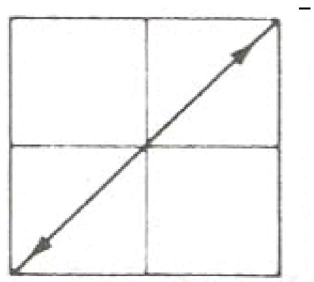
مطابق با آنچه در مورد نوسانگر یک بعدی گفتیم، حل معادلات (۵) و (۶) به صورت زیر در می‌آیند:

$$x(t)=D_1\cos(\omega_0 t-\delta_1) \qquad (۷)$$

و

$$y(t)=D_2\cos(\omega_0 t-\delta_2) \qquad (۸)$$

حال سؤال اینجاست که مسیر حرکت ذره یعنی $\big(x(t)$ و $y(t)\big)$ چه شکلی را خواهد داشت؟ جواب این سؤال به مقادیر D_1، D_2، δ_1 و δ_2 که در واقع از روی شرایط اولیه تعیین می‌شوند، بستگی دارد. در حالت کلی برای یافتن مسیر باید پارامتر منحنی حرکت را، که در اینجا همان زمان t است، بین x و y حذف کرد. برای مثال اگر $D_1=D_2=R$ و نیز $\delta_1=\delta_2$ باشد، آنگاه $R\cos\omega_0 t=x(t)=y(t)$ است و مسیر حرکت ذره روی نیمساز ناحیه اول و سوم است، زیرا به ازای تمامی زمان‌های حرکت داریم: $x=y$.



$\delta = 0$

در حالت کلی سعی می‌کنیم پارامتر t را بین معادلات (۷) و (۸) حذف نمـائیم.

بدین منظور مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$y(t) = D_2 \cos(\omega_\circ t - \delta_2) = D_2 \cos\left(\omega_\circ t - \delta_1 + (\delta_1 - \delta_2)\right)$$

$$= D_2\left[\cos(\omega_\circ t - \delta_1)\cos(\delta_1 - \delta_2) - \sin(\omega_\circ t - \delta_1)\sin(\delta_1 - \delta_2)\right]$$

حال اگر $\delta_1 - \delta_2 = \delta$ تعریف گردد، خواهیم داشت:

$$y(t) = \frac{D_2}{D_1} x(t)\cos\delta - D_2 \sin\delta\sqrt{1 - (\frac{x(t)}{D_1})^2} \Rightarrow D_1 y(t) - D_2 x(t)\cos\delta \quad (۹)$$
$$= -D_2 \sin\delta\sqrt{D_1^2 - x(t)}$$

حال رابطهٔ (۹) را به توان ۲ می‌رسانیم و با توجه به این که رابطهٔ (۹) به ازای تمامی

زمان‌های t برقرار است از نوشتن آشکار t خودداری می‌کنیم ⇐ خواهیم داشت:

$$D_1^2 y^2 + D_2^2 x^2 \cos^2\delta - 2D_1 D_2 \cos\delta\, xy = D_2^2 \sin^2\delta (D_1^2 - x^2)$$

و در نتیجه پس از ساده کردن فرم نهائی زیر را به دست می‌آوریم:

$$D_2^2 x^2 - 2D_1 D_2 xy\cos\delta + D_1^2 y^2 = D_1^2 D_2^2 \sin^2\delta \quad (۱۰)$$

رابطهٔ (۱۰) بسته به مقدار δ می‌تواند نمایشگر یک خط یـا بیـضی در صـفحهٔ $x - y$

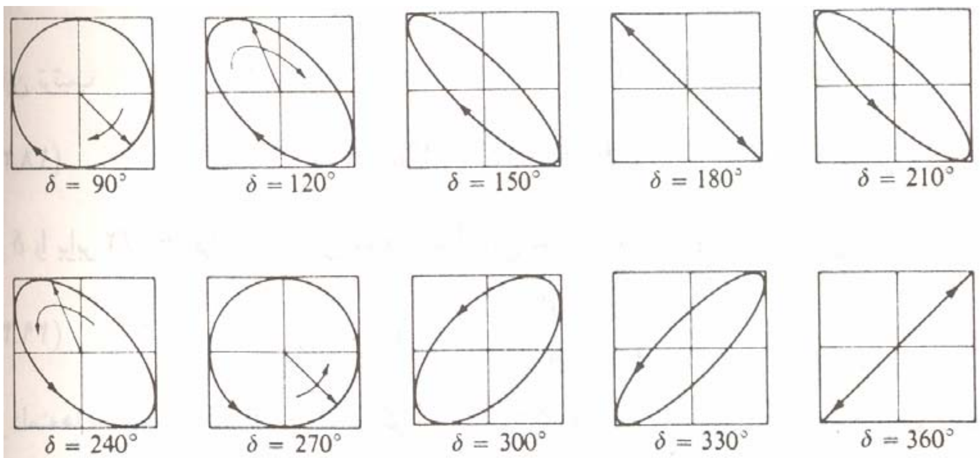
باشد. برای مثال اگر $\delta_1 - \delta_2 = \delta = \frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{x^2}{D_1^2} + \frac{y^2}{D_2^2} = 1 \quad (۱۱)$$

که معادلهٔ بیضی با قطرهای D_1 و D_2 است. در حالـت خـاص $D_1 = D_2$ ایـن بیـضی بـه

دایره تبدیل می‌شود. اگر $\delta = \circ$ باشد، آنگاه از رابطهٔ (۱۰) داریم: $(D_2 x - D_1 y)^2 = \circ$ یـا

به عبارت دیگر $D_y x = D_x y$ که در واقع معادلهٔ خط $y = \frac{D_y}{D_x} x$ است. در حالت خاص $D_y = D_x$ خط فوق به نیمساز $y = x$ تبدیل می‌شود. در حالت کلی منحنی‌های زیر حالات مختلف δ را به ازای $D_x = D_y$ نشان می‌دهند.



شکل۲.۳

اینک بیائید فرض کنیم نیروی بازگردانندهٔ دوبعدی به صورت ساده $-k\vec{r}$ نباشد. بدین معنی که جهات x و y از نقطه‌نظر مقدار نیرو با هم یکسان نباشند، در واقع $F_x = -k_x x$ و $F_y = -k_y y$ که در آن $k_x \neq ky$ می‌باشد. به عبارت دیگر برداری نیروی وارد بر ذره به صورت زیر باشد: $\vec{F} = -(k_x x$ و $k_y y)$. در آن صورت معادلات حرکت به صورت زیر در می‌آیند:

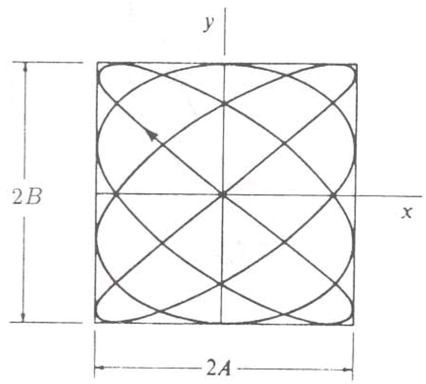
$$m\ddot{x} = -k_x x \qquad , \qquad m\ddot{y} = -k_y y \tag{۱۲}$$

حل معادلات بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$x(t) = D_x \mathrm{Cos}(\omega_x t - \delta_x) \qquad , \qquad y(t) = D_y \mathrm{Cos}(\omega_y t - \delta_y) \tag{۱۳}$$

که در آن $\omega_x \neq \omega_y$ می‌باشد. حال سؤال اصلی این است که در این حالت عمومی‌تر ذره چه مسیری را روی صفحهٔ x-y می‌پیماید؟ در واقع از لحاظ ریاضی مجدداً باید t را بین معادلات (۱۳) حذف کنیم. ولی این بار به دلیل این که $\omega_x \neq \omega_y$ می‌باشد، انجام مراحل مانند حالت خاص $\omega_x = \omega_y = \omega_\circ$ دیگر عملی نمی‌باشد و عملاً مسیر ذره بسیار پیچیده خواهد شد. به این مسیرها که دیگر بیضی نیستند منحنی‌های لیساژو می‌گویند که برای نخستین بار توسط ژول لیساژو، فیزیکدان فرانسوی (۱۸۸۰–۱۸۲۲) مورد مطالعه قرار گرفت.

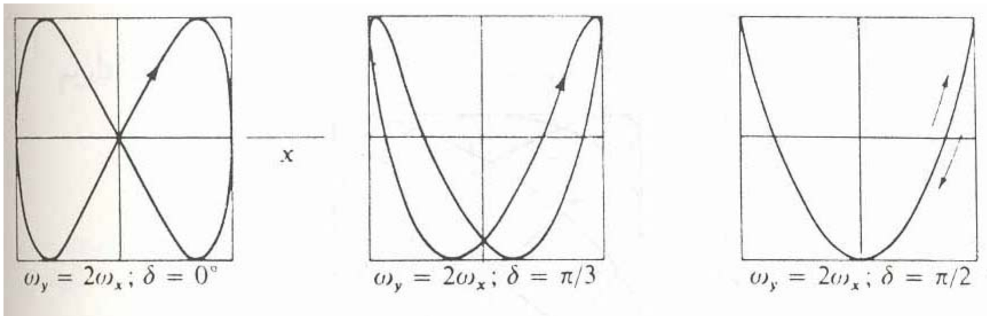
اگر حرکت در فواصل زمانی منظم تکرار شود، این منحنی بسته خواهد بود. این موضوع فقط در صورتی امکان دارد که بسامدهای ω_y, ω_x متناسب، یعنی، ω_y / ω_x کسری گویا باشد، این حالت در شکل (۳) نشان داده شده‌است. در این شکل $\omega_y = \frac{2}{3}\omega_x$ (و نیز $D_2 = D_1$ و $\delta_1 = \delta_2$). اگر نسبت بسامدها یک کسر گویا نباشد، منحنی باز خواهد بود؛ یعنی، ذرهٔ متحرک هرگز دو بار از یک نقطه و با سرعت یکسان عبور نمی‌کند. در چنین حالتی، پس از گذشت زمانی به قدر کافی طولانی، منحنی از نزدیکی (اختیاری) هر قطهٔ معین در داخل مستطیل $2D_2 \times 2D_1$ می‌گذرد و بنابراین مستطیل را پر خواهد کرد.



شکل۳

نوسانگر دوبعدی مثالی از سیستمی است که در آن تغییری بی‌نهایت کوچک می‌تواند به نوعی حرکت کیفیتاً متفاوت بینجامد. اگر دو بسامد متناسب باشند، حرکت در امتداد مسیری بسته صورت خواهد گرفت. اما اگر نسبت بسامدی حتی به مقداری بی‌نهایت کوچک از یک کسر گویا تخطی کند، در این صورت مسیر دیگر بسته نخواهد بود و مستطیل را "پر" خواهد کرد. برای این که مسیر بسته باشد، نسبت بسامدها باید با دقت بی‌نهایت یک کسر گویا باشد.

اگر بسامد حرکت در راستاهای x و y متفاوت باشند، در آن صورت شکل منحنی لیساژوی حاصل قویاً به اختلاف فاز، $\delta \equiv \delta_{\text{[illegible]}} - \delta_{\text{[illegible]}}$، بستگی دارد. در شکل (۴) نتایج حالت $\omega_y = \text{[illegible]}\omega_x$ را به ازای اختلاف‌های فاز ۰، $\pi/\text{[illegible]}$ و $\pi/\text{[illegible]}$ مشاهده می‌کنید.

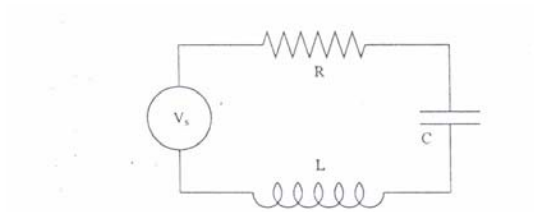


شکل ۴

اینک که مفاهیم نظری اشکال لیساژو را فهمیدیم به اسیلوسکوپ باز می‌گردیم. همانگونه که در جزوهٔ آزمایش مشاهده نمودید یک باریکه الکترونی با عبور از صفحات دو سری خازن (اولی افقی و دومی عمودی) تحت تأثیر میدان‌های الکتریکی صفحات خازن قرار می‌گیرد و در نتیجه دچار انحراف در راستای افقی x و عمودی y می‌شود. میزان انحراف بستگی به پتانسیل صفحات یعنی $V_x(t)$ و $V_y(t)$ دارد. اگر صفحات خازن‌ها به ولتاژهای تناوبی با فرکانس ω_x (خازن افقی) و ω_y (خازن عمودی) وصل شود، آنگاه باریکهٔ الکترونی نیز با همان فرکانس‌ها منحرف می‌شود. آنچه ما روی صفحهٔ نمایش اسیلوسکوپ مشاهده می‌کنیم در واقع نوک باریکهٔ الکترونی است (که در اثر برخورد با صفحهٔ فلوئورسان نمایش از خود نور ساطع می‌نماید) و مختصات آن را با x و y (که شرح آن در بالا به تفصیل بحث شد) نمایش می‌دهیم.

اینک به بحث دربارهٔ چگونگی به وجود آوردن اختلاف فاز دلخواه ϕ بین دو موج ورودی به اسیلوسکوپ می‌پردازیم. در واقع برای به وجود آوردن اختلاف فاز ϕ بین دو

موج ورودی، موج اول را مستقیماً از منبع ولتاژ (۱) بـه کانـال X اسیلوسـکوپ وصـل می‌کنیم. برای تولید موج دوم از یک مدار سری RLC که بـه منبـع ولتـاژ دوم متـصل شده‌است کمک می‌گیریم. (مطابق شکل).



فرض کنـیم منبـع ولتـاژ بتوانـد مـــوج ولتـــاژ سینوســـی $V_m \sin \omega t$ را تولیـد کنـد. همانگونـه کـه در درس فیزیک پایه۲ خوانـده‌ایـم ایـن ولتـاژ سینوسـی، باعـث پیـدایش یـک جریـان سینوسـی بـا همـان فرکـانس در مـدار RLC می‌شود، اما دامنه و فاز جریان با دامنه و فاز ولتاژ متفاوت خواهد بود. برای به دست آوردن دامنه و فاز جریـان (نـسبت بـه ولتـاژ) معادلـهٔ KVL را بـرای مـدار شـکل بـالا می‌نویسیم:

$$Ri + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = V_m \sin \omega t \qquad (۱۴)$$

(توجه داریم که $i = \frac{dq}{dt}$ می‌باشد). حال اگر از دو طرف معادلـهٔ (۱۴) نـسبت بـه زمـان مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = V_m \omega \cos \omega t \qquad (۱۵)$$

معادلهٔ (۱۵) یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی ناهمگن مرتبهٔ دوم بـا ضـرائب ثابـت اســـت. در درس معـــادلات دیفرانـــسیل دیـــدیم حـــل معادلـــهٔ بـــالا بـــه

صورت $i(t) = i_m \sin(\omega t + \phi)$ فرض می‌شود که در آن مجهولات i_m و ϕ را باید پیدا نمود. (توجه دارید دامنهٔ V_m و فرکانس ω منبع ولتاژ معلوم می‌باشند) با جایگذاری فرض بالا در معادلهٔ (۱۵) خواهیم داشت:

$$-L\omega^2 i_m \sin(\omega t + \phi) + R i_m \omega \cos(\omega t + \phi) + \frac{i_m}{C}\sin(\omega t + \phi) = V_m \omega \cos\omega t \qquad (۱۶)$$

اگر جملات $\sin(\omega t + \phi)$ و $\cos(\omega t + \phi)$ را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی بسط دهیم و برحسب ضرائب $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ مرتب کنیم به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

$$\sin\omega t\left[-\cos\phi L\omega^2 i_m - R i_m \omega \sin\phi + \frac{i_m}{C}\cos\phi\right] + \cos\omega t[-L\omega^2 i_m \sin\phi + R i_m \omega \cos\phi + \frac{i_m}{C}\sin\phi] = V_m \omega \cos\omega t \qquad (۱۷)$$

چون رابطهٔ (۱۷) به ازای *تمامی زمان‌های* t باید برقرار باشد، پس می‌توان فرض کرد ضریب جملهٔ $\sin\omega t$ در سمت چپ برابر صفر و ضریب جملهٔ $\cos\omega t$ برابر $V_m\omega$ است تا برابری برقرار باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\cos\phi\left(\frac{i_m}{C} - L\omega^2 i_m\right) = R i_m \omega \sin\phi \;;\; R i_m \omega \cos\phi - L\omega^2 i_m \sin\phi + \frac{i_m}{C}\sin\phi = V_m\omega \qquad (۱۸)$$

از روابط بالا می‌توان $tg\phi$ و i_m را برحسب معلومات R، L، ω، C و V_m حساب کرد.

$$tg\phi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} \qquad \text{و} \qquad i_m = \frac{V_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}} \qquad (۱۹)$$

توجه دارید که کمیات $X_L = L\omega$ و $X_C = \frac{1}{C\omega}$ ابعاد مقاومت دارند. همچنین اگر کمیت Z را به صورت $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ تعریف کنیم، آنگاه Z نیز کمیتی

از جنس مقاومت است. در فیزیک پایه۲، Z همان واکنائی (آمپدانس) مـدار اسـت.

طبق رابطهٔ (۱۹) داریم $\phi = tg^{-1}(\frac{1 - LC\omega^2}{R\omega C})$. حال فرض کنیم موج ورودی به کانال Y اسیلوسکوپ را از دو سر مقاومت بگیریم. در آن صورت خواهیم داشت $V_Y = V_R = Ri(t)$ که با توجه به مطالب گفته شده خواهیم داشت:

$$V_R = \frac{RV_m}{Z(\omega)}\sin(\omega t + \phi) \qquad (۲۰)$$

بنا براین هم دامنهٔ موج ورودی به کانال Y تغییر یافته $(v_m \rightarrow \frac{RV_m}{Z(\omega)})$ و هم فـاز آن نسبت به موج ورودی به کانال X دارای اختلاف فاز ϕ گشته‌است. حال می‌توان هر مقدار دلخواه ϕ را با انتخاب مناسب مقادیر R، L و C به دست آورد. البتـه بـرای بـه دست آوردن ϕ دلخـواه حتـی مـی‌تـوانیم خودالقـا را نیـز از مـدار حـذف کنـیم. در آن صورت $\phi = tg^{-1}\frac{1}{RC\omega}$. بنابراین با کمک یک رئوستا (دارای مقاومت قابـل تغییـر R) می‌توان هر مقدار دلخواه ϕ را تولید نمود.