



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پایان نامه کارشناسی ارشد

گرایش ادوات میکرو- نانو الکترونیک

عنوان

الکترو دینامیک کوانتومی کاواک در رژیم تزویج بسیار قوی

نگارش: عباس عرب

استاد راهنما: سینا خراسانی

تیرماه ۱۳۹۰

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم بہ

پدر، مادر، مریم و نشاط عزیزم

مشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم که از زحمات استاد گران قدر و ارزنده‌ی خود، جناب آقای دکتر سینا

خراسانی، که برای بار اول بنده را با دنیای بدیع و شگفت‌انگیز فنریک کوآتوم آشنا کرده و با

دل‌سوزی‌ها و راه‌نمایی‌های مداوم خود سهم بسزایی در به‌ثمر رساندن این پایان‌نامه ایفا کرده‌اند،

کمال مشکر و قدردانی را داشته باشم.

اساتید هیات داوران:

دکتر سینا خراسانی

امضاء.....

دکتر بیژن رشیدیان

امضاء.....

دکتر رحیم فائز

امضاء.....

دکتر سعید محمدی

امضاء.....

چکیده:

این پایان‌نامه به بررسی الکترودینامیک کوانتومی کاواک در سه رژیم تزویج ضعیف، تزویج قوی و تزویج بسیار قوی می‌پردازد.

در راستای انجام این پایان‌نامه برنامه‌ای به زبان MATLAB نوشته شده است که قادر به تحلیل هرگونه سیستم الکترودینامیک کوانتومی کاواک می‌باشد. این برنامه اطلاعات مورد نیاز خود که شامل تعداد نقطه‌های کوانتومی، تعداد تراز انرژی نقاط کوانتومی، انرژی هر سطح از سطوح انرژی، تعداد مد کاواک، انرژی هر مد کاواک، ثابت تزویج، شدت دو قطبی تولید شده توسط هر گذار ممکن توسط نقطه‌ی کوانتومی و شرایط اولیه‌ی سیستم می‌شود را از کاربر دریافت کرده و به حل معادلات شرودینگر برای عمل‌گرهای نابودی فوتونی و گذار اتمی پرداخته و همچنین ضرایب تمامی کت‌ها را به دست می‌آورد. شایان ذکر است که در این برنامه از هیچ‌گونه تقریبی استفاده نشده است و حل از لحاظ ریاضی دقیق می‌باشد.

در فصل اول مروری مختصر بر تاریخچه‌ی سیستم‌های الکترودینامیک کوانتومی کاواک و کاربردهای این سیستم‌ها داشته‌ایم. سپس در فصل دوم به مرور الگوریتم به کار رفته در برنامه‌ی MATLAB پرداخته و الگوی داده‌های ورودی را به بحث می‌گذاریم. در فصل سوم با نمادگذاری رایج در این پایان‌نامه آشنا شده و روند استخراج روابط معادله‌ی شرودینگر برای عملگرهای نابودی فوتونی و گذار اتمی را دنبال می‌کنیم. در نهایت، در فصل چهارم برنامه را برای یک سیستم خاص اجرا نموده و نتایج پارامترهای مختلف را در سه رژیم تزویج ضعیف، قوی و بسیار قوی رسم می‌کنیم.

کلمات کلیدی: الکترودینامیک کوانتومی کاواک، رژیم تزویج ضعیف، رژیم تزویج قوی، رژیم تزویج بسیار قوی، ثابت تزویج، نقطه‌ی کوانتومی، هم‌نوایی، عمل‌گر نابودی فوتونی، عمل‌گر گذار اتمی، معادله‌ی شرودینگر، هامیلتونی جینس-کامینگز-پاول، تقریب موج چرخنده

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه.....	۱
فصل دوم: مبنای نظری.....	۶
۱-۲- هامیلتونی جینس-کامینگز-پاول.....	۷
۲-۲ آشنایی با نمادگذاری رایج در این پایان‌نامه.....	۱۲
۳-۲ معادله‌ی شرودینگر برای عمل‌گر نابودی فوتونی.....	۱۸
۴-۲ معادله‌ی شرودینگر برای عمل‌گر نردبانی اتمی.....	۲۶
فصل سوم: الگوریتم برنامه‌ی MATLAB و فرمت فایل ورودی.....	۴۰
۱-۳- ورودی‌های برنامه و فرمت فایل متنی.....	۴۱
۲-۳- الگوریتم مورد استفاده در برنامه.....	۴۶
فصل چهارم: نتایج عددی و بحث.....	۵۳
۱-۴- رژیم تزویج ضعیف.....	۵۴
۲-۴- رژیم تزویج قوی.....	۶۶

۳-۴- رژیٲ تزویج بسیار قوی..... ۷۷

فصل پنجم: جمع بندی..... ۸۷

پیوست الف: کد برنامه ی **MATLAB**..... ۸۹

مراجع..... ۱۰۲

فهرست اشکال

- شکل ۳-۱ الگوی فایل ورودی..... ۴۵
- شکل ۴-۱- احتمال حالات مختلف در رژیم تزویج ضعیف..... ۵۵
- شکل ۴-۲ میزان تأثیر جمله‌ی $\sigma^\dagger a^\dagger$ بر سیستم در رژیم تزویج ضعیف..... ۵۶
- شکل ۴-۳ تغییرات هم‌نوایی در رژیم تزویج ضعیف بر حسب زمان..... ۵۷
- شکل ۴-۴ منحنی هم‌نوایی در رژیم تزویج ضعیف از نمایی نزدیک‌تر..... ۵۹
- شکل ۴-۵ احتمال حضور در حالت پایه و برانگیخته در رژیم تزویج ضعیف برای الف) $\Delta\phi = 0$ (ب)
- ۶۰ $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ (ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$
- شکل ۴-۶ اندازه مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج ضعیف..... ۶۱
- شکل ۴-۷ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج ضعیف..... ۶۲
- شکل ۴-۸ قدر مطلق مقدار چشم‌داشتی برای عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج ضعیف برای الف)
- ۶۳ $\Delta\phi = 0$ (ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و (ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$
- شکل ۴-۹ منحنی فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج ضعیف..... ۶۴
- شکل ۴-۱۰ پارامتر هم‌نوایی در رژیم تزویج ضعیف برای الف) $\Delta\phi = 0$ (ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و
- ۶۵ $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ (ج)

شکل ۴-۱۱ مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر $\hat{\sigma}_z$ در رژیم تزویج ضعیف برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و

ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ ۶۷

شکل ۴-۱۲ احتمال حالات مختلف در رژیم تزویج قوی ۶۸

شکل ۴-۱۳ تغییرات هم‌نوایی بر حسب زمان در رژیم تزویج قوی ۷۰

شکل ۴-۱۴ احتمال حضور در حالت پایه و برانگیخته در رژیم تزویج قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ب)

ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ ۷۱

شکل ۴-۱۵ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج قوی ۷۱

شکل ۴-۱۶ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج قوی ۷۲

شکل ۴-۱۷ قدر مطلق مقدار چشم‌داشتی برای عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج قوی برای الف)

ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ ۷۳

شکل ۴-۱۸ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج قوی ۷۴

شکل ۴-۱۹ میزان انحراف منحنی فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی از نمودار خطی در رژیم تزویج

قوی ۷۵

شکل ۴-۲۰ پارامتر هم‌نوایی در رژیم تزویج قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ ۷۶

شکل ۴-۲۱ مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر $\hat{\sigma}_z$ در رژیم تزویج قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و

ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ ۷۸

شکل ۴-۲۲ احتمال حالات مختلف در رژیم تزویج بسیار قوی ۷۸

شکل ۴-۲۳ تغییرات هم‌نوایی بر حسب زمان در رژیم تزویج بسیار قوی ۸۰

شکل ۴-۲۴ احتمال حضور در حالت پایه و برانگیخته در رژیم تزویج بسیار قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ب)

۸۱ $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ (ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$

شکل ۴-۲۵ تغییرات مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج بسیار قوی ۸۱

شکل ۴-۲۶ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج بسیار قوی ۸۲

شکل ۴-۲۷ قدر مطلق مقدار چشم‌داشتی برای عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج بسیار قوی برای الف)

۸۳ $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ (ج) و $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ ب) ، $\Delta\phi = 0$

شکل ۴-۲۸ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج بسیار قوی ۸۴

شکل ۴-۲۹ اعوجاج‌های موجود در منحنی فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی از نمایی نزدیک‌تر در

رژیم تزویج بسیار قوی ۸۵

شکل ۴-۳۰ پارامتر هم‌نوایی در رژیم تزویج بسیار قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi =$

۸۶ $\frac{\pi}{2}$

شکل ۴-۳۱ مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر $\hat{\sigma}_z$ در رژیم تزویج بسیار قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$

۸۶ $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ (ج) و

فصل اول: مقدمه

توصیف مکانیک کوانتومی از برهم‌کنش^۱ بین یک اتم دوترازه و یک کاواک تک‌مد^۲، اولین بار توسط جینس^۳ و کامینگز^۴ در سال ۱۹۶۳ [۱] و به طور مستقل توسط پاول^۵ [۲] مورد تحلیل قرار گرفته است. روش تحلیل آن‌ها که به هامیلتونی جینس - کامینگز - پاول مشهور است، تحت تقریب موج چرخنده^۶ [۱-۳] به صورت کاملاً دقیق قابل حل است. زمینه‌ای از علم اپتیک کوانتومی که به مطالعه برهم‌کنش بین ساطع‌کننده‌ی نور کوانتومی^۷ و مدهای کاواک می‌پردازد، امروزه به عنوان الکترو‌دینامیک کوانتومی کاواک^۸ نیز شناخته می‌شود [۴]. یک سیستم ساده‌ی الکترو‌دینامیک کوانتومی کاواک که از یک ساطع‌کننده‌ی نور کوانتومی دو ترازه و یک کاواک تک‌مد تشکیل شده است، همواره در فضای کت^۹‌هایی مورد تحلیل قرار می‌گیرد که از ضرب خارجی کت‌های میدان بوزونی^{۱۰} و اتم تعریف می‌شود.

¹ Interaction

² Single-mode Cavity

³ Jaynes

⁴ Cummings

⁵ Paul

⁶ Rotating Wave Approximation (RWA)

⁷ Quantum Light Emitter

⁸ Cavity Quantum Electro-Dynamics (CQED)

⁹ Ket

¹⁰ Bosonic Field

هر سیستم الکتروپدینامیک کوانتومی کاواک دارای یک مؤلفه به نام ثابت تزویج^۱ است که بیانگر شدت برهم‌کنش بین اجزای مختلف آن سیستم است. به طور عام سیستم‌های الکتروپدینامیک کوانتومی کاواک را می‌توان به دو دسته متفاوت تقسیم نمود: رژیم تزویج قوی^۲ و رژیم تزویج ضعیف^۳. مدهای تابنده‌ی نور کوانتومی و کاواک در رژیم تزویج ضعیف می‌توانند در تشدید با یکدیگر قرار بگیرند که منجر به افزایش ناگهانی نرخ تابش خود به خودی^۴ می‌شود. رژیم تزویج ضعیف در زمینه‌هایی مانند لیزرهای گسیل کننده‌ی سطحی با کاواک عمودی^۵ [۵] و دیودهای گسیل کننده‌ی نور^۶ [۶] و همچنین تولید فوری فوتون‌های درهم تنیده^۷ [۷-۸] کاربرد دارد.

چنانچه ثابت تزویج بین ساطع کننده‌ی نور کوانتومی و مدهای کاواک از نرخ تنزل^۸ آن‌ها بیشتر شود، وارد محدوده‌ی رژیم تزویج قوی می‌شویم. تحت این شرایط ویژه حالت‌های^۹ انرژی ساطع کننده‌ی نور کوانتومی و مد کاواک تبهگن^{۱۰} نبوده و با یکدیگر ترکیب شده و تشکیل ویژه حالت‌های جدید می‌دهند [۹-۱۱]. اگر ساطع کننده‌ی نور کوانتومی توسط یک نقطه‌ی کوانتومی^{۱۱} و یا چاه کوانتومی^{۱۲} جایگزین شود، ویژه انرژی‌های جدید، مثال‌های خوبی از اکسیتون-پلاریتون^{۱۳} می‌باشند. این ویژه حالت‌های جدید توسط فرکانس رابی^۱ که متناسب با ثابت تزویج است، از یکدیگر جدا می‌شوند [۹،۱۱].

¹ Coupling Constant

² Strong Coupling Regime (SCR)

³ Weak Coupling Regime

⁴ Spontaneous Emission Rate

⁵ Vertical Cavity Surface Emitting Laser (VCSEL)

⁶ Light Emitting Diode (LED)

⁷ On-Demand Entangled Photon production

⁸ Decay Rate

⁹ Eigen-State

¹⁰ Degenerate

¹¹ Quantum Dot

¹² Quantum Well

¹³ Exciton-Polariton

علاوه بر موارد ذکر شده، رژیم تزویج قوی بستری مناسب برای پردازش اطلاعات کوانتومی^۲ در ادوات حالت جامد^۳ فراهم می‌کند [۱۲]. مشخصه‌ی مهم دیگر این رژیم آن است که مدهای کاواک و ساطع‌کننده‌ی نور کوانتومی هیچ‌گاه در تشدید با یکدیگر قرار نخواهند گرفت. این پدیده که از آن به عنوان رفتار ضد گذر^۴ یاد می‌شود، باعث ایجاد خاصیت خوشه‌نشستگی^۵ می‌شود که در طراحی و پیاده‌سازی گسیل‌کننده‌های تک فوتون^۶ [۱۳-۱۴]، رمزنگاری کوانتومی^۷ [۱۵]، محاسبات کوانتومی^۸ [۱۰، ۱۶] و تکرار کننده‌های کوانتومی^۹ [۱۷] مفید واقع می‌شود.

توانایی ساخت کاواک‌هایی با ضریب کیفیت بالا این امکان را برای ما فراهم کرده است که رژیم تزویج قوی را در عمل مورد مطالعه قرار دهیم. رژیم تزویج قوی برای اولین بار بین یک اتم و کاواک نوری به دست آمد [۱۸]. سیستم معادل در حالت جامد از یک میکروکاواک نیمه‌هادی و یک نقطه‌ی کوانتومی نیمه‌هادی تشکیل می‌شود. گروه‌های مختلفی به صورت مستقل رژیم تزویج قوی را با کاواک‌های میکروستون^{۱۰} [۱۹]، میکروکاواک‌های بلور فوتونی^{۱۱} [۲۰، ۲۱] و کاواک‌های میکروصفحه^{۱۲} [۲۲] مشاهده کرده‌اند

¹ Rabbi Frequency

² Quantum Information

³ Solid State Devices

⁴ Anti-Crossing Behavior

⁵ Anti-Bunching

⁶ Single-Photon Emitters

⁷ Quantum Cryptography

⁸ Quantum Computation

⁹ Quantum Repeaters

¹⁰ Micro-Pillar

¹¹ Photonic Crystal Microcavities

¹² Micro-Disk

فاصله‌ی فرکانسی بین فرکانس‌های گذار ساطع‌کننده‌ی نور کوانتومی و مد کاواک با روش‌های مختلفی دچار تغییر می‌شود. تغییر دمای شبکه [۲۳، ۲۰، ۱۹]، جذب سطحی گازهای خنثی در دمای پایین [۲۵، ۲۴] و هم‌چنین کنترل الکتریکی [۲۷، ۲۶] مثالی چند از این روش‌ها هستند.

حل هامیلتونی جینس-کامینگز-پاول در دو حالت تشدید و غیر تشدید که در آن‌ها به ترتیب فرکانس‌های اتمی و مدکاواک با یکدیگر مساوی و نامساوی هستند، قابل حل است [۴، ۳]. در مقاله‌ای که اخیراً به چاپ رسیده است، راه حلی کاملاً ریاضی برای کلی‌ترین حالت یک سیستم الکترودینامیک کوانتومی کاواک که از تعداد دلخواهی ساطع‌کننده‌ی نور کوانتومی که در تزویج با میدان الکترومغناطیسی چند مده هستند، ارائه شده است [۲۸]. این روش در حیطه‌ی اعتبار تقریب موج چرخنده است. بردن سیستم به فضای هایزنبرگ برای حل هامیلتونی جینز-کامینگز-پل متداول است. در فضای هایزنبرگ عملگرهای خلق و نابودی فوتونی رفتاری کاملاً سینوسی دارند.

در این پایان‌نامه نشان داده شده است که اگر ثابت تزویج به قدری رشد پیدا کند که با فرکانس‌های گذار قابل مقایسه شود، تابعیت زمانی عمل‌گرهای میدان دیگر رفتاری سینوسی نخواهند داشت. این پدیده در نتیجه‌ی این واقعیت است که انتقال تصویر برهم‌کنش به فضای هایزنبرگ نیازمند آن است که تابعیت زمانی عمل‌گرهای میدان جایگزین شوند. در جایگزینی تابعیت زمانی این عمل‌گرها از فرم گردش آزاد^۱ آن‌ها که تابعیت سینوسی دارد استفاده می‌شود. همانطور که بعداً نشان داده خواهد شد، صرف‌نظر از اعتبار و یا عدم اعتبار تقریب موج چرخنده، اگر ثابت تزویج به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، تابعیت زمانی عملگرهای میدان سینوسی نخواهد بود.

¹ Free Running

پیکربندی استاندارد ساختارهای ریز-نوری^۱ به ثابت تزویج‌هایی به بزرگی ۴۰۰ میکرو الکترون ولت دست یافته‌اند [۲۹] که هنوز فاصله‌ی زیادی با فرکانس‌های نوری دارند. ثابت‌های تزویج بسیار بزرگ در میکروکاوک‌های نیمه‌هادی^۲ [۳۰-۳۵]، گاز دو بعدی مغناطیسی الکترونی^۳ [۳۶] و مدارهای برودتی الکترو دینامیک کوانتومی^۴ [۳۷] پیش‌بینی و مشاهده شده‌اند. این رژیم را رژیم تزویج بسیار قوی^۵ نام نهاده‌ایم. در استخراج روابط در این پایان‌نامه از تقریب موج چرخنده به طور کلی صرف‌نظر شده است.

¹ Nano-Optical

² Semiconductor Micro Cavity

³ Two-Dimensional magnetic Electron Gas

⁴ Cryogenic Circuit Quantum electro-Dynamics

⁵ Ultra-Strong Coupling Regime

فصل دوم: مبنای نظری

در این بخش از پایان‌نامه، ابتدا به معرفی هامیلتونی جینس-کامینگس-پاول می‌پردازیم و شرایطی که در آن این هامیلتونی منجر به جواب دقیق نمی‌شود را ذکر می‌کنیم. سپس در ادامه به معرفی نمادگذاری^۱ که در این پایان‌نامه رعایت شده می‌پردازیم که خواننده بتواند به راحتی فرمول‌بندی معادله شرودینگر^۲ را که در قسمت بعد آورده می‌شود را دنبال کند. در نهایت، معادله‌ی شرودینگر برای عمل‌گر نابودی فوتون^۳ (معادله‌ی ۱-۲) و همچنین عمل‌گر نردبانی اتمی^۴ (معادله‌ی ۲-۲) به دست آورده شده است. شایان ذکر است که در به دست آوردن این فرمول‌بندی از هیچ‌گونه ساده‌سازی استفاده نشده و مساله در کلی‌ترین حالت ممکن حل شده است.

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi(t) | \hat{a}_{v'} | \varphi(t) \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \varphi(t) | [\hat{a}_{v'}, \hat{\mathbb{H}}] | \varphi(t) \rangle \quad (1-2)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{s,k}^l | \varphi(t) \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \varphi(t) | [\hat{\sigma}_{s,k}^l, \hat{\mathbb{H}}] | \varphi(t) \rangle \quad (2-2)$$

¹ notation

² Schrödinger's equation

³ annihilation operator

⁴ atomic ladder operator

۱-۲- هامیلتونی جینس-کامینگس-پاول

هامیلتونی جینس-کامینگس-پاول، که به تفصیل در تمامی کتاب‌های اپتیک کوانتومی آورده شده است، در سال ۱۹۶۳ توسط جینس و کامینگس [۱] و به طور هم‌زمان و مستقل توسط پاول [۲] ابداع شد. این هامیلتونی به بررسی برهم‌کنش بین یک اتم دو ترازه و یک کاواک تک‌مد^۱ می‌پردازد. اگرچه کاواک تک‌مد در عمل و به صورت ایده‌آل وجود ندارد، اما در سال‌های اخیر با ساختن کاواکهایی که دارای یک مد می‌باشند و یا دارای چندین مد با اختلاف بسامد زیاد هستند، شرایط برای مطالعه‌ی برهم‌کنش ماده با یک مد کاواک فراهم شده است. در ادامه روند به دست آمدن این هامیلتونی را دنبال می‌کنیم.

برای این منظور، در نظر می‌گیریم که یک اتم دارای دو تراز $|e\rangle$ و $|g\rangle$ که به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تراز برانگیخته^۲ و تراز پایه^۳ است، می‌باشد. این اتم با یک میدان الکترومغناطیسی تک مد که دارای فرم (۲-۳) می‌باشد در برهم‌کنش است.

$$\hat{E} = \hat{e} \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz) \quad (۲-۳)$$

در رابطه‌ی فوق، \hat{e} بردار یکه‌ی قطبیدگی دلخواه است، همچنین \hat{a} و \hat{a}^\dagger به ترتیب عمل‌گرهای نابودی و خلق فوتون^۴ می‌باشند. حال می‌توان هامیلتونی برهم‌کنش را به فرم (۲-۴) نوشت،

$$\hat{H}^{(I)} = -\hat{d} \cdot \hat{E}$$

¹ single-mode cavity

² excited state

³ ground state

⁴ creation operator

$$= \hat{d}g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (4-2)$$

که در آن،

$$g = \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}} \sin kz \quad (5-2)$$

در این مرحله می‌توان به معرفی عمل‌گرهای گذار اتمی پرداخت،

$$\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e| \quad (6-2)$$

$$\hat{\sigma}^\dagger = |e\rangle\langle g| \quad (7-2)$$

و همچنین عمل‌گر بازتاب که به فرم زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\sigma}_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \quad (8-2)$$

سه عمل‌گری که در بالا معرفی شدند از جبر اسپین پاولی^۱ تبعیت می‌کنند، بدین مفهوم که

$$[\hat{\sigma}^\dagger, \hat{\sigma}] = \hat{\sigma}_3 \quad (9-2)$$

$$[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}^\dagger] = 2\hat{\sigma}^\dagger \quad (10-2)$$

$$[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}] = 2\hat{\sigma} \quad (11-2)$$

از آنجایی که فقط مؤلفه‌های قطر غیر اصلی عمل‌گر دوقطبی غیر صفر هستند، می‌توان این عمل‌گر را به

صورت زیر نوشت

¹ Pauli spin Algebra

$$\hat{d} = d|g\rangle\langle e| + d^*|e\rangle\langle g|$$

$$= d\hat{\sigma} + d^*\hat{\sigma}^\dagger = d(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}) \quad (12-2)$$

که در آن

$$d = \langle e|\hat{d}|g\rangle \quad (13-2)$$

رابطه‌ی (12-2) به شرطی برقرار است که d مقداری حقیقی فرض شده باشد. حال می‌توان هامیلتونی

برهم‌کنش را به صورت زیر نوشت

$$\hat{H}^{(I)} = \hbar\lambda(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (14-2)$$

که در آن

$$\lambda = \frac{dg}{\hbar} \quad (15-2)$$

اگر ترازهای اتم را به گونه‌ای در نظر بگیریم که به صورت متقارن در طرفین تراز انرژی صفر قرار بگیرند،

هامیلتونی آزاد اتمی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}(E_e - E_g)\hat{\sigma}_3 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 \quad (16-2)$$

که در آن

$$E_e = -E_g = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \quad (17-2)$$

و همچنین هامیلتونی میدان آزاد با صرف نظر از انرژی نقطه‌ی صفر به فرم زیر قابل نوشتن است

$$\hat{H}_F = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (۱۸-۲)$$

بنابر آنچه در سطور فوق آمد، می‌توان هامیلتونی کلی سیستم را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}^{(I)} \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (۱۹-۲)$$

می‌توان نشان داد که در حالت اتمی آزاد و همچنین حالت میدان آزاد بدون برهم‌کنش، تابعیت زمانی

عمل‌گرهای نردبانی اتمی و خلق و نابودی فوتونی به صورت زیر در می‌آید

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t} \quad (۲۰-۲)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{+i\omega t} \quad (۲۱-۲)$$

$$\hat{\sigma}^\dagger(t) = \hat{\sigma}^\dagger(0)e^{-i\omega_0 t} \quad (۲۲-۲)$$

$$\hat{\sigma}(t) = \hat{\sigma}(0)e^{+i\omega_0 t} \quad (۲۳-۲)$$

بنابراین تابعیت زمانی حاصل ضرب ترم‌های فوق که در هامیلتونی برهم‌کنش ظاهر شده بودند به قرار زیر است

$$\hat{\sigma}^\dagger\hat{a} \sim e^{i(\omega_0-\omega)t} \quad (۲۴-۲)$$

$$\hat{\sigma}\hat{a}^\dagger \sim e^{-i(\omega_0-\omega)t} \quad (۲۵-۲)$$

$$\hat{\sigma}^\dagger\hat{a}^\dagger \sim e^{i(\omega_0+\omega)t} \quad (۲۶-۲)$$

$$\hat{\sigma}\hat{a} \sim e^{-i(\omega_0+\omega)t} \quad (27-2)$$

اگر $\omega \approx \omega_0$ ، در عبارات فوق، دو عبارت آخر بسیار سریعتر از دو ترم اول تغییر می‌کنند و همچنین دو ترم آخر بر خلاف دو ترم اول، ظاهراً بقای انرژی را ارضا نمی‌کنند. دو عبارتی که ظاهراً بقای انرژی را ارضا نمی‌کنند عبارتند از $\hat{\sigma}\hat{a}$ که به مثابه‌ی انتقال اتم از تراز برانگیخته به تراز پایه و همزمان نابودی یک فوتون است و همچنین عبارت $\hat{\sigma}^\dagger\hat{a}^\dagger$ که به معنای انتقال اتم از تراز پایه به تراز برانگیخته و همزمان آفرینش یک فوتون است. در قریب به اتفاق منابع اپتیک کوانتومی از دو عبارت فوق صرف‌نظر شده است، یا به عبارتی از تقریب موج چرخنده^۱ استفاده شده است. در نتیجه هامیلتونی کل به صورت زیر در می‌آید که به هامیلتونی جینس-کامپنگس-پاول مشهور است.

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}^\dagger\hat{a} + \hat{\sigma}\hat{a}^\dagger) \quad (28-2)$$

تقریب موج چرخنده باعث می‌شود که این هامیلتونی، در مواردی که ثابت تزویج بین گذار اتمی و فرکانس تشدید کاواک، قابل مقایسه با فرکانس تشدید می‌شود، منجر به جواب‌های دقیق نشود. در این پایان‌نامه از تقریب موج چرخنده استفاده نشده است و معادله‌ی شرودینگر به صورت دقیق حل شده است و همچنین هیچ شرط محدود کننده‌ای بر روی معادله اعمال نگردیده و تعداد نقطه‌های کوانتومی^۲ و مدهای کاواک نامحدود در نظر گرفته شده است. اضافه بر موارد فوق هامیلتونی استفاده شده در این پایان‌نامه شامل هامیلتونی دو قطبی-

¹ Rotating Wave Approximation (RWA)

² Quantum Dot

دوقطبی^۱ نیز می‌باشد. نکات ذکر شده ما را به این نتیجه می‌رساند که جواب‌های به دست آمده در این پایان‌نامه دقیق‌ترین جواب ممکن است.

۲-۲ آشنایی با نمادگذاری رایج در این پایان‌نامه

در این قسمت سعی بر آن است که خواننده به اختصار با نمادگذاری رایج در این پایان‌نامه آشنا شود تا در دنبال کردن روند به دست آمدن معادلات شرودینگر دچار مشکل نشود. سیستمی که در این پایان‌نامه بررسی شده است، از تعداد نامحدودی نقطه‌ی کوانتومی که هر یک دارای تعداد نامحدودی تراز انرژی بوده و همچنین از کاواکی که دارای بی‌نهایت مد می‌باشد تشکیل شده است. بین هر نقطه‌ی کوانتومی و هر مد کاواک و همچنین بین هر جفت دلخواه نقطه‌ی کوانتومی، بر هم کنشی در نظر گرفته شده است. هامیلتونی که در سرتاسر این پایان‌نامه به منظور توصیف سیستم استفاده شده است به فرم زیر است

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{r.E} + \hat{H}_{r.r} \quad (29-2)$$

که در آن

$$\hat{H}_0 = \sum_{n,i} E_i^n \hat{\sigma}_i^n + \sum_{\nu} \hbar \Omega_{\nu} \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu} \quad (30-2)$$

$$\hat{H}_{r.E} = \sum_{n,i < j} (\gamma_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \gamma_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) \sum_{\nu} (g_{nij\nu} \hat{a}_{\nu} + g_{nij\nu}^* \hat{a}_{\nu}^{\dagger}) \quad (31-2)$$

¹ dipole-dipole Hamiltonian

$$\hat{\mathbb{H}}_{r,r} = \sum_{n < m, i < j} (\eta_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \eta_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) (\eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^m) \quad (32-2)$$

هامیلتونی $\hat{\mathbb{H}}_0$ توصیف گر سیستم در حالتی است که هیچ برهم کنشی در کار نباشد، هامیلتونی $\hat{\mathbb{H}}_{r,E}$ بیان گر برهم کنش موجود بین نقطه های کوانتومی و مدهای میدان مغناطیسی است و در نهایت هامیلتونی $\hat{\mathbb{H}}_{r,r}$ نشان گر برهم کنش موجود بین هر جفت دلخواه از نقطه های کوانتومی می باشد.

ضرایب γ_{nij} ، مولفه های عمل گر دوقطبی نقطه ای کوانتومی n ام هستند و ضرایب g_{nijv} ، نشان گر شدت تزویج بین نقطه ای کوانتومی n ام با مد مغناطیسی v ام است. هر دو این ضرایب به دو تراز انرژی i و j وابسته هستند که نقطه ای کوانتومی مورد نظر بین آنها دچار گذار میشود. همچنین ضرایب η_{nij} وابسته است به میزان شدت دو قطبی تولید شده، زمانی که نقطه ای کوانتومی n ام دچار گذار از تراز j ام به تراز i ام می شود.

عبارت E_i^n نشان گر انرژی تراز i ام از نقطه ای کوانتومی n ام است که باید شرط زیر را ارضا کند

$$a < b \Rightarrow E_a^n < E_b^n \quad (33-2)$$

و نیز عبارت Ω_v ، به منزله ای فرکانس مد v ام می باشد.

عمل گر $\hat{\sigma}_{i,j}^n$ ، که به معنی گذار نقطه کوانتومی n ام از تراز j ام به تراز i ام می باشد، به صورت زیر تعریف می شود

[28]

$$\hat{\sigma}_{i,j}^n = |n\rangle_i \langle n|_j \quad (34-2)$$

$$\hat{\sigma}_{i,j}^n |n\rangle_j = |n\rangle_i \quad (35-2)$$

همان‌گونه که نشان داده شد با اثر دادن عمل‌گر فوق بر روی نقطه‌ی کوانتومی n ام که در تراز n ام انرژی است این نقطه‌ی کوانتومی دچار گذار به تراز n ام انرژی می‌شود. با توجه به تعریف فوق می‌توان عمل‌گر $\hat{\sigma}_i^n$ را به صورت زیر تعریف کرد

$$\hat{\sigma}_i^n \triangleq \hat{\sigma}_{i,i}^n = |n\rangle \langle n|_i \quad (۳۶-۲)$$

روابط تعامد برای عمل‌گر گذار اتمی به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{k,i'}^n = \hat{\sigma}_{i,i'}^n \delta_{j,k} \quad (۳۷-۲)$$

$$\hat{\sigma}_f^s \hat{\sigma}_g^s = \delta_{f,g} \hat{\sigma}_f^s \quad (۳۸-۲)$$

$$\hat{\sigma}_{i,j}^n |n\rangle_k = |n\rangle_i \langle j|_k^n = |n\rangle_i \delta_{j,k} \quad (۳۹-۲)$$

$$\sum_f \hat{\sigma}_f^s = 1 \quad (۴۰-۲)$$

روابط تعامد که در بالا ذکر شد بدین معنی است که اگر چندین عمل‌گر گذار اتمی برای یک نقطه‌ی کوانتومی خاص، بر روی کت^۱ حالت آن نقطه‌ی کوانتومی اثر کند، حاصل تنها در صورتی صفر نیست که گذارهای مربوط به هر عمل‌گر به صورت سلسله‌وار به یکدیگر مرتبط باشد. به عبارت دیگر، تراز انرژی مقصد آخرین عمل‌گر از سمت راست، با تراز انرژی مبدا عمل‌گر سمت چپ خود برابر باشد.

عمل‌گرهای \hat{a}_ν^\dagger و \hat{a}_ν به ترتیب، عمل خلق و نابودی فوتون از مد ν ام کاواک را انجام می‌دهند. اگر کت $|f_\nu\rangle$ نشان‌دهنده‌ی مد ν ام کاواک که f_ν فوتون را داراست، باشد می‌توان روابط زیر را نوشت

^۱ Ket

$$\hat{a}_v^\dagger |f_v\rangle = \sqrt{f_v + 1} |f_v + 1\rangle \quad (41-2)$$

$$\hat{a}_v |f_v\rangle = \sqrt{f_v} |f_v - 1\rangle \quad (42-2)$$

توجه فرمایید که عملگر فوق الذکر تنها بر روی کت مد v اثر دارد و هیچ تغییری در کت‌های سایر مدها ایجاد نمی‌کند.

حال به معرفی کت حالت سیستم می‌پردازیم، می‌توان حالت سیستم را به صورت زیر توصیف کرد [۲]

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{\mathcal{A}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}\rangle |\mathcal{F}\rangle \quad (43-2)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌فرمایید، کت حالت سیستم از ضرب خارجی کت‌های $|\mathcal{A}\rangle$ و $|\mathcal{F}\rangle$ تشکیل شده است که به ترتیب نشان دهنده‌ی حالت سیستم متشکل از تمامی نقطه‌های کوانتومی و تمامی مدهای کاواک می‌باشد. اگر \mathcal{A} و \mathcal{F} را به صورت برداری در نظر بگیریم می‌توان روابط زیر را تعریف کرد

$$\mathcal{A} = [r_i]_{1 \times k} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_k] \quad (44-2)$$

$$\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{n-1} \ i \ r_{n+1} \ \dots \ r_k] \quad (45-2)$$

$$\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow j} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{n-1} \ i \ r_{n+1} \ \dots \ r_{m-1} \ j \ r_{m+1} \ \dots \ r_k] \quad (46-2)$$

کت $|\mathcal{A}\rangle$ خود، از ضرب بی‌نهایت کت که هر کدام نشان دهنده‌ی حالت یک نقطه‌ی کوانتومی خاص است،

تشکیل شده است را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$|\mathcal{A}\rangle = \bigotimes_{n=1}^k |r_n\rangle = |r_1\rangle |r_2\rangle \dots |r_k\rangle \quad (47-2)$$

که در آن کت $|r_i^i\rangle$ ، نشان دهنده‌ی این است که نقطه‌ی کوانتومی λ_m در تراز انرژی r_i^i قرار دارد. \mathcal{F} را نیز می‌توان به صورت مشابه تعریف کرد

$$\mathcal{F} = [f_i]_{1 \times \omega} = [f_1 f_2 \dots f_\omega] \quad (48-2)$$

$$\mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_{v+1}} = [f_1 f_2 \dots f_{v-1} f_v + 1 f_{v+1} \dots f_\omega] \quad (49-2)$$

$$|\mathcal{F}\rangle = \bigotimes_{v=1}^{\omega} |f_v\rangle = |f_1\rangle |f_2\rangle \dots |f_\omega\rangle \quad (50-2)$$

کت $|\mathcal{F}\rangle$ نیز خود از ضرب بی‌نهایت کت که هر یک نشان‌دهنده‌ی حالت یک مد خاص از کاواک هستند، تشکیل شده است. به عنوان مثال کت $|f_i\rangle$ به این مفهوم است که تعداد f_i فوتون در مد λ_m کاواک موجود است. همچنین روابط زیر را می‌توان تعریف کرد

$$\sum_{\mathcal{A}, \mathcal{F}}(\cdot) = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_k, f_1, f_2, \dots, f_\omega}(\cdot) \quad (51-2)$$

$$\sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}}(\cdot) = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_{n+1}, \dots, r_k, f_1, f_2, \dots, f_\omega}(\cdot) \quad (52-2)$$

$$\sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m\}, \mathcal{F}}(\cdot) = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_{n+1}, \dots, r_{m-1}, r_{m+1}, \dots, r_k, f_1, f_2, \dots, f_\omega}(\cdot) \quad (53-2)$$

در این مرحله قصد داریم اثر چهار عمل‌گر نردبانی اتمی و خلق و نابودی فوتونی را بر روی کت حالت سیستم مشاهده کنیم.

به معنی گذار نقطه‌ی کوانتومی λ_m از تراز k ام به تراز s ام می‌باشد به همین دلیل این عمل‌گر تنها بر ترکیبی از کت‌ها اثر دارد که در آن نقطه‌ی کوانتومی λ_m در تراز k ام باشد و پس از تاثیر عمل‌گر، ترکیب کت‌ها به گونه‌ای خواهد بود که نقطه‌ی کوانتومی λ_m در تراز s ام باشد. بنابراین رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\hat{\sigma}_{s,k}^l |\varphi(t)\rangle = \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \quad (54-2)$$

با استدلال مشابه، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$(\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger |\varphi(t)\rangle = \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}\rangle |\mathcal{F}\rangle \quad (55-2)$$

عمل‌گرهای خلق و نابودی فوتونی تنها بر روی تعداد فوتونهای موجود در مدی که عمل‌گر، مختص آن است اثر می‌گذارد. با توجه به نکات ذکر شده، عمل‌گرهای خلق و نابودی فوتونی به صورت زیر بر روی کت حالت اثر می‌گذارند.

$$\hat{a}_v^\dagger |\varphi(t)\rangle = \sqrt{f_v + 1} \sum_{\mathcal{A}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) |\mathcal{A}\rangle |\mathcal{F}\rangle \quad (56-2)$$

$$\hat{a}_v |\varphi(t)\rangle = \sqrt{f_v} \sum_{\mathcal{A}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) |\mathcal{A}\rangle |\mathcal{F}\rangle \quad (57-2)$$

باید توجه داشت که در روابط فوق نباید گمان کرد که پس از تاثیر عمل‌گرها کت $|\mathcal{F}\rangle$ دچار تغییر نشده است، در واقع پس از تاثیر عمل‌گر، تغییر کت $|\mathcal{F}\rangle$ در ضریب آن منعکس شده است.

به عنوان آخرین قدم در آشنایی با نمادگذاری در این پایان‌نامه، ضرب داخلی برای $|\varphi(t)\rangle$ در روابط 54-2 تا 57-2 را بررسی می‌کنیم.

$$\langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{s,k}^l |\varphi(t)\rangle = \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}, \mathcal{F}) \quad (58-2)$$

$$\langle \varphi(t) | (\hat{\sigma}_{s,k}^l)^\dagger |\varphi(t)\rangle = \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \quad (59-2)$$

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v^\dagger |\varphi(t)\rangle = \sqrt{f_v + 1} \sum_{\mathcal{A}, \mathcal{F}} \Phi^*(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \quad (60-2)$$

¹ Bra

$$\langle \varphi(t) | \hat{a}_v | \varphi(t) \rangle = \sqrt{f_v} \sum_{\mathcal{A}, \mathcal{F}} \Phi^*(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \quad (61-2)$$

با مقدمه‌ای که ذکر شد، خواننده آمادگی لازم برای دنبال کردن فرمول‌های قسمت بعد را به دست آورده است.

۳-۲ معادله‌ی شرودینگر برای عملگر نابودی فوتونی

در این قسمت، سعی بر این است که طرفین معادله‌ی زیر را به دست آوریم

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi(t) | \hat{a}_{v'} | \varphi(t) \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \varphi(t) | [\hat{a}_{v'}, \mathbb{H}] | \varphi(t) \rangle \quad (62-2)$$

که در آن

$$[\hat{a}_{v'}, \mathbb{H}] = \hat{a}_{v'} \mathbb{H}_0 + \hat{a}_{v'} \mathbb{H}_{r,E} + \hat{a}_{v'} \mathbb{H}_{r,r} - \mathbb{H}_0 \hat{a}_{v'} - \mathbb{H}_{r,E} \hat{a}_{v'} - \mathbb{H}_{r,r} \hat{a}_{v'} \quad (63-2)$$

در ادامه تک تک ترم‌های فوق را بر روی کت سیستم اثر می‌دهیم. همان‌گونه که می‌دانید، در مکانیک کوانتومی ترتیب اثر دادن عملگرها بر روی کت سیستم اهمیت دارد. به همین دلیل $\hat{a}_{v'} \mathbb{H}_0$ و $\mathbb{H}_0 \hat{a}_{v'}$ تاثیر یکسانی بر روی کت سیستم ندارند. بنابراین ما ناچاریم هر دو ترم را بر روی کت اثر دهیم و حاصل را از یکدیگر کم کنیم.

$$\begin{aligned} \hat{a}_{v'} \mathbb{H}_0 | \varphi(t) \rangle &= \hat{a}_{v'} \left\{ \sum_{n,i} E_i^n \hat{\sigma}_i^n + \sum_v \hbar \Omega_v \hat{a}_v^\dagger \hat{a}_v \right\} | \varphi(t) \rangle \\ &= \left(\sum_{n,i} \hat{a}_{v'} E_i^n \hat{\sigma}_i^n + \sum_{v \neq v'} \hat{a}_{v'} \hbar \Omega_v \hat{a}_v^\dagger \hat{a}_v + \hat{a}_{v'} \hbar \Omega_{v'} \hat{a}_{v'}^\dagger \hat{a}_{v'} \right) | \varphi(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n,i} E_i^n \sum_{\mathcal{A},\mathcal{F}} \sqrt{f_{v'}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'-1}}) |\mathcal{A}\rangle |\mathcal{F}\rangle \\
&+ \sum_{v \neq v'} \hbar \Omega_v f_v \sqrt{f_{v'}} \sum_{\mathcal{A},\mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'-1}}) |\mathcal{A}\rangle |\mathcal{F}\rangle \\
&+ \hbar \Omega_{v'} f_{v'} \sqrt{f_{v'}} \sum_{\mathcal{A},\mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'-1}}) |\mathcal{A}\rangle |\mathcal{F}\rangle
\end{aligned} \tag{64-2}$$

و با همین روند، داریم

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_0 \hat{a}_{v'} |\varphi(t)\rangle &= \left\{ \sum_{n,i} E_i^n \hat{\sigma}_i^n + \sum_v \hbar \Omega_v \hat{a}_v^\dagger \hat{a}_v \right\} \hat{a}_{v'} |\varphi(t)\rangle \\
&= \sum_{n,i} E_i^n \sum_{\mathcal{A},\mathcal{F}} \sqrt{f_{v'}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'-1}}) |\mathcal{A}\rangle |\mathcal{F}\rangle \\
&+ \sum_{v \neq v'} \hbar \Omega_v f_v \sqrt{f_{v'}} \sum_{\mathcal{A},\mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'-1}}) |\mathcal{A}\rangle |\mathcal{F}\rangle \\
&+ \hbar \Omega_{v'} (f_{v'} - 1) \sqrt{f_{v'}} \sum_{\mathcal{A},\mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'-1}}) |\mathcal{A}\rangle |\mathcal{F}\rangle
\end{aligned} \tag{65-2}$$

با تفریق رابطه‌ی (64-2) از (65-2)، داریم

$$(\hat{a}_{v'} \mathbb{H}_0 - \mathbb{H}_0 \hat{a}_{v'}) |\varphi(t)\rangle = \hbar \Omega_{v'} \sqrt{f_{v'}} \sum_{\mathcal{A},\mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'-1}}) |\mathcal{A}\rangle |\mathcal{F}\rangle \tag{66-2}$$

حال دو ترم $\hat{a}_{v'} \mathbb{H}_{r.E}$ و $\mathbb{H}_{r.E} \hat{a}_{v'}$ را بر روی کت سیستم اثر می‌دهیم. در عبارات زیر، روابط برای حالتی که v

با v' برابر است، جدا نوشته شده است. به این دلیل که دو عمل‌گر $\hat{a}_{v'}$ و \hat{a}_v^\dagger جابه‌جا می‌شوند، در حالی که دو

عمل‌گر $\hat{a}_{v'}$ و $\hat{a}_{v'}^\dagger$ نمی‌توانند جابه‌جا شوند.

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{v'} \mathbb{H}_{r,E} |\varphi(t)\rangle &= a_{v'} \left\{ \sum_{n,i < j} (\gamma_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \gamma_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) \sum_v (g_{nijv} \hat{a}_v + g_{nijv}^* \hat{a}_v^\dagger) \right\} |\varphi(t)\rangle \\
&= \sum_{n,i < j} \sum_{v \neq v'} (\gamma_{nij} g_{nijv} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_{v'} \hat{a}_v + \gamma_{nij} g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_{v'} \hat{a}_v^\dagger) |\varphi(t)\rangle \\
&\quad + \sum_{n,i < j} (\gamma_{nij} g_{nijv'} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_{v'} \hat{a}_{v'} + \gamma_{nij} g_{nijv'}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_{v'} \hat{a}_{v'}^\dagger) |\varphi(t)\rangle \\
&\quad + \sum_{n,i < j} \sum_{v \neq v'} (\gamma_{nij}^* g_{nijv} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_{v'} \hat{a}_v + \gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_{v'} \hat{a}_v^\dagger) |\varphi(t)\rangle \\
&\quad + \sum_{n,i < j} (\gamma_{nij}^* g_{nijv'} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_{v'} \hat{a}_{v'} + \gamma_{nij}^* g_{nijv'}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_{v'} \hat{a}_{v'}^\dagger) |\varphi(t)\rangle
\end{aligned}$$

(۶۷-۲)

با اثر دادن عبارات فوق بر روی کت حالت، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{v'} \mathbb{H}_{r,E} |\varphi(t)\rangle &= \sum_{n,i < j} \sum_{v \neq v'} \left[\gamma_{nij} g_{nijv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1, f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_v} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{nij} g_{nijv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1, f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_v+1} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right] \\
&\quad + \sum_{n,i < j} \left[\gamma_{nij} g_{nijv'} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'}-2}) \sqrt{f_{v'}-1} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{nij} g_{nijv'}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}, \mathcal{F})(f_{v'}+1) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right] \\
&\quad + \sum_{n,i < j} \sum_{v \neq v'} \left[\gamma_{nij}^* g_{nijv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1, f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_v} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1, f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_v+1} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n,i < j} \left[\gamma_{nij}^* g_{nijv'} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'}-2}) \sqrt{f_{v'}-1} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right. \\
& \left. + \gamma_{nij}^* g_{nijv'}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}, \mathcal{F})(f_{v'}+1) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right]
\end{aligned} \tag{۶۸-۲}$$

به طریق مشابه می توان روابط را برای $\mathbb{H}_{r.E} \hat{a}_{v'}$ نوشت

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_{r.E} \hat{a}_{v'} |\varphi(t)\rangle & = \left\{ \sum_{n,i < j} (\gamma_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \gamma_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) \sum_v (g_{nijv} \hat{a}_v + g_{nijv}^* \hat{a}_v^\dagger) \right\} \hat{a}_{v'} |\varphi(t)\rangle \\
& = \sum_{n,i < j} \sum_{v \neq v'} (\gamma_{nij} g_{nijv} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v \hat{a}_{v'} + \gamma_{nij} g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v^\dagger \hat{a}_{v'}) |\varphi(t)\rangle \\
& + \sum_{n,i < j} (\gamma_{nij} g_{nijv'} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_{v'} \hat{a}_v + \gamma_{nij} g_{nijv'}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_{v'}^\dagger \hat{a}_v) |\varphi(t)\rangle \\
& + \sum_{n,i < j} \sum_{v \neq v'} (\gamma_{nij}^* g_{nijv} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_v \hat{a}_{v'} + \gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_v^\dagger \hat{a}_{v'}) |\varphi(t)\rangle \\
& + \sum_{n,i < j} (\gamma_{nij}^* g_{nijv'} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_{v'} \hat{a}_v + \gamma_{nij}^* g_{nijv'}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_{v'}^\dagger \hat{a}_v) |\varphi(t)\rangle
\end{aligned} \tag{۶۹-۲}$$

با اثر دادن روابط فوق به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_{r.E} \hat{a}_{v'} |\varphi(t)\rangle & = \sum_{n,i < j} \sum_{v \neq v'} \left[\gamma_{nij} g_{nijv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1, f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_v} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right. \\
& \left. + \gamma_{nij} g_{nijv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1, f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_v+1} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n,i < j} \left[\gamma_{nij} g_{nijv'} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'}-2}) \sqrt{f_{v'}-1} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right. \\
& + \left. \gamma_{nij} g_{nijv'}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}, \mathcal{F})(f_{v'}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right] \\
& + \sum_{n,i < j} \sum_{v \neq v'} \left[\gamma_{nij}^* g_{nijv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1, f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_v} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right. \\
& + \left. \gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1, f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_v+1} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right] \\
& + \sum_{n,i < j} \left[\gamma_{nij}^* g_{nijv'} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'}-2}) \sqrt{f_{v'}-1} \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right. \\
& + \left. \gamma_{nij}^* g_{nijv'}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}, \mathcal{F})(f_{v'}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right]
\end{aligned} \tag{۷۰-۲}$$

حال با تفریق رابطه‌ی (۷۰-۲) از رابطه‌ی (۶۸-۲)، به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
(\hat{a}_v' \mathbb{H}_{r.E} - \mathbb{H}_{r.E} \hat{a}_v') |\varphi(t)\rangle & = \left\{ \sum_{n,i < j} \gamma_{nij} g_{nijv'}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}, \mathcal{F}) \right\} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}\rangle |\mathcal{F}\rangle \\
& + \left\{ \sum_{n,i < j} \gamma_{nij}^* g_{nijv'} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i}, \mathcal{F}) \right\} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j}\rangle |\mathcal{F}\rangle
\end{aligned} \tag{۷۱-۲}$$

به عنوان ترم آخر از هامیلتونی، اکنون می‌خواهیم اثر جابجاگر \hat{a}_v' و $\mathbb{H}_{r,r}$ را بر روی کت حالت سیستم به دست آوریم.

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{v'} \hat{\mathbb{H}}_{r,r} |\varphi(t)\rangle &= \hat{a}_{v'} \left\{ \sum_{n < m, i < j} (\eta_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \eta_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) (\eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^m) \right\} |\varphi(t)\rangle \\
&= \sum_{n < m, i < j} [\eta_{nij} \eta_{mij} \hat{a}_{v'} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{nij} \eta_{mij}^* \hat{a}_{v'} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m] |\varphi(t)\rangle \\
&+ \sum_{n < m, i < j} [\eta_{nij}^* \eta_{mij} \hat{a}_{v'} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \hat{a}_{v'} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m] |\varphi(t)\rangle \tag{۷۲-۲}
\end{aligned}$$

حال عبارات فوق را بر روی کت حالت سیستم اثر می دهیم.

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{v'} \hat{\mathbb{H}}_{r,r} |\varphi(t)\rangle &= \sum_{n < m, i < j} \left[\eta_{nij} \eta_{mij} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'} - 1}) \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow i}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
&+ \left. \eta_{nij} \eta_{mij}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'} - 1}) \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow j}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
&+ \sum_{n < m, i < j} \left[\eta_{nij}^* \eta_{mij} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'} - 1}) \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow i}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
&+ \left. \eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'} - 1}) \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow j}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \tag{۷۳-۲}
\end{aligned}$$

به طریق مشابه می توان اثر عبارت $\hat{\mathbb{H}}_{r,r} \hat{a}_{v'}$ را بر روی کت حالت سیستم به دست آورد

$$\hat{\mathbb{H}}_{r,r} \hat{a}_{v'} |\varphi(t)\rangle = \left\{ \sum_{n < m, i < j} (\eta_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \eta_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) (\eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^m) \right\} \hat{a}_{v'} |\varphi(t)\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n < m, i < j} [\eta_{nij} \eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m \hat{a}_{v'} + \eta_{nij} \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m a_{v'}] |\varphi(t)\rangle \\
&+ \sum_{n < m, i < j} [\eta_{nij}^* \eta_{mij} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m \hat{a}_{v'} + \eta_{nij}^* \eta_{mij} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m \hat{a}_{v'}] |\varphi(t)\rangle
\end{aligned} \tag{۷۴-۲}$$

به مانند قبل، از اثر دادن عبارات فوق بر روی کت حالت سیستم، به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{H}}_{r,r} \hat{a}_{v'} |\varphi(t)\rangle &= \sum_{n < m, i < j} \left[\eta_{nij} \eta_{mij} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow i}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right. \\
&+ \left. \eta_{nij} \eta_{mij}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow j}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right] \\
&+ \sum_{n < m, i < j} \left[\eta_{nij}^* \eta_{mij} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow i}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right. \\
&+ \left. \eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \sqrt{f_{v'}} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow j}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right]
\end{aligned} \tag{۷۵-۲}$$

از مقایسه روابط (۷۳-۲) و (۷۵-۲)، واضح است که دو عبارت $\hat{\mathbb{H}}_{r,r} \hat{a}_{v'}$ و $\hat{a}_{v'} \hat{\mathbb{H}}_{r,r}$ اثر یکسانی بر روی کت حالت سیستم داشته‌اند، یا به عبارت دیگر دو عمل گر $\hat{\mathbb{H}}_{r,r}$ و $\hat{a}_{v'}$ با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند.

$$(\hat{a}_{v'} \hat{\mathbb{H}}_{r,r} - \hat{\mathbb{H}}_{r,r} \hat{a}_{v'}) |\varphi(t)\rangle = 0 \tag{۷۶-۲}$$

این جابه‌جایی به این دلیل صورت می‌گیرد که عمل‌گر $\hat{a}_{v'}$ با تک تک مولفه‌های تشکیل دهنده $\hat{\mathbb{H}}_{r,r}$ جابه‌جا می‌شوند، به عبارت دیگر عمل‌گرهای $\hat{a}_{v'}$ و $\hat{\mathbb{H}}_{r,r}$ به ترتیب بر روی کت‌های $|\mathcal{A}\rangle$ و $|\mathcal{F}\rangle$ و در نتیجه کاملاً مستقل از هم عمل می‌کنند.

از روابط (۶۶-۲)، (۷۱-۲) و (۷۶-۲) می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_{v'}, \hat{\mathbb{H}}]|\varphi(t)\rangle &= \hbar\Omega_{v'}\sqrt{f_{v'}}\sum_{\mathcal{A},\mathcal{F}}\Phi(\mathcal{A},\mathcal{F}_{f_{v'}\rightarrow f_{v'}-1})|\mathcal{A}\rangle|\mathcal{F}\rangle \\
 &+ \left\{ \sum_{n,i<j}\gamma_{nij}g_{nijv'}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\},\mathcal{F}}\Phi(\mathcal{A}_{r_n\rightarrow j},\mathcal{F}) \right\} |\mathcal{A}_{r_n\rightarrow i}\rangle|\mathcal{F}\rangle \\
 &+ \left\{ \sum_{n,i<j}\gamma_{nij}^*g_{nijv'}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\},\mathcal{F}}\Phi(\mathcal{A}_{r_n\rightarrow i},\mathcal{F}) \right\} |\mathcal{A}_{r_n\rightarrow j}\rangle|\mathcal{F}\rangle
 \end{aligned} \tag{۷۷-۲}$$

با ضرب عبارت $-\frac{i}{\hbar}\langle\varphi(t)|$ از سمت چپ در رابطه‌ی (۷۷-۲)، طرف راست معادله‌ی شرودینگر به قرار زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
 -\frac{i}{\hbar}\langle\varphi(t)|[\hat{a}_{v'}, \hat{\mathbb{H}}]|\varphi(t)\rangle &= -i\hbar\Omega_{v'}\sqrt{f_{v'}}\sum_{\mathcal{A},\mathcal{F}}\Phi(\mathcal{A},\mathcal{F})\Phi^*(\mathcal{A},\mathcal{F}_{f_{v'}\rightarrow f_{v'}-1}) \\
 &- \frac{i}{\hbar}\sum_{n,i<j}\gamma_{nij}g_{nijv'}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\},\mathcal{F}}\Phi(\mathcal{A}_{r_n\rightarrow j},\mathcal{F})\Phi^*(\mathcal{A}_{r_n\rightarrow i},\mathcal{F}) \\
 &- \frac{i}{\hbar}\sum_{n,i<j}\gamma_{nij}^*g_{nijv'}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n\},\mathcal{F}}\Phi(\mathcal{A}_{r_n\rightarrow i},\mathcal{F})\Phi^*(\mathcal{A}_{r_n\rightarrow j},\mathcal{F})
 \end{aligned} \tag{۷۸-۲}$$

برای به دست آوردن طرف دیگر معادله‌ی شرودینگر، ابتدا عمل‌گر $\hat{a}_{v'}$ را بر روی کت حالت سیستم اثر می‌دهیم.

$$\hat{a}_{v'}|\varphi(t)\rangle = \sqrt{f_{v'}} \sum_{\mathcal{A}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}\rangle \left| \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1} \right\rangle \quad (79-2)$$

حال با ضرب کردن برای $|\varphi(t)\rangle$ از سمت چپ در معادله‌ی فوق و گرفتن مشتق زمانی از طرفین معادله، طرف دیگر معادله شرودینگر نیز به دست می‌آید

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi(t) | \hat{a}_{v'} | \varphi(t) \rangle = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{f_{v'}} \sum_{\mathcal{A}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{f_{v'} \rightarrow f_{v'}-1}) \right) \quad (80-2)$$

بنابراین روابط (78-2) و (80-2)، طرفین معادله‌ی شرودینگر برای عمل‌گر نابودی فوتونی می‌باشد.

۲-۴ معادله‌ی شرودینگر برای عمل‌گر نردبانی اتمی

همان روندی که برای به دست آوردن معادله‌ی شرودینگر عمل‌گر نابودی فوتونی طی شد، در این قسمت برای عمل‌گر نردبانی اتمی طی می‌شود. رابطه‌ی زیر نشان دهنده‌ی معادله‌ی شرودینگر برای عمل‌گر نردبانی اتمی است.

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{s,k}^l | \varphi(t) \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \varphi(t) | [\hat{\sigma}_{s,k}^l, \mathbb{H}] | \varphi(t) \rangle \quad (82-2)$$

به عنوان اولین قدم، اثر جابه‌جاگر $\hat{\sigma}_{s,k}^l$ و $\hat{\mathbb{H}}_0$ را بر روی کت حالت سیستم بررسی می‌کنیم

$$\hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\mathbb{H}}_0 | \varphi(t) \rangle = \hat{\sigma}_{s,k}^l \left\{ \sum_{n,i} E_i^n \hat{\sigma}_i^n + \sum_v \hbar \Omega_v \hat{a}_v^\dagger \hat{a}_v \right\} | \varphi(t) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n \neq l, i} \hat{\sigma}_{s,k}^l E_i^n \hat{\sigma}_i^n + \hat{\sigma}_{s,k}^l E_k^l \hat{\sigma}_k^l + \sum_{\nu} \hat{\sigma}_{s,k}^l \hbar \Omega_{\nu} \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu} \right) |\varphi(t)\rangle \\
&= \sum_{n \neq l, i} E_i^n \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \\
&+ \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} E_k^l \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \\
&+ \sum_{\nu} \hbar \Omega_{\nu} f_{\nu} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle
\end{aligned}$$

(۸۳-۲)

حال اثر عبارت $\hat{\mathbb{H}}_0 \hat{\sigma}_{s,k}^l$ را بر کت حالت سیستم بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{H}}_0 \hat{\sigma}_{s,k}^l |\varphi(t)\rangle &= \left\{ \sum_{n,i} E_i^n \hat{\sigma}_i^n + \sum_{\nu} \hbar \Omega_{\nu} \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu} \right\} \hat{\sigma}_{s,k}^l |\varphi(t)\rangle \\
&= \left(\sum_{n \neq l, i} E_i^n \hat{\sigma}_i^n \hat{\sigma}_{s,k}^l + E_k^l \hat{\sigma}_k^l \hat{\sigma}_{s,k}^l + \sum_{\nu} \hbar \Omega_{\nu} \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu} \hat{\sigma}_{s,k}^l \right) |\varphi(t)\rangle \\
&= \sum_{n \neq l, i} E_i^n \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \\
&+ \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} E_s^l \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \\
&+ \sum_{\nu} \hbar \Omega_{\nu} f_{\nu} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle
\end{aligned}$$

(۸۴-۲)

حال با تفریق رابطه‌ی (۸۴-۲) از رابطه‌ی (۸۳-۲) ، به دست می‌آوریم

$$(\hat{\sigma}_{s,k}^l \mathbb{H}_0 - \hat{\mathbb{H}}_0 \sigma_{s,k}^l) |\varphi(t)\rangle = \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} (E_k^l - E_s^l) \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \quad (۸۵-۲)$$

اکنون اثر جابه‌جاگر $\hat{\sigma}_{s,k}^l$ و $\hat{\mathbb{H}}_{r,E}$ را به روی کت حالت سیستم بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\mathbb{H}}_{r,E} |\varphi(t)\rangle &= \hat{\sigma}_{s,k}^l \left\{ \sum_{n,i < j} (\gamma_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \gamma_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) \sum_v (g_{nijv} \hat{a}_v + g_{nijv}^* \hat{a}_v^\dagger) \right\} |\varphi(t)\rangle \\ &= \sum_{n,i < j} \sum_v (\gamma_{nij} g_{nijv} \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v + \gamma_{nij} g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v^\dagger) |\varphi(t)\rangle \\ &+ \sum_{n,i < j} \sum_v (\gamma_{nij}^* g_{nijv} \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_v + \gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_v^\dagger) |\varphi(t)\rangle \end{aligned} \quad (۸۶-۲)$$

با اثر دادن روابط حاصله بر روی کت حالت، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\mathbb{H}}_{r,E} |\varphi(t)\rangle &= \sum_{n \neq l, i < j} \sum_v \left[\gamma_{nij} g_{nijv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v - 1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right. \\ &+ \left. \gamma_{nij} g_{nijv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v + 1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right] \\ &+ \sum_{k < j} \sum_v \left[\gamma_{lkj} g_{lkjv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v - 1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right. \\ &+ \left. \gamma_{lkj} g_{lkjv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v + 1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n \neq l, i < j} \sum_v \left[\gamma_{nij}^* g_{nijv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v - 1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
& \left. + \gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v + 1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& + \sum_{i < k} \sum_v \left[\gamma_{lik}^* g_{likv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v - 1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
& \left. + \gamma_{lik}^* g_{likv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v + 1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right]
\end{aligned} \tag{۸۷-۲}$$

اینک اثر عبارت $\hat{\mathbb{H}}_{r,E} \hat{\sigma}_{s,k}^l$ را بر کت حالت بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{H}}_{r,E} \hat{\sigma}_{s,k}^l |\varphi(t)\rangle & = \left\{ \sum_{n,i < j} (\gamma_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \gamma_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) \sum_v (g_{nijv} \hat{a}_v + g_{nijv}^* \hat{a}_v^\dagger) \right\} \hat{\sigma}_{s,k}^l |\varphi(t)\rangle \\
& = \sum_{n,i < j} \sum_v (\gamma_{nij} g_{nijv} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v \hat{\sigma}_{s,k}^l + \gamma_{nij} g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v^\dagger \hat{\sigma}_{s,k}^l) |\varphi(t)\rangle \\
& + \sum_{n,i < j} \sum_v (\gamma_{nij}^* g_{nijv} \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_v + \gamma_{nij}^* g_{nijv}^* \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{a}_v^\dagger) |\varphi(t)\rangle
\end{aligned} \tag{۸۸-۲}$$

با اثر دادن عمل‌گرهای فوق بر روی کت حالت، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbb{H}}_{r,E} \hat{\sigma}_{S,k}^l |\varphi(t)\rangle \\
&= \sum_{n \neq l, i < j} \sum_v \left[\gamma_{nij} \mathcal{G}_{nijv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
&+ \left. \gamma_{nij} \mathcal{G}_{nijv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
&+ \sum_{i < s} \sum_v \left[\gamma_{lis} \mathcal{G}_{lisv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
&+ \left. \gamma_{lis} \mathcal{G}_{lisv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
&+ \sum_{n \neq l, i < j} \sum_v \left[\gamma_{nij}^* \mathcal{G}_{nijv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
&+ \left. \gamma_{nij}^* \mathcal{G}_{nijv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
&+ \sum_{s < j} \sum_v \left[\gamma_{lsj}^* \mathcal{G}_{lsjv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
&+ \left. \gamma_{lsj}^* \mathcal{G}_{lsjv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& \tag{۸۹-۲}
\end{aligned}$$

با کم کردن رابطه‌ی (۸۹-۲) از رابطه‌ی (۸۷-۲)، اثر جابه‌جاگر $\hat{\sigma}_{S,k}^l$ و $\hat{\mathbb{H}}_{r,E}$ بر روی کت حالت به صورت زیر

به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
& (\hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\mathbb{H}}_{r,E} - \hat{\mathbb{H}}_{r,E} \hat{\sigma}_{s,k}^l) |\varphi(t)\rangle \\
&= \sum_{k < j} \sum_v \left[\gamma_{lkj} \mathcal{G}_{lkjv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right. \\
&+ \left. \gamma_{lkj} \mathcal{G}_{lkjv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right] \\
&+ \sum_{i < k} \sum_v \left[\gamma_{lik}^* \mathcal{G}_{likv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right. \\
&+ \left. \gamma_{lik}^* \mathcal{G}_{likv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right] \\
&- \sum_{i < s} \sum_v \left[\gamma_{lis} \mathcal{G}_{lisv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right. \\
&+ \left. \gamma_{lis} \mathcal{G}_{lisv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right] \\
&- \sum_{s < j} \sum_v \left[\gamma_{lsj}^* \mathcal{G}_{lsjv} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \sqrt{f_v} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right. \\
&+ \left. \gamma_{lsj}^* \mathcal{G}_{lsjv}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \sqrt{f_v + 1} |\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}\rangle | \mathcal{F}\rangle \right]
\end{aligned} \tag{۹۰-۲}$$

به عنوان آخرین قدم، اثر جابه‌جاگر $\hat{\sigma}_{s,k}^l$ و $\hat{\mathbb{H}}_{r,r}$ را بر کت سیستم بررسی می‌کنیم

$$\hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\mathbb{H}}_{r,r} |\varphi(t)\rangle = \hat{\sigma}_{s,k}^l \left\{ \sum_{n < m, i < j} (\eta_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \eta_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) (\eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^m) \right\} |\varphi(t)\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n < m, i < j} [\eta_{nij} \eta_{mij} \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{nij} \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m] |\varphi(t)\rangle \\
&+ \sum_{n < m, i < j} [\eta_{nij}^* \eta_{mij} \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m] |\varphi(t)\rangle
\end{aligned}$$

(۹۱-۲)

با اثر دادن عمل‌گرهای فوق بر روی کت حالت سیستم، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\mathbb{H}}_{r,r} |\varphi(t)\rangle &= \sum_{n \neq l < m \neq l, i < j} \left[\eta_{nij} \eta_{mij} \sum_{\mathcal{A} - \{r_n, r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
&+ \left. \eta_{nij} \eta_{mij}^* \sum_{\mathcal{A} - \{r_n, r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
&+ \sum_{n = l < m \neq l, i = k < j} \left[\eta_{lkj} \eta_{mkj} \sum_{\mathcal{A} - \{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_m \rightarrow k, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
&+ \left. \eta_{lkj} \eta_{mkj}^* \sum_{\mathcal{A} - \{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow k, r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
&+ \sum_{n \neq l < m = l, i = k < j} \left[\eta_{nkj} \eta_{lkj} \sum_{\mathcal{A} - \{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow k, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
&+ \sum_{n \neq l < m = l, i < j = k} \left[\eta_{nik} \eta_{lik}^* \sum_{\mathcal{A} - \{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow k, r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow s}\rangle | \mathcal{F} \rangle \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n \neq l < m \neq l, i < j} \left[\eta_{nij}^* \eta_{mij} \sum_{\mathcal{A} - \{r_n, r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
& \left. + \eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \sum_{\mathcal{A} - \{r_n, r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& + \sum_{n=l < m \neq l, i < j=k} \left[\eta_{lik}^* \eta_{mik} \sum_{\mathcal{A} - \{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow k, r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
& \left. + \eta_{lik}^* \eta_{mik}^* \sum_{\mathcal{A} - \{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow k, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m=l, i=k < j} \left[\eta_{nkj}^* \eta_{lkj} \sum_{\mathcal{A} - \{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow k, r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m=l, i < j=k} \left[\eta_{nik}^* \eta_{lik}^* \sum_{\mathcal{A} - \{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow k, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right]
\end{aligned} \tag{۹۳-۲}$$

حال عمل گر $\sigma_{s,k}^l \mathbb{H}_{r,r}$ را بر کت سیستم اثر می دهیم

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{H}}_{r,r} \hat{\sigma}_{s,k}^l | \varphi(t) \rangle & = \left\{ \sum_{n < m, i < j} (\eta_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n + \eta_{nij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n) (\eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^m + \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^m) \right\} \hat{\sigma}_{s,k}^l | \varphi(t) \rangle \\
& = \sum_{n < m, i < j} [\eta_{nij} \eta_{mij} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m \hat{\sigma}_{s,k}^l + \eta_{nij} \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m \hat{\sigma}_{s,k}^l] | \varphi(t) \rangle \\
& + \sum_{n < m, i < j} [\eta_{nij}^* \eta_{mij} \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{i,j}^m \hat{\sigma}_{s,k}^l + \eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \hat{\sigma}_{j,i}^n \hat{\sigma}_{j,i}^m \hat{\sigma}_{s,k}^l] | \varphi(t) \rangle
\end{aligned}$$

(۹۴-۲)

با اثر دادن عمل گره‌های فوق بر روی کت سیستم، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{H}}_{r,r} \hat{\sigma}_{s,k}^l |\varphi(t)\rangle = & \sum_{n \neq l < m \neq l, i < j} \left[\eta_{nij} \eta_{mij} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right. \\
& + \left. \eta_{nij} \eta_{mij}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m \neq l, i < j = s} \left[\eta_{lis} \eta_{mis} \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow i}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right. \\
& + \left. \eta_{lis} \eta_{mis}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_m \rightarrow s, r_l \rightarrow i}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m = l, i < j = s} \left[\eta_{nis} \eta_{lis} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow i}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m = l, i = s < j} \left[\eta_{nsj} \eta_{lsj}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow s, r_l \rightarrow j}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m \neq l, i < j} \left[\eta_{nij}^* \eta_{mij} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right. \\
& + \left. \eta_{nij}^* \eta_{mij}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) |\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow s}\rangle |\mathcal{F}\rangle \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=l < m \neq l, i=s < j} \left[\eta_{lsj}^* \eta_{msj} \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow s, r_l \rightarrow j} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
& \left. + \eta_{lsj}^* \eta_{msj}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow j} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m=l, i < j=s} \left[\eta_{nis}^* \eta_{lis} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow s, r_l \rightarrow i} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m=l, i=s < j} \left[\eta_{nik}^* \eta_{lik}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow j} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right]
\end{aligned} \tag{۹۵-۲}$$

با کم کردن طرفین رابطه‌ی (۹۵-۲) از رابطه‌ی (۹۳-۲)، تساوی زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
& (\hat{\sigma}_{s,k}^l \hat{\mathbb{H}}_{r,r} - \hat{\mathbb{H}}_{r,r} \hat{\sigma}_{s,k}^l) | \varphi(t) \rangle \\
& = \sum_{n=l < m \neq l, i=k < j} \left[\eta_{lkj} \eta_{mkj} \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow k, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
& \left. + \eta_{lkj} \eta_{mkj}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow k, r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m=l, i=k < j} \left[\eta_{nkj} \eta_{lkj} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow k, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m=l, i < j=k} \left[\eta_{nik} \eta_{lik}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow k, r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=l < m \neq l, i < j = k} \left[\eta_{lik}^* \eta_{mik} \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow k, r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
& + \left. \eta_{lik}^* \eta_{mik}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow k, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m = l, i = k < j} \left[\eta_{nkj}^* \eta_{lkj} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow k, r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& + \sum_{n \neq l < m = l, i < j = k} \left[\eta_{nik}^* \eta_{lik}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow k, r_l \rightarrow s} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& - \sum_{n=l < m \neq l, i < j = s} \left[\eta_{lis} \eta_{mis} \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow i} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
& + \left. \eta_{lis} \eta_{mis}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow s, r_l \rightarrow i} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& - \sum_{n \neq l < m = l, i < j = s} \left[\eta_{mis} \eta_{lis} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow i} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& - \sum_{n \neq l < m = l, i = s < j} \left[\eta_{msj} \eta_{lsj}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow s, r_l \rightarrow j} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& - \sum_{n=l < m \neq l, i = s < j} \left[\eta_{lsj}^* \eta_{msj} \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow s, r_l \rightarrow j} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right. \\
& + \left. \eta_{lsj}^* \eta_{msj}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_m, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow j} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n \neq l < m=l, i < j=s} \left[\eta_{nis}^* \eta_{lis} \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow s, r_l \rightarrow i} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right] \\
& - \sum_{n \neq l < m=l, i=s < j} \left[\eta_{nik}^* \eta_{lik}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_n, r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) | \mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow j} \rangle | \mathcal{F} \rangle \right]
\end{aligned} \tag{۹۶-۲}$$

با جمع نمودن سه رابطه‌ی (۲-۸۵) و (۲-۹۰) و (۲-۹۶) و همچنین ضرب $|\varphi(t)\rangle$ از سمت چپ در آن، طرف راست معادله شرودینگر برای عملگر نردبانی اتمی به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(t) | [\hat{\sigma}_{s,k}^l, \hat{\mathbb{H}}] | \varphi(t) \rangle &= -\frac{i}{\hbar} (E_k^l - E_s^l) \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \\
& - \frac{i}{\hbar} \sum_{k < j} \sum_v \left[\gamma_{lkj} g_{lkjv} \sqrt{f_v} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \right. \\
& \left. + \gamma_{lkj} g_{lkjv}^* \sqrt{f_v + 1} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \right] \\
& - \frac{i}{\hbar} \sum_{i < k} \sum_v \left[\gamma_{lik}^* g_{likv} \sqrt{f_v} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \right. \\
& \left. + \gamma_{lik}^* g_{likv}^* \sqrt{f_v + 1} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \right] \\
& + \frac{i}{\hbar} \sum_{i < s} \sum_v \left[\gamma_{lis} g_{lisv} \sqrt{f_v} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \right. \\
& \left. + \gamma_{lis} g_{lisv}^* \sqrt{f_v + 1} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{\hbar} \sum_{s < j} \sum_v \left[\gamma_{lsj}^* g_{lsjv} \sqrt{f_v} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v-1}) \right. \\
& \quad \left. + \gamma_{lsj}^* g_{lsjv} \sqrt{f_v + 1} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j}, \mathcal{F}_{f_v \rightarrow f_v+1}) \right] \\
& - \frac{i}{\hbar} \sum_{n=l < m \neq l, i=k < j} \left[\eta_{lkj} \eta_{mkj} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j, r_m \rightarrow j}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s, r_m \rightarrow k}, \mathcal{F}) \right. \\
& \quad \left. + \eta_{lkj} \eta_{mkj}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j, r_m \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s, r_m \rightarrow j}, \mathcal{F}) \right] \\
& - \frac{i}{\hbar} \sum_{n \neq l < m=l, i=k < j} \left[\eta_{nkj} \eta_{lkj} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j, r_n \rightarrow j}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s, r_n \rightarrow i}, \mathcal{F}) \right. \\
& \quad \left. + \eta_{lkj} \eta_{nkj}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j, r_n \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s, n \rightarrow j}, \mathcal{F}) \right] \\
& - \frac{i}{\hbar} \sum_{n \neq l < m=l, i < j=k} \left[\eta_{nik} \eta_{lik}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i, r_n \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s, r_n \rightarrow i}, \mathcal{F}) \right. \\
& \quad \left. + \eta_{nik}^* \eta_{lik} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i, r_n \rightarrow i}, \mathcal{F}) \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s, r_n \rightarrow k}, \mathcal{F}) \right] \\
& - \frac{i}{\hbar} \sum_{n=l < m \neq l, i < j=k} \left[\eta_{mik} \eta_{lik}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i, m \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s, r_m \rightarrow i}, \mathcal{F}) \right. \\
& \quad \left. + \eta_{mik}^* \eta_{lik} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i, r_m \rightarrow i}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s, r_m \rightarrow k}, \mathcal{F}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{\hbar} \sum_{n=l < m \neq l, i < j = s} \left[\eta_{lis} \eta_{mis} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i, r_m \rightarrow j}, \mathcal{F}) \right. \\
& \quad \left. + \eta_{lis} \eta_{mis}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i, r_m \rightarrow s}, \mathcal{F}) \right] \\
& + \frac{i}{\hbar} \sum_{n=l < m \neq l, i = s < j} \left[\eta_{lsj}^* \eta_{msj} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j, r_m \rightarrow s}, \mathcal{F}) \right. \\
& \quad \left. + \eta_{lsj}^* \eta_{msj}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_m\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_m \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j, r_m \rightarrow j}, \mathcal{F}) \right] \\
& + \frac{i}{\hbar} \sum_{n \neq l < m = l, i < j = s} \left[\eta_{lis} \eta_{nis} \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i, r_n \rightarrow j}, \mathcal{F}) \right. \\
& \quad \left. + \eta_{lis} \eta_{nis}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow i, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow i, r_n \rightarrow s}, \mathcal{F}) \right] \\
& + \frac{i}{\hbar} \sum_{n \neq l < m = l, i = s < j} \left[\eta_{nsj} \eta_{lsj}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow j, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j, r_n \rightarrow s}, \mathcal{F}) \right. \\
& \quad \left. + \eta_{mik}^* \eta_{lik}^* \sum_{\mathcal{A}-\{r_l, r_n\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_n \rightarrow s, r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow j, r_n \rightarrow j}, \mathcal{F}) \right]
\end{aligned} \tag{۹۷-۲}$$

برای به دست آوردن طرف دیگر معادله شرودینگر، ابتدا عمل گر نردبانی اتمی را بر روی کت حالت اثر داده سپس از سمت چپ برای حالت را در آن ضرب نموده و از حاصل مشتق زمانی می گیریم. حاصل به فرم زیر نمایان خواهد شد.

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi(t) | \hat{\sigma}_{s,k}^l | \varphi(t) \rangle = \frac{d}{dt} [\sum_{\mathcal{A}-\{r_i\}, \mathcal{F}} \Phi(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow k}, \mathcal{F}) \Phi^*(\mathcal{A}_{r_l \rightarrow s}, \mathcal{F})] \tag{۹۸-۲}$$

فصل سوم: الگوریتم برنامه‌ی MATLAB و فرمت فایل ورودی

همان‌گونه که پیشتر ذکر شد، در راستای این پایان‌نامه برنامه‌ای به زبان MATLAB نوشته شده است که در این بخش به بحث درباره آن می‌پردازیم. این برنامه به صورت کاملاً کلی نوشته شده است و قادر است که هر سیستمی متشکل از چندین نقطه‌ی کوانتومی که در بر هم کنش با چندین مد کاواک هستند را تحلیل کرده و معادله‌ی شرودینگر که در رابطه‌ی (۱-۳) آمده است را برای آن حل نماید.

$$\frac{d}{dt}|\varphi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\mathbb{H}|\varphi(t)\rangle \quad (1-3)$$

که در آن \mathbb{H} طبق روابط (۲-۲۹) تا (۲-۳۲) تعریف شده است. علاوه بر این برنامه‌ی مذکور به طور کاملاً خودکار برای سیستم مشخص شده توسط کاربر، نمودار هم‌نوایی^۱ را که بیانگر میزان درهم‌تنیدگی^۲ موجود در سیستم است را نیز رسم می‌کند. در باره‌ی متغیر هم‌نوایی بیشتر بحث خواهد شد. کاملاً واضح است که کاربر موظف است، مشخصات سیستم مورد نظر خود را به عنوان ورودی به برنامه بدهد. این مشخصات لازم است که در قالب یک فایل متنی با الگویی خاص فراهم شود. در این فصل ابتدا به بررسی

¹ Concurrency

² Entanglement

متغیرهای ورودی برنامه و همچنین الگوی فایل متنی ورودی می‌پردازیم سپس الگوریتم به کار رفته در این برنامه به اختصار شرح داده خواهد شد.

۳-۱- ورودی‌های برنامه و فرمت فایل متنی

ورودی‌هایی که کاربر موظف به فراهم کردن آن‌ها است به قرار زیر می‌باشد:

- (۱) تعداد نقطه‌های کوانتومی که در متغیر $QDno$ ذخیره می‌شود.
- (۲) تعداد ترازهای انرژی نقطه‌های کوانتومی که در متغیر $energylev$ ذخیره می‌شود.
- (۳) تعداد مدهای کاواک که در متغیر $cavitym$ ذخیره می‌گردد.
- (۴) تعداد فوتون‌های مجاز در هر مد کاواک که در متغیر n ذخیره می‌شود.
- (۵) بسامدهای هر مد کاواک که در متغیر b ذخیره گردد.
- (۶) سطح انرژی هر تراز انرژی نقطه‌های کوانتومی که در متغیر c ذخیره می‌گردد.
- (۷) ثابت تزویج بین نقطه‌های کوانتومی و مدهای کاواک که اگر کاواک مورد نظر کاربر دارای چندین مد باشد، باید در چند مرحله به برنامه داده شود. در واقع به تعداد مدهای کاواک، داده‌های مربوط به هر مد کاواک در متغیر g ذخیره می‌گردند.
- (۸) ضرایب η_{nij} که در هامیلتونی بر هم کنش دو قطبی-دوقطبی در رابطه‌ی (۲-۳۲) آورده شده است. این ضرایب در متغیر eta ذخیره می‌شوند.
- (۹) شرایط اولیه سیستم که در ماتریس $phi0$ ذخیره می‌گردند.

برای جلوگیری از سردرگمی خواننده، نحوه‌ی قرار دادن اطلاعات را در ماتریس‌ها بیان می‌کنیم.

$$b = [\omega_i]_{1 \times cavitym} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \dots \ \omega_{cavitym}] \quad (2-3)$$

همان‌گونه که در رابطه‌ی (۲-۳) مشخص شده است، ماتریس b دارای بعد $(1 \times Cavitym)$ می‌باشد که هر کدام از درایه‌های آن بیانگر بسامد تشدید هر مد کاواک است.

$$c = [E_{n,i}]_{QDno \times energylev} = \begin{bmatrix} E_{1,1} & E_{1,2} & \dots & E_{1,energylev-1} & E_{1,energylev} \\ E_{2,1} & E_{2,2} & \dots & E_{2,energylev-1} & E_{2,energylev} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ E_{QDno-1,1} & E_{QDno-1,2} & \dots & E_{QDno-1,energylev-1} & E_{QDno-1,energylev} \\ E_{QDno,1} & E_{QDno,2} & \dots & E_{QDno,energylev-1} & E_{QDno,energylev} \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

همانطور که در رابطه‌ی (۳-۳) نشان داده شده است متغیر c به فرم یک ماتریس در ابعاد $(QDno \times energylev)$ می‌باشد که در آن هر سطر مختص یک نقطه‌ی کوانتومی است و درایه نام آن سطر، نشان دهنده‌ی انرژی تراز نام آن نقطه‌ی کوانتومی می‌باشد.

$$g = [g_{n,i,j,v}]_{QDno \times (energylev * \frac{energylev-1}{2})} = \begin{bmatrix} g_{1,1,2,v} & \dots & g_{1,energylev,energylev-1,v} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{QDno,1,2,v} & \dots & g_{QDno,energylev,energylev-1,v} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

کاربر باید به این نکته توجه داشته باشد که برنامه‌ی نوشته شده، برای هر مد کاواک ماتریسی به فرم رابطه‌ی (۴-۳) را به عنوان ورودی طلب می‌کند. به عبارت دیگر ماتریس نگاشته شده در رابطه‌ی (۴-۳) تنها مربوط به یک مد کاواک می‌باشد. بنابراین در فایل متنی ورودی، کاربر باید به تعداد مدهای کاواک، ماتریس به فرم

رابطه‌ی (۳-۴) بنگارد. درایه‌ی g_{nij} در ماتریس فوق، بیانگر شدت توزیع بین گذار نقطه‌ی کوانتومی n ام از تراز j ام به تراز i ام و مد ν ام کاواک می‌باشد.

ماتریس eta دارای الگویی به قرار زیر است:

$$\eta = [\eta_{nij}]_{QDno \times energylev * \frac{energylev-1}{2}} = \begin{bmatrix} \eta_{1,1,2} & \cdots & \eta_{1,energylev,energylev-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{QDno,1,2} & \cdots & \eta_{QDno,energylev,energylev-1} \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

مولفه‌ی η_{nij} در رابطه‌ی (۳-۵)، بیانگر شدت دوقطبی تولید شده در گذار نقطه‌ی کوانتومی n ام از تراز j ام به تراز i ام می‌باشد. به عبارت دیگر در ماتریس معرفی شده توسط رابطه‌ی (۳-۵)، هر سطر مختص به یک نقطه‌ی کوانتومی خاص می‌باشد و مولفه‌های هر سطر به یک گذار خاص برای آن نقطه‌ی کوانتومی اختصاص دارند، به این ترتیب که ابتدا گذارهایی در نظر گرفته می‌شوند که به تراز اول فرجام بیابند.

در وهله‌ی نخست از ترازهای مجاور تراز اول شروع می‌کنیم. به عنوان مثال در یک سطر خاص درایه اول ماتریس به گذار تراز دوم به تراز اول اختصاص دارد و درایه چهارم به گذار از تراز پنجم به تراز اول. پس از در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن به تراز اول به گذارهای ممکن به تراز دوم می‌پردازیم. همین روش برای قرار دادن اطلاعات در ماتریس g استفاده می‌شود.

آخرین ورودی که کاربر موظف به تعیین آن است، شرایط اولیه سیستم است که به صورت تعیین ضرایب در لحظه‌ی صفر می‌باشد. این داده‌ها در متغیر $phi0$ ذخیره می‌گردند. در این قسمت جا دارد که به ترتیب قرار گرفتن این ضرایب در رابطه‌ی (۳-۶) اهتمام ورزیم؛ این نکته در قسمت بعد این فصل نیز برای خواننده مفید

واقع می‌شود. با توجه به رابطه‌ی (۲-۴۳) و در نظر گرفتن مقادیر تعیین شده توسط کاربر، تعداد کل حالت‌های ممکن برای حالت سیستم طبق رابطه‌ی (۳-۷) به دست می‌آید.

$$phi_0 = [phi_i]_{N \times 1} \quad (۳-۶)$$

$$N = energylev^{QDno} \times (n + 1)^{cavitym} \quad (۳-۷)$$

کت حالت سیستم از ضرب خارجی کت‌های حالت نقاط کوانتومی و کت‌های حالت مدهای کاواک تشکیل می‌شود. ترتیب قرار گرفتن حالت‌های ممکن برای کت سیستم به این گونه است که برای یک ترکیب خاص از کت‌های مد کاواک، حالت‌های ممکن را برای کت‌های نقاط کوانتومی در نظر می‌گیریم. کت‌های نقاط کوانتومی را به این صورت جاروب می‌کنیم که ابتدا از نقطه‌ی کوانتومی شماره $QDno$ شروع کرده و تمام ترازهای انرژی آن را در نظر می‌گیریم، در حالی که دیگر نقاط کوانتومی در تراز اول خود هستند. در قدم بعد نقطه‌ی کوانتومی شماره $QDno - 1$ یک تراز انرژی جابه‌جا می‌شود و همان روند قبل برای نقطه‌ی کوانتومی شماره $QDno$ تکرار می‌شود. این پروسه آنقدر ادامه پیدا می‌کند که نقاط کوانتومی شماره ۱ تا $QDno - 1$ در تراز انرژی $energylev$ قرار بگیرند و برای این آرایش، نقطه‌ی کوانتومی شماره $QDno$ تمام ترازهای انرژی خود را جاروب می‌کند. پس از جاروب کردن تمام حالات ممکن برای آرایش نقاط کوانتومی، تعداد فوتون در کاواک شماره $cavitym$ را یک عدد می‌افزاییم و مجدداً تمام حالات ممکن برای نقاط کوانتومی را جاروب می‌کنیم. این روش تا جایی ادامه پیدا می‌کند که تمام حالات ممکن برای نقاط کوانتومی در تمام حالات ممکن برای مدهای کاواک ضرب شوند.

همان‌طور که پیشتر ذکر شد، داده‌های مساله از طریق یک فایل متنی از کاربر به برنامه منتقل می‌شود. در این قسمت به الگوی فایل ورودی می‌پردازیم. نحوه و ترتیب قرار گرفتن اطلاعات در فایل متنی در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. در وهله‌ی اول باید متذکر بود که نام فایل باید "CQED.txt" باشد و در همان قسمتی ذخیره گردد که برنامه‌ی MATLAB در آن ذخیره شده است. الگوی فایل متنی بسیار ساده بوده و تنها باید به چند نکته توجه نمود:

```

[[QDno]
[energy]ev]
[cavitym]
[n]
[b]
[c]
[g regarding the first cavity mode]
.
.
.
[g regarding the last cavity mode]
[eta]
[phi0]

```

شکل ۱-۳ الگوی فایل ورودی

- ✓ تمامی مقادیر ورودی، هر چند یک عدد باشند لازم است که در گروه گذشته شوند.
- ✓ مقادیر ورودی باید به ترتیبی که در شکل (۱-۳) مشخص شده، منظم شوند در غیر این صورت برنامه اجرا نخواهد شد.

✓ هر ورودی باید در یک سطر نوشته شود و نمی‌توان هر سطر از ماتریسی را در یک سطر از فایل قرار داد.

✓ به تعداد مدهای کاواک، از سطر هفتم فایل به وارد نمودن ضرایب تزویج اختصاص دارد.

با رعایت نمودن نکات فوق مشکلی در اجرای برنامه به وجود نخواهد آمد. شایان ذکر است که برنامه مذکور قادر به خواندن اعداد مختلط نیز می‌باشد. در قسمت پیش رو، الگوریتم به کار رفته در برنامه به اختصار توضیح داده خواهد شد.

۳-۲- الگوریتم مورد استفاده در برنامه

وظیفه‌ی برنامه نوشته شده این است که معادله‌ی (۳-۱) را برای سیستم مورد نظر کاربر حل کند. می‌توان معادله‌ی (۳-۱) را به شکل معادله‌ی ماتریسی (۳-۸) نوشت.

$$\frac{d}{dt}[\phi(t)]_{N \times 1} = [M]_{N \times N}[\phi]_{N \times 1} \quad (۳-۸)$$

معادله‌ی ماتریسی فوق در این پایان نامه به روش ماتریس نمایی^۱ حل شده است. این روش به اختصار در روابط (۳-۹) تا (۳-۱۲) توضیح داده شده است.

$$\frac{d}{dt}\{\phi(t)\} = [M]\{\phi(t)\} \quad (۳-۹)$$

$$\{\phi(t)\} = \exp([M]t)\{\phi(0)\} \quad (۳-۱۰)$$

¹ Matrix Exponential

با تعریف رابطه‌ی (۱۱-۳) ماتریس $[D]$ به دست می‌آید که ماتریسی قطری می‌باشد. با توجه به این تعریف، می‌توان رابطه‌ی (۱۰-۳) را به فرم رابطه‌ی (۱۲-۳) نوشت.

$$[R]^{-1}[M][R] = [D] = [d_i \delta_{ij}] \quad (11-3)$$

$$\begin{aligned} \{\phi(t)\} &= [R] \exp([D]t) [R]^{-1} \{\phi(0)\} \\ &= [R] [\exp(d_i t) \delta_{ij}] [R]^{-1} \{\phi(0)\} \end{aligned} \quad (12-3)$$

این برنامه در ابتدا ماتریس $[M]$ را محاسبه کرده و به دنبال آن از طریق معادله‌ی (۱۲-۳) ضرایب کت‌ها را به دست می‌آورد.

با توجه به معادلات (۱-۳) و (۹-۳) ماتریس $[M]$ از اثر دادن هامیلتونی \mathbb{H} بر روی کت حالت به دست می‌آید. به عبارت دیگر، برای یک ضریب خاص از ضرایب کت‌ها یک سطر از ماتریس $[M]$ اختصاص دارد که آن ضریب را به گونه‌ای به ضرایب دیگر کت‌ها مرتبط می‌کند. برای یک ضریب خاص، وقتی می‌خواهیم مولفه‌های مربوط به آن ضریب را در ماتریس $[M]$ بنگاریم، باید توجه داشته باشیم که فقط مولفه‌هایی از سطر ماتریس $[M]$ نوشته می‌شوند که کت مربوط به آن مولفه، بعد از اعمال هامیلتونی بر روی آن به کتی تبدیل شود که قصد نوشتن مولفه‌های ماتریس را برای آن داریم. برای روشن تر شدن مساله و با توجه به معادله‌ی (۹-۳) درمی‌یابیم که معادله‌ی (۹-۳) پس از حذف کت‌های همانند از طرفین معادله صورت گرفته است، یا به عبارتی معادله‌ی

(۹-۳) یک دستگاه معادله است که در آن ضرایب کت‌های همانند در طرفین، در تساوی با هم قرار گرفته‌اند.

در این برنامه با توجه به اثر هر ترم از هامیلتونی بر روی کت‌ها، درایه‌های ماتریس $[M]$ نگاشته می‌شوند.

قابل ذکر است که ما ماتریس $[M]$ را به چند زیر ماتریس تقسیم نموده ایم که در هر یک از این زیر ماتریس‌ها حالت مدهای کاواک یکسان است. بنابراین ماتریس $[M]$ به شکل رابطه‌ی (۳-۱۳) در می‌آید.

$$M = [m_{ij}]_{N \times N} = \begin{bmatrix} [q_{ij}]_{\text{energylev}^{QDno} \times \text{energylev}^{QDno}} & \cdots & [q_{ij}]_{\text{energylev}^{QDno} \times \text{energylev}^{QDno}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [q_{ij}]_{\text{energylev}^{QDno} \times \text{energylev}^{QDno}} & \cdots & [q_{ij}]_{\text{energylev}^{QDno} \times \text{energylev}^{QDno}} \end{bmatrix}_{(n+1)^{\text{cavitym}} \times (n+1)^{\text{cavitym}}} \quad (۳-۱۳)$$

به عنوان مثال، اثر دو ترم از هامیلتونی را بر روی کت‌ها بررسی می‌کنیم. نخست ترم $\sum_{n,i} E_i^n \hat{\sigma}_i^n$ را بررسی می‌کنیم. با توجه به ترم فوق درمی‌یابیم که اعمال آن بر روی هر کتی هیچ تغییری در آن کت ایجاد نمی‌کند و تنها ضربی در آن ضرب می‌شود. بنابراین برای لحاظ کردن اثر این ترم در ماتریس $[M]$ کافی است که درایه‌های قطری ماتریس را بنگاریم. حال مثال را قدری پیچیده‌تر کرده و می‌خواهیم اثر ترم $\sum_{n,i < j} \sum_v \gamma_{nij} g_{nij} \hat{\sigma}_{i,j}^n \hat{a}_v$ را بر کت‌ها بسنجیم. ترم فوق از دو عملگر $\hat{\sigma}_{i,j}^n$ و \hat{a}_v تشکیل شده است که به ترتیب بر کت‌های مدهای کاواک و حالت نقاط کوانتومی اثر دارند. عملگر \hat{a}_v تعداد فوتون‌های موجود در مد v ام کاواک را یک عدد کم می‌کند. بنابراین هر زیر ماتریس موجود در ماتریس $[M]$ را باید بر حسب زیر ماتریس بعدی آن نوشت. عملگر $\hat{\sigma}_{i,j}^n$ باعث گذار اتمی برای نقطه‌ی کوانتومی n ام از تراز j ام به تراز i ام

می‌شود، بنابراین برای هر کت مشخصی باید به دنبال کتی بود که با تغییرات فوق به آن کت مورد نظر تبدیل شود.

به عنوان قسمت آخر از این بخش، به توضیح متغیر هم‌نوایی می‌پردازیم. این متغیر به فرم رابطه‌ی (۳-۱۴) نوشته می‌شود [۳] و همانطور که پیشتر ذکر شد به عنوان معیاری از درهم‌تنیدگی موجود در سیستم از آن استفاده می‌شود.

$$C = \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq m} \{c_{i,j}\}} \quad (۳-۱۴)$$

$$c_{i,j} = \sum_{\{K\}} \sum_{\{L\}} \sum_{k_i < l_i}^{N_i} \sum_{k_j < l_j}^{N_j} |a\{k_i, k_j, K\}a\{l_i, l_j, L\} - a\{k_i, l_j, K\}a\{l_i, k_j, L\} - a\{l_i, k_j, K\}a\{k_i, l_j, L\} + a\{l_i, l_j, K\}a\{l_i, l_j, L\}|^2 \quad (۳-۱۵)$$

سیستمی که رابطه‌ی فوق به تحلیل آن می‌پردازد متشکل از m زیرسیستم است، که در مواردی که ما در این پایان‌نامه به آن می‌پردازیم، هر کدام از نقطه‌های کوانتومی و مدهای کاواک به عنوان یک زیرسیستم محسوب می‌شوند و در نتیجه $m = QDno + cavitym$ در رابطه‌ی فوق ابتدا دو زیرسیستم i و j انتخاب می‌شوند که هر کدام از این زیرسیستم‌ها می‌توانند دارای N_j و N_i حالت مختلف باشند که در سیستم‌های مورد بحث ما N_i و N_j می‌تواند $energylev$ و n باشد. تنها نکته‌ی ناگفته در رابطه‌ی فوق $\{K\}$ و $\{L\}$ می‌باشد، همان‌طور که گفتیم تعداد m زیرسیستم وجود دارد که دو زیر سیستم i و j انتخاب شده‌اند بنابراین $m - 2$ زیرسیستم باقی

می‌ماند، دو عبارت $\{K\}$ و $\{L\}$ نشان‌گر زیرسیستم‌های باقی‌مانده، طبق رابطه‌ی (۱۶-۳) و (۱۷-۳) می‌باشند.

$$\sum_{\{K\}}(\cdot) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_{i-1}} \sum_{k_{i+1}} \dots \sum_{k_{j-1}} \sum_{k_{j+1}} \dots \sum_{k_m}(\cdot) \quad (16-3)$$

$$\sum_{\{L\}}(\cdot) = \sum_{l_1} \sum_{l_2} \dots \sum_{l_{i-1}} \sum_{l_{i+1}} \dots \sum_{l_{j-1}} \sum_{l_{j+1}} \dots \sum_{l_m}(\cdot) \quad (17-3)$$

در رابطه‌ی (۱۵-۳) ضرایبی که به فرم $a\{l_i, l_j, K\}$ نوشته شده‌اند، در واقع به ضرایب کت‌هایی اشاره دارد که توسط مقادیر تعیین شده توسط بردارهای به فرم $\{K, l_i, l_j\}$ مشخص می‌شوند. برای درک بهتر خواننده از روابط هم‌نوایی و همچنین درک رابطه‌ی بین $a\{l_i, l_j, K\}$ و کت‌های مورد نظر در این پایان نامه به ذکر یک مثال می‌پردازیم.

سیستمی که در این مثال به آن می‌پردازیم متشکل است از دو نقطه‌ی کوانتومی که هر کدام از آن‌ها دارای دو تراز انرژی می‌باشد و همچنین از یک کاواک که دارای دو مد است که تعداد بیشینه‌ی مجاز فوتون در هر مد، سه فوتون می‌باشد. بنابراین کت حالت سیستم به صورت رابطه‌ی (۱۸-۳) در می‌آید.

$$|\phi(t)\rangle = \sum_{n_1=0}^3 \sum_{n_2=0}^3 \sum_{a_1=1}^2 \sum_{a_2=1}^2 \Phi(n_2, n_1, a_2, a_1) |n_2\rangle |n_1\rangle |a_2\rangle |a_1\rangle \quad (18-3)$$

که در آن n_2 و n_1 به ترتیب تعداد فوتون‌های حاضر در مد اول و دوم کاواک، همچنین a_2 و a_1 به ترتیب نشان دهنده‌ی تراز انرژی نقطه‌ی کوانتومی اول و دوم می‌باشند. در این سیستم هر کدام از نقاط کوانتومی و مدهای کاواک به مثابه‌ی یک زیر سیستم می‌باشد، بنابراین تعداد کل زیر سیستم‌ها برابر با چهار است. رابطه‌ی (۱۴-۳)، عبارت $c_{i,j}$ را برای چندین i و j که شرط $1 \leq i < j \leq m$ را ارضا کنند، محاسبه می‌کند. در مثالی

که ما در این بخش به بررسی آن می‌پردازیم، شش حالت ممکن برای جفت (i, j) که شرط فوق را ارضا کند، وجود دارد. ما در این بخش، عبارت $C_{i,j}$ را برای یک حالت از شش حالت ممکن بسط می‌دهیم تا خواننده درک بهتری از هم‌نوایی داشته باشد. در مثال ما، نقاط کوانتومی دوم و اول به ترتیب زیر سیستم‌های اول و دوم هستند. همچنین مدهای دوم و اول کاواک، زیرسیستم‌های سوم و چهارم هستند.

اگر (i, j) به صورت $(۲, ۳)$ اختیار شود، رابطه‌ی $(۱۵-۳)$ به قرار زیر در می‌آید

$$C_{2,3} = \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_4=0}^3 \sum_{l_1=1}^2 \sum_{l_4=0}^3 \sum_{k_2 < l_2=1}^2 \sum_{k_3 < l_3=0}^3 |a\{k_1, k_2, k_3, k_4\}a\{l_1, l_2, l_3, l_4\} - a\{k_1, k_2, l_3, k_4\}a\{l_1, l_2, k_3, l_4\} - a\{k_1, l_2, k_3, k_4\}a\{l_1, k_2, l_3, l_4\} + a\{k_1, l_2, l_3, k_4\}a\{l_1, l_2, l_3, l_4\}|^2$$

(۱۹-۳)

هر کدام از اندیس‌ها در رابطه‌ی فوق به یک زیر سیستم خاص اشاره دارد که کران بالای هر حاصل جمع نیز با توجه به آن زیر سیستم مشخص می‌شود. به عنوان مثال اندیس k_4 به زیرسیستم چهارم اشاره دارد که چون مد کاواک است، کران بالای آن برابر با ۳ می‌شود. با توجه به این نکته هر عبارت به فرم $a\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ در رابطه‌ی $(۱۹-۳)$ به یک ضریب خاص در کت حالت سیستم اشاره دارد، به این ترتیب که مقدار هر کدام از اندیس‌ها نشان‌دهنده‌ی حالتی است که زیر سیستم مربوطه در آن قرار دارد. به عنوان مثال عبارت $a\{1, 2, 2, 3\}$ نشان‌دهنده‌ی ضریب کتی است که در آن نقطه‌ی کوانتومی دوم در تراز اول و نقطه‌ی کوانتومی اول در تراز دوم قرار دارد، همچنین در مد اول کاواک دو فوتون و در مد دوم کاواک سه فوتون موجود می‌باشد.

اگر برای تمام حالات ممکن رابطه‌ی (۳-۱۴) به دست آید و در رابطه‌ی (۳-۱۵) جایگزین گردد مقدار هم‌نوایی

به دست می‌آید.

فصل چهارم: نتایج عددی و بحث

با مقدماتی که در فصل دوم و سوم ذکر شد، خواننده با مبانی نظری و همچنین الگوریتم برنامه‌ی MATLAB نوشته شده آشنا گردید. در این فصل برنامه‌ی مذکور را برای یک سیستم در سه رژیم تزویج ضعیف، تزویج قوی و تزویج بسیار قوی اجرا می‌نماییم و پارامترهای مختلف سیستم را رسم می‌نماییم. مشاهده خواهد شد که در رژیم تزویج ضعیف نتایج عددی با نتایج هامیلتونی جینس-کامینگز-پاول هم‌خوانی کامل داشته، اما با افزایش ثابت تزویج و ورود به رژیم تزویج بسیار قوی، تئوری جینس-کامینگز-پاول از حیث ارتفاع ساقط شده و این هامیلتونی منجر به جواب‌های غیر دقیق می‌شود.

این سیستم از یک نقطه‌ی کوانتومی که دارای دو تراز انرژی است و همچنین یک کاواک تک مد تشکیل شده است که در آن حداکثر ۹ فوتون می‌تواند حاضر باشد.

کت حالت سیستم را می‌توان به شکل رابطه‌ی (۴-۱) نوشت

$$|\phi(t)\rangle = \sum_{i=e,g} \sum_{n=0}^9 \Phi(i, n) |i\rangle |n\rangle \quad (۴-۱)$$

همچنین مجموعه روابط (۲-۲۹) تا (۲-۳۲) به شکل روابط (۴-۲) تا (۴-۵) در می آیند

$$\hat{\mathbb{H}} = \hat{\mathbb{H}}_0 + \hat{\mathbb{H}}_{r,E} + \hat{\mathbb{H}}_{r,r} \quad (۲-۴)$$

$$\hat{\mathbb{H}}_0 = E_g \hat{\sigma}_g + E_e \hat{\sigma}_e + \hbar \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (۳-۴)$$

$$\hat{\mathbb{H}}_{r,E} = (\gamma \hat{\sigma} + \gamma^* \hat{\sigma}^\dagger)(g \hat{a} + g^* \hat{a}^\dagger) \quad (۴-۴)$$

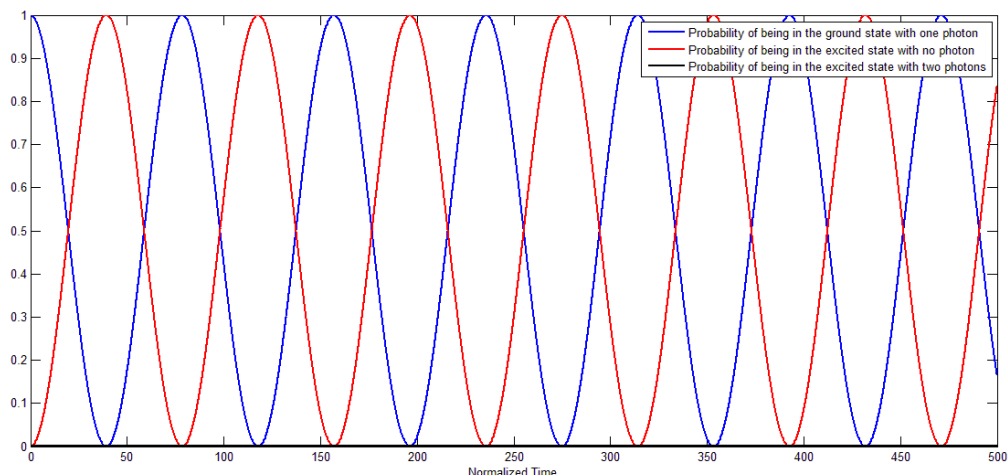
$$\hat{\mathbb{H}}_{r,r} = 0 \quad (۵-۴)$$

که در آن E_g و E_e به ترتیب انرژی ترازهای پایه و برانگیخته می باشند، Ω نیز نشانگر بسامد مد کاواک می باشد، γ نشانگر میزان دو قطبی تولید شده توسط نقطه‌ی کوانتومی و g بیانگر شدت تزویج بین گذار اتمی و مد کاواک است. هامیلتونی دو قطبی-دوقطبی در این سیستم برابر با صفر است زیرا سیستم تنها از یک نقطه‌ی کوانتومی تشکیل شده است و در نتیجه هیچ برهم کنشی بین دو دوقطبی به وجود نمی آید.

۴-۱- رژیم تزویج ضعیف

شرط قرار گرفتن سیستم در این رژیم این است که ثابت تزویج بسیار کوچکتر از بسامد مد کاواک و گذار نقطه‌ی کوانتومی باشد. حالت اولیه سیستم به گونه‌ای است که نقطه‌ی کوانتومی در تراز پایه قرار دارد و یک فوتون نیز در کاواک حاضر است. در این قسمت ثابت تزویج (g) برابر با 0.04 و بسامد مد کاواک Ω و گذار بین دو تراز انرژی نقطه‌ی کوانتومی $\left(\omega_0 = \frac{E_e - E_g}{\hbar}\right)$ برابر با 10 اختیار شده است.

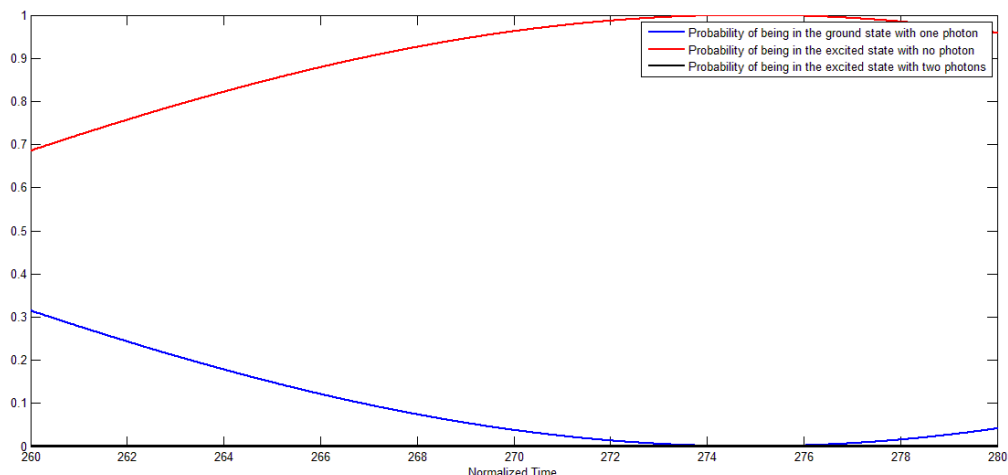
معادله‌ی (۳-۱) را برای این سیستم و با شرایطی که ذکر شد حل می نمایم.



شکل ۴-۱- احتمال حالات مختلف در رژیم تزویج ضعیف

در شکل فوق منحنی آبی نشان‌دهنده‌ی احتمال حضور سیستم در حالتی است که در آن نقطه‌ی کوانتومی در تراز پایه باشد و یک فوتون در کاواک وجود داشته باشد $(|\Phi(g, 1)|^2)$ ، منحنی قرمز نشان‌دهنده‌ی احتمال حضور سیستم در حالتی است که در آن نقطه‌ی کوانتومی در تراز برانگیخته بوده و هیچ فوتونی در کاواک موجود نباشد $(|\Phi(e, 0)|^2)$. منحنی مشکی رنگ، نشان‌دهنده‌ی احتمال حالتی است که نقطه‌ی کوانتومی در تراز برانگیخته بوده و دو فوتون در کاواک حاضر باشد. در واقع این منحنی تأثیر جمله‌ی $\sigma^+ a^+$ که در تقریب موج چرخنده از آن صرف‌نظر شده بود را نمایان می‌سازد. شکل (۴-۲)، منحنی مشکی رنگ را از نمای نزدیک‌تر نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود، در رژیم تزویج ضعیف تأثیر این جمله دقیقاً برابر با صفر است.

هم‌چنین پارامتر هم‌نوایی که در روابط (۳-۱۴) و (۳-۱۵) تعریف شده است، برای این سیستم با شرایط اولیه ذکر شده به دست آمده است که در شکل (۴-۳) قابل مشاهده است. تغییرات هم‌نوایی در شکل (۴-۳) به نظر



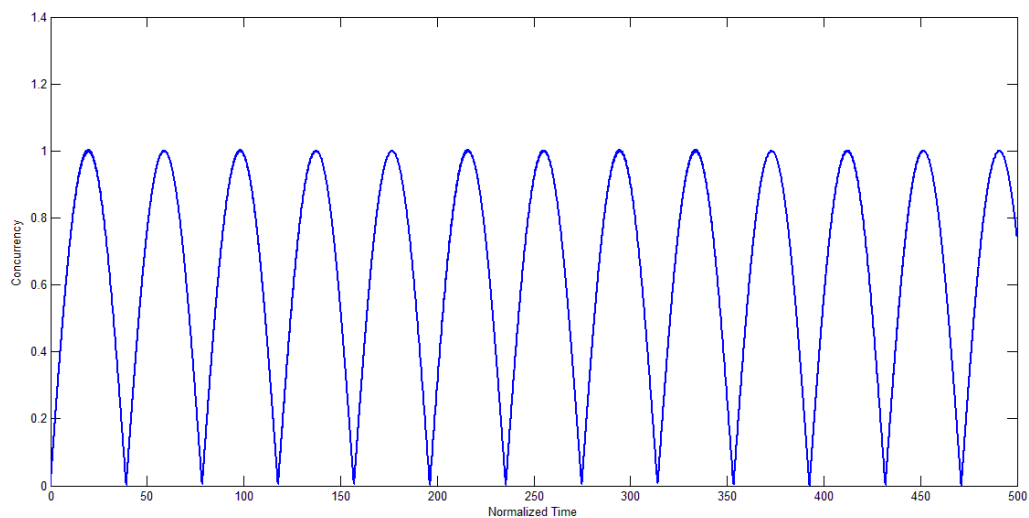
شکل ۴-۲ میزان تأثیر جمله‌ی $\sigma^\dagger a^\dagger$ بر رژیم تزویج ضعیف

کاملاً صاف به نظر می‌رسد در حالی که اگر از نمایی نزدیک‌تر به آن نگاه کنیم، تغییراتی مانند یک سیگنال مدوله شده در آن قابل تشخیص است. این تغییرات در شکل (۴-۴) با وضوح بالاتری به تصویر کشیده شده است. در شکل (۴-۴)، مقدار بیشینه‌ای از تغییرات هم‌نوایی از نمایی نزدیک‌تر به تصویر کشیده شده است.

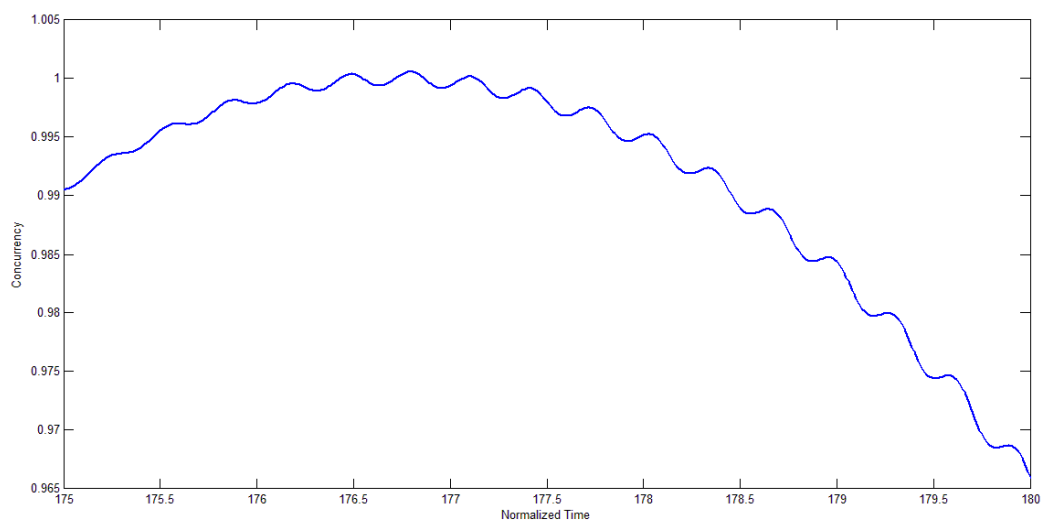
نتایجی که تا به حال ذکر شد بر حالت اولیه‌ای بنا شده بود که در آن تعداد دقیق فوتون‌های حاضر در کاواک مشخص بود، اما این حالت اولیه منجر به میدان‌های ماکروسکوپیکی می‌شود که ارزش فیزیکی ندارد. برای رفع این نقیصه، حالت اولیه سیستم را به صورت منسجم^۱، طبق رابطه‌ی (۴-۶) در نظر می‌گیریم

$$|\phi(t)\rangle = (\Phi_g |g\rangle + \Phi_e |e\rangle) \left(\sum_{n=0}^{24} \sqrt{\frac{\lambda^n}{n!}} e^{-\lambda} |n\rangle \right) \quad (۴-۶)$$

¹ Coherent State



شکل ۳-۴ تغییرات هم‌نوایی در رژیم توزیع ضعیف بر حسب زمان



شکل ۴-۴ منحنی هم‌نوایی در رژیم توزیع ضعیف از نمایی نزدیک‌تر

که در آن کت حالت سیستم به صورت دو زیر سیستم در هم تنیده مربوط به میدان الکترومغناطیسی و حالت نقطه‌ی کوانتومی، تشکیل شده است. هم‌چنین Φ_g و Φ_e ، در حالت کلی اعداد مختلط بوده و باید شرط نرمالیزه بودن، رابطه‌ی (۷-۴)، را نیز ارضا کنند.

$$|\Phi_g|^2 + |\Phi_e|^2 = 1 \quad (7-4)$$

در نمودارهایی که برای این حالت رسم خواهد شد، بزرگی Φ_e و Φ_g یکسان بوده و تنها مقداری اختلاف فاز، $\Delta\phi$ ، بین آنها وجود دارد.

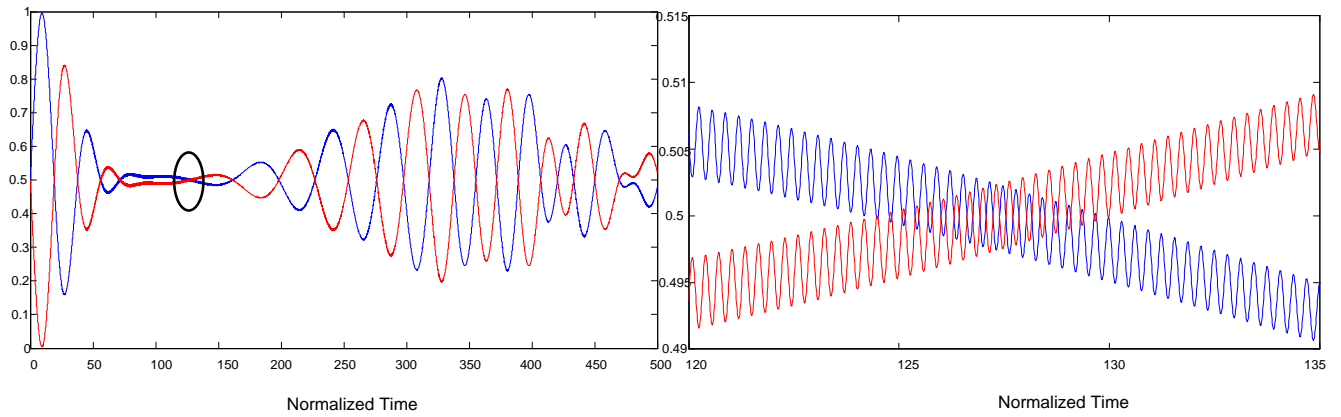
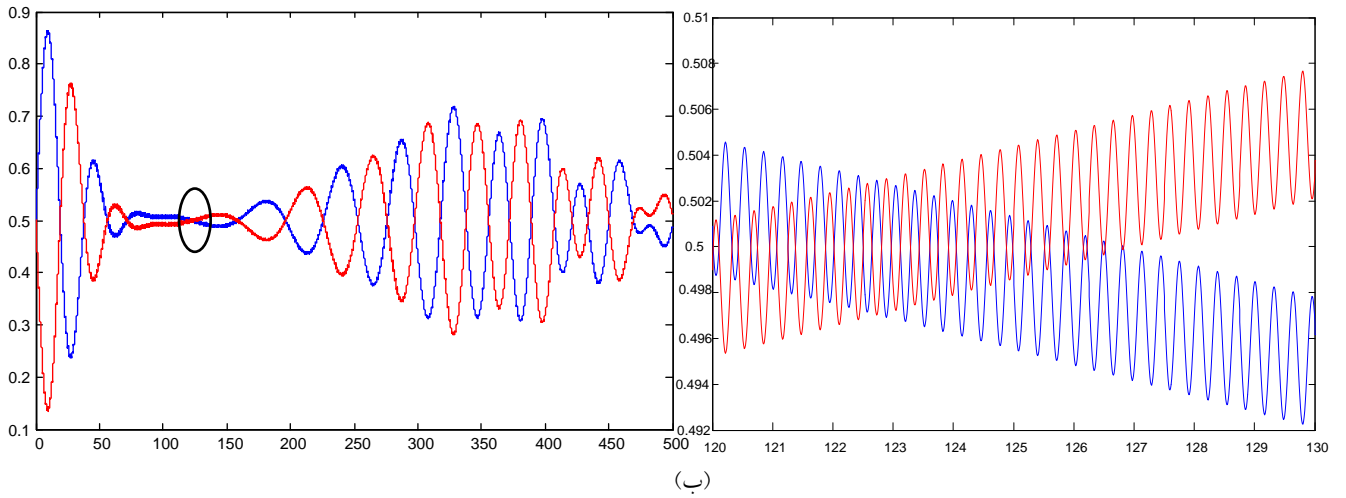
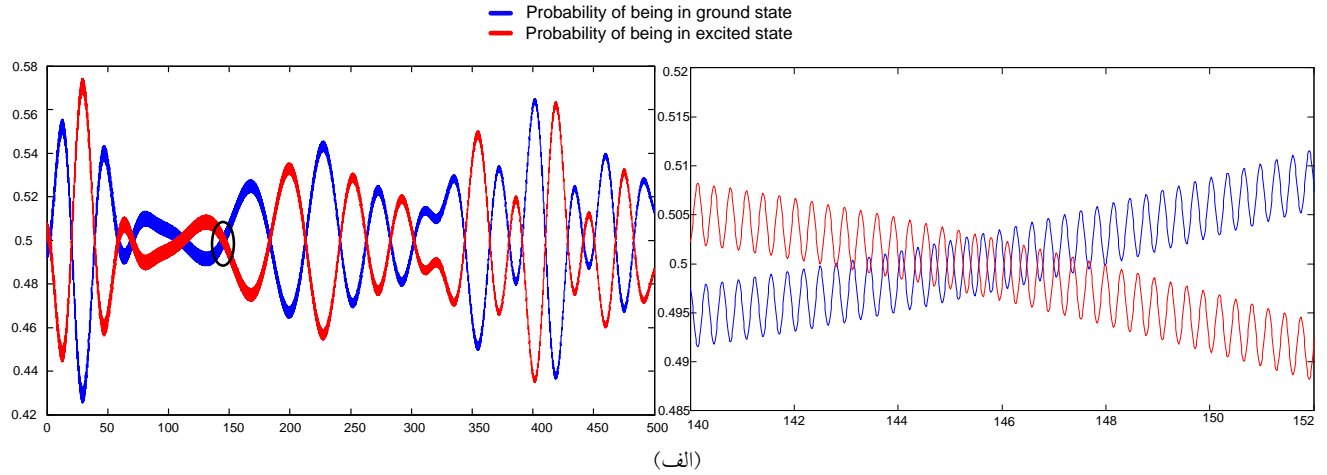
$$\Delta\phi = \phi\Phi_e - \phi\Phi_g \quad (8-4)$$

در شکل (4-5)، احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی در حالت پایه و حالت برانگیخته به ازای $\Delta\phi$ های مختلف نشان داده شده است. در شکل (4-5)، ستون سمت چپ احتمال حالات مختلف را نشان می‌دهد و ستون سمت راست نشان دهنده‌ی قسمتی از شکل سمت چپ است که با بیضی مشکی مشخص شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در تمامی نمودارهای فوق یک موج سینوسی بر منحنی اصلی سوار شده است. با افزایش $\Delta\phi$ از دامنه‌ی این نوسانات کاسته شده و دامنه‌ی منحنی اصلی بیشتر می‌شود. به‌طوریکه در حالتی که اختلاف فاز برابر با صفر است دامنه‌ی احتمالات به 0.58 می‌رسد و اگر اختلاف فاز را به نود درجه افزایش دهیم، دامنه‌ی احتمالات به مقدار بیشینه‌ی خود می‌رسد.

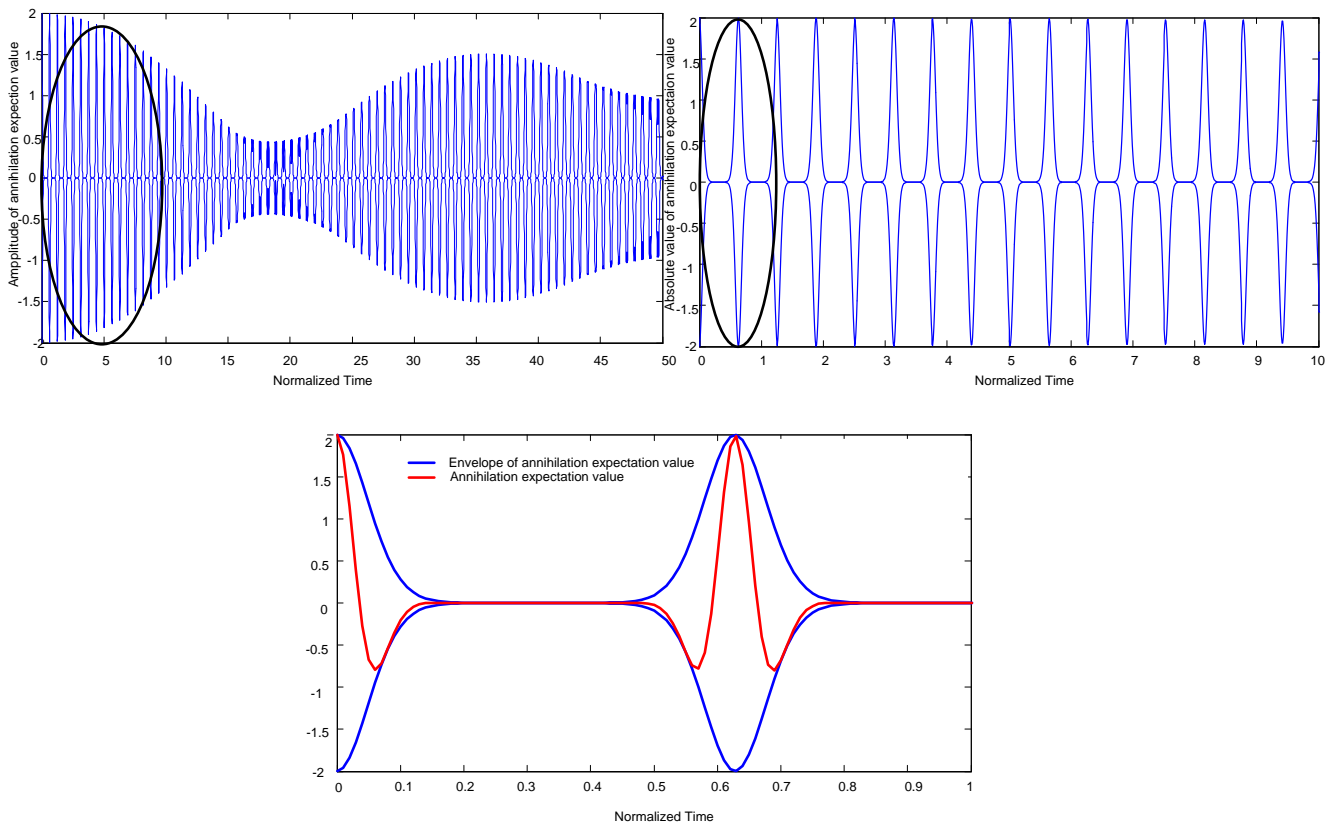
حال برای سیستم فوق و با شرایط اولیه‌ی ذکر شده، مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی که در رابطه‌ی (2-80) معرفی شده است را به دست می‌آوریم. رابطه‌ی (2-80) برای سیستم مورد نظر ما به صورت زیر در می‌آید

$$\langle \phi(t) | a_{v'} | \phi(t) \rangle = \sum_{i=e,g} \sum_{n=0}^{24} \sqrt{n} \phi(i, n) \phi^*(i, n-1) \quad (9-4)$$

مقدار قدر مطلق رابطه‌ی (4-9) در شکل (4-6) رسم شده است



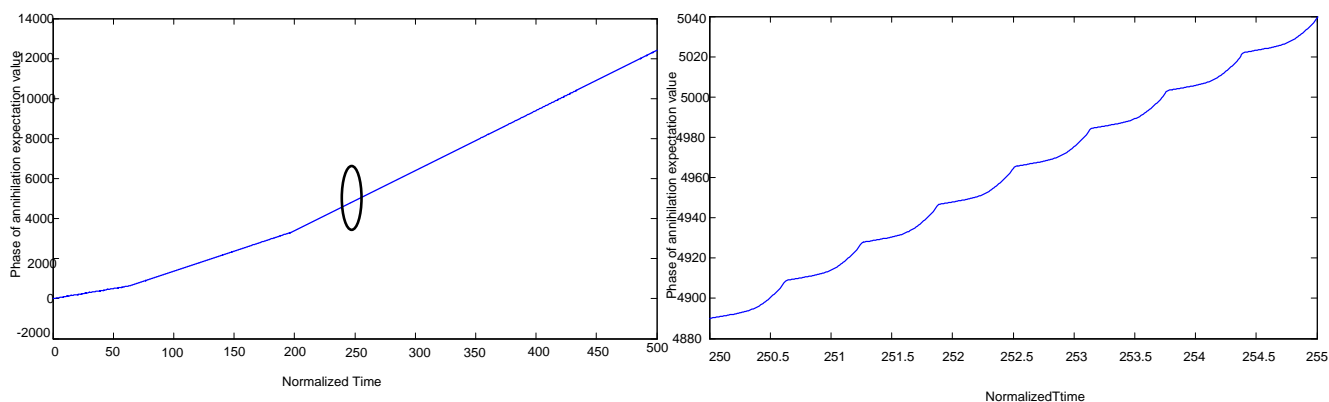
شکل ۴-۵ احتمال حضور در حالت پایه و برانگیخته در رژیم تزویج ضعیف برای الف) $\Delta\phi = 0$ ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$



شکل ۶-۴ اندازه مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج ضعیف

در قسمت سمت چپ و بالای شکل (۶-۴) تغییرات کلی پوش مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی مشخص شده است، در نمودار سمت راست و بالا پوش مقدار چشم‌داشتی از نمایی نزدیک‌تر مشخص شده است و در قسمت پایین مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی به رنگ قرمز به همراه پوش آن به رنگ آبی به نمایش گذشته شده است. قسمت‌هایی از نمودار که با بیضی مشکی رنگ مشخص شده است همان قسمت‌هایی می‌باشند که در نمودار بعدی با وضوح بیشتر به نمایش گذشته شده‌اند. علاوه بر قدر مطلق مقدار چشم‌داشتی، تغییرات فاز آن نیز محاسبه شده است که در شکل (۷-۴) رسم شده است. همان‌طور که از نمودار

تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی مشخص است، این نمودار به هیچ وجه خطی نبوده و حتی در قسمت‌هایی که به نظر می‌رسد نمودار خطی است دارای اعوجاج‌هایی می‌باشد.



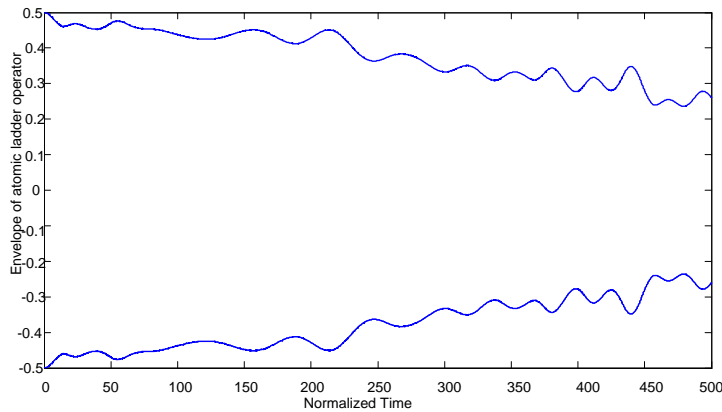
شکل ۷-۴ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج ضعیف

حال به محاسبه‌ی مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی می‌پردازیم. مقدار چشم‌داشتی این عمل‌گر در رابطه‌ی (۹۸-۲) آمده است که برای سیستم مدنظر ما به صورت زیر در می‌آید

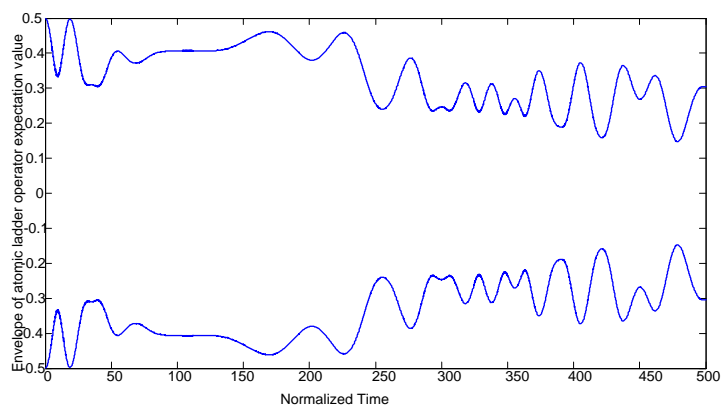
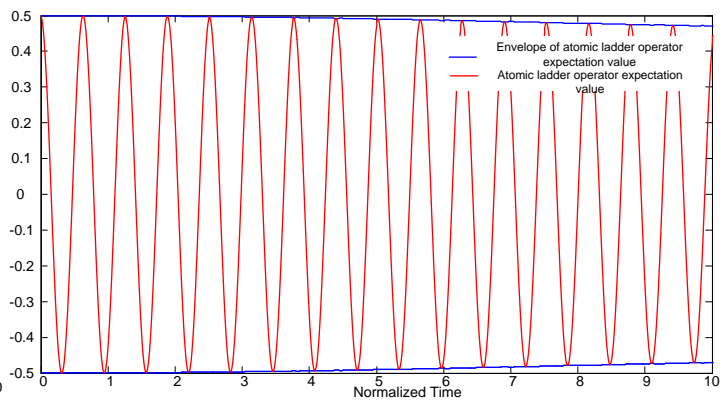
$$\langle \phi(t) | \hat{\sigma} | \phi(t) \rangle = \sum_{n=0}^{24} \Phi^*(g, n) \Phi(e, n) \quad (۱۰-۴)$$

قدر مطلق معادله‌ی (۱۰-۴) به ازای مقادیر مختلف $\Delta\phi$ در شکل (۸-۴) رسم شده است. در سمت چپ هر قسمت پوش منحنی مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی و در سمت راست آن پوش به همراه خود منحنی مقدار چشم‌داشتی به تصویر کشیده شده است.

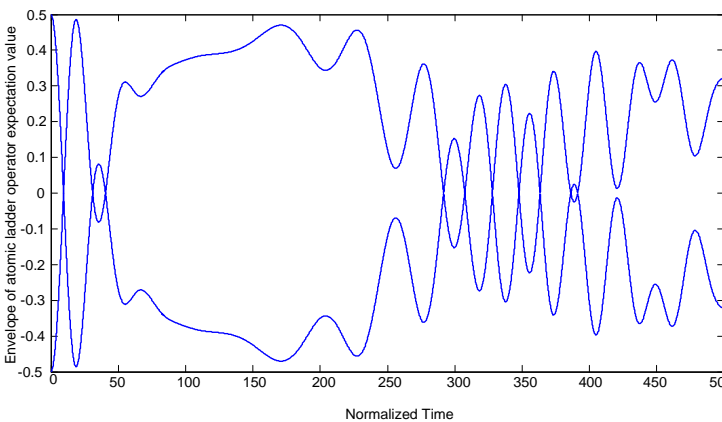
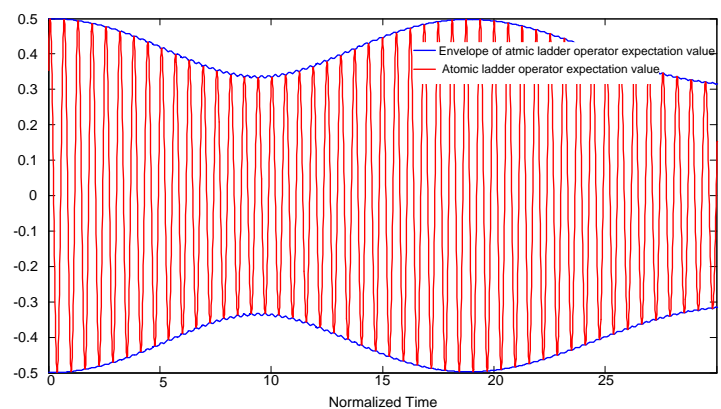
منحنی فاز معادله‌ی (۱۰-۴) در شکل (۹-۴) رسم شده است، همان‌گونه که در شکل (۹-۴) واضح است، تغییرات فاز به صورت کاملاً خطی می‌باشد و هیچ‌گونه اعوجاجی در آن وجود ندارد و به ازای مقادیر مختلف $\Delta\phi$ هیچ تغییری در نمودار فاز رخ نمی‌دهد.



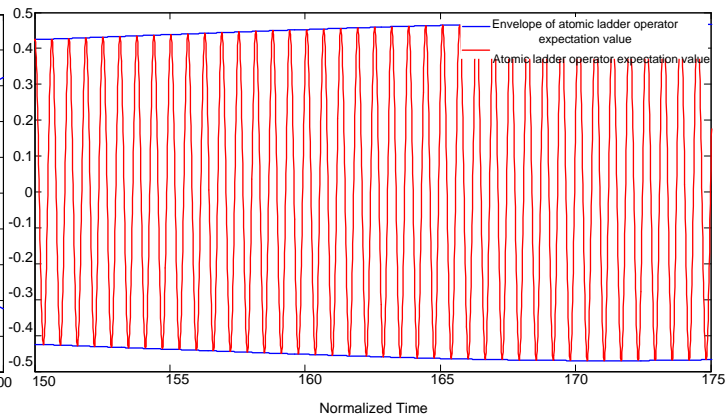
(الف)



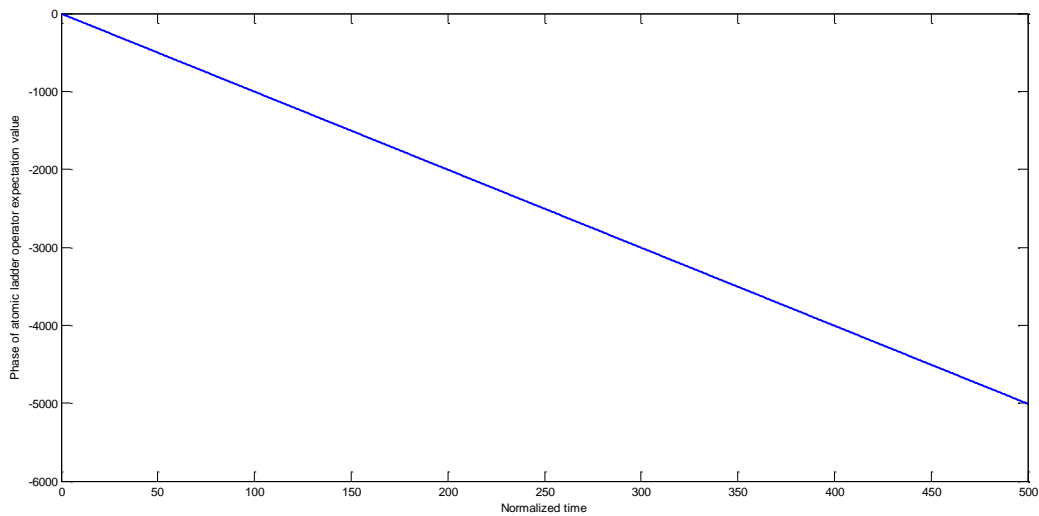
(ب)



(ج)



شکل ۴-۸ قدر مطلق مقدار چشم‌داشتی برای عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج ضعیف برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$



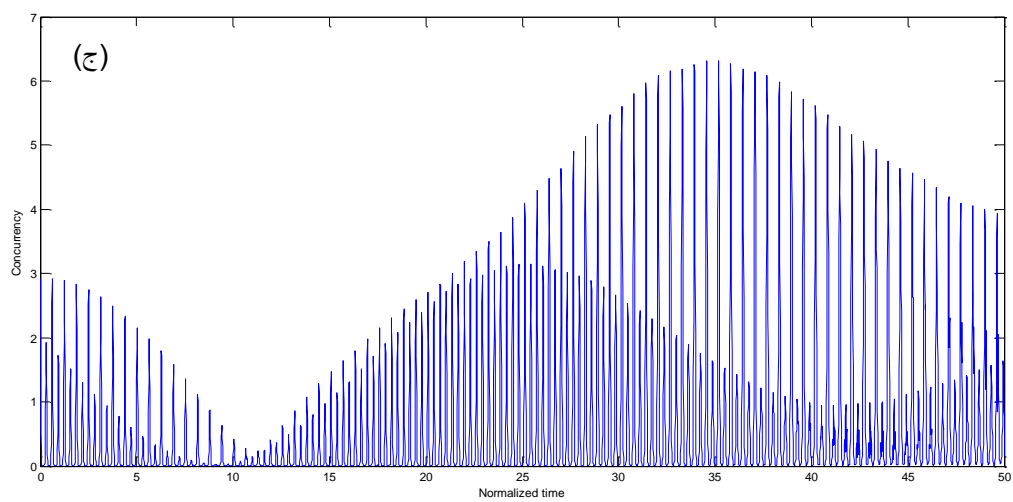
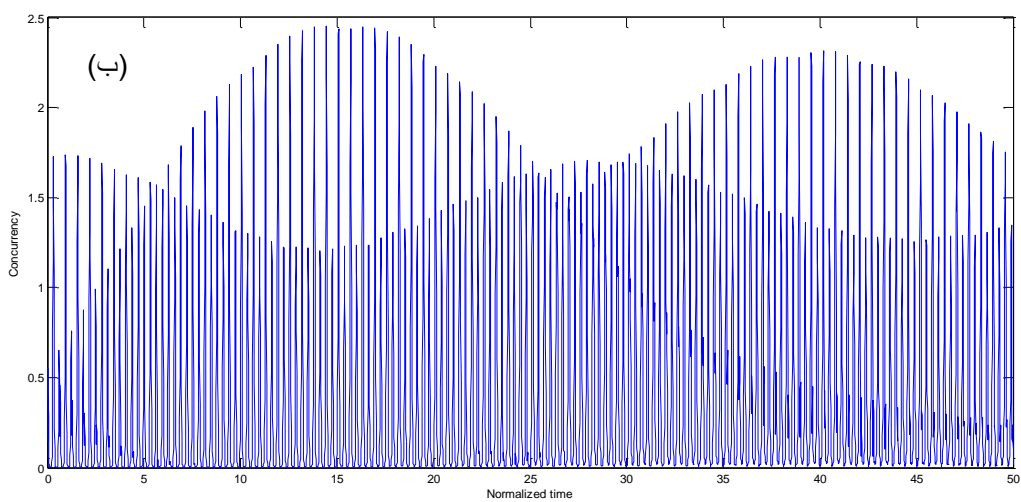
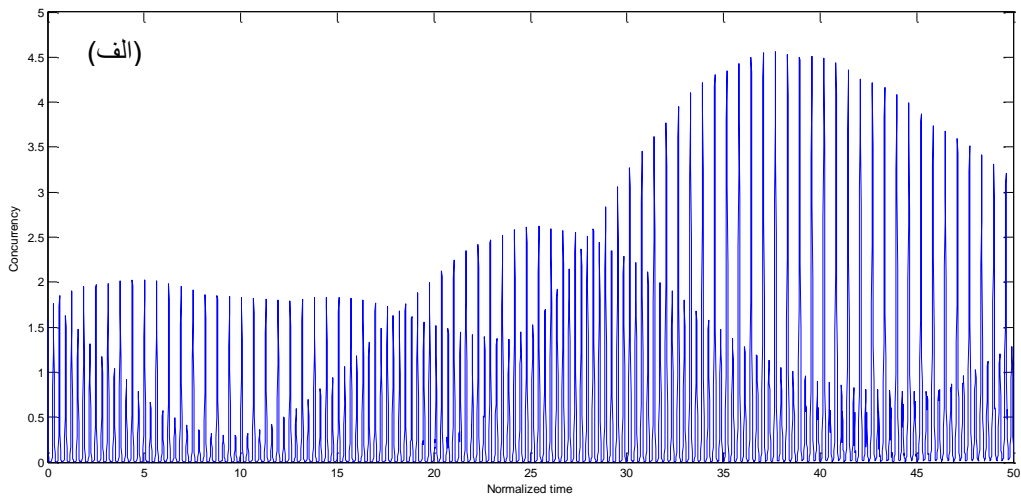
شکل ۹-۴ منحنی فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج ضعیف

به عنوان قسمت پایانی بخش تزویج ضعیف، در این قسمت به بررسی پارامترهایی خواهیم پرداخت که نشان دهنده‌ی میزان درهم‌تنیدگی موجود در سیستم است. یکی از این پارامترها هم‌نوایی است که در شکل (۴-۱۰) برای مقادیر مختلف $\Delta\phi$ رسم شده است.

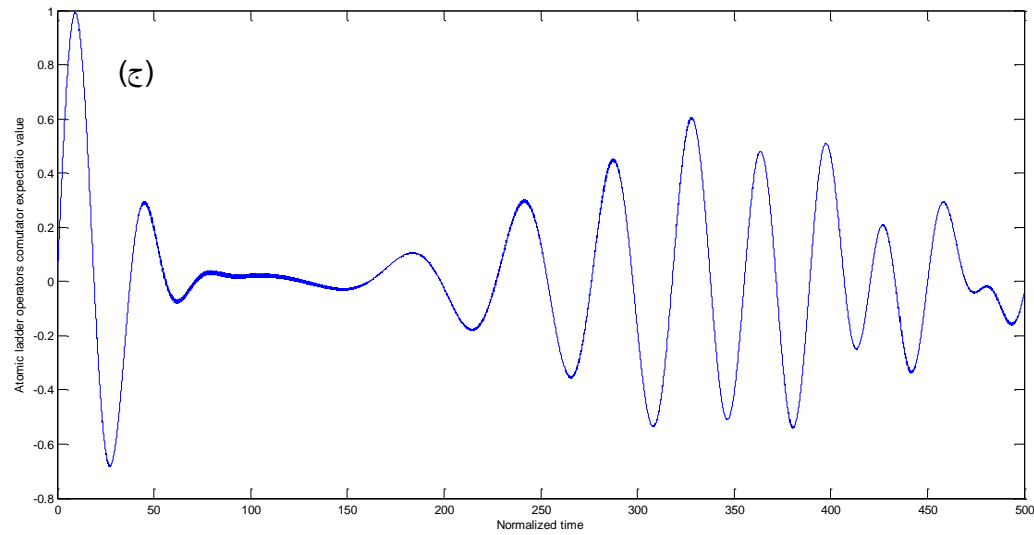
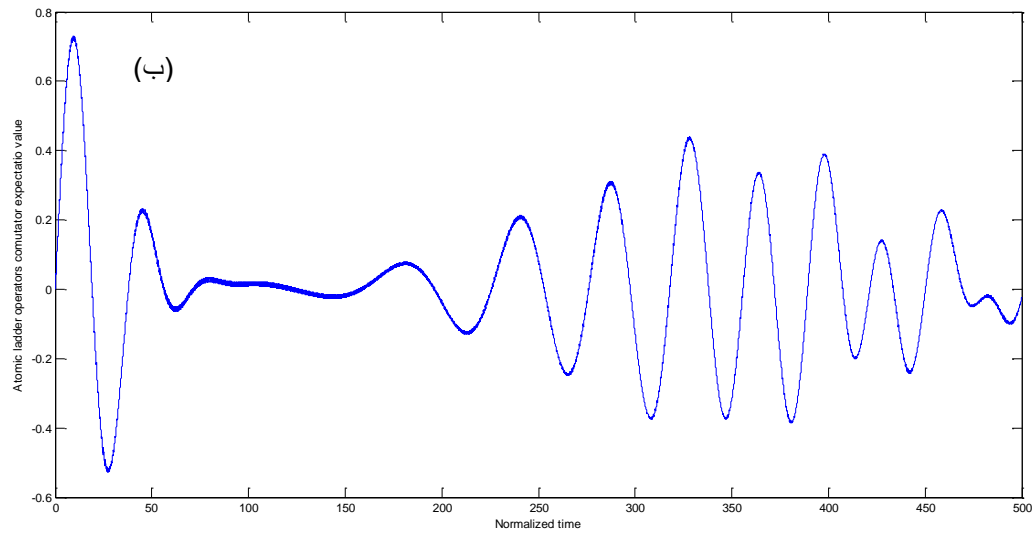
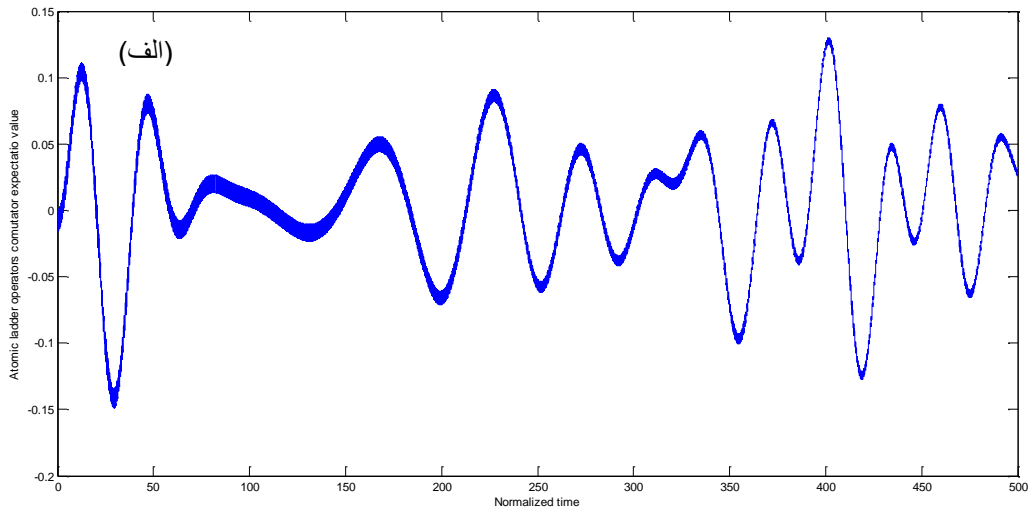
اما معیار دیگر برای مشخص کردن درهم‌تنیدگی موجود در سیستم مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر $\sigma_z = [\sigma, \sigma^\dagger]$ است که به صورت رابطه‌ی (۴-۱۱) تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}
 \langle \phi(t) | [\sigma, \sigma^\dagger] | \phi(t) \rangle &= \langle \phi(t) | (\sigma\sigma^\dagger - \sigma^\dagger\sigma) | \phi(t) \rangle \\
 &= \langle \phi(t) | \sigma\sigma^\dagger | \phi(t) \rangle - \langle \phi(t) | \sigma^\dagger\sigma | \phi(t) \rangle \\
 &= \sum_n |\Phi(g, n)|^2 - \sum_n |\Phi(e, n)|^2 \quad (۴-۱۱)
 \end{aligned}$$

رابطه‌ی (۴-۱۱) نیز برای مقادیر مختلف $\Delta\phi$ در شکل (۴-۱۱) رسم شده است. همان‌گونه که در شکل مشخص است با افزایش مقدار فاز، دامنه‌ی تغییرات مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر $\hat{\sigma}_z$ افزایش می‌یابد و در فاز نود



شکل ۴-۱۰ پارامتر هم‌نوایی در رژیم تزویج ضعیف برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$



شکل ۴-۱۱ مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر $\hat{\sigma}_z$ در رژیم تزویج ضعیف برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$

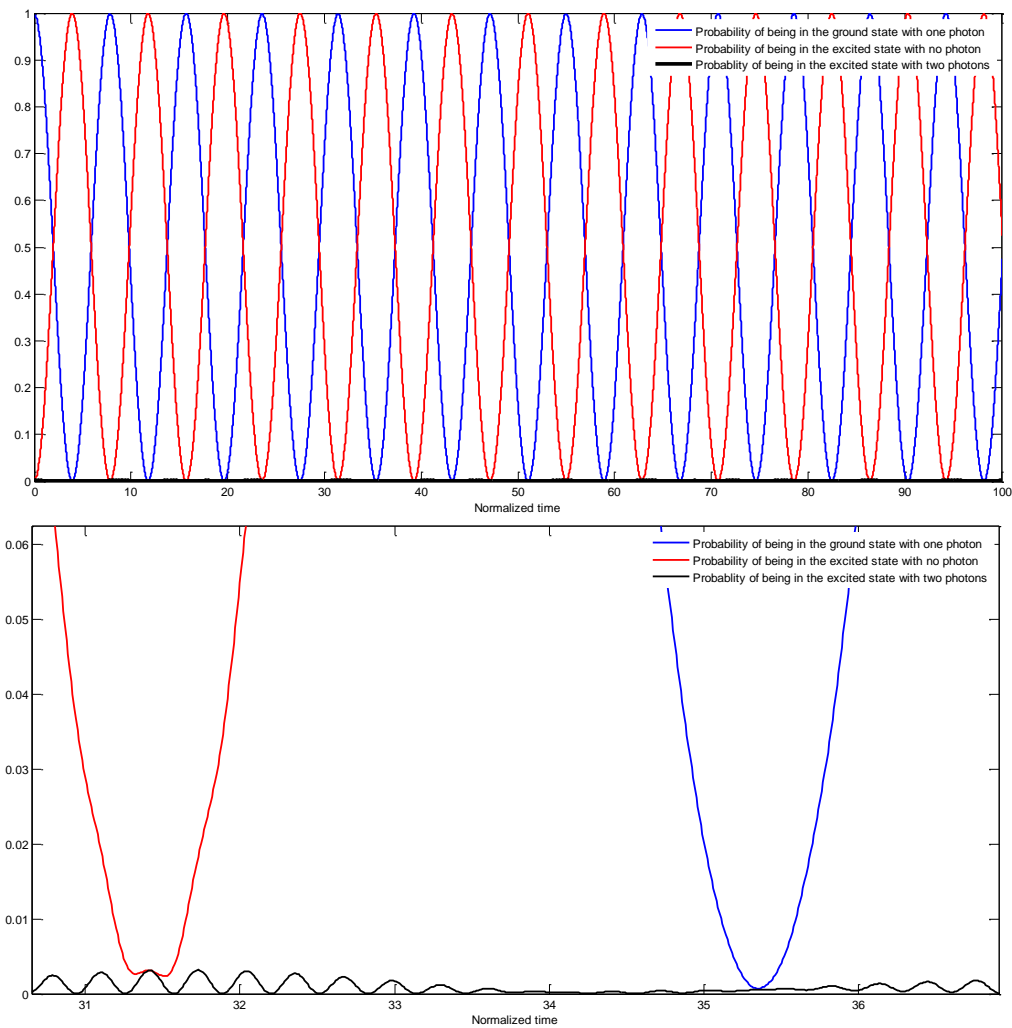
درجه به پیشینه‌ی مقدار خود می‌رسد. همچنین با گذشت زمان از شدت نوسانات مدوله شده بر منحنی اصلی کاسته می‌شود.

۴-۲- رژیم تزویج قوی

در این بخش به بررسی پارامترهای سیستم در رژیم تزویج قوی می‌پردازیم. سیستم مورد بحث در این قسمت همان سیستمی است که در قسمت تزویج ضعیف درباره‌ی آن بحث شد، با این تفاوت که ثابت تزویج در این قسمت ۱۰ برابر گشته و مساوی با ۰.۴ قرار داده شده است.

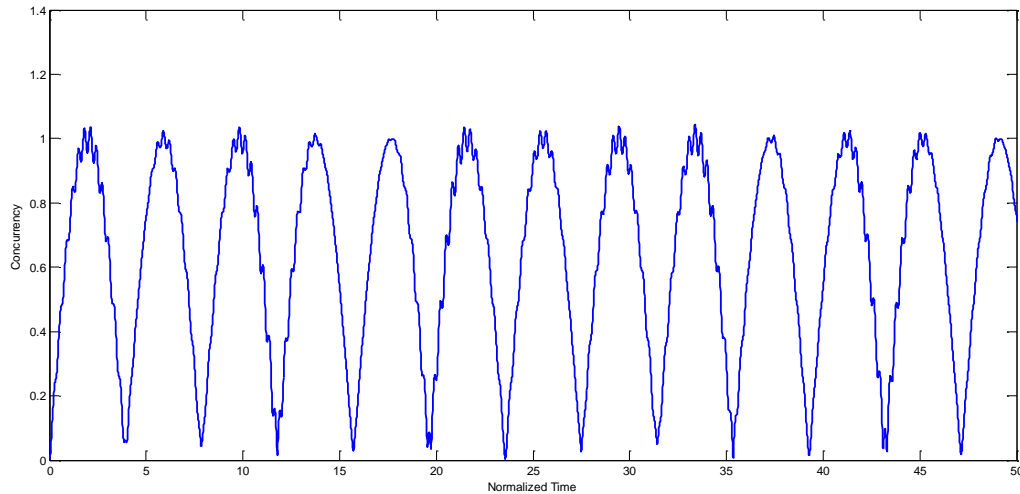
ابتدا حالت اولیه‌ی سیستم را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که نقطه‌ی کوانتومی در تراز پایه بوده و یک فوتون در کاواک حاضر باشد یا به عبارت دیگر $|\Phi(g, 1)|^2 = 1$. برنامه را برای این سیستم و با شرایط اولیه‌ی ای که ذکر شد اجرا کرده و احتمال حالات مختلف در شکل (۴-۱۲) رسم شده است. در شکل (۴-۱۲) منحنی آبی رنگ نشان دهنده‌ی احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی در تراز پایه و حضور یک فوتون، منحنی قرمز رنگ احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی در تراز برانگیخته بدون هیچ فوتونی در کاواک و منحنی مشکی رنگ احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی در تراز برانگیخته با حضور دو فوتون می‌باشد. همان‌گونه که در شکل (۴-۱۲) قابل مشاهده است، در رژیم تزویج قوی بر خلاف رژیم تزویج ضعیف، تأثیر جمله‌ی $\sigma^+ a^+$ مطلقاً برابر با صفر نمی‌باشد اگر چه تغییرات آن کوچک بوده و قابل صرف نظر می‌باشد. همین امر سبب می‌گردد که در این رژیم، تقریب موج چرخنده معتبر باقی بماند. همچنین منحنی پارامتر هم‌نوایی برای سیستم مذکور با شرایط اولیه‌ی ذکر شده در رژیم تزویج قوی، در شکل (۴-۱۳) رسم شده است. با مقایسه شکل‌های (۴-۳) و (۴-۱۳) در می‌یابیم که با

افزایش ثابت تزویج و گذار از رژیم تزویج ضعیف به رژیم تزویج قوی، منحنی هم‌نوایی به شدت دچار اعوجاج شده است.



شکل ۴-۱۲ احتمال حالات مختلف در رژیم تزویج قوی

حال سیستم را در حالت منسجم طبق رابطه‌ی (۴-۶) قرار می‌دهیم و احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی را در ترازهای پایه و برانگیخته به ازای اختلاف فازهای گوناگون در شکل (۴-۱۴) رسم کرده‌ایم.



شکل ۴-۱۳ تغییرات هم‌نوایی بر حسب زمان در رژیم تزویج قوی

با توجه به شکل دیده می‌شود که با افزایش اختلاف فاز دامنه‌ی نوسانات احتمال حضور در تراز پایه و برانگیخته بیشتر شده و برای اختلاف فاز نود درجه به مقدار بیشینه‌ی خود یعنی برابر با واحد می‌رسد. همچنین با مقایسه شکل‌های (۴-۵) و (۴-۱۴) واضح است که با افزایش ثابت تزویج بین گذار نقطه‌ی کوانتومی و کاواک میدان مغناطیسی، فرکانس نوسانات احتمال حضور در حالت پایه و برانگیخته افزایش یافته است.

در شکل (۴-۱۵)، قدر مطلق مقدار چشم‌داشتی برای عمل‌گر نابودی فوتونی، رابطه‌ی (۴-۹)، در رژیم تزویج قوی در سه نمای مختلف به تصویر کشیده شده است.

در شکل (۴-۱۵)، منحنی آبی رنگ نشان‌دهنده‌ی پوش یا قدر مطلق مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی و منحنی قرمز رنگ، تغییرات زمانی آن است. تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی بر حسب زمان در شکل (۴-۱۶) به نمایش در آمده است. منحنی آبی رنگ نشان‌دهنده‌ی تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی و خط مشکی رنگ به این منظور رسم شده است که میزان انحراف منحنی از نمودار خطی را نمایان سازد. این میزان انحراف با وضوح بالاتری در قسمت سمت راست شکل (۴-۱۶) به نمایش در

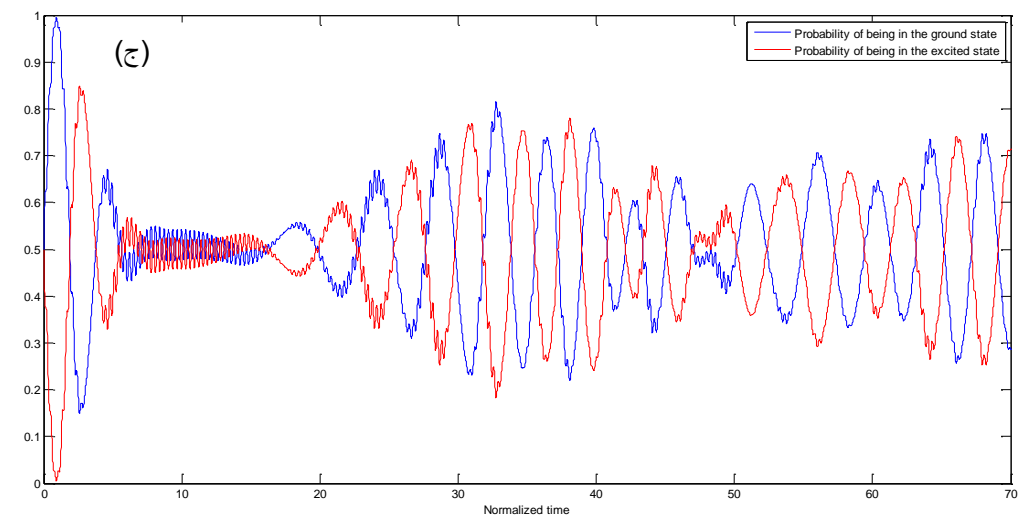
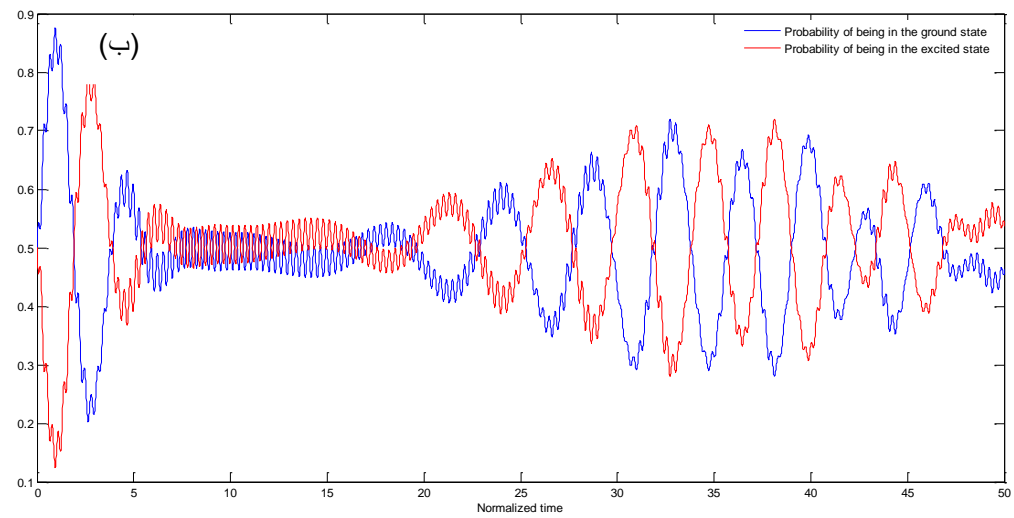
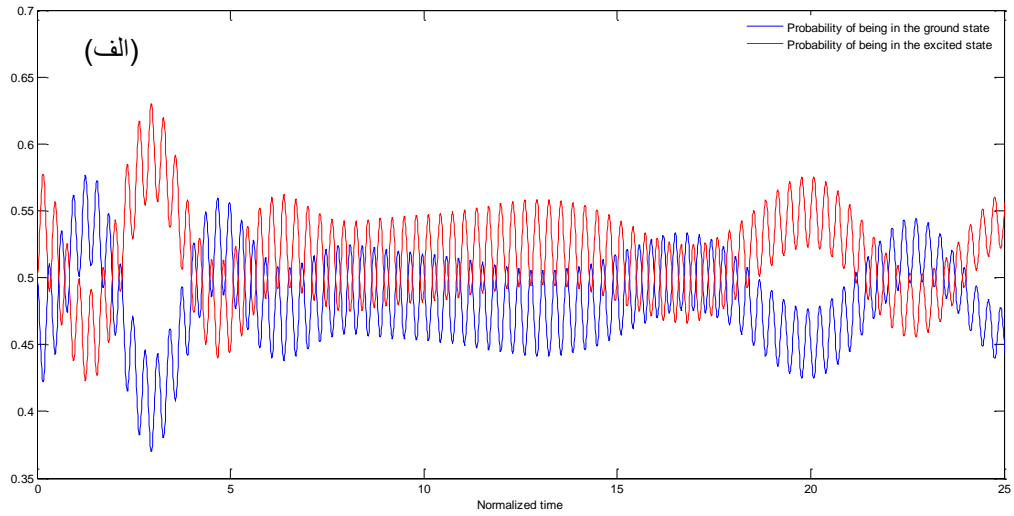
آمده است. با مقایسه شکل‌های (۴-۱۶) و (۴-۷) مشخص است که با افزایش ثابت تزویج میزان اعوجاج‌های موجود در منحنی فاز افزایش یافته است، همچنین در رژیم تزویج قوی، میزان رشد فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در یک بازه‌ی زمانی نسبت به رژیم تزویج ضعیف افزایش یافته است.

حال به بررسی تغییرات مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی، رابطه‌ی (۴-۱۰)، می‌پردازیم. پوش منحنی مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی و نیز خود منحنی این پارامتر به ترتیب به رنگ‌های آبی و قرمز در شکل (۴-۱۷) به ازای اختلاف فازهای گوناگون به تصویر کشیده شده است.

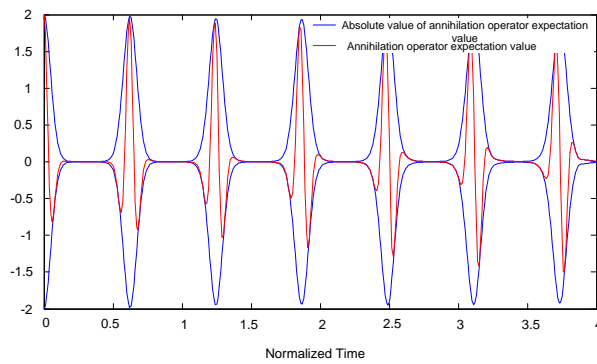
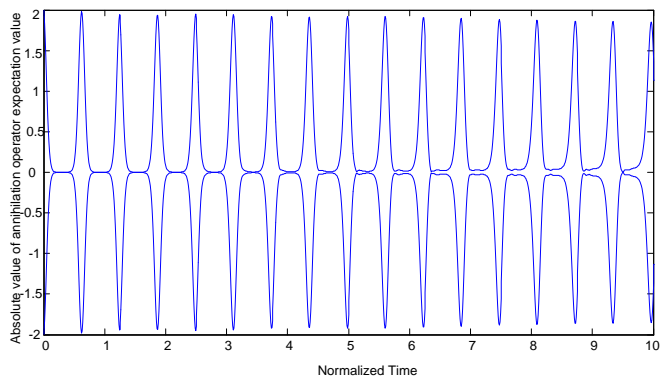
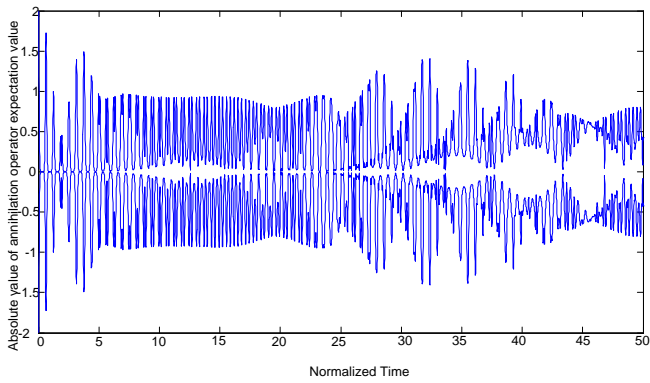
با مقایسه شکل‌های (۴-۸) و (۴-۱۷) مشخص است که با ورود به رژیم تزویج قوی پوش مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی دچار اعوجاج‌های بسیار بیشتری نسبت به رژیم تزویج ضعیف شده است. همچنین با افزایش فاز مشاهده می‌شود که پوش مقدار چشم‌داشتی، بیشتر به فرم سقوط و احیا^۱ در می‌آید.

تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی در شکل (۴-۱۸) رسم شده است. در وهله‌ی اول به نظر می‌رسد همانند رژیم تزویج ضعیف، نمودار فاز کاملاً خطی است، اما با اندکی تأمل در می‌یابیم که نمودار فوق به هیچ وجه خطی نیست.

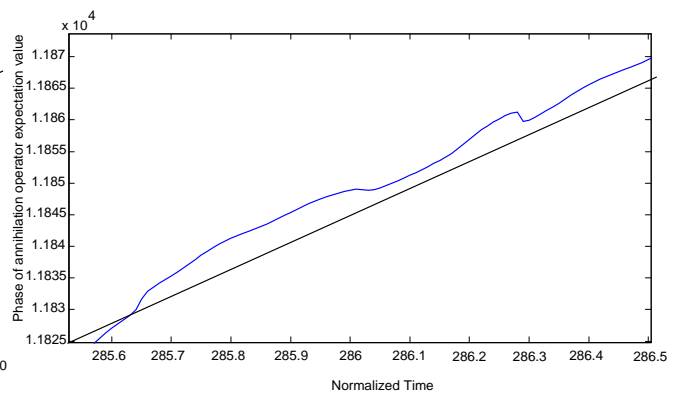
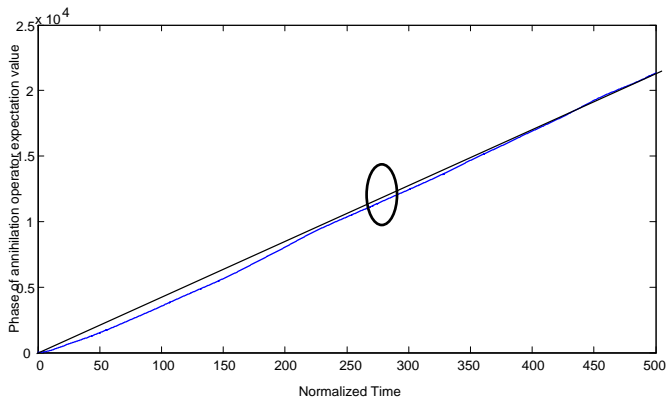
¹ Collapse and Revival



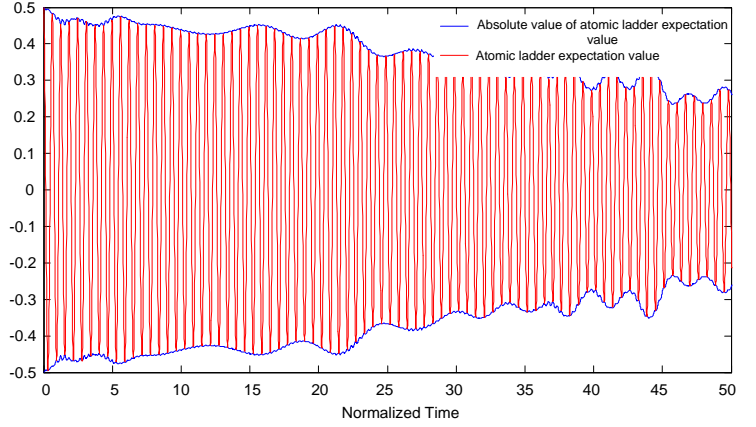
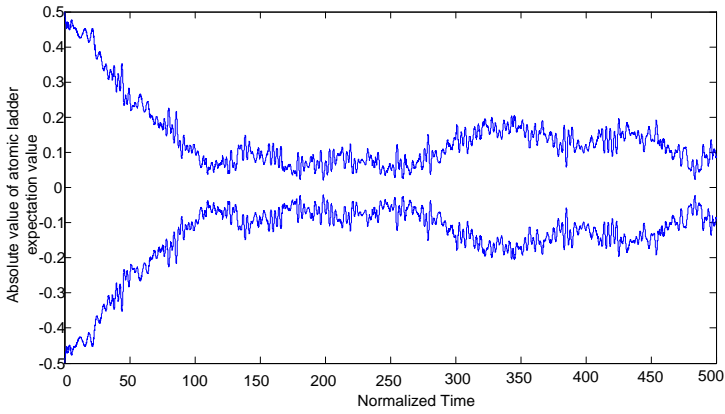
شکل ۴-۱۴ احتمال حضور در حالت پایه و برانگیخته در رژیم تزویج قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$



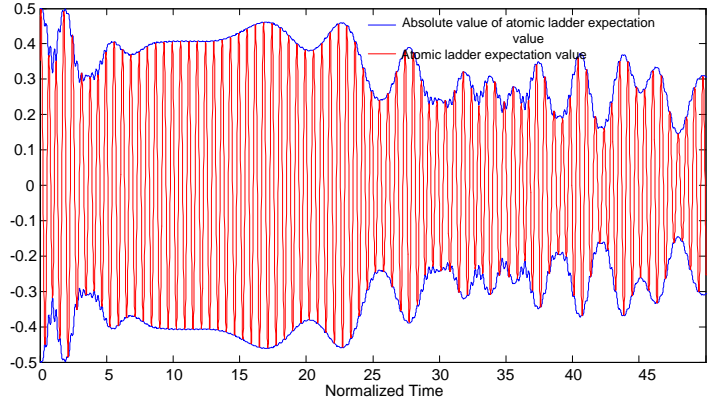
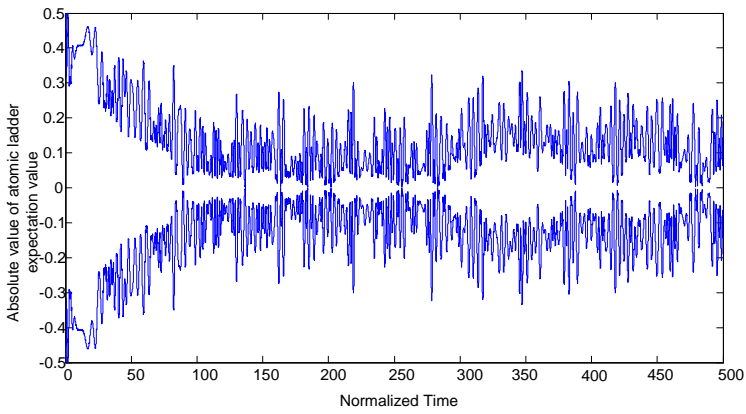
شکل ۴-۱۵ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج قوی



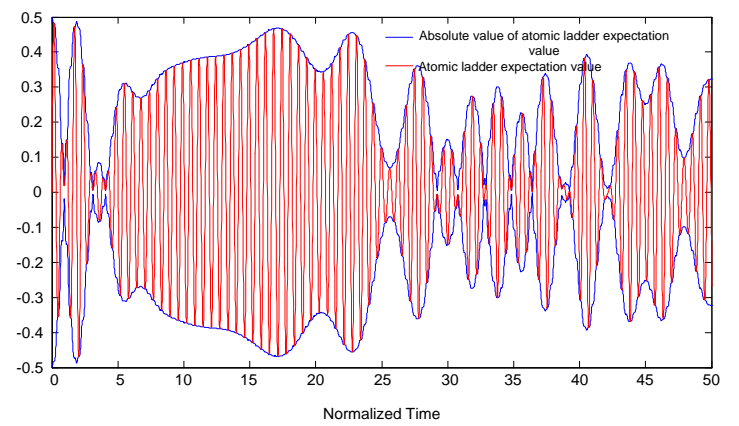
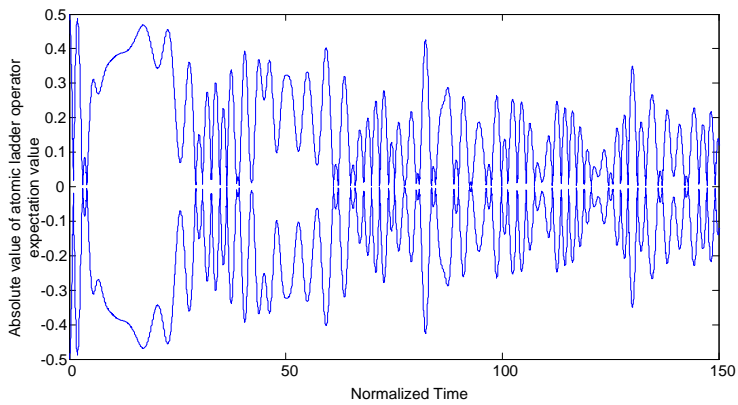
شکل ۴-۱۶ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج قوی



(الف)

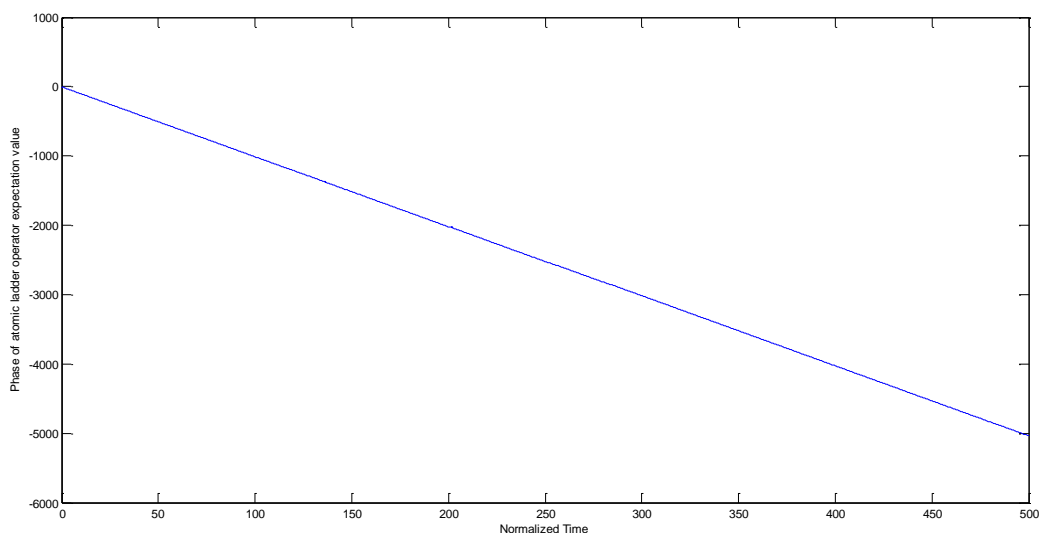


(ب)



(ج)

شکل ۴-۱۷ قدر مطلق چشم‌داشتی برای عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$

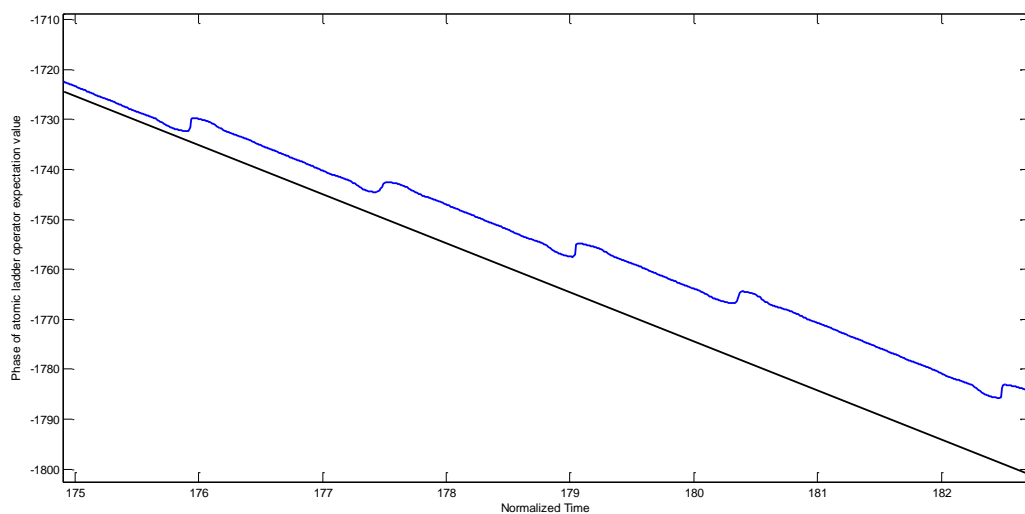


شکل ۴-۱۸ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج قوی

میزان انحراف منحنی فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی از نمودار خطی در شکل (۴-۱۹) به نمایش در آمده است. در شکل (۴-۱۹) نمودار خطی به رنگ مشکی رسم شده است که میزان انحراف منحنی فاز از نمودار خطی به آسانی قابل رویت باشد.

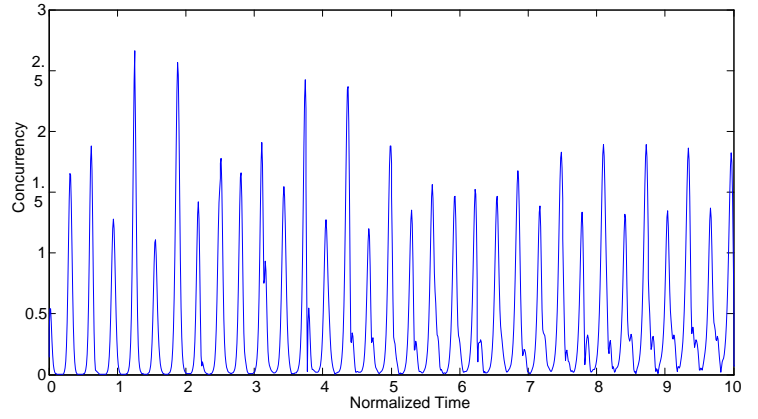
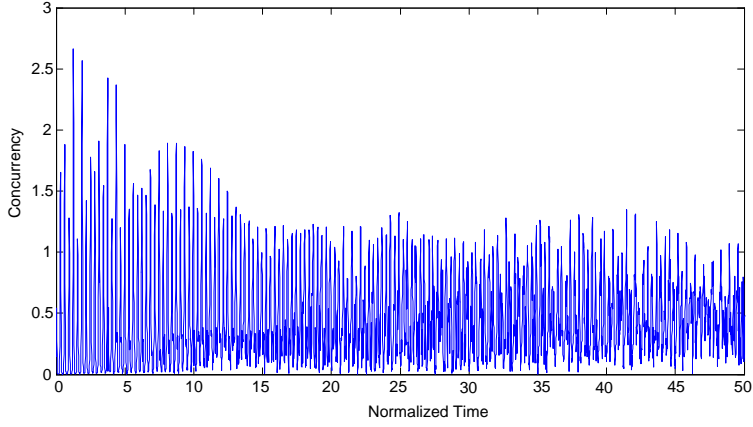
به عنوان آخرین قسمت از این بخش، به بررسی معیارهای درهم‌تنیدگی که شامل پارامترهای هم‌نوایی، روابط (۳-۱۴) و (۳-۱۵)، و همچنین مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر $\hat{\sigma}_z$ ، رابطه‌ی (۴-۱۱) می‌پردازیم.

در شکل (۴-۲۰) پارامتر هم‌نوایی در رژیم تزویج قوی برای سه حالت اختلاف فاز گوناگون به تصویر کشیده شده است. همان‌گونه که در تصویر قابل مشاهده است با افزایش فاز دامنه‌ی تغییرات پارامتر هم‌نوایی افزایش یافته است.

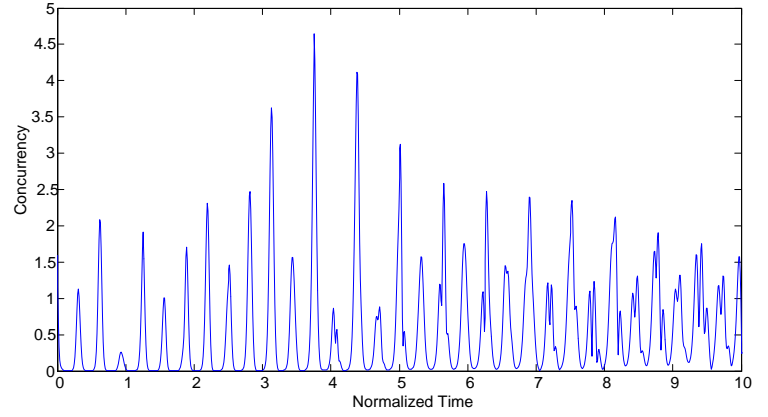
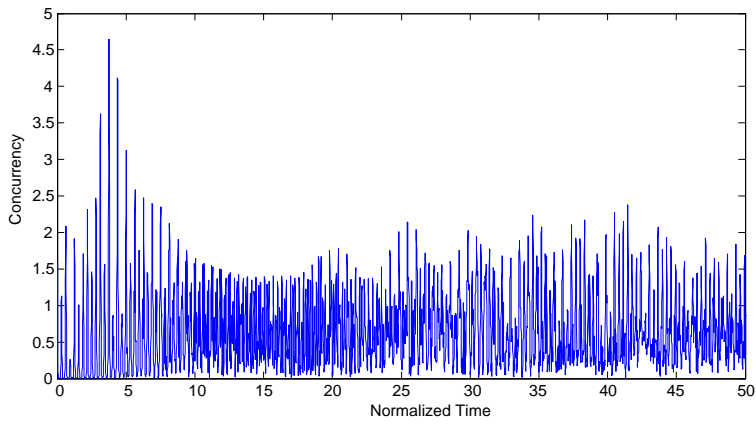


شکل ۴-۱۹ میزان انحراف منحنی فاز مقدار چشم‌داشتی عمل گر نردبانی اتمی از نمودار خطی در رژیم تزویج قوی

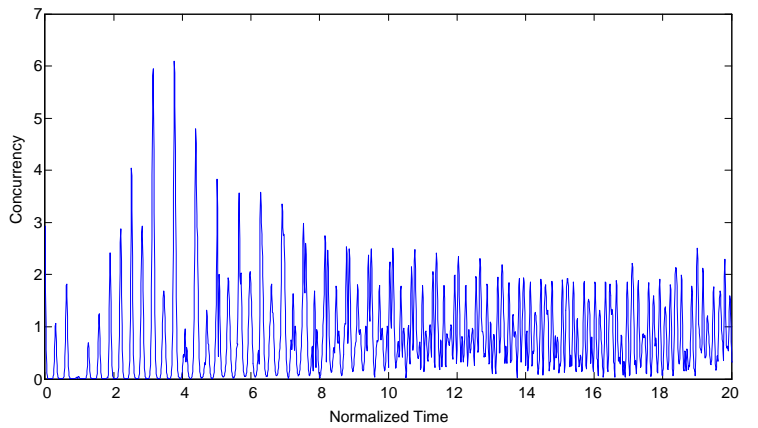
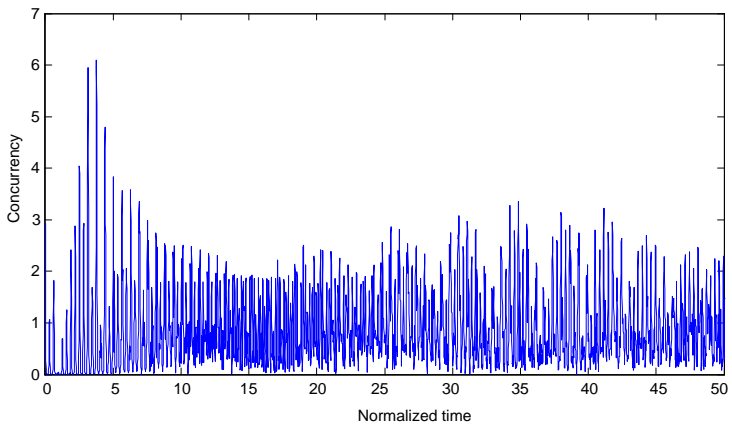
در شکل (۴-۲۱) تغییرات مقدار چشم‌داشتی عمل گر $\hat{\sigma}_z$ به ازای سه مقدار اختلاف فاز مختلف در رژیم تزویج قوی رسم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش میزان اختلاف فاز دامنه‌ی تغییرات این پارامتر افزایش می‌یابد، به علاوه از میزان اعوجاج‌های سوار شده بر روی منحنی نیز کاسته می‌شود.



(الف)

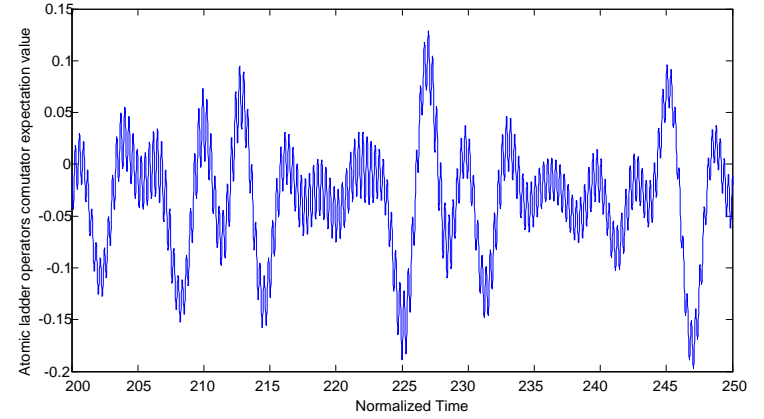
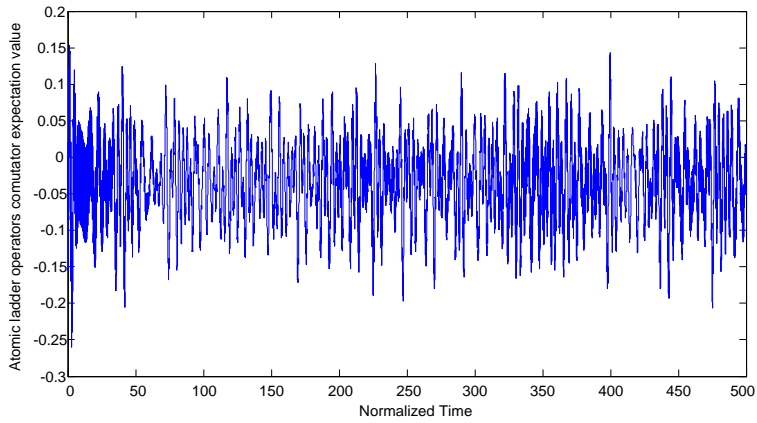


(ب)

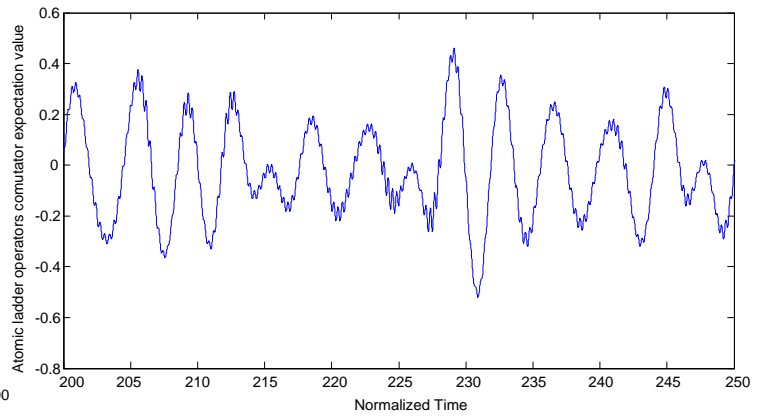
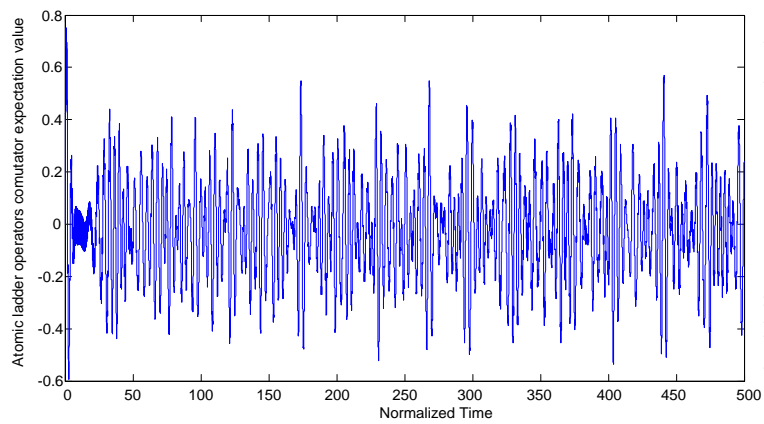


(ج)

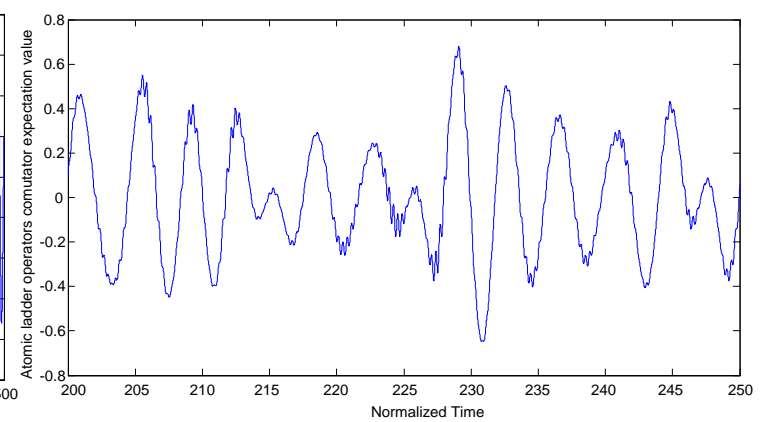
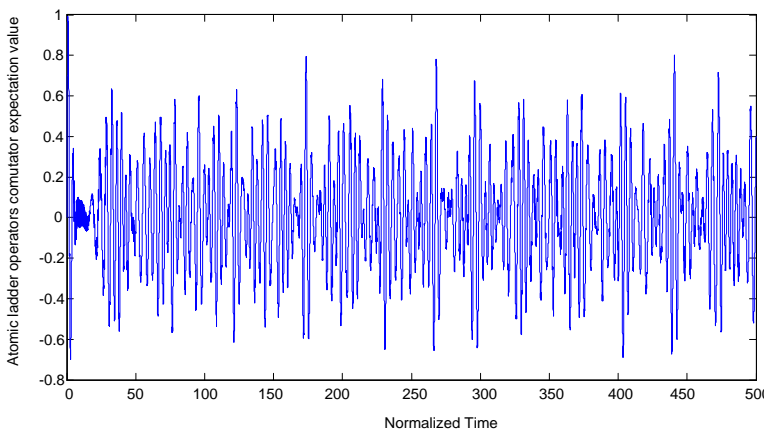
شکل ۴-۲۰ پارامتر هم‌نوایی در رژیم توزیع قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$



(الف)



(ب)



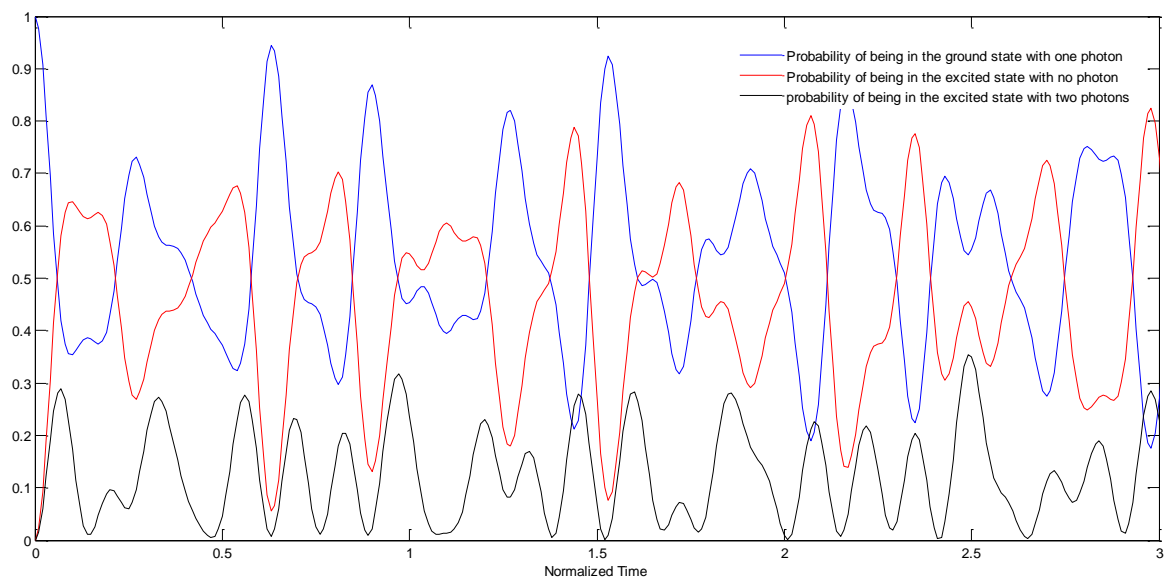
(ج)

شکل ۴-۲۱ مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر $\hat{\sigma}_z$ در رژیم تزویج قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$

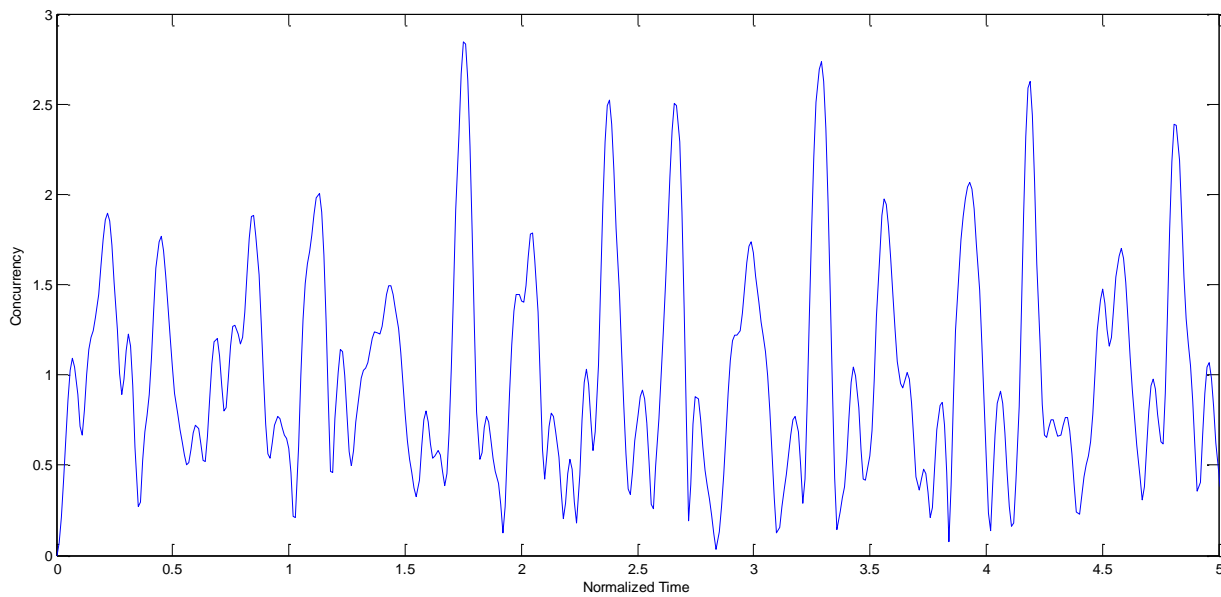
۴-۳- رژیم تزویج بسیار قوی

در این بخش به بررسی پارامترهای سیستم در رژیم تزویج بسیار قوی می‌پردازیم. سیستم مورد بحث در این قسمت همان سیستمی است که در دو قسمت پیشین درباره‌ی آن بحث شد، با این تفاوت که ثابت تزویج در این قسمت مساوی با ۹ قرار داده شده است.

ابتدا حالت اولیه‌ی سیستم را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که نقطه‌ی کوانتومی در تراز پایه بوده و یک فوتون در کاواک حاضر باشد یا به عبارت دیگر $|\Phi(g, 1)|^2 = 1$. برنامه را برای این سیستم و با شرایط اولیه‌ی ای که ذکر شد اجرا کرده و احتمال حالات مختلف در شکل (۴-۲۲) رسم شده است. در شکل (۴-۲۲) منحنی آبی رنگ نشان دهنده‌ی احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی در تراز پایه و حضور یک فوتون، منحنی قرمز رنگ احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی در تراز هیچ فوتونی در کاواک و منحنی مشکی رنگ احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی در تراز برانگیخته با حضور دو فوتون می‌باشد. همان‌گونه که در شکل (۴-۲۲) قابل مشاهده است، در رژیم تزویج بسیار قوی بر خلاف رژیم تزویج قوی و ضعیف، تأثیر جمله‌ی $\sigma^+ a^\dagger$ مطلقاً برابر با صفر و یا قابل صرف نظر کردن نمی‌باشد بلکه اندازه‌ی آن کاملاً قابل مقایسه با جملات دیگر است. همین امر سبب می‌گردد که در این رژیم، تقریب موج چرخنده از درجه‌ی اعتبار ساقط گردد. همچنین منحنی پارامتر هم‌نوایی برای سیستم مذکور با شرایط اولیه‌ی ذکر شده در رژیم تزویج بسیار قوی، در شکل (۴-۲۳) رسم شده است. با مقایسه شکل‌های (۴-۳) و (۴-۱۳) و (۴-۲۳) در می‌یابیم که با افزایش ثابت تزویج و گذار از رژیم تزویج ضعیف به رژیم تزویج قوی و پس از آن به رژیم تزویج بسیار قوی، منحنی هم‌نوایی به شدت دچار اعوجاج شده است.



شکل ۲۲-۴ احتمال حالات مختلف در رژیم تزویج بسیار قوی



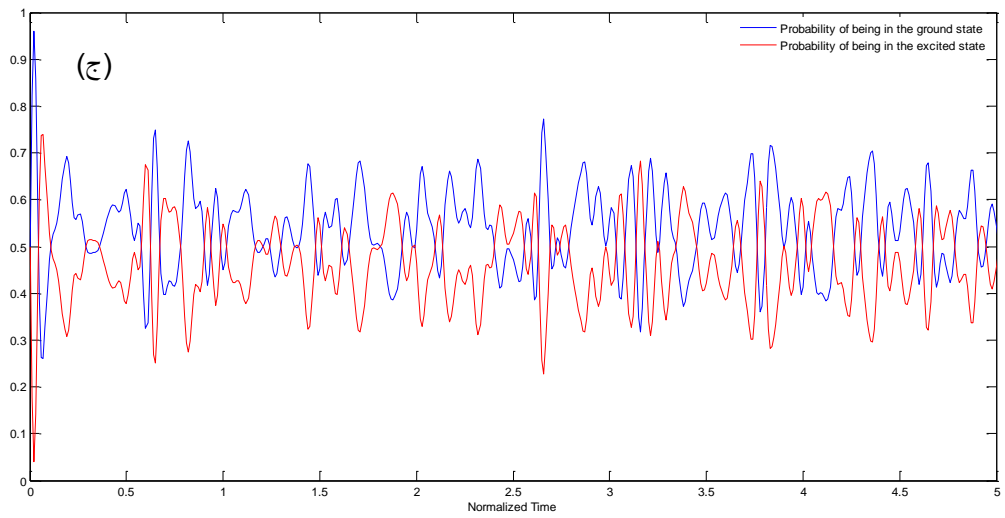
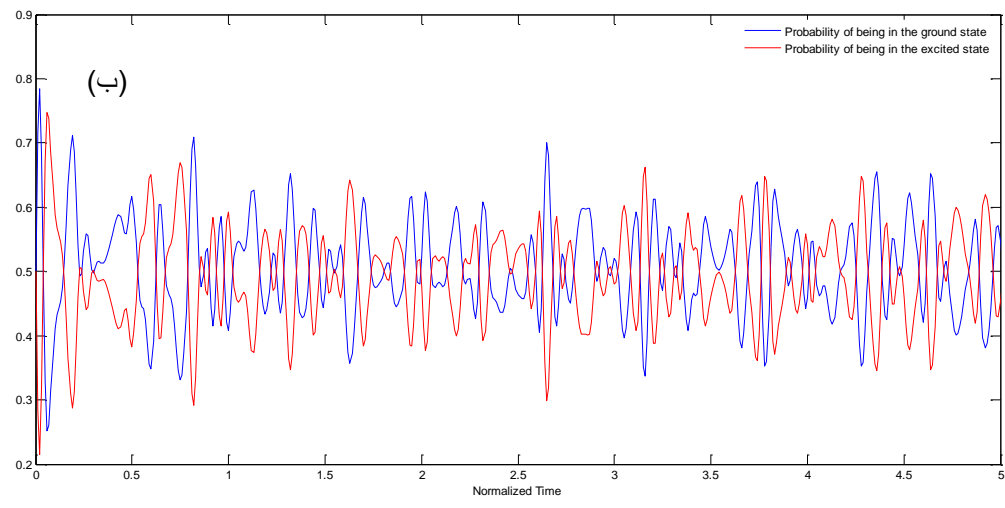
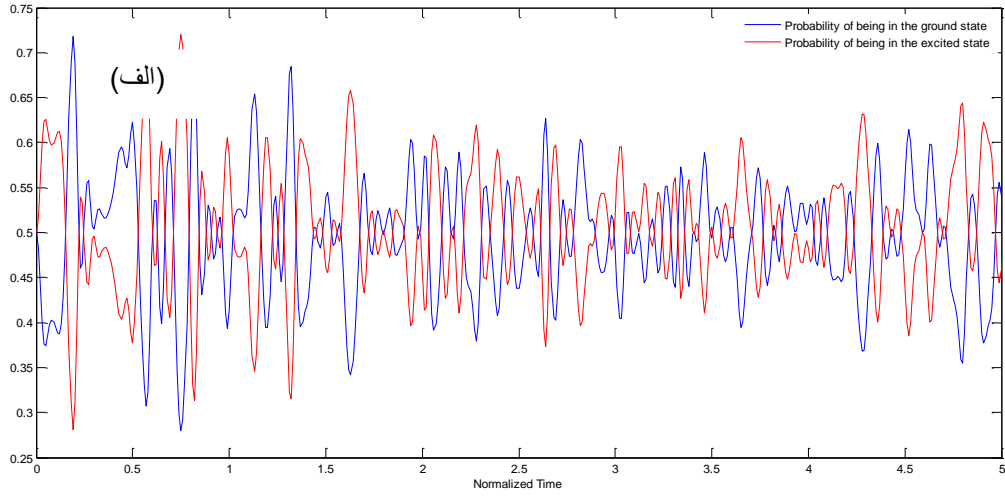
شکل ۲۳-۴ تغییرات هم‌نوایی بر حسب زمان در رژیم تزویج بسیار قوی

با مقایسه‌ی شکل‌های (۳-۴)، (۱۳-۴) و (۲۳-۴) به این نکته واقف می‌شویم که با افزایش ثابت تزویج و گذار

از رژیم تزویج ضعیف به قوی و سپس به رژیم تزویج بسیار قوی، منحنی هم‌نواپی به شدت دچار اعوجاج شده و به دامنه‌ی آن افزوده می‌شود.

حال سیستم را در حالت منسجم طبق رابطه‌ی (۶-۴) قرار می‌دهیم و احتمال حضور نقطه‌ی کوانتومی را در ترازهای پایه و برانگیخته به ازای اختلاف فازهای گوناگون در شکل (۴-۲۴) رسم کرده‌ایم. با مقایسه شکل‌های (۴-۵)، (۴-۱۴) و (۴-۲۴) در می‌یابیم که در رژیم تزویج بسیار قوی بر خلاف رژیم تزویج ضعیف و قوی، منحنی احتمال‌ها دیگر به صورت یک سیگنال مدوله شده نمی‌باشد و از منحنی صافی تشکیل شده است. همچنین فرکانس نوسانات احتمال‌ها در رژیم تزویج بسیار قوی، بسیار بیشتر از فرکانس نوسان در رژیم تزویج قوی و ضعیف است.

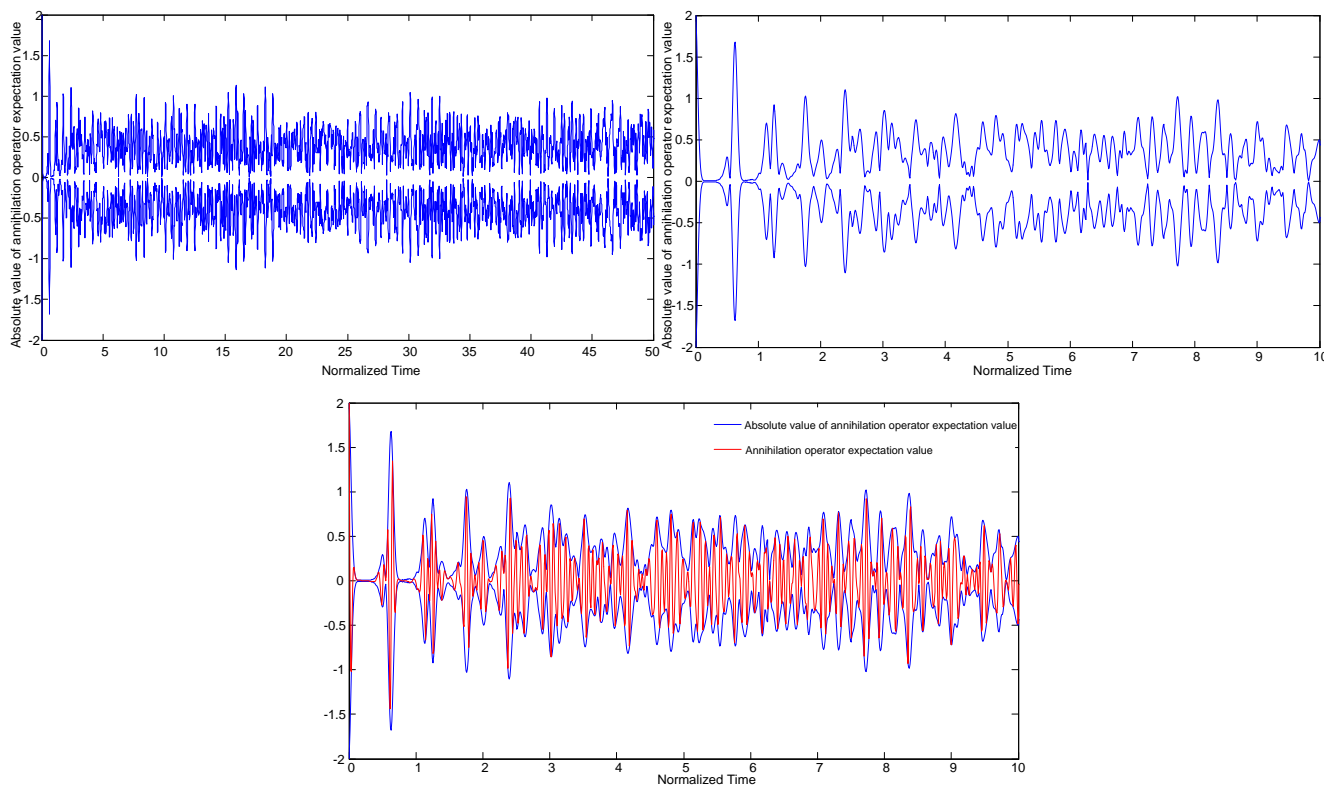
در شکل (۴-۲۵)، قدر مطلق مقدار چشم‌داشتی برای عمل‌گر نابودی فوتونی، رابطه‌ی (۴-۹)، در رژیم تزویج بسیار قوی در سه نمای مختلف به تصویر کشیده شده است. در شکل (۴-۲۵)، منحنی آبی رنگ نشان‌دهنده‌ی پوش یا قدر مطلق مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی و منحنی قرمز رنگ، تغییرات زمانی آن است. تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی بر حسب زمان در شکل (۴-۲۶) به نمایش در آمده است. منحنی آبی رنگ نشان‌دهنده‌ی تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی و خط مشکی رنگ به این منظور رسم شده است که میزان انحراف منحنی از نمودار خطی را نمایان سازد. این میزان انحراف با وضوح بالاتری در قسمت سمت راست شکل (۴-۲۶) به نمایش در آمده است. با مقایسه شکل‌های (۴-۲۶)، (۴-۱۶) و (۴-۷) مشخص است که با افزایش ثابت تزویج میزان اعوجاج‌های موجود در منحنی فاز افزایش



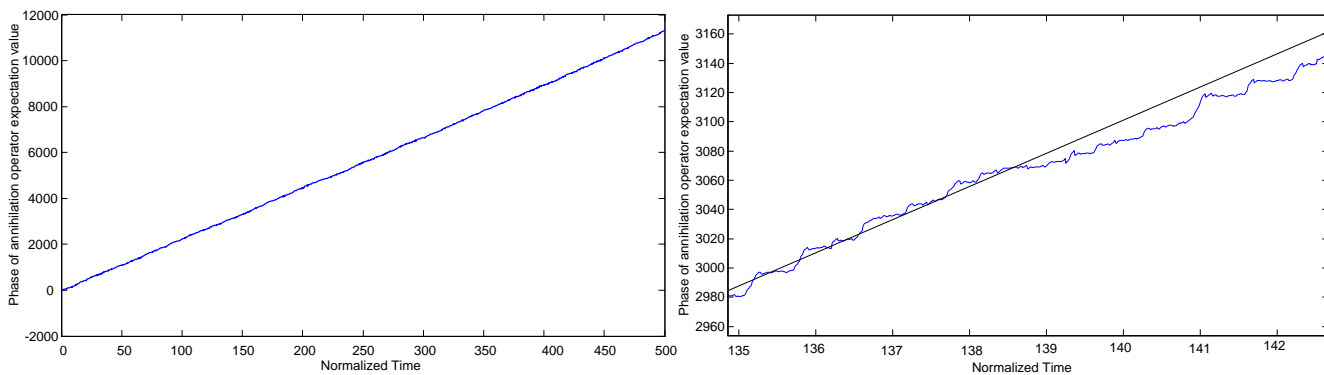
شکل ۴-۲۴ احتمال حضور در حالت پایه و برانگیخته در رژیم توزیع بسیار قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$

یافته است، هم‌چنین در رژیم تزویج بسیار قوی، میزان رشد فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در

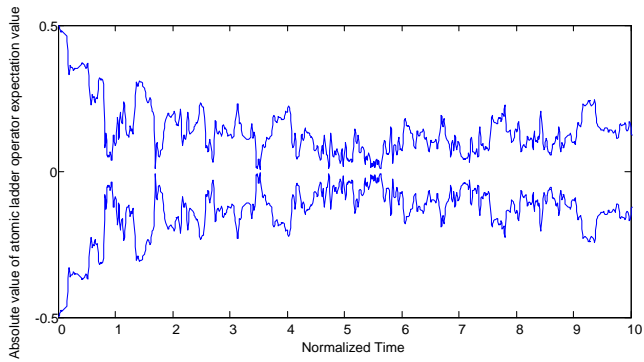
یک بازه‌ی زمانی نسبت به رژیم تزویج ضعیف افزایش و نسبت به رژیم تزویج قوی کاهش داشته است.



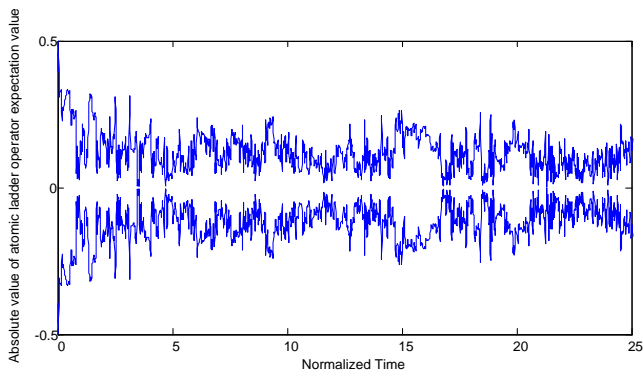
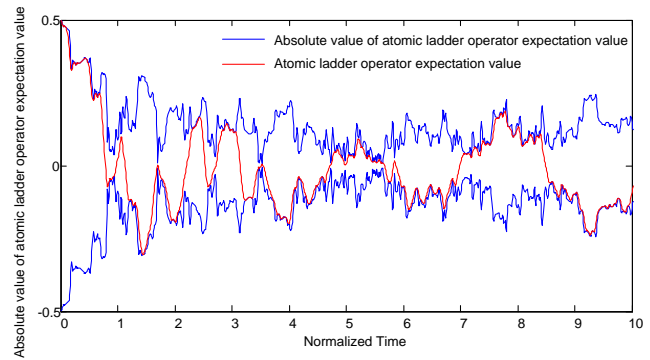
شکل ۴-۲۵ تغییرات مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج بسیار قوی



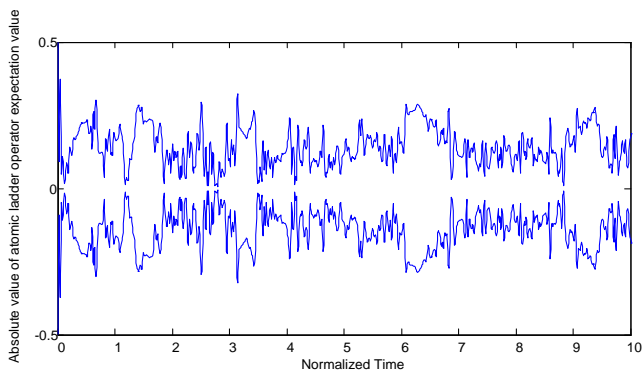
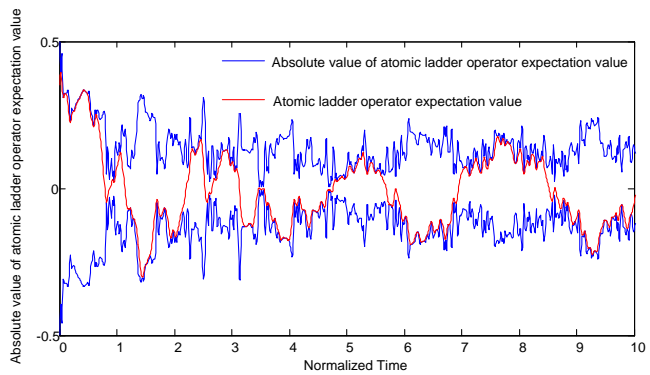
شکل ۴-۲۶ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نابودی فوتونی در رژیم تزویج بسیار قوی



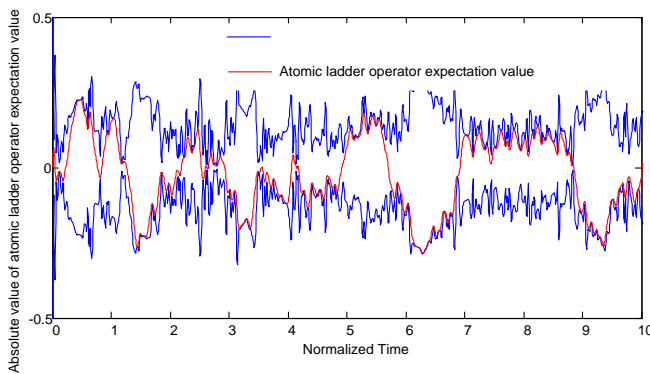
(الف)



(ب)



(ج)

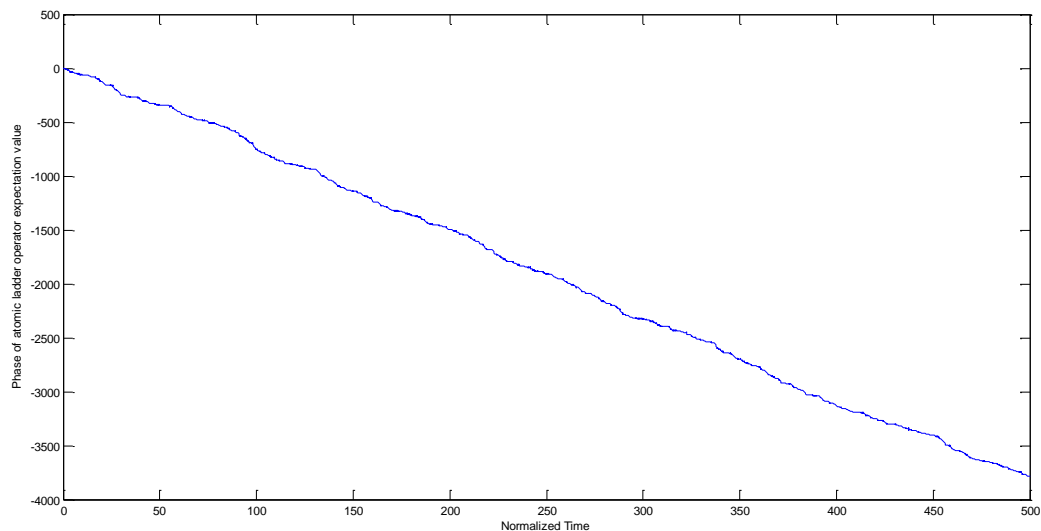


شکل ۴-۲۷ قدر مطلق مقدار چشم‌داشتی برای عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج بسیار قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$

حال به بررسی تغییرات مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی، رابطه‌ی (۴-۱۰)، می‌پردازیم. پوش منحنی مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر گذار اتمی و نیز خود منحنی این پارامتر به ترتیب به رنگ‌های آبی و قرمز در شکل (۴-۲۷) به ازای اختلاف فازهای گوناگون به تصویر کشیده شده است.

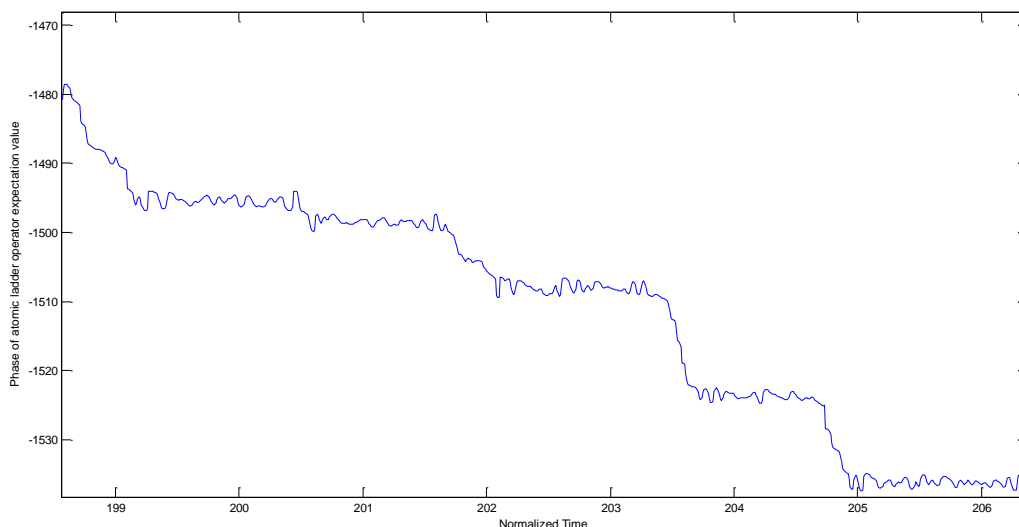
با مقایسه شکل‌های (۴-۸)، (۴-۱۷) و (۴-۲۷) به این نکته پی می‌بریم که در رژیم تزویج بسیار قوی بر خلاف رژیم تزویج قوی و ضعیف، منحنی مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی بر حسب زمان دارای تابعیت سینوسی که بین دو پوش محصور شده باشد، نیست.

تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی در شکل (۴-۲۸) رسم شده است. بر خلاف دو رژیم قبل، در رژیم تزویج بسیار قوی، در همان نظر اول مشخص است که منحنی تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی به هیچ وجه خطی نیست.



شکل ۴-۲۸ تغییرات فاز مقدار چشم‌داشتی عمل‌گر نردبانی اتمی در رژیم تزویج بسیار قوی

میزان اعوجاج‌های موجود در منحنی فاز در شکل (۴-۲۹) به صورت واضح‌تری نشان داده شده است.

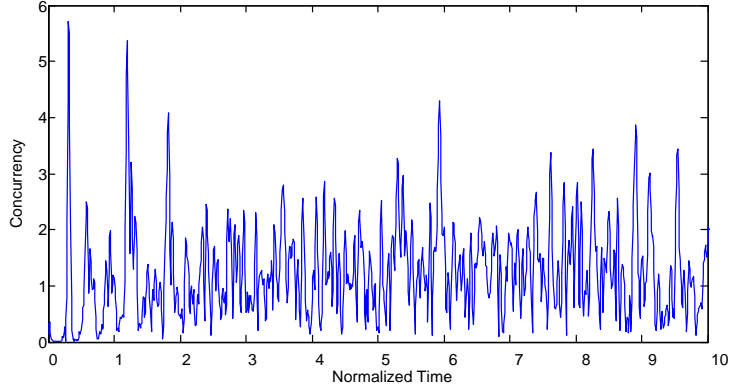
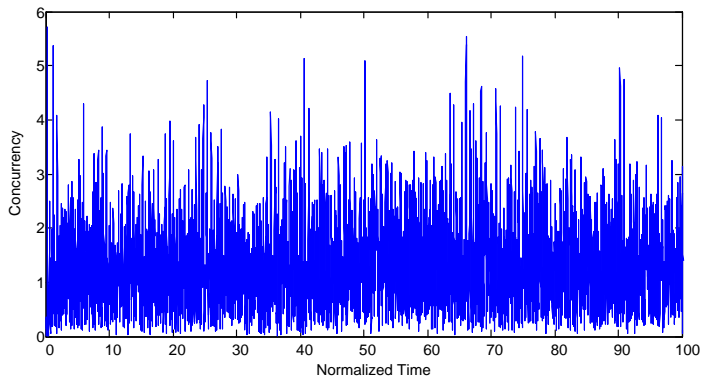


شکل ۴-۲۹ اعوجاج‌های موجود در منحنی فاز مقدار چشم‌داشتی عمل گر نردبانی اتمی از نمایی نزدیک‌تر در رژیم تزویج بسیار قوی

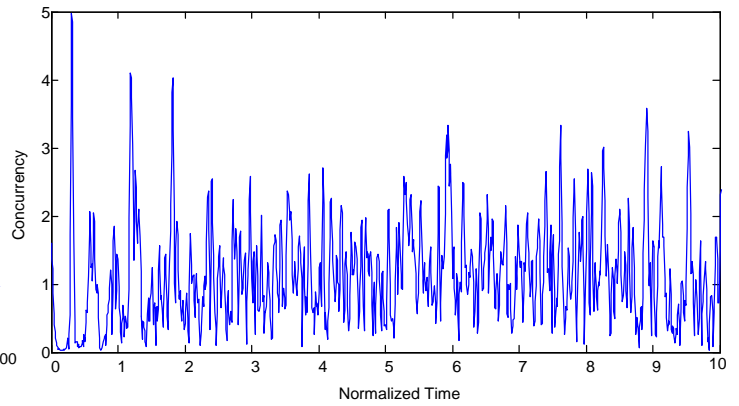
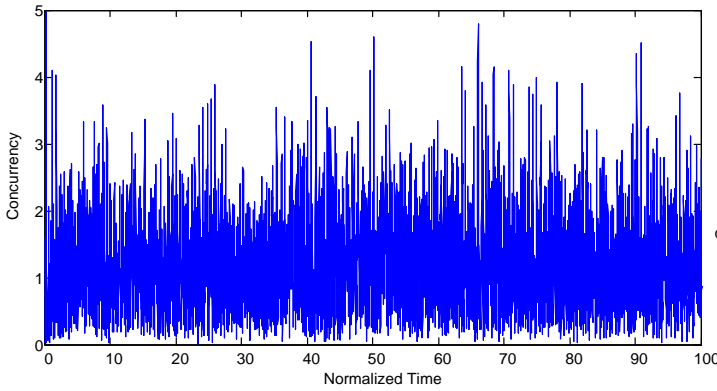
به عنوان آخرین بخش از این فصل به بررسی منحنی پارامترهای هم‌نوایی و مقدار چشم‌داشتی عمل گر $\hat{\sigma}_z$ می‌پردازیم. منحنی تغییرات پارامتر هم‌نوایی برای سه اختلاف فاز مختلف در رژیم تزویج بسیار قوی در شکل (۴-۳۰) به تصویر کشیده شده است. با توجه به منحنی‌های رسم شده متوجه این نکته می‌شویم که در رژیم تزویج بسیار قوی بر خلاف دو رژیم ماقبل، منحنی هم‌نوایی دارای مقادیر منفی شده است.

در شکل (۴-۳۱) تغییرات مقدار چشم‌داشتی عمل گر $\hat{\sigma}_z$ بر حسب زمان به ازای اختلاف فازهای گوناگون رسم شده است.

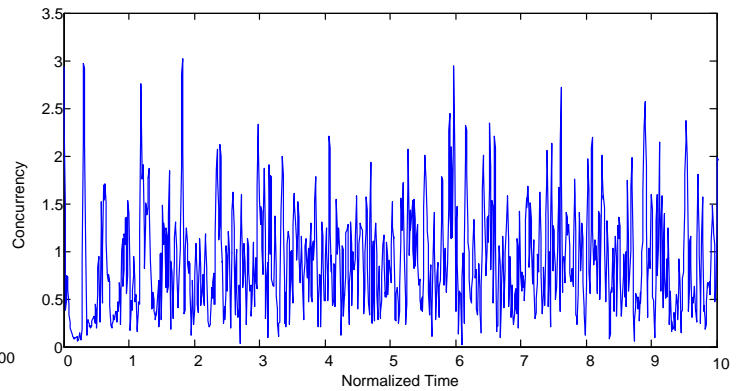
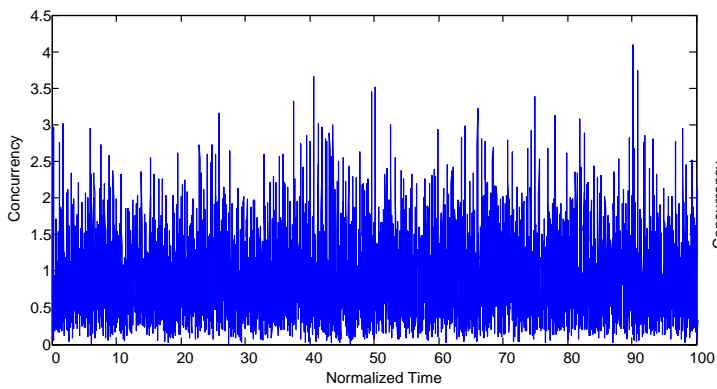
مقایسه تغییرات زمانی پارامترهای مذکور در سه رژیم تزویج ضعیف، قوی و بسیار قوی این نتیجه را به دست می‌دهد که با افزایش ثابت تزویج، تغییرات این پارامترها به شدت نامنظم‌تر و با فرکانس بالاتری صورت می‌گیرد.



(الف)

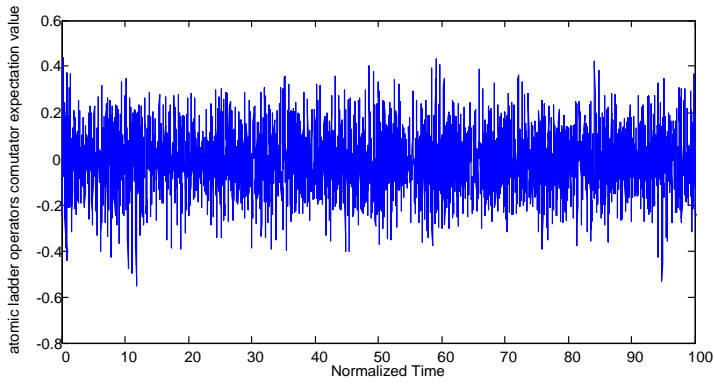


(ب)

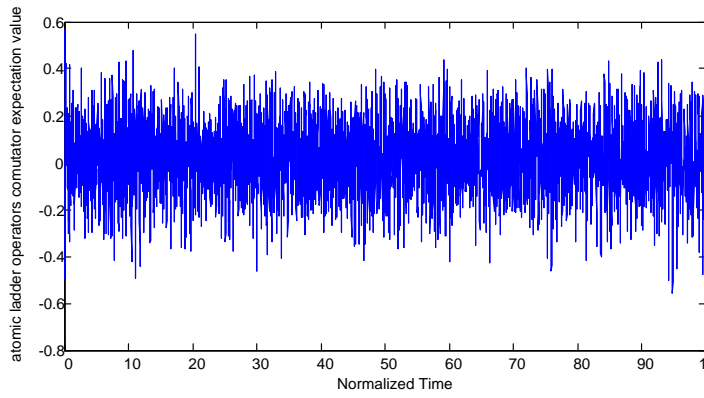
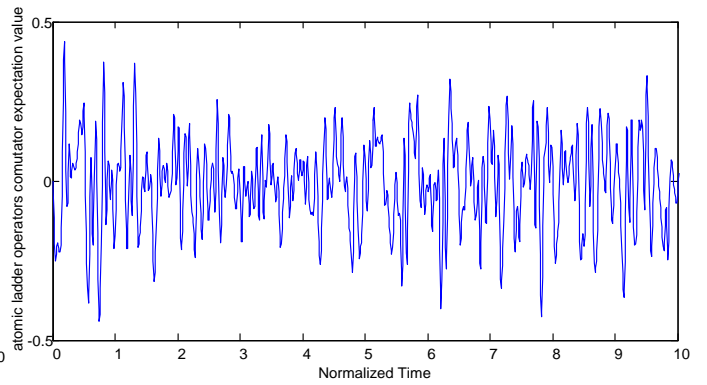


(ج)

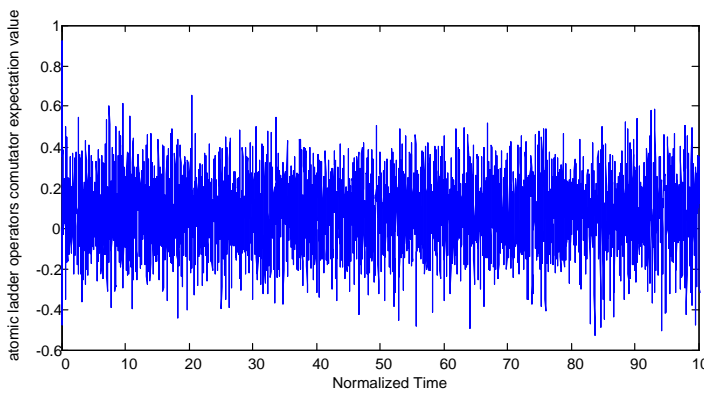
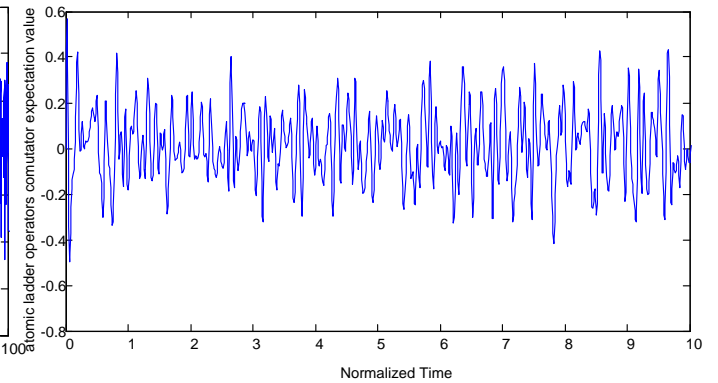
شکل ۴-۳۰ پارامتر هم‌نوبی در رژیم تزویج بسیار قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$



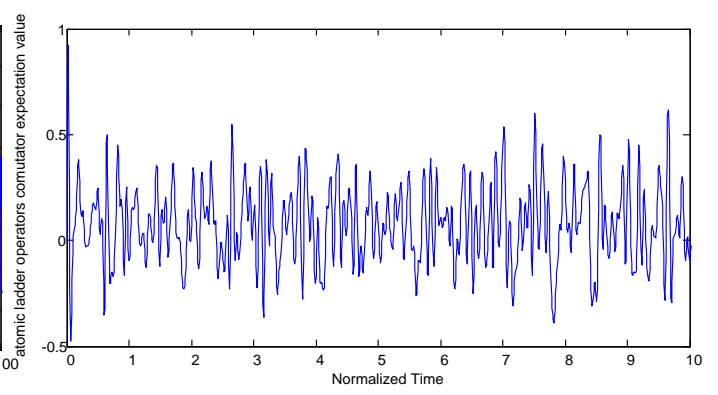
(الف)



(ب)



(ج)



شکل ۴-۳۱ مقدار چشم‌داشتی عملگر $\hat{\sigma}_z$ در رژیم تزویج بسیار قوی برای الف) $\Delta\phi = 0$ ، ب) $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ و ج) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$

فصل پنجم: جمع بندی

این پایان نامه به بررسی الکترو دینامیک کوانتومی کاواک در سه رژیم تزویج ضعیف، قوی و بسیار قوی می-پردازد. در قدم اول، معادله‌ی شرودینگر برای دو عمل گر گذار اتمی و نابودی فوتونی به دست آمده است. در به دست آوردن این روابط از تقریب موج چرخنده صرف نظر شده است و مساله در کلی ترین حالت ممکن که سیستم متشکل از تعداد نامحدودی نقطه‌ی کوانتومی و همچنین از یک کاواک که دارای تعداد نامحدودی مد است، تشکیل شده است.

در راستای انجام این پایان نامه برنامه‌ای در محیط نرم افزار MATLAB نوشته شده است که مشخصات سیستم مورد نظر کاربر را دریافت می کند و معادله‌ی شرودینگر را برای آن سیستم حل نموده و منحنی تغییرات مقدار چشم‌داشتی عمل گر نابودی فوتونی و عمل گر گذار اتمی را بر حسب زمان و همچنین تغییرات فاز این دو

پارامتر را رسم می‌کند. علاوه بر این، پارامتر هم‌نوایی به صورت کاملاً خودکار برای هر سیستم مشخص شده توسط کاربر محاسبه شده و رسم می‌شود.

با توجه به نتایج رسم شده در فصل چهارم به این نتیجه می‌رسیم که در رژیم تزویج بسیار قوی تقریب موج چرخنده به هیچ وجه معتبر نمی‌باشد و همچنین تغییرات مقدار چشم‌داشتی عمل‌گرهای نابودی فوتونی و گذار اتمی به هیچ وجه سینوسی نمی‌باشد.

به عنوان جمع‌بندی می‌توان گفت که جواب‌های متداول برای هامیلتونی جینس-کامینگز-پاول در رژیم تزویج بسیار قوی به هیچ عنوان معتبر نمی‌باشند.

پیوست الف: کد برنامه‌ی MATLAB

```
clear all
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%importing data%%%%%%%%
w=importdata('CQED.txt');
QDno=str2num(w{1});           %number of quantum dots
energylev=str2num(w{2});     %number of energylevels
cavitym=str2num(w{3});       %number of cavity modes
n=str2num(w{4});             %number of photons allowed in each cavity
mode
b=str2num(w{5});             %eign-frequencies of each mode of the
cavity
c=str2num(w{6});             %energies of energy levels of each
quantum dot
g=str2num(w{7});             %coupling factor
if cavitym>1
    for i=8:6+cavitym
        g(:, :, i-6)=str2num(w{i}); %coupling factor
    end
end
gstar=conj(g);
eta=str2num(w{cavitym+7});
etastar=conj(eta);
phi0=str2num(w{cavitym+8});

a=(energylev)^(QDno)*(n+1)^(cavitym);

A=zeros(a,a);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%writing H0 elements%%%%%%%%
%%%%%%%%First term
for q=1:(energylev)^(QDno)
```

```

for nn=QDno:-1:1
    if nn==QDno && mod(q,energylev)~=0
        jj=mod(q,energylev);
    elseif nn==QDno && mod(q,energylev)==0
        jj=energylev;
    else
        j=floor((q-1)/(energylev)^(QDno-nn))+1;
        if mod(j,(energylev^(QDno-nn)))==0
            jj=energylev;
        else
            jj=mod(j,(energylev^(QDno-nn)));
        end
    end
    if jj>energylev
        jj=jj-energylev;
    end
    A(q,q)=A(q,q)+c(nn,jj);
end
end
for m=1:(n+1)^cavitym-1
    for mm=1:energylev^QDno
        A(m*energylev^QDno+mm,m*energylev^QDno+mm)=A(mm,mm);
    end
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%Second term%%%%%%%%

```

```

F=0:n;
N=zeros(1,cavitym);
for ii=1:energylev^QDno*(n+1)^cavitym
    for i=1:cavitym
        B=floor((ii-1)/((n+1)^(cavitym-i)*energylev^QDno));
        F2=circshift(F,[0,-B]);
        N(i)=F2(1);
    end
    A(ii,ii)=A(ii,ii)+sum(N.*b);
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%writing Hr.E elements%%%%%%%%
%%%%%%%%First & third term%%%%%%%%

```

```

for qq=cavitym:-1:1
    s=(n+1)^(cavitym-qq)*energylev^QDno;
    for i=1:energylev^QDno-1
        for j=s+1:s+i
            A(i,j)=A(i,j)+0;
        end
        if mod(i,energylev)~=0
            k=energylev-mod(i,energylev);
            jj=0;
            for q=1:mod(i,energylev)-1
                jj=jj+energylev-q;
            end
            for j=s+i+1:s+i+k
                A(i,j)=A(i,j)+g(QDno,jj+j-s-i,qq);
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
    for m=1:QDno-1
        l=mod(floor((i-1)/(energylev^m)),energylev^m)+1;
        jj=0;
        for q=1:l-1
            jj=jj+energylev-q;
        end
        for d=1:energylev-1
            j=s+i+d*energylev^m;
            A(i,j)=A(i,j)+g(QDno-m,jj+d,qq);
        end
    end
end
end
block=A(1:energylev^QDno,s+1:s+energylev^QDno);

A(1:energylev^QDno,s+1:s+energylev^QDno)=A(1:energylev^QDno,s+1:s+energylev^Q
Dno)+block.';
block2=A(1:energylev^QDno,s+1:s+energylev^QDno);
for q=1:(n+1)^cavitym-(n+1)^(cavitym-qq)-1
    F2=circshift(F,[0,-floor(q/((n+1)^(cavitym-qq)))-1]);

A(q*energylev^QDno+1:(q+1)*energylev^QDno,s+q*energylev^QDno+1:s+(q+1)*energy
lev^QDno)=block2*sqrt(F2(1));
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%second & forth term%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for qq=cavitym:-1:1
    s=(n+1)^cavitym*energylev^QDno-(n+1)^(cavitym-qq)*energylev^QDno-
energylev^QDno;
    for i=a-energylev^QDno+1:a-1
        ii=i-a+energylev^QDno;
        for j=s+1:s+ii
            A(i,j)=A(i,j)+0;
        end
        if mod(ii,energylev)~=0
            k=energylev-mod(ii,energylev);
            jj=0;
            for q=1:mod(ii,energylev)-1
                jj=jj+energylev-q;
            end
            for j=s+ii+1:s+ii+k
                A(i,j)=A(i,j)+gstar(QDno,jj+j-s-ii,qq)*sqrt(n);
            end
        end
    end
end
for m=1:QDno-1
    l=mod(floor((ii-1)/(energylev^m)),energylev^m)+1;
    jj=0;
    for q=1:l-1
        jj=jj+energylev-q;
    end
    for d=1:energylev-1
        j=s+ii+d*energylev^m;

```



```

        A(i,j)=A(i,j)+gstar(QDno-m,jj+d,qq)*sqrt(n);
    end
end
end
    block=A(((n+1)^cavitym-1)*energylev^QDno+1:a,s+1:s+energylev^QDno);
    A(((n+1)^cavitym-
1)*energylev^QDno+1:a,s+1:s+energylev^QDno)=block+block.';
    block2=A(((n+1)^cavitym-
1)*energylev^QDno+1:a,s+1:s+energylev^QDno)/sqrt(n);
    for q=(n+1)^cavitym-(n+1)^(cavitym-qq)-1:-1:1
        F2=circshift(F,[0,-floor((q-1)/((n+1)^(cavitym-qq)))-1]);
        A((q+(n+1)^(cavitym-qq)-1)*energylev^QDno+1:(q+(n+1)^(cavitym-
qq))*energylev^QDno,(q-
1)*energylev^QDno+1:q*energylev^QDno)=block2*sqrt(F2(1));
    end
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
writing the Hr.r%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
first & forth term%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if QDno>1
B=zeros(energylev^QDno,energylev^QDno);
for m=2:QDno
    for r=1:m-1
        for i=1:energylev^QDno-1
            if m==QDno
                nn=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-r)),energylev^(QDno-r))+1;
                mm=mod(i-1,energylev)+1;
            else
                nn=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-r)),energylev^(QDno-r))+1;
                mm=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-m)),energylev^(QDno-m))+1;
            end
            if nn==1
                q=0;
            else
                q=0;
                for qq=1:nn-1
                    q=q+energylev-qq;
                end
            end
            if mm==1
                s=0;
            else
                s=0;
                for ss=1:mm-1
                    s=s+energylev-ss;
                end
            end
            for k=1:energylev-nn
                q=q+1;
                for l=1:energylev-mm
                    s=s+1;
                    j=i+k*energylev^(QDno-r)+l*energylev^(QDno-m);
                    if mm==energylev||nn==energylev
                        B(i,j)=B(i,j)+0;
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        else
            B(i,j)=B(i,j)+eta(m,s)*eta(r,q);
        end
    end
    s=s-(energylev-mm);
end
end
end
end
end
B2=B+B';

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%% writing the second & third term %%%%
D=zeros(energylev^QDno,energylev^QDno);
for m=2:QDno
    for r=1:m-1
        for i=1:energylev^QDno-1
            if m==QDno
                nn=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-r)),energylev^(QDno-r))+1;
                mm=mod(i-1,energylev)+1;
            else
                nn=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-r)),energylev^(QDno-r))+1;
                mm=mod(floor((i-1)/energylev^(QDno-m)),energylev^(QDno-m))+1;
            end
            if nn==1
                q=0;
            else
                q=0;
                for qq=1:nn-1
                    q=q+energylev-qq;
                end
            end
            for k=1:energylev-nn
                q=q+1;
                for ss=1:mm-1
                    s=(ss-1)*energylev+mm-ss-(ss-1)*ss/2;
                    j=i+k*energylev^(QDno-r)-(mm-ss)*energylev^(QDno-m);
                    if nn==energylev || mm==1
                        D(i,j)=D(i,j)+0;
                    else
                        D(i,j)=D(i,j)+etastar(m,s)*eta(r,q);
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
D2=D+D';
block=D2+B2;
for ii=1:(n+1)^cavitym
    A((ii-1)*energylev^QDno+1:ii*energylev^QDno,(ii-1)*energylev^QDno+1:ii*energylev^QDno)=A((ii-1)*energylev^QDno+1:ii*energylev^QDno,(ii-1)*energylev^QDno+1:ii*energylev^QDno)+block;
end

```

end

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
M=-1i*A;  
[V,D]=eig(M);  
Mdiag=(V\M)*V;  
phi=zeros(a,1);  
E=zeros(a,a);  
coeff=[];  
T=0:0.01:5;  
for t=0:.01:5  
    t  
    for i=1:a  
        E(i,i)=exp(Mdiag(i,i)*t);  
    end  
    phi=(V*E)/V*phi0;  
    coeff=[coeff,phi];  
end
```

```
fftcoeff=fft(coeff. ');  
fftcoeff=fftcoeff. ';
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%calculating concurrency%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
if QDno+cavitym==2  
    fid=fopen('c:\users\hp\documents\matlab\concurrency.m','w');  
    fprintf(fid,'C=zeros(1,length(T));\n');  
    fprintf(fid,'for j=1:length(T)\n');  
    fprintf(fid,'for k1=1:energylev-1\n');  
    fprintf(fid,'for l1=k1+1:energylev\n');  
    fprintf(fid,'for k2=0:n-1\n');  
    fprintf(fid,'for l2=k2+1:n\n\n');
```

```
fprintf(fid,'C(j)=C(j)+coeff(k2*energylev^QDno+k1,j)*coeff(l2*energylev^QDno+l1,j)-coeff(l2*energylev^QDno+k1,j)*coeff(k2*energylev^QDno+l1,j)-coeff(k2*energylev^QDno+l1,j)*coeff(l2*energylev^QDno+k1,j)+coeff(l2*energylev^QDno+l1,j)*coeff(l2*energylev^QDno+l1,j);\n');
```

```
    for i=1:4  
        fprintf(fid,'end\n');  
    end  
    fprintf(fid,'C(j)=sqrt(abs(C(j)^2));\n');  
    fprintf(fid,'end\n');  
    fclose(fid);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
else  
    fid=fopen('c:\users\hp\documents\matlab\concurrency.m','w');  
    fprintf(fid,'scale=zeros(QDno+cavitym,1);\n');  
    fprintf(fid,'for ii=1:QDno\n');  
    fprintf(fid,'scale(ii)=energylev^(ii-1);\n');  
    fprintf(fid,'end\n');  
    fprintf(fid,'for ii=QDno+1:QDno+cavitym\n');  
    fprintf(fid,'scale(ii)=(n+1)^(ii-QDno-1)*energylev^QDno;\n');  
    fprintf(fid,'end\n');
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```

fprintf(fid, 'C=zeros(1,length(T));\n');
fprintf(fid, 'K=[];\n');
fprintf(fid, 'K2=zeros(QDno+cavitym,1);\n');
fprintf(fid, 'L=[];\n');
fprintf(fid, 'L2=zeros(QDno+cavitym,1);\n');
fprintf(fid, 'Q=zeros(cavitym+QDno,1);\n');
fprintf(fid, 'for ii=2:QDno\n');
fprintf(fid, 'Q(ii)=1;\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for jj=1:length(T)\n');
fprintf(fid, 'cij=0;\n');
fprintf(fid, 'for i=1:QDno+cavitym-1\n');
fprintf(fid, 'for j=i+1:QDno+cavitym\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if QDno>1
fprintf(fid, 'if i<=QDno && j<=QDno\n');
for ii=1:QDno-2
    fprintf(fid, 'for k%d=1:energylev\n',ii);
end
for ii=QDno-1:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'for k%d=0:n\n',ii);
end
for ii=1:QDno-2
    fprintf(fid, 'for l%d=1:energylev\n',ii);
end
for ii=QDno-1:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'for l%d=0:n\n',ii);
end
fprintf(fid, 'for ki=1:energylev-1\n');
fprintf(fid, 'for li=ki+1:energylev\n');
fprintf(fid, 'for kj=1:energylev-1\n');
fprintf(fid, 'for lj=kj+1:energylev\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for ii=1:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'K=[K;k%d];\n',ii);
end
fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');

fprintf(fid, 'else\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');

```

```

fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for ii=1:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'L=[L;l%d];\n', ii);
end
fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');

fprintf(fid, 'else\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'L2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=lj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'L=[];\n');
fprintf(fid, 'K=[];\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'kikjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'liljL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'kiljK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=kj;\n');
fprintf(fid, 'likjL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'likjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'L2(i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'kiljL=L2-Q;\n');

```

```

fprintf(fid, 'K2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'liljK=K2-Q;\n');

fprintf(fid, 'akikjK=sum(kikjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljL=sum(liljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljK=sum(kiljK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'alikjL=sum(likjL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'alikjK=sum(likjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljL=sum(kiljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljK=sum(liljK.*scale);\n');

fprintf(fid, 'cij=cij+(abs(coeff(akikjK,jj)*coeff(aliljL,jj)-
coeff(akiljK,jj)*coeff(alikjL,jj)-
coeff(alikjK,jj)*coeff(akiljL,jj)+coeff(aliljK,jj)*coeff(aliljL,jj))^2;\n');
for ii=1:2*(QDno+cavitym)+1
    fprintf(fid, 'end\n');
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'if i<=QDno && j>QDno\n');
for ii=1:QDno-1
    fprintf(fid, 'for k%d=1:energylev\n',ii);
end
for ii=QDno:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'for k%d=0:n\n',ii);
end
for ii=1:QDno-1
    fprintf(fid, 'for l%d=1:energylev\n',ii);
end
for ii=QDno:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'for l%d=0:n\n',ii);
end
fprintf(fid, 'for ki=1:energylev-1\n');
fprintf(fid, 'for li=ki+1:energylev\n');
fprintf(fid, 'for kj=0:n-1\n');
fprintf(fid, 'for lj=kj+1:n\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for ii=1:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'K=[K;k%d];\n',ii);
end
fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1,0]);\n');

```

```

fprintf(fid, 'end\n');

fprintf(fid, 'else\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for ii=1:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'L=[L;l%d];\n', ii);
end
fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');

fprintf(fid, 'else\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1,0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'L2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=lj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'L=[];\n');
fprintf(fid, 'K=[];\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'kikjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'liljL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'kiljK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=kj;\n');
fprintf(fid, 'likjL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');

```

```

fprintf(fid, 'K2 (i)=li;\n');
fprintf(fid, 'likjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2 (j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'L2 (i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'kiljL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2 (j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'K2 (i)=li;\n');
fprintf(fid, 'liljK=K2-Q;\n');

fprintf(fid, 'akikjK=sum(kikjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljL=sum(liljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljK=sum(kiljK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'alikjL=sum(likjL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'alikjK=sum(likjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljL=sum(kiljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljK=sum(liljK.*scale);\n');

fprintf(fid, 'cij=cij+(abs(coeff(akikjK,jj)*coeff(aliljL,jj)-
coeff(akiljK,jj)*coeff(alikjL,jj)-
coeff(alikjK,jj)*coeff(akiljL,jj)+coeff(aliljK,jj)*coeff(aliljL,jj))^2;\n');
    for ii=1:2*(QDno+cavitym)+1
        fprintf(fid, 'end\n');
    end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    if cavitym>1
        fprintf(fid, 'if i>QDno && j>QDno\n');
        for ii=1:QDno
            fprintf(fid, 'for k%d=1:energylev\n',ii);
        end
        for ii=QDno+1:QDno+cavitym-2
            fprintf(fid, 'for k%d=0:n\n',ii);
        end
        for ii=1:QDno
            fprintf(fid, 'for l%d=1:energylev\n',ii);
        end
        for ii=QDno+1:QDno+cavitym-2
            fprintf(fid, 'for l%d=0:n\n',ii);
        end
        fprintf(fid, 'for ki=0:n-1\n');
        fprintf(fid, 'for li=ki+1:n\n');
        fprintf(fid, 'for kj=0:n-1\n');
        fprintf(fid, 'for lj=kj+1:n\n');
        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        for ii=1:QDno+cavitym-2
            fprintf(fid, 'K=[K;k%d];\n',ii);
        end
        fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
        fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
        fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
        fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1,0]);\n');
        fprintf(fid, 'end\n');
        fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
        fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');

```



```

fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1, 0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1, 0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');

fprintf(fid, 'else\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1, 0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'K2(ii)=K(1);\n');
fprintf(fid, 'K=circshift(K, [-1, 0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for ii=1:QDno+cavitym-2
    fprintf(fid, 'L=[L;l%d];\n', ii);
end
fprintf(fid, 'if abs(i-j)>1\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1, 0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=i+1:j-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1, 0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1, 0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');

fprintf(fid, 'else\n');
fprintf(fid, 'for ii=1:i-1\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1, 0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'for ii=j+1:QDno+cavitym\n');
fprintf(fid, 'L2(ii)=L(1);\n');
fprintf(fid, 'L=circshift(L, [-1, 0]);\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'L2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=lj;\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'L=[];\n');
fprintf(fid, 'K=[];\n');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf(fid, 'kikjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'liljL=L2-Q;\n');

```

```

fprintf(fid, 'K2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'kiljK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=kj;\n');
fprintf(fid, 'likjL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=kj;\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'likjK=K2-Q;\n');
fprintf(fid, 'L2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'L2(i)=ki;\n');
fprintf(fid, 'kiljL=L2-Q;\n');
fprintf(fid, 'K2(j)=lj;\n');
fprintf(fid, 'K2(i)=li;\n');
fprintf(fid, 'liljK=K2-Q;\n');

fprintf(fid, 'akikjK=sum(kikjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljL=sum(liljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljK=sum(kiljK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'alikjL=sum(likjL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'alikjK=sum(likjK.*scale);\n');
fprintf(fid, 'akiljL=sum(kiljL.*scale);\n');
fprintf(fid, 'aliljK=sum(liljK.*scale);\n');

fprintf(fid, 'cij=cij+(abs(coeff(akikjK,jj)*coeff(aliljL,jj)-
coeff(akiljK,jj)*coeff(alikjL,jj)-
coeff(alikjK,jj)*coeff(akiljL,jj)+coeff(aliljK,jj)*coeff(aliljL,jj)))^2;\n');

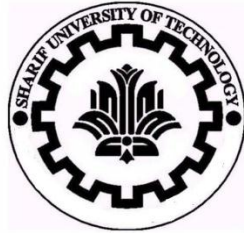
for ii=1:2*(QDno+cavitym)+1
    fprintf(fid, 'end\n');
end
end
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'C(jj)=sqrt(cij);\n');
fprintf(fid, 'jj\n');
fprintf(fid, 'end\n');
fprintf(fid, 'plot(T,C)\n');
fclose(fid);
end

```

- [1] Jaynes E T and Cummings F W 1963 Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Applications to the Beam Maser, *Proc. IEEE* **51** 89-109
- [2] Paul H 1963 Induzierte Emission bei starker Einstrahlung, *Ann. Phys. (Leipzig)* **11** 411-412
- [3] Shore B W and Knight P L 1993 Topical Review: The Jaynes-Cummings model, *J. Mod. Opt.* **40** 1195-1238
- [4] Schleich W P 2005 *Quantum Optics in Phase Space* Wiley-VCH Berlin
- [5] Bulovic V, Khalfin V B, Gu G and Burrows P E 1998 Weak microcavity effects in organic light-emitting devices *Phys. Rev. B* **58** 3730-3740
- [6] Fletcher R B, Lidzey D G, Bradley D D C, Bernius M and Walker S 2000 Spectral properties of resonant-cavity, polyfluorene light-emitting diodes *Appl. Phys. Lett.* **77** 1262-1264
- [7] Stevenson R M, Young R J, Atkinson P, Cooper K, Ritchie D A, and Shields A J 2006 A semiconductor source of triggered entangled photon pairs *Nature* **439** 179-182
- [8] Salter C L, Stevenson R M, Farrer I, Nicoll C A, Ritchie D A and Shields A J 2010 An entangled-light-emitting diode *Nature* **465** 594-597
- [9] Peter E, Senellart P, Martrou D, Lemaitre A, Hours J, Gerard J M and Bloch J 2005 Exciton-photon strong-coupling regime for a single quantum dot embedded in a microcavity *Phys. Rev. Lett.* **95** 067401
- [10] Yamamoto Y, Tassone F, and Cao H 2000 *Semiconductor Cavity Quantum Electrodynamics* Springer-Verlag, Berlin
- [11] Reithmaier J P 2008 Strong exciton-photon coupling in semiconductor quantum dot systems *Semicond. Sci. Technol.* **23** 123001
- [12] Schleich W P and Walther H eds 2007 *Elements of Quantum Information* Wiley-VCH Verlag, Weinheim
- [13] Moreau E, Robert I, Gerard J M, Abram I, Manin L and Thierry-Mieg V 2001 Single-mode solid-state single photon source based on isolated quantum dots in pillar microcavities *Appl. Phys. Lett.* **79** 2865-2867
- [14] Santori C, Fattal D, Vuckovic J, Solomon G S and Yamamoto Y 2002 Indistinguishable photons from a single-photon device *Nature* **419** 594-7

- [15] Gisin N, Ribordy G, Tittel W and Zbinden H 2002 Quantum cryptography *Rev. Mod. Phys.* **74** 145-155
- [16] Knill E, Laflamme R and Milburn G J 2001 A scheme for efficient quantum computation with linear optics *Nature* **409** 46-52
- [17] Dur W, Briegel H J and Cirac J I 1999 Quantum repeaters based on entanglement purification *Phys. Rev. A* **59** 169
- [18] Thompson R J, Rempe G and Kimble H J 1992 Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity *Phys. Rev. Lett.* **68** 1132-1135
- [19] Reithmarier J P, Sek G, Löffler A, Hofmann C, Kuhn S, Reitzenstein S, Keldysh L V, Kulakovskii V D, Reinecke T L and Forchel A 2004 Strong coupling in a single quantum dot-semiconductor microcavity system *Nature* **432** 197-200
- [20] Akahane Y, Asano T, Song B S and Noda S 2003 High-Q photonic nanocavity in a two-dimensional photonic crystal *Nature* **425** 944-947
- [21] Vuckovic J and Yamamoto Y 2003 Photonic crystal microcavities for cavity quantum electrodynamics with a single quantum dot *Appl. Phys. Lett.* **82** 2374-2376
- [22] Sodagar M, Khoshnegar M, Eftekharian A, and Khorasani S 2009 Exciton-photon interaction in a quantum dot embedded in a photonic microcavity *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 085402
- [23] Press D, Gotzinger S, Reitzenstein S, Hofmann C, Löffler A, Kamp M, Forchel A and Yamamoto Y 2007 Photon antibunching from a single quantum-dot-microcavity system in the strong coupling regime *Phys. Rev. Lett.* **98** 117402
- [24] Mosor S, Hendrickson J, Richards B C, Sweet J, Khitrova G, Gibbs H M, Yoshie T, Scherer A, Shchekin O B and Deppe D G 2005 Scanning a photonic crystal slab nanocavity by condensation of xenon *Appl. Phys. Lett.* **87** 141105
- [25] Hennessy K, Badolato A, Winger M, Gerace D, Atature M, Gulde S, Falt S, Hu E L and Imamoglu A 2007 Quantum nature of a strongly coupled single quantum dot-cavity system *Nature* **445** 896-899
- [26] Laucht A, Hofbauer F, Hauke N, Angele J, Stobbe S, Kaniber M, Böhm G, Lodahi P, Amann M C and Finley J J 2009 Electrical control of spontaneous emission and strong coupling for a single quantum dot *New J. Phys.* **11** 023034
- [27] Kistner C, Heindel T, Schneider C, Rahimi-Iman A, Reitzenstein S, Hofling S and Forchel A 2008 Demonstration of strong coupling via electro-optical tuning in high-quality QD-micropillar systems *Opt. Express* **16** 15006-15012

- [28] Sadeghi A H, Naqavi A and Khorasani S 2010 Interaction of Quantum Dot Molecules with Multi-mode Radiation Fields *Scientia Iranica* **17** 59-70
- [29] Khitrova G, Gibbs H M, Kira M, Koch S W and Scherer A 2006 Vacuum rabi splitting in semiconductors *Nature Phys.* **2** 81-90
- [30] Ciuti C, Bastard G, Carusotto I 2005 Quantum vacuum properties of the intersubband cavity polariton field *Phys. Rev. B* **72** 115303
- [31] Ciuti C, Carusotto I 2006 Input-output theory of cavities in the Ultrastrong coupling regime: the case of time-independent cavity parameters *Phys. Rev A* **74** 033811
- [32] De Liberato S, Ciuti C 2007 quantum vacuum radiation spectra from a Semiconductor Microcavity with a Time-Modulated Vacuum-Rabi Frequency *Phys. Rev. Lett.* **98** 103602
- [33] De Liberato S, Gerace D, Carusotto I, and Ciuti C 2009 Extracavity quantum vacuum radiation from a single qubit *Phys. Rev. A* **80** 053810
- [34] Gunter G, Anappara A A, Hees J, Sell A, Biasiol G, Sorba L, De Liberato S, Ciuti C, Tredicucci A, Leitenstorfer A, Huber R 2009 Sub-cycle switch-on of Ultrastrong light-matter interaction *Nature* **458** 178-181
- [35] Anappara A A, De Liberato S, Tredicucci A, Ciuti C, Biasio G, Sorba L, and Beltram F 2009 Signatures of the ultrastrong light-matter coupling regime *Phys. Rev. B* **79** 201303(R)
- [36] Hagenmuller D, De Liberato S, Ciuti C 2010 Ultrastrong coupling between a cavity resonator and the cyclotron transition of a two-dimensional electron gas in the case of an integer filling factor *Phys. Rev. B* **81** 235303
- [37] Niemczyk T, Deppe F, Huebl h, Menzel E P, Hocke F, Schwarz M J, Garcia-Ripoll J J, Zueco D, Hummer T, Solano E, Marx A, Gross R 2010 Circuit quantum electrodynamics in the Ultrastrong-coupling regime *Nature Phys.*; doi: 10.1038/nphys1730



Sharif University of Technology

Department of Electrical Engineering

M. Sc. Thesis

Cavity Quantum Electro-Dynamics in Ultra-Strong Coupling Regime

By:

Abbas Arab

Supervisor:

Prof. Sina Khorasani

July 2011

Abstract:

Cavity Quantum Electro-Dynamics (CQED) in Weak, Strong and Ultra-Strong coupling Regimes are studied.

A MATLAB m-file is written which is able to solve any arbitrary CQED configuration. This program demands input data such as number of Quantum Dots, number of energy levels of each Quantum Dot, energies of each energy level of Quantum Dots, Number of cavity modes, eign-frequency of each cavity mode, coupling constant, dipole strength of each allowed transition of Quantum Dots and initial state of system from user and begins to solve the Schrodinger equation for annihilation and atomic ladder operators. In addition, coefficients of each possible ket will be calculated. Since, any approximation method is dismissed in the program, the results are mathematically exact.

In chapter 1, a brief history and applications of CQED systems are discussed. In chapter 2, the algorithm and the format of input text file will be cleared. In chapter 3, reader will be familiar with the notation that is used throughout of this thesis and also, the mathematical process of gleaning the Schrodinger equation for annihilation and atomic ladder operator is followed. Finally in chapter 4, results of several parameters for a specific CQED system are illustrated in Weak, Strong and Ultra-Strong Coupling Regimes.

Keywords:

Cavity Quantum Electro-Dynamics, Weak Coupling Regime, Strong Coupling Regime, Ultra-Strong Coupling Regime, Coupling Constant, Quantum Dot, Concurrency, Annihilation Operator, Atomic Ladder Operator, Schrodinger Equation, Jaynes-Cummings-Paul Hmiltonian, Rotating Wave Approximation