۲-۱ جریان دو فاز آشفته

جریان دو فاز جریانی است که در حضور یک یا چندین سطح مشترک جدا کننده در مرز فازها مشخص می‌شود. مثال‌های متعددی از جریان دو فاز را در سیستم‌های مهندسی و پدیده‌های طبیعی مشاهده می‌کنیم. جریان دو فاز را به دو صورت، بدون تغییر فاز در جریان سطح آزاد یا با تغییر فاز در پدیده‌های کاویتاسیون و جوشش مشاهده می‌گردد. تکنیک‌های مدل کردن کاویتاسیون اغلب از تئوری جریان دو فاز به دست می‌آیند. بنابراین قبل از ارائه‌ی مدل‌های کاویتاسیون، مرور معادلات بقاء در جریان سیال و تئوری جریان چند فازی ضروری است.

۲-۲ فرم عمومی معادلات انتقال

شکل بقایی معادلات حاکم بر جریان سیال برای کمیت دلخواه، ψ به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\frac{\partial \rho\psi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{U}\rho\psi) = -\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{J}} + \rho\phi \qquad (۲-۱)$$

عبارت اول سمت چپ معادله (۲-۱)، نرخ تغییر کمیت ψ، در واحد حجم و عبارت دوم نرخ جابجایی در واحد حجم است. سمت راست معادله بیانگر انتشار شار و عبارت چشمه حجمی می‌باشد. معادله فوق، معادله انتقال نامیده می‌شود و به روشنی فرآیندهای مختلف انتقال را بیان می‌کند. جرم در زمان t، در یک حجم مشخص به فرم انتگرالی زیر بیان می‌شود.

$$M_V(t) = \int_V \rho(\vec{x},t)dV \qquad (۲-۲)$$

معادله بقای جرم دیفرانسیلی از معادله تعادل عمومی بدون در نظر گرفتن چشمه‌های سطحی و حجمی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \qquad (۲-۳)$$

معادله (۲-۳) بقای جرم را بیان می‌کند و به معادله پیوستگی معروف است.

معادله اندازه حرکت خطی با معادله زیر بیان می‌شود که در آن $\vec{f}$ ، نیروی بدنه و $\overline{\overline{T}}$، تانسور تنش است.

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} + \vec{f} \qquad (۲-٤)$$

برای یک سیال لزج، نیوتنی و تراکم‌پذیر، تانسور تنش به دو ترم فشاری و لزج تقسیم می‌شود.

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \qquad (۲-۵)$$

بنابراین معادله اندازه حرکت برای یک سیال نیوتنی و تراکم‌ناپذیر (معادله ناویر-استوکس) به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}} + \vec{f} \qquad (۲-٦)$$

نیروی جسمی، به عنوان مثال در سیستم‌های هیدرولیکی به صورت زیر است.

$$\vec{f} = \rho \vec{g} = \vec{\nabla}(-\rho g z) \qquad (۲-۷)$$

در یک سیال نیوتنی تانسور تنش لزج با تانسور تغییر شکل $\overline{\overline{D}}$، به صورت زیر رابطه دارد.

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu \overline{\overline{D}} \qquad (۲-۸)$$

برای جریان آشفته هر کمیت به صورت جمع دو مقدار متوسط و نوسانی در نظر گرفته می‌شود.

$$u = \bar{u} + u' \tag{۲-۹}$$

عبارت تنش آشفته $\bar{\bar{\tau}}_t$، به شکل زیر در معادله (۲-۶) وارد می‌شود.

$$\rho \frac{\partial \vec{\bar{U}}}{\partial t} + \rho(\vec{\bar{U}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\bar{U}} = -\vec{\nabla}\bar{p} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\tau}} + \bar{\bar{\tau}}_t) + \vec{f} \tag{۲-۱۰}$$

معادله (۲-۱۰)، به معادله رینولدز معروف است. تانسور تنش رینولدز به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$\bar{\bar{\tau}}_t = -\rho \overline{\vec{U}' \otimes \vec{U}'} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \tag{۲-۱۱}$$

این عبارت به وسیله مدل‌های توربولانسی و با در نظر گرفتن رابطه‌ای بین تانسور تنش رینولدز و میدان جریان به دست می‌آید. بعداز ارائه معادلات کلی بقا در جریان سیال به معرفی مدل‌های جریان چندفاز پرداخته می‌شود.

۲-۲-۱ مدل دوسیاله

مدل دوسیاله که اغلب مدل اولر- اولر نامیده می‌شود، هر فاز به طور جداگانه فرمول‌بندی می‌شود. بنابراین در این مدل دو سری از معادلات تعادل جرم، اندازه حرکت و انرژی برای هر فاز در نظر گرفته می‌شود، هر چند که میدان‌های میانگین یک فاز از فاز دیگر جدا نیست. بنابراین شش معادله میدان دیفرانسیلی با شرایط سطح مشترک فازها، حاکم بر جریان دوفاز است. در فرمولاسیون مدل دوسیاله، فرآیندهای انتقال هر فاز، با معادلات تعادلی آنها بیان می‌شود. به این معنی که مدل دوسیاله نه تنها به دلیل تعداد معادلات حوزه مورد بحث، بلکه در ترم‌های معادلات ترکیب کننده، شدیداً پیچیده است. مشکل اساسی مدل دوسیاله در لحاظ کردن تداخل

دینامیکی بین فازها می‌باشد. این کار با استفاده از معادلات اندازه حرکت جداگانه برای هر فاز و میدان سرعت مستقل انجام می‌شود. از طرف دیگر معادلات ترکیب‌کننده باید از دقت بالایی بر خوردار باشد، از آنجایی که معادلات دو فاز کاملاً مستقل هستند و عبارت‌های متداخل درجه کوپلینگ بین فازها را مشخص می‌کند، بنابراین فرآیندهای انتقال بین فازها شدیداً تحت تاثیر این عبارت‌ها قرار دارد [٤١].

مدل دوسیاله با دو میدان سرعت مجزا و تعیین سرعت هر فاز مشخص می‌شود. فرم مناسب معادله پیوستگی به صورت زیر است.

$$\frac{\partial \alpha_n \rho_n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_n \rho_n \vec{U}_n) = \Gamma_n \qquad (۱۲-۲)$$

در شرط انتقال جرم از سطح مشترک،

$$\sum_{n=1}^{2} \Gamma_n = 0 \qquad (۱۳-۲)$$

Γ_n، نرخ تولید جرم فاز nام از تغییر فاز در سطح مشترک و α_n، کسر حجمی محلی می‌باشد.

$$\sum_{n=1}^{2} \alpha_n = 1 \qquad (۱٤-۲)$$

در مدل دوسیاله برای هر فاز یک معادله مومنتوم جداگانه نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_n \rho_n \vec{U}_n) + \alpha_n \rho_n (\vec{U}_n \cdot \vec{\nabla})\vec{U}_n = -\vec{\nabla}(\alpha_n p_n) + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_n \bar{\bar{\tau}}_n + \alpha_n \bar{\bar{\tau}}_{t,n}) + \vec{M}_n + \vec{f} \qquad (۱۵-۲)$$

شرط انتقال اندازه حرکت از سطح مشترک به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\sum_{n=1}^{2} \vec{M}_n = \vec{M}_m \qquad (۱٦-۲)$$

$$\vec{M}_m = 2R_{21}S\vec{\nabla}\alpha_2 + \vec{M}_m^R \qquad (۱۷-۲)$$

که R_{12}، انحناء میانگین سطح مشترک، S کشش سطحی و $\vec{M}_m^R$، تاثیر تغییرات در انحناء میانگین را بیان می‌کند.

۲-۲-۱-۱ معادلات ترکیب کننده

در مدل دوسیاله همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد متغیرهای وابسته از تعداد معادلات میدان بیشتر است. بنابراین معادلات تعادل با شرایط مرزی صحیح، برای رسیدن به جواب معین نارسا است. در نتیجه تکمیل آنها با استفاده از یک سری معادلات ترکیب کننده ضروری است. معادلات ترکیب کننده معمولاً به چهار صورت حالت، انرژی، مکانیکی و توربولانسی ارائه می‌شود. از دیدگاه مکانیکی معادله ترکیب کننده به فرم زیر است.

$$\tau_n = \mu_n\left[\nabla\vec{U}_n + (\nabla\vec{U}_n)^T\right] - (\frac{2}{3}\mu_n - \lambda_n)(\nabla\cdot\vec{U}_n)\bar{\bar{I}} \qquad (۱۸-۲)$$

۲-۲-۲ مدل‌های مخلوط و همگن

مفهوم اساسی مدل مخلوط (مدل دیفیوژن)، لحاظ کردن مخلوط به عنوان کل می‌باشد. این مدل بسیار ساده‌تر از مدل دوسیاله است. با وجود این به یک سری فرض‌هایی که برخی از مشخصات جریان دو فاز را از بین می‌برد، نیاز است. ولی سادگی مدل در دینامیک سیستم جریان دو فاز جایی که اطلاعات در کل مخلوط مورد نیاز است، استفاده از این مدل را مفید می‌سازد. یکی از ویژگی‌های مهم مدل دیفیوژن در کاهش تعداد معادلات میدان و معادلات تشکیل دهنده مورد نیاز است. سیستم معادلات شامل چهار معادله می‌باشد. معادلات پیوستگی مخلوط، اندازه حرکت و انرژی به همراه معادله دیفیوژن، بقاء مخلوط را ارضاء می‌کنند. معادله دیفیوژن برای

محاسبه کسر حجمی به کار برده می‌شود. اگر در سیستم تغییر فاز کنترل شود و از رانش یا دیفیوژن جرم در معادله دیفیوژن صرفنظر شود، این سیستم به مدل همگن ساده می‌گردد [٤١].

معادله پیوستگی برای مخلوط نوشته می‌شود این معادله همان معادله پیوستگی برای جریان تک‌فاز، بدون ناپیوستگی داخلی می‌باشد.

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{U}_m) = 0 \qquad (۱۹-۲)$$

کمیت‌های مخلوط به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho_m = \sum_{n=1}^{2} \alpha_n \rho_n \qquad (۲۰-۲)$$

$$\vec{U}_m = \sum_{n=1}^{2} \frac{\rho_n \vec{U}_n}{\rho_m} \qquad (۲۱-۲)$$

$$p_m = \sum_{n=1}^{2} \alpha_n p_n \qquad (۲۲-۲)$$

معادله دیفیوژن که برای بدست آوردن کسر حجمی α_n، به کار برده شده، و به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\frac{\partial \alpha_n \rho_n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_n \rho_n \vec{U}_m) = \Gamma_n - \vec{\nabla} \cdot (\alpha_n \rho_n \vec{U}_{12}) \qquad (۲۳-۲)$$

Γ_n، انتقال جرم از سطح مشترک را بیان می‌کند، همچنین عبارت دوم سمت راست معادله (۲-۲۳) عبارت شار دیفیوژن است. توجه داریم که عبارت‌های دیفیوژن بر اساس مرکز جرم مخلوط توسعه داده شده است. اگر روابط براساس سرعت‌های مرکز جرم هر فاز بیان شود، معادله (۲-۲۳) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial \alpha_n \rho_n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_n \rho_n \vec{U}_n) = \Gamma_n \qquad (۲۴-۲)$$

از طرف دیگر، اگر تغییر فاز در سیستم کنترل شود و از سرعت نسبی بین فازها صرفنظر شود ($\vec{U}_{12} = 0$)، و یا اینکه دیفیوژن جرم در معادله دیفیوژن نداشته باشیم، معادله دیفیوژن به فرم زیر ساده می‌گردد، که این مدل، مدل همگن نامیده می‌شود.

$$\frac{\partial \alpha_n \rho_n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_n \rho_n \vec{U}_m) = \Gamma_n \qquad (۲۵-۲)$$

معادله اندازه حرکت برای مدل مخلوط، مشابه معادله اندازه حرکت برای سیستم تک فاز است.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \vec{U}_m) + \rho_m (\vec{U}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_m = -\vec{\nabla}(p_m) + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\tau}} + \bar{\bar{\tau}}_t) + \vec{M}_m + \vec{f} \qquad (۲۶-۲)$$

$\vec{M}_m$، عبارت چشمه در سطح مشترک است، از عبارت کشش سطحی در معادله (۲-۲۶) صرفنظر شده است.

انتخاب مدل دو فازی به پدیده مورد تحلیل و همچنین به دقت زمانی و مکانی بستگی دارد. مدل دوسیاله، مدل مناسبی برای اکثر جریان‌های دو فازی می‌باشد اما در پدیده سوپرکاویتاسیون با یک رفتار کاملاً مخلوط در ناحیه بسته شدن سوپکویتی مواجه هستیم، به طوری که مرز بین فازهای آب و بخار به وضوح مشخص نیست. بنابراین مدل دوسیاله با در نظر گرفتن هر فاز به طور جداگانه به برخی نتایج غیر واقعی منجر می‌شود. با این محدودیت مدل دوسیاله به طور خودکار به مدل مخلوط مراجعه می‌کنیم. با استفاده از مدل مخلوط (همگن) برای تحلیل یک جریان کاویتاسیون آشفته، دستگاه معادلات به دو فرض برای بسته شدن نیاز دارد؛ یکی برای ترم‌های آشفته (نوسانی) در معادله اندازه حرکت و دیگری عبارت‌های چشمه در معادله انتقال برای محاسبه کسر حجمی.

۲-۳ مدل‌های آشفتگی

معادلات ناویر- استوکس یک مجموعه بسته از چهار معادله با چهار مجهول u، v، w و p را تشکیل می‌دهند. به هر حال در عملکرد میانگین زمانی روی معادلات اندازه حرکت، جزئیات مربوط به حالت جریان را که در نوسانات زمانی نهفته است، کنار می‌گذاریم. در نتیجه به شش مجهول اضافی می‌رسیم که همان تنش‌های رینولدز در معادلات میانگین زمانی اندازه حرکت می‌باشند. پیچیدگی‌های آشفتگی معمولاً مانع از یک رابطه ساده برای تنش‌های اضافی و عبارات انتقال اسکالر می‌شود. این مشکلات ما را به استفاده از یک فرمولاسیون ساده برای محاسبه تنش‌های اضافی ترغیب می‌کند. بنابراین معادلات انتقال آشفتگی برای کل مخلوط سیال لحاظ می‌شود بدین معنی که فرمولاسیون جریان چند فاز آشفته به یک فرمولاسیون همگن ساده می‌شود.

مدل‌های میانگین‌گیری شده ناویر- استوکس در دو دسته مدل لزجت گردابه‌ای و مدل تنش‌های رینولدز طبقه‌بندی می‌شوند [۵۰]. معمولاً مدل‌های آشفتگی به صورت زیر دسته‌بندی می‌شود.

جدول (۲-۱): مدل‌های آشفتگی

مدل لزجت گردابه‌ای	مدل صفر معادله‌ای- مدل طول مخلوط
	مدل تک معادله‌ای
	مدل‌های دو معادله‌ای $k-\varepsilon$، $k-\omega$، SST
	مدل تنش جبری
مدل تنش‌های رینولدز	مدل تنش‌های رینولدز
	مدل ω- تنش رینولدز

مدل‌های دیگری نیز بر اساس شبیه سازی ادی‌های بزرگ (LES) و همچنین روش DES بر پایه معادلات ترکیبی $RANS\text{-}LES$ ارائه شده است. شبیه سازی ادی بزرگ، عبارت است از مدل‌های آشفتگی که معادلات جریان وابسته به زمان برای جریان متوسط و ادی‌های بزرگ حل می‌شوند. در این تحقیق از مدل دو معادله‌ای $k-\varepsilon$، استفاده شده است، و در ادامه به بیان جزئیات آن پرداخته می‌شود.

۲-۳-۱ مدل آشفتگی

لاندرو و اسپالدینگ در سال ۱۹۷٤ مدل استاندارد $k-\varepsilon$ را ارئه کردند. k، انرژی جنبشی آشفته و ε، نرخ استهلاک لزج می‌باشد. مقیاس سرعت و مقیاس طول به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [٤٧] و [٥٢].

$$c \cong \sqrt{k} \tag{۲-۲۷}$$

$$L \cong \frac{k^{2/3}}{\varepsilon} \tag{۲-۲۸}$$

با استفاده از روشی مشابه مدل طول مخلوط، لزجت ادی به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{۲-۲۹}$$

که c_μ ثابت بدون بعد است.

معادلات انتقال مدل استاندارد که شامل پنج ثابت قابل تنظیم است، به فرم زیر ارائه می‌گردد.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho \vec{U} k) = \vec{\nabla}\cdot\left[(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k})\vec{\nabla} k\right] + P_k - \rho\varepsilon \tag{۲-۳۰}$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{U}\varepsilon)=\vec{\nabla}\cdot\left[(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon})\vec{\nabla}\varepsilon\right]+\frac{\varepsilon}{k}(C_{\varepsilon 1}P_k-C_{\varepsilon 2}\rho\varepsilon) \qquad (۳۱-۲)$$

که P_k تولید آشفتگی توسط نیروهای لزج و شناوری است.

$$P_k=\mu_t\vec{\nabla}\vec{U}\cdot(\vec{\nabla}\vec{U}+\vec{\nabla}U^T)-\frac{2}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{U}(3\mu_t\vec{\nabla}\cdot\vec{U}+\rho k)+P_{kb} \qquad (۳۲-۲)$$

مقادیر زیر در محدوده وسیعی از جریان‌های آشفته در معادلات قابل استفاده است.

$c_\mu=0.09$ ، $\sigma_k=1.00$ ، $\sigma_\varepsilon=1.30$ ، $c_{1\varepsilon}=1.44$ ، $c_{2\varepsilon}=1.92$

مدل‌های دو معادله‌ای $k-\omega$ و SST نیز در طی انجام این تحقیق مورد بررسی قرار گرفت، اما با توجه به این نکته که برای جریان دائم با استفاده از توابع دیوار تفاوتی بین مدل‌های دو معادله‌ای مشاهده نشد و همچنین گران‌تر بودن دو مدل دیگر نسبت به مدل $k-\varepsilon$ و نیاز به شبکه بندی ریزتر، استفاده از مدل $k-\varepsilon$ توجیه‌پذیر است.

۲-۳-۲ توابع دیوار

جریان‌های مغشوش به طور قابل ملاحظه‌ای، با اعمال شرط عدم لغزش در مرزها، از دیوار متاثر می‌شوند. توابع دیوار در حقیقت پروفیل‌های تحلیلی جریان در لایه مرزی مجاور دیوار هستند که با استفاده از روش‌های تجربی و از حل صریح معادلات جریان در نزدیکی دیوار به دست آمده‌اند. بنابراین دیگر خطاهای موجود در روش‌های عددی در پروفیل‌های توابع دیوار به چشم نمی‌خورند. بنابراین برای کاهش حجم محاسبات به دلیل عدم نیاز به شبکه بندی در نواحی نزدیک دیوار، استفاده از توابع دیوار مورد توجه است.

ناحیه نزدیک دیوار را می‌توان به ۳ لایه مجزا تقسیم نمود. در داخلی‌ترین لایه، که اصطلاحاً زیر لایه لزج نامیده می‌شود، جریان اغلب شبیه جریان آرام می‌باشد، یعنی در این ناحیه، دیفیوژن مولکولی نقش غالب را در انتقال اندازه حرکت و حرارت بر عهده دارد. خارجی‌ترین لایه که اصطلاحا لایه کاملاً آشفته نامیده می‌شود، ادی‌ها نقش غالب را در انتقال اندازه حرکت و حرارت بر عهده دارند. در بین دو ناحیه مذکور، ناحیه میانی وجود دارد که دیفیوژن مولکولی و ادی‌ها از اهمیت یکسانی برخوردار می‌باشند. تابع دیوار استفاده شده در CFX ، توسعه یافته روشی است که توسط لاندر و اسپالدینگ ارائه شده است[٤٧]. رابطه لگاریتمی برای سرعت نزدیک دیوار به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$u^+ = \frac{U_t}{u_\tau} = \frac{1}{k}\ln(y^+) + C \qquad (۳۳-۲)$$

$$y^+ = \frac{\rho \Delta y u_\tau}{\mu} \qquad (۳٤-۲)$$

$$u_\tau = \left(\frac{\tau_\omega}{\rho}\right)^{1/2} \qquad (۳۵-۲)$$

که u^+ سرعت نزدیک دیوار، u_τ سرعت اصطکاکی، U_t سرعت مماسی در فاصله Δy از دیوار، y^+ فاصله بی بعد از دیوار، τ_ω تنش برشی دیوار، k ثابت ون کارمن و C ثابت ناحیه لگاریتمی بسته به زبری دیوار سطح می‌باشد. در معادله (۲-۳۳) با مشکل سینگولاریتی در نقاط جدایی نزدیک دیوار، زمانی که U_t صفر می‌شود، مواجه هستیم. در ناحیه لگاریتمی، از مقیاس سرعت جایگزین u^* به جای u_τ استفاده می‌گردد.

$$u^* = C_\mu^{1/4} k^{1/2} \qquad (۳٦-۲)$$

خاصیت مهم این مقیاس این است که وقتی U_t به سمت صفر میل می‌کند، صفر نمی‌شود. بر اساس این تعریف u_τ به صورت صریح به دست می‌آید.

$$u_\tau = \frac{U_t}{\frac{1}{k}\ln(y^*) + C} \qquad (۳۷-۲)$$

مقدار مطلق تنش برشی دیوار نیز به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\tau_\omega = \rho u^* u_\tau \qquad (۳۸-۲)$$

$$y^* = (\rho u^* \Delta y)/\mu \qquad (۳۹-۲)$$

و u^* قبلا تعریف شده است.

در توابع دیوار استاندارد باید از شبکه بندی و گسسته سازی میدان جریان در نواحی نزدیک دیوار اجتناب کرد. در غیر این صورت به واسطه تداخل مفهومی میدان سرعت به دست آمده از توابع دیوار و میدان سرعت محاسبه شده از گسسته سازی میدان جریان، نتایج بعضاً غلط و غیر قابل توجیه می‌گردد. مشکل عدم سازگاری تابع دیوار در شبکه‌های ریز، با استفاده از فرمولاسیون تابع دیوار[1] توسعه یافته در *CFX* بر طرف گردیده است. ایده اساسی در این تابع دیوار، محدود کردن مقدار y^* استفاده شده در فرمولاسیون لگاریتمی با مقدار پایینی $\tilde{y}^* = \max(y^*, 11.06)$ ، که ۱۱٫۰۶ فصل مشترک بین ناحیه لگاریتمی و خطی نزدیک دیوار است. بنابراین تمام نقاط شبکه بیرون زیر لایه لزج قرار گرفته و مشکل ناسازگاری شبکه خوب (شبکه ریز) بر طرف می‌شود. با این تعریف از وجود لایه میانی بین زیر لایه لزج و ناحیه کاملا آشفته صرفنظر شده است. حد بالایی y^+ تابع

[1] *Scalable Wall Function*

عدد رینولدز است. برای مثال در عدد رینولدز $۱۰^۹$ مقدار y^+ می‌تواند بزرگتر از ۱۰۰۰ باشد. برای اعداد رینولدز پایین، به عنوان مثال در یک پمپ کوچک، y^+ تا ۳۰۰ مطلوب است [٤٧].

۲-٤ مدل‌های کاویتاسیون

۲-٤-۱ روش تعقیب مرز مشترک

مدل تک فاز تعقیب مرز مشترک یکی از اولین روش‌های پیشرفته مدل‌سازی کاویتاسیون است. در این روش برای ناحیه کویتی فشار ثابتی برابر با فشار بخار جریان مایع در نظر گرفته می‌شود. محاسبات فقط برای فاز مایع انجام می‌شود و اثرات فاز بخار در شرایط مرزی اعمال می‌شود. مرز دو فاز با استفاده از این فرض قابل ردیابی است. در این روش‌ها معمولا از تئوری‌های جریان پتانسیل استفاده می‌شود. البته در برخی کارها از معادلات اولر دو بعدی و نیز از معادلات ناویر- استوکس سه بعدی نیز استفاده شده است. در این روش‌ها به تخمین اولیه شکل کویتی و یک مدل بسته شدن نیاز است [۸]. در تحقیق حاضر روی روش‌های مخلوط دوفاز تمرکز شده، و از ذکر جزئیات بیشتر در مورد روش‌های تعقیب مرز مشترک اجتناب شده است.

۲-٤-۲ مدل چندفاز همگن بر پایه معادله حالت

در این مدل مخلوط همگن با چگالی متغیر در دمای ثابت در نظر گرفته می‌شود. از طریق معادله حالت یا دیاگرام حالت، چگالی به فشار مرتبط می‌شود. برای در نظر گرفتن تغییر فاز (تغییر چگالی)، هنگامی که فشار مخلوط به زیر فشار بخار می‌رسد، از معادله حالت استفاده می‌شود. چگالی در ناحیه مایع و بخار ثابت فرض می‌شود و تغییرات چگالی وابسته به معادله حالت می‌باشد. چگالی مخلوط به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho_m = \alpha_l \rho_l + \alpha_v \rho_v \tag{۲-۴۰}$$

که α_l و α_v به ترتیب کسر حجمی مایع و بخار می‌باشد.

$$\alpha_v + \alpha_l = 1 \tag{۲-۴۱}$$

مطابق رابطه زیر کسرهای حجمی به چگالی مرتبط می‌گردد.

$$\alpha_v = \frac{\rho - \rho_l}{\rho_v - \rho_l} \tag{۲-۴۲}$$

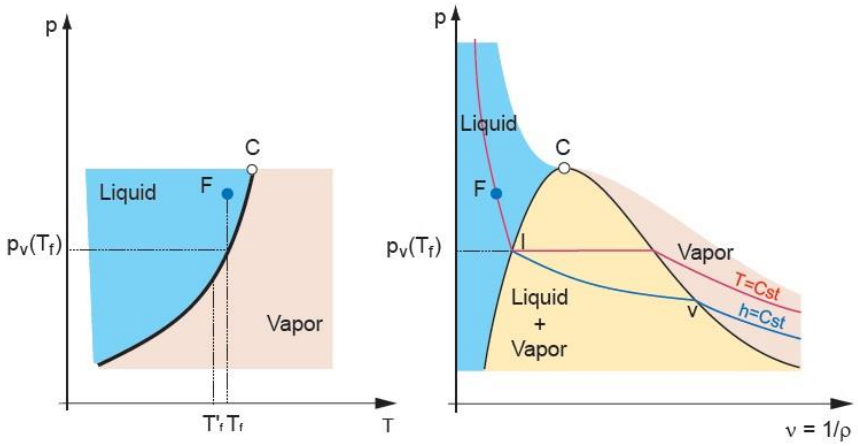
در نهایت سیستم معادلات شامل معادلات ناویر- استوکس برای یک مخلوط همگن به همراه معادله حالت به صوت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{U}_m) = 0 \tag{۲-۴۳}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \vec{U}_m) + \rho_m (\vec{U}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_m = -\vec{\nabla}(p_m) + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\tau}} + \bar{\bar{\tau}}_t) + \vec{M}_m + \vec{f} \tag{۲-۴۴}$$

۲-۴-۲-۱ مدل تبخیر آنتالپی ثابت

یکی از مشهورترین معادلاتی که در مدل چند فازی همگن بر اساس معادله حالت به کار برده می‌شود، مدل تبخیر در آنتالپی ثابت است [۱]. در این مدل فرض می‌شود که پدیده کاویتاسیون فرآیندی شامل تبخیر و تقطیر در آنتالپی ثابت است. مطابق شکل (۲-۱) فرآیند کاویتاسیون از ناحیه مادون سرد روی دیاگرام ترمودینامیکی آغاز و تا ناحیه دو فاز ادامه می‌یابد. در دما و فشار محلی معین که از طریق حل معادلات ناویر- استوکس به دست می‌آیند و با استفاده از دیاگرام‌های ترمودینامیکی می‌توان آنتالپی اشباع، $h_l(p)$ و $h_v(p)$ را مشخص کرد.



شکل (۲-۱): دیاگرام‌های ترمودینامیکی فرآیند کاویتاسیون [۳۷]

تابع چگالی و همچنین کسر حجمی مایع، طبق روابط زیر ارائه می‌شود.

$$y_l = \frac{h_v(p) - h}{h_v(p) - h_l(p)} \tag{۲-٤٥}$$

$$\rho_m = \frac{1}{\frac{1}{\rho_v} + y_l(\frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_v})} \tag{۲-٤٦}$$

تمامی مدل‌های چند فازی همگن بر اساس معادله حالت، مشابه این مدل شامل معادلات ناویر- استوکس به همراه یک معادله حالت بر پایه جداول ترمودینامیکی آب و بخار می‌باشد [۱۸].

۲-٤-۲-۲ مدل باروتروپیک (دلانوی و کوئنی[1])

چگالی مخلوط در این مدل با استفاده از یک معادله حالت باروتروپیک محاسبه می‌گردد.

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{a_{\min}^2} \tag{۲-٤٧}$$

[1] *Delannoy and Kueny*

که $a_{\min}$، حداقل سرعت صوت در مخلوط می‌باشد. معادله (۲-٤۷) مشابه تابع سینوس هایپربولیک با شیب ثابت $\frac{1}{a^2}$ در $p = p_v$ است. سرعت صوت مخلوط بر اساس اطلاعات بدست آمده از داده‌های تجربی در نظر گرفته می‌شود. به دلیل لحاظ کردن تراکم‌پذیری در این مدل، در اعداد ماخ بالا با مشکلاتی مواجه هستیم. در برخی منابع از سرعت صوت محلی متغیر استفاده شده است. این سرعت صوت متغیر به صورت یک معادله چند جمله‌ای و یا بر اساس روابط تجربی موجود در جریان‌های دوفاز، تعیین می‌شود [۱۵].

۲-٤-۲-۳ مدل رایلی- پلست (کوبوتا و همکاران[1])

کوبوتا و همکاران وی مدلی را پیشنهاد کردند که مدل دو فاز حبابی نامیده می‌شود (مشهور به مدل حبابی). معادله کمکی که در این مدل استفاده می‌شود بر اساس معادله حالت نمی‌باشد و از رابطه رایلی- پلست به دست می‌آید. در این مدل سیال به عنوان ماده‌ای تراکم‌پذیر با چگالی متغیر در نظر گرفته می‌شود. رشد و از بین رفتن حباب نیز توسط یک معادله بهبود یافته رایلی- پلست به همراه معادلات ناویر- استوکس در هر نقطه از میدان لحاظ می‌شود [۱۷].

۲-٤-۳ مدل چندفاز همگن بر اساس معادله انتقال

ایده اصلی این مدل استفاده از یک معادله انتقال به همراه عبارت‌های چشمه مناسب جهت تنظیم انتقال جرم بین فازهای بخار و مایع در جریان سیال است. مهم‌ترین مزیت این مدل در نظر گرفتن تغییر فاز از طریق به کارگیری معادله انتقال بوده که نقش به سزایی در شبیه‌سازی فیزیک جریان کاویتاسیونی دارد. به واسطه خاصیت معادله انتقال این مدل قابلیت محاسبه نقطه آغاز کویتی (نقطه جدایش) را همانند نتایج تجربی دارد. بر

[1] *Kubota et al.*

خلاف مدل‌های مبتنی بر معادله باروتروپیک، در مدل‌هایی که بر اساس معادله انتقال ارائه می‌شوند، چگالی به عنوان تابعی از فرآیند انتقال در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب گرادیان‌های فشار و چگالی لزوما در راستای یکدیگر نبوده و به هم مربوط نمی‌باشند. بنابراین مدل فوق قادر به محاسبه چرخش باروکلینیک[1] ($\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p$) مشاهده شده در نتایج تجربی می‌باشد [۳۷].

شکل‌های مختلف معادله انتقال و عبارت‌های چشمه در مقالات ارائه شده و نتایج قابل قبولی نیز از مدل‌های ارائه شده به دست آمده است. در همگی این کارها از پارامترهایی جهت تنظیم نرخ انتقال جرم استفاده شده که از مطابقت دادن کارهای تجربی و عددی بدست آمده است. اساس همه مدل‌های ارائه شده برای عبارت‌های چشمه در معادله انتقال، معادله رایلی- پلست است. در تحقیق حاضر معادله رایلی- پلست با فرض تعادل گرمایی بین فازهای بخار و مایع، برای کنترل نرخ تولید و انهدام حباب از طرق معادله انتقال و استفاده از تئوری چند فاز به کار برده می‌شود [٤٧]. معادلات حاکم پیوستگی و اندازه حرکت برای جریان چند فاز همگن و کلاسیک RANS به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{U}_m) = 0 \qquad (٤٨-٢)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \vec{U}_m) + \rho_m (\vec{U}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_m = -\vec{\nabla}(p_m) + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\tau}} + \bar{\bar{\tau}}_t) + \vec{M}_m + \vec{f} \qquad (٤٩-٢)$$

$$\frac{\partial (\alpha_n \rho_n)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_n \rho_n \vec{U}_m) = \Gamma_n \qquad (٥٠-٢)$$

معادله انتقال معمولاً برای فاز مایع در گرفته می‌شود.

[1] *Baroclinic vorticity*

۲-٤-۳-۱ مدل چگالی مبنا (چن و هیستر[1])

در این مدل چگالی به عنوان متغیر وابسته مطرح بوده و معادله انتقال برای چگالی نوشته می‌شود که به همراه معادلات ناویر- استوکس دستگاه معادلات را تشکیل می‌دهند. برای در نظر گرفتن رشد و نابودی حباب‌ها، تابعی از اختلاف فشار سیال و فشار بخار به سمت راست معادله انتقال افزوده می‌گردد [۱۰] و [۱۱].

$$\frac{D\rho}{Dt} = C(p - p_v) \tag{۵۱-۲}$$

البته برای توصیف سمت راست معادله انتقال از معادله رایلی- پلست نیز استفاده شده است.

$$\frac{D\rho}{Dt} = f(p, R_0, \alpha) \tag{۵۲-۲}$$

۲-٤-۳-۲ مدل فشار مبنا

در این مدل کسر حجمی بخار یا مایع به عنوان متغیر وابسته در معادله انتقال به کار برده می‌شود. مرکل و همکارانش[2] [۲۳]، سینگهال و همکارانش[3] [۲۰] و همچنین اهوجا و همکاران[4] [۳۲] وی عبارات چشمه‌ای تابع فشار ارائه کردند. هر دو صورت کسر حجمی و کسر جرمی این مدل‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. فرمول‌بندی این مدل بر حسب کسرحجمی به صورت زیر است.

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_l \rho_l \vec{U}_m) = \dot{m}^v + \dot{m}^c \tag{۵۳-۲}$$

$$\dot{m}^v = \frac{F^v}{t_\infty}\left[\frac{p - p_v}{0.5\rho_l U_{ref}^2}\right]\rho_l \alpha_l \tag{۵٤-۲}$$

[1] *Chen and Heister*
[2] *Merkle et al*
[3] *Singhal et al*
[4] *Ahuja et al*

$$\dot{m}^c = \frac{F^c}{t_\infty}\left[\frac{p-p_v}{0.5\rho_l U_{ref}^2}\right]\rho_v\alpha_v \qquad (۵۵-۲)$$

پارامترهای F^v و F^c فاکتورهای تجربی هستند که از نتایج تجربی و عددی تعیین، و نسبت به جریان آزاد بی‌بعد می‌گردند. t_∞ نیز مشخصه زمانی جریان است.

همچنین مدل مشابه دیگری توسط کانز و همکاران[1] [۲٤]،[۲۵]،[۲٦]،[۲۷] و [۲۸] وی ارائه شده است که جمله تبخیر تابعی از فشار و جمله تقطیر تابعی از کسر حجمی می‌باشد.

$$\dot{m}^v = \frac{F^v}{t_\infty}\left[\frac{p-p_v}{0.5\rho_l U_{ref}^2}\right]\rho_l\alpha_l \qquad (۵٦-۲)$$

$$\dot{m}^c = \frac{F^c}{t_\infty}\left[\frac{\alpha_l^2(1-\alpha_l)}{\rho_l}\right]\rho_v\alpha_v \qquad (۵۷-۲)$$

در این مدل نیز F^v و F^c بر اساس شرایط مختلف جریان و نوع هندسه تعیین می‌شوند.

۲-٤-۳-۳ مدل سینگهال[2] بر مبنای معادله رایلی- پلست

جملات چشمه در این مدل تابع فشار است که از فرم ساده شده معادله رایلی- پلست، توسط سینگهال و همکاران وی به صورت زیر ارائه شده است [۲۱].

$$\frac{\partial(y_l\rho_m)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(y_l\rho_m\vec{U}_m) = \dot{m}^v + \dot{m}^c \qquad (۵۸-۲)$$

$$\dot{m}^v = F^V\frac{\sqrt{k}}{\sigma}\rho_l\rho_v\left[\frac{2}{3}\frac{p_v-p}{\rho_l}\right]^{1/2}Y_l \qquad (۵۹-۲)$$

$$\dot{m}^v = F^c\frac{\sqrt{k}}{\sigma}\rho_l\rho_l\left[\frac{2}{3}\frac{p_v-p}{\rho_l}\right]^{1/2}Y_v \qquad (٦۰-۲)$$

[1] *Kuns et al*
[2] *Singhal et al*

فشار در ناحیه تغییر فاز با تخمین مقادیر محلی نوسانات فشار آشفته مطابق رابطه زیر تصحیح می‌شود.

$$p_v = p_{sat} + (p'_{turb}/2) = p_{sat} + (0.39\rho k/2) \qquad (۶۱-۲)$$

سائر و اشنر[1] از معاذله رایلی- پلست برای مدل‌سازی تشکیل و انهدام حباب در جملات چشمه استفاده کردند. به منظور در نظر گرفتن اثرات حرارتی در سیالات با دمای بسیار پایین روی رفتار حباب‌ها یک معادله ساده شده، آنتالپی مخلوط نیز به دستگاه معادلات افزودند [۳۱]. آلای بگوویچ[2] نیز یک مدل دوسیاله با استفاده از معادله رایلی- پلست برای انتقال جرم در مرز بین دو فاز ارائه کرده است. وی در این مدل سرعت فازهای بخار و مایع را یکسان در نظر گرفته است [۳۰].

۲-٤-۳-٤ مدل بر مبنای دینامیک مرز حباب

سنوکاک و همکارانش[3] با به کارگیری معادلات پیوستگی و مومنتوم عمودی در مرز مشترک بخار و مایع و صرفنظر از اثرات لزجت و کشش سطحی و همچنین استفاده از تحلیل ابعادی فرمول‌بندی خود را به صورت زیر ارائه کردند [٦] و [۳۳].

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l) + \vec{\nabla}\cdot(\alpha_l \vec{U}_m) = \dot{m}^v + \dot{m}^c \qquad (۶۲-۲)$$

$$\dot{m}^v = F^V \frac{p - p_v}{(U_{v,n} - U_{I,n})^2(\rho_l - \rho_v)} \frac{\alpha_l \rho_l}{\rho_v t_\infty} \qquad (۶۳-۲)$$

$$\dot{m}^c = F^V \frac{p - p_v}{(U_{v,n} - U_{I,n})^2(\rho_l - \rho_v)} \frac{1-\alpha_l}{t_\infty} \qquad (۶٤-۲)$$

[1] *Sauer and Schnerr*
[2] *Alajbegovic*
[3] *Senocak et al*

که $U_{v,n}$ و $U_{I,n}$ به ترتیب مولفه‌های عمودی سرعت‌های بخار و مرز مشترک می‌باشند. در مسائل ناپایا از سرعت مرز مشترک استفاده می‌شود در حالیکه برای مسائل دائم این سرعت برابر صفر فرض می‌گردد. برای تعقیب مرز مشترک در این مدل به روابط اضافی نیاز داریم، سنوکاک برای ساده‌سازی مسئله روابط زیر را پیشنهاد کرد.

$$U_{v,n} = \vec{U} \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \frac{\nabla \alpha_v}{|\nabla \alpha_v|} \qquad (٦٥-٢)$$

$$U_{I,n} = \frac{1 - 0.9\dfrac{\rho_l}{\rho_v}}{1 - \dfrac{\rho_l}{\rho_v}} U_{v,n} \qquad (٦٦-٢)$$

$$\frac{U_{l,n}}{U_{v,n}} = 0.9 \qquad (٦٧-٢)$$

در پژوهش حاضر از معادله رایلی- پلست برای لحاظ کردن انتقال جرم بین مایع و بخار استفاده شده است. بنابراین در ادامه به شکل مبسوط‌تری به توصیف روش پیش گفته پرداخته می‌شود.

۲-٤-۳-۵ مدل رایلی- پلست

دراین بخش به نحوه استفاده از معادله رایلی- پلست به عنوان جملات چشمه جهت تخمین نرخ تولید بخار در پدیده کاویتاسیون اشاره می‌شود. فرآیند کاویتاسیون شامل دو فاز و سه جزء می‌باشد.این سه جزء عبارتند از آب (w)، بخار (v) و گاز غیر قابل تقطیر (g). بین کسرهای حجمی رابطه زیر برقرار است.

$$(\alpha_w + \alpha_g) + \alpha_v = 1 \qquad (٦٨-٢)$$

همچنین بین فازها شرط عدم لغزش برقرار است. در بسیاری از مسائل کاویتاسیون فرض بر آن است که گاز غیر قابل تقطیر کاملاً با فاز مایع مخلوط شده و کسر حجمی آن ثابت و برابر α_g می‌باشد. بدین ترتیب کسرهای حجمی آب و گاز غیر قابل تراکم را با هم ترکیب نموده و کسر حجمی مایع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\alpha_l = \alpha_w + \alpha_g \tag{۶۹-۲}$$

بنابراین معادله انتقال برای فاز مایع که شامل گاز غیر قابل تقطیر نیز می‌باشد، به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_l \rho_l \vec{U}_m) = \Gamma_l = \dot{m}_l^v + \dot{m}_l^c \tag{۷۰-۲}$$

عبارت‌های $\dot{m}_l^v$ و $\dot{m}_l^c$ جملات چشمه را در طول فرآیند تبخیر و تقطیر (رشد و نابودی حباب) توصیف می‌کند. واحد آن $kg/m^3/s$ می‌باشد، که مبادله جرم بین فازها در طول فرآیند کاویتاسیون توسط این جملات محاسبه می‌شود. مدل کاویتاسیون بر اساس معادله رایلی- پلست بنا شده است. این معادله برای رشد یک حباب بخار را در داخل مایع به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$R_B \frac{dR_B}{dt} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR_B}{dt}\right)^2 + \frac{2\sigma}{R_B} = \frac{p_v - p}{\rho_l} \tag{۷۱-۲}$$

که R_B شعاع حباب، p_v فشار داخل حباب (فشار بخار در دمای مایع فرض می‌شود)، p فشار مایع اطراف حباب و σ ضریب کشش سطحی بین مایع و بخار است. توجه داریم که معادلات از تعادل مکانیکی بدست می‌آیند و فرض می‌شود که هیچ مانع حرارتی برای رشد حباب وجود ندارد. با استفاده از تخمین مرتبه اول و صرفنظر از عبارت کشش سطحی در معادله (۲-۷۱) شکل ساده شده زیر از معادله رایلی- پلست به دست می‌آید.

$$\frac{dR_B}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3}(\frac{p_v - p}{\rho_l})} \tag{۷۲-۲}$$

بنابراین نرخ تغییر حجم را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{dV_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{4}{3}\pi R_B^3) = 4\pi R_B^2 \sqrt{\frac{2}{3}(\frac{|p_v - p|}{\rho_l})} \tag{۷۳-۲}$$

و نرخ تغییر جرم حباب نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{dm_B}{dt} = \rho_v \frac{dV_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{4}{3}\pi R_B^3) = 4\pi \rho_v R_B^2 \sqrt{\frac{2}{3}(\frac{|p_v - p|}{\rho_l})} \tag{۷٤-۲}$$

اگر N_B تعداد حباب‌های موجود در واحد حجم باشد، کسر حجمی فاز بخار به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\alpha_v = V_B N_B = \frac{4}{3}\pi R_B^3 N_B \tag{۷۵-۲}$$

و در نهایت نرخ انتقال جرم کل را می‌توان به صورت زیر به دست آورد.

$$\dot{m} = N_B \frac{dm_B}{dt} = \frac{3\alpha_v \rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2}{3}(\frac{|p_v - p|}{\rho_l})} \tag{۷٦-۲}$$

این بیان با فرض رشد حباب (یعنی تبخیر) است. در حالت کلی‌تر معادله (۲-۷٦) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\dot{m} = F \frac{3\alpha_v \rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2}{3}(\frac{|p_v - p|}{\rho_l})} \operatorname{sgn}(p_v - p) \tag{۷۷-۲}$$

که F فاکتور تجربی بوده و برای تبخیر و میعان ممکن است متفاوت باشد (معمولا میعان خیلی آهسته‌تر از تبخیر است). با وجود اینکه معادله (۲-۷۷) حالت کلی تبخیر و میعان است اما در مورد تبخیر به یک سری اصلاحات نیاز است. شروع تبخیر به هسته‌های کاویتاسیون بستگی دارد. به طوری که با افزایش کسر حجمی

بخار، چگالی هسته‌های کاویتاسیون کمتر می‌شود. بنابراین برای فرآیند تبخیر در CFX ، جملات چشمه به صورت زیر اصلاح شده است.

$$\dot{m}_l^v = -F\,\frac{3\alpha_{nuc}(1-\alpha_v)\rho_v}{R_B}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{|p_v - p|}{\rho_l}\right)}\,\mathrm{sgn}(p_v - p) \qquad (۷۸-۲)$$

$$\dot{m}_l^c = F\,\frac{3\alpha_v\rho_v}{R_B}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{|p_v - p|}{\rho_l}\right)}\,\mathrm{sgn}(p_v - p) \qquad (۷۹-۲)$$

که R_B شعاع هسته‌های کاویتاسیون، α_{nuc} کسر حجمی هسته‌های کاویتاسیون، F^v و F^c ثابت‌های تجربی هستند. خوانندگان محترم برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توانند به تئوری CFX مراجعه کنند [٤٧].