فهرست مطالب

مقدمه

گاهی اوقات یک پست خاص در یک سازمان با کمبود نیروی انسانی روبرو می‌شود، در حالیکه همین پست در زمان های دیگر با تورم نیز روبرو بوده است . موجودی انبار سازمان ها نیز بعضی اوقات به ۰ می رسد و به توقف خط تولید منجر می شود در صورتیکه در اوقات دیگر موجودی انبار بسیار زیاد است ،و یا با خراب شدن ماشینی ملاحظه می شد که شرکت هزینه های زیادی را بابت تعمیرات و نگهداری و کاهش تولید متحمل می شود ، همچنین فروش سازمانها گاهی اوقات کم تر از تولید بود. و زمانی هم تقاضا برای محصولاتشان بیش از تولید بوده است .

ملاحظه می شود که اغلب سازمان ها با چنین مشکلاتی روبرو هستند . چگونه می‌توان سیاست هایی را برگزید که رویارویی با چنین مسائلی را به حداقل ممکن برساند یکی از الگوهایی که در این موارد به یاری سازمان ها می شتابند زنجیره های مارکوف است که به عنوان یکی از فرایندهای تصادفی در مدیریت مطرح است .

در سیستم نیروی انسانی سازمان یک فرد در سازمان یک فرد در سال‌ها (زمان‌ها)ی پی در پی ممکن است در پست های گوناگونی قرار گیرد و گاهی اوقات یک پست با کمبود نیرو و یا مازاد نیرو روبرو خواهد بود که زنجیره های مارکوف می تواند موجودی نیروی انسانی هرچه پست را در زمان آینده به طور احتمالی براساس روند گذشته نشان

داه ، سازمان را از موقعیت احتمالی خود در آینده از لحاظ نیروی انسانی با خبر کنید تا بتواد تعدلات لازم را در مورد مازادها و کمبودها انجام دهد.

در اینجا ویژگی مشخصه (پارامتر) مورد بررسی سیستم نیروی انسانی ، تعداد نیروی موجود است که به عنوان یک فرایند تصادفی مورد نظر است .

میزان موجودی انبار در یک سیستم انبارداری در هر لحظهای از زمان ممکن است متفاوت باشد . زنجیره های مارکوف میزان موجودی در هر لحظه از زمان را به عنوان پارامترمورد نظر در سیستم بررسی کرده و سطح موجودی احتمالی را برآورد می کند و هادی سازمان ها برای نگهداری موجودی در سطح بهینه است .

زنجیره های مارکوف پیش بینی می کند که یک ماشین در خط تولید ، در چه وضعیتی خواهد بود و بنابر هزینه های مختلف بهترین سیاست تعمیر و نگهداری چیست ؟

میزان فروش یک سازمان در آینده بر اساس زنجیره های مارکوف قابل پیش بینی است تا بتوان تولیدی متناسب با فروش داشت .

فرایندهای تصادفی

یک فرایند تصادفی به عنوان یک مجموعه متغیرهای تصادفی $[X_t]$ تعریف می شود که شاخص T که غالباً معرف زمان است ، در سرتاسر مجموعه خاص T مجموعه اعداد صحیح غیر منفی است و X t یک مختصر قابل اندازه گیری در زمان T را بیان می کند . برای مثال فرایند تصادفی $X_1+X_2+X_3,...$ می تواند بیانگر مجموعه سطوح موجودی هفتگی (ماهانه) محصول ، فروش ، نیروی انسانی موجود سالانه (فصلی) به ترتیب برای زمان های 1,2,3... باشد .

بررسی حرکت یک سیستم که برای دوره های زمانی پی در پی عمل می کند ، غالبا به تجزیه و تحلیل یک فرایند تصادفی با ساختار تصادفی خاص منجر می شود. بدیهی است هنگامی که یک سیستم مورد بررسی قرار می گیرد ، حالتهای آن سیستم در زمان t در حالت X_t به سر می‌برد .

در فرآیندهای تصادفی ، هر سیستم تنها از یک جنبه یا یک مشخصه مورد بررسی قرار می گیرد . زمان t در نقاط خاص با ... و۲و۱ مشخص می شود که سیستم دقیقاً در حالتی منحصر به فرد قرار می گیرد .

نقاط زمانی ممکن است با فاصله یکسان از یکدیگر باشند یا اینکه ممکن است فاصله آنها با توجه به حرت کلی سیستم که فرایند تصادفی در آن محاط شده است ، متغیر باشد .

گرچه ممکن است هر یک از حالتها حکایت از یک ویژگی کیفیتی مثل خودب یا بد بکند اما با نمادهای ... ۲ و ۱ و ۰ نمایش داده می شوند . بنابراین توصیف ریاضی سیستم فیزیکی یک فرایند تصادفی بصورت $[X_t]$ است که متغیرهای تصادفی در زمان $T=0,1,2,...$ مشاهده می شوند و هر متغیر تصادفی ممکن است یکی از $(M+1)$ عدد صحیح $0,1,2,...M$ حالت ممکن باشد .

زنجیره ها مارکوف

فرایند تصادفی $X=[X_t ,TEN]$ یک زنجیره مارکوف نامیده می شود ار برای هر $jE\ \ E,$ TEN شرط زیر صادق باش که در آن E یک مجموعه قابل شمارش است .

$$P[X_{t+1} =j = j[x_0, x_1, x_2...x_t] = p[x_t = j \text{ I } x_t]$$

عبارت فوق بیانگر احتمال وجود سیستم در زمان T+1 در حالت J است به شرط اینکه در زمان T حالت سیستم مشخص و حالتهای رخ داده قبلی مشخص باشد. بنایراین یک زنجیره مارکوف ، یک رشته از متغیرهای تصادفی برای T است در این مورد گفته می شود که فرایند با توجه به حالتی که در زمان T دارد ، در زمان t+1 در حالت J خواهد بود.

در واقع خاصیت مارکوفی با حالت احتمال شرحی هر « پیشامد» آینده براساس «پیشامد» فعلی یکسان است ، و حالت آینده $X_{t+1} =j$ از پیشامدهای قبلی مستقل است فرآیند فقط به حالت فعلی سیستم بستگی دارد .

احتمال شرطی $P[X_{t+1} = j \text{ I } X_t=i]$ برای $j\ \varepsilon\ E$ و i احتمال انتقال سیستم از حالت i به j نامیده می شود . معمولاً P_{ij} ها را با توجه به حالتهای یک سیستم با یک آرایش مربعی

مرتب می کنند و نتیجه آن ماتریس مربع P است که ماتریس انتقال زنجیره مارکوف X نامیده می شود.

$$\begin{bmatrix} P00 & \cdots & P0n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Pn0 & \cdots & Pnn \end{bmatrix}$$

در ماتریس م ، الف برای هر $i \; \varepsilon \; E$ و j، $P_{ij} \geq 0$ و ب) برای هر $i \; \varepsilon \; E$ $\sum_{j=0}^{n} Pij = 1$ است . ماتریس انتقال یک زنجیره ، ماتریس مارکوف نیز نامیده می شود . مورد الف بیانگر این است که احتمال ورود سیستم از یک حالت i به حالت j بزرگتر یا مساوی صفر است و مورد بیان می کند که مجموع احتمالات هر سطر باید مساوی یک باشد چون یک سیستم به احتمال صددرصد در یکی از مجموعه حالتهای ممکن در هر لحظه از زمان خواهد بود ، واگر مجموع احتمالات هر ستون نیز برابر ۱ باشد ، آن را ماتریس انتقال مضاعف گویند.

بطور خلاصه یک فرایند تصادفی $[X_t]$ و $(t=0,1,\ldots)$ یک زنجیره مارکوف نامیده می شود . اگر موارد زیر صادق باشند :

۱- وجود تعداد محدودی از حالتها

۲- داشتن خاصیت مارکونی (صدق احتمالات شرطی)

۳- وجود احتمالات انتقال پایدار ، هر سیستم پس از مدت طولانی به سمت احتمالات انتقال پایدار میل می‌کند.

٤- وجود یک مجموعه احتمالات اولیه $P[x_0 = i]$ برای هر i (داشتن ماتریس انتقال اولیه)

معادله چپ من – کلموگورف

$P_{ij}(n)$ احتمال انتقال سیستم از حالت i به حالت j در مرحله n ام است . معادله چپ من – کلموگروف کیاروش برای محاسبه این احتمال انتقال در مرحله n است :

این معادله صرفاً خاطرنشان می کند که برای رفتن از حالت i به j در n مرحله ، دقیقاً بعد از V مرحله (که ٧ مرحله ی قبل از مرحله n است) در حالت K خواهد بود . بنابراین $0 \leq V \leq n$ و $P_{ik}^{(n-r)}$ $P_{ik}^{(r)}$ همان احتمال شرطی است که فرایند با شروع حالت از i بعد از مرحله ٧ مرحله به k می رسد و پس از n-v مرحله به حالت j می رود.

در واقع محاسبه $P_{ij}^{(r)}$ برای محاسبه ماتریس P^n یعنی ماتریس انتقالی مرحله n به کار می رود و برای بدست آوردن P^n ، ماتریس P ، n بار در خودش مضرب می شود و P_{ij} در ماتریس P^n همان $P_{ij}^{(n)}$ خواهد بود.

دسته بندی حالت ها در زنجیره های مارکوف ←

فرض کنید x یک زنجیره مارکوف با فضای حالت E و ماتریس انتقال P باشد و T زمان اولین ملاقات سیستم حالت J باشد؛ یعنی در آینده باری که سیستم در حالت J خواهد بود زمان T است.

حالت J بازگشتی نامیده می شود اگر $P_j[T\langle\infty]=1$ باشد در واقع اگر سیستم صد در صد بتواند مجدداً به حالت j برگردد حتی در بلند مدت حالت j بازگشتی است.

در غیر این صورت اگر $P_j[T=\infty]\geq 0$ باشد، J ناپایدار نامیده می شود. یعنی احتمال بازگشت سیستم به حالت J وجود دارد ولی صد در صد نیست.

یک حالت بازگشتی J متناوب با دوره تناوب ∂ نامیده می شود اگر $\partial\geq 2$ به عنوان بزرگترین عدد صحیح در شرط زیر صادق باشد.

$$P_j[T=n\partial,\partial\geq 1,$$

یعنی بازگشت سیستم به حالت j به طور متناوب با فاصله های زمانی یکسان بزرگتر از ۱ خواهد بود. به عبارت دیگر گفته می شود حالت j دارای دوره تناوب $3(3\geq 1)$ است که $P_{jj}(n)=0$ باشد در حالی که n به j قابل تقسیم نباشد و ∂ کوچکترین عددی باشد که دارای این خاصیت است، برای مثال احتمال دارد که فرایند در زمان ...و۴و۳و۲و۰ به حالت j برسد.

در این صورت این سیستم با فاصله زمانی متناوب ۲ به حالت j می رسد پس حالت j دارای دوره تناوب ۲ است اگر ۲ عدد متوالی s+1,s به قسمتی وجود داشته باشد که فرایند در حالتهای s+1,s در حالت j باشد گفته می شود که حالت دارای دوره تناوب ۱ است و یک حالت غیر متناوب است، در حقیقت اگر $j\geq 2$ نباشد ، j را غیر متناوب گویند.

اگر حالت j از حالت i قابل حصول و حالت i نیز از حالت J قابل حصول باشد آن گاه به حالت i و J تعاملی گفته می شود بطور کلی الف) هرحالت با خودش تعامل می کند هنگامی که $P_{ii}^{(0)} = P[X_1 = iX_0 = i] = 1$ باشد ، ب) اگر حالت i با حالت j در تعامل باشد آن گاه حالت J با حالت i در تعامل است و هم چنین ج) اگر حالت i با حالت J با حالت K در تعامل باشد.آن گاه حالت i با حالت K در تعامل است.

اگر خارج ار یک مجموعه از حالت های یک سیستم هیچ حالت دیگری وجود نداشته باشد آن را یک مجموعه بسته می گویند. به عبارتی اگر سیستم وارد آن مجموعه حالتها شد دیگر از آن مجموعه خارج نمی شود مثلا در شکل شماره ۱ مجموعه های $\{a,c,e\}$و $\{a,b,c,d,e\}$ بسته هستند .

شکل شماره ۱ گراف انتقال زنجیره مارکوف ماتریس انتقال زیر است که فضای حالت آن E={a,b,c,d,e} است:

$$P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

در شکل شماره ۱ دایره ها بیانگر حالت هاست و پیکان در صورتیکه $P_{ij} \geq 0$ باشد ، رسم می شوند با حذف سطر و ستون دوم و چهارم ماتریس زیر به دست می آید که بیانگر مجموعه بسته {a,c,e} است:

$$Q = \begin{array}{c} \\ a \\ c \\ e \end{array} \begin{bmatrix} a & c & e \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس انتقال p با تجدید نظر نوشته شود ماتریس p زیر حاصل می شود که تجریه و تحلیل را راحت تر می سازد:

$$P = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{bmatrix} a & c & e & b & d0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب حالتهای a,c,e بازگشتی غیر متناوب و حالتهای d,b ناپایدارند.

یک مجموعه بسته را که هیچ زیر مجموعه بسته مناسبی نداشته باشد یک مجموعه تفکیک ناپذیر گویند. اگر یک زنجیره مارکوف تنها یک مجموعه بسته باشد آن را زنجیره مارکوف تفکیک ناپذیر گویند. در مثال قبل تمام زنجیره تفکیک ناپذیر نیست چون خود دارای یک زیر مجموعه بسته است اما مجموعه {a,b,c} یک مجموعه بسته تفکیک ناپذیر است. اگر در یک مجموعه بسته یک حالت از خودش حاصل شود آن را در یک حالت جاذب گویند.

اگر احتمال ورود یک سیستم از حالت ا به حالت ا یعنی به خودش ۱ باشد آن حالت جاذب است چون با ورود یک فرایند به حالت مذکور فرایند دیگر از آن خارج نخواهد شد و این حالت فرایندرا جذب خواهد نمود به عبارت دیگر ، احتمال ابقای حالتی P_{ii}، یک باشد حالت ا جاذب خواهد بود.

چگونه احتمالات حالت در زمان تغییر می کند؟

در زمان های متفاوت احتمالات برای حالتی در زنجیره مارکوف متفاوت است؛ یعنی احتمال برای رخ دادن حالت خاصی در زمان های n+1,n یکسان نیست.

احتمال اینکه فرایند در زمان اولیه در هر یک از حالت ها باشد مشخص است برای بدست آوردن احتمالات حالت در زمان بعد ، احتمال حالت اولیه در احتمال انتقال که در ماتریس انتقال ضرب می شود تا احتمال وجود فرایند در هر یک از حالتها در دوره زمانی بعد مشخص شود . فرض کنید ماتریس انتقال یک فرایند خاص زنجیره مارکوف به صورت زیر باشد و احتمالات حالت اولیه یعنی n=0 اینگونه باشد:

$$P_A^{(0)} = 0/45 \quad P_B^{0} = 0/35 \quad P_C^{(0)} = 0/2$$

$$P = \begin{bmatrix} 0/9 & 0/05 & 0/05 \\ 0/1 & 0/8 & 0/1 \\ 0/1 & 0/15 & 0/75 \end{bmatrix}$$

چنانچه ملاحظه می شود مجموعه احتمالات حالت اولیه در سوق ۱ می شود یعنی احتمال وجود فرایند در یکی از سه حالت صد در صد است. اما احتمالات حالت جدید

برای دوره n=1 با ضرب احتمالات حالت اولیه بصورت ماتریس سطری در ماتریس انتقال بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} P_A^{(0)} & P_B^{(0)} & P_C^{(0)} \\ 0/45 & 0/35 & 0/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/9 & 0/05 & 0/05 \\ 0/1 & 0/8 & 0/1 \\ 0/1 & 0/15 & 0/75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A^{(1)} & P_B^{(1)} & P_C^{(1)} \\ 0/46 & 0/3325 & 0/2075 \end{bmatrix}$$

اولین عنصر یعنی احتمال جدید برای زمان n=1 بصورت زیر بدست آمده است:

احتمال حالت جدید (n=1) = احتمال انتقال x احتمال حالت اولیه (n=0)

$$\begin{array}{lllll} 0/45 & x & 0/9 & = & 0/4050 \\ 0/35 & x & 0/1 & = & 0/0350 \\ 0/20 & x & 0/1 & = & 0/0200 \\ P_A^{(1)} = 0/4600 \end{array}$$

بقیه احتمالات نیز همین گونه بدست آمده است دقت شود که احتمال وجود فرایند در حالت A در دوره ، بعد از بقیه حالتها بیشتر است، و این به خاطر انتقال از حالتهای دیگر به این حالت است.

برای بدست آوردن احتمالات حالت دوره n=2 به دو طریق زیر می توان عمل کرد:

الف) احتمالات حالت دوره n=1 در ماتریس انتقال ، بدین ترتیب ضرب می شود:

$$\begin{bmatrix} P_A^{(1)} & P_B^{(1)} & P_C^{(1)} \\ 0/46 & 0/3325 & 0/2075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/9 & 0/05 & 0/05 \\ 0/1 & 0/80 & 0/1 \\ 0/1 & 0/15 & 0/75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A^{(2)} & P_B^{(2)} & P_C^{(2)} \\ 0/648 & 0/320125 & 0/211875 \end{bmatrix}$$

ب) احتمالات حالت دوره n=0 در توان دوم ماتریس انتقال ، یعنی P^2 ضرب می شود:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0/9 & 0/05 & 0/05 \\ 0/1 & 0/8 & 0/1 \\ 0/1 & 0/15 & 0/75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/9 & 0/05 & 0/05 \\ 0/1 & 0/8 & 0/1 \\ 0/1 & 0/15 & 0/75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/8200 & 0/0925 & 0/0875 \\ 0/1800 & 0.6600 & 0/1600 \\ 0/1800 & 0/2375 & 0/5825 \end{bmatrix}$$

اکنون باید احتمالات حالت اولیه n=0 در P^2 ضرب شود:

$$\begin{bmatrix} P_A^{(0)} & P_B^{(0)} & P_C^{(0)} \\ 0/45 & 0/33 & 0/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/8200 & 0/0925 & 0/0875 \\ 0/1800 & 0/6600 & 0/1600 \\ 0/1800 & 0/2375 & 0/5825 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A^{(2)} & P_B^{(2)} & P_C^{(2)} \\ 0/468 & 0/320125 & 0/211875 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می کنید که پاسخ در هر ۲ مورد یکسان است و احتمال وجود فرایند در زمان n=1 در حالتهای C,B,A به ترتیب 0/46، 0/3325، 0/2075 و در زمان n=2 به ترتیب 0/468، 0/320125، 0/211875 خوهد بود به همین ترتیب می توان برای دوره های بعد نیز عمل کرد و برای هر زمانی از n یا احتمالات حالت اولیه n=0 را در توان nام ماتریس ضرب نمود و یا باید احتمالات حالت دوره n-1 را در ماتریس انتقال ضرب کرد. اینک از محاسبات صرف نظر و احتمالات حالت برای چند دوره انتخابی ارائه می شود:

دوره	N=0	N=1	N=10	N=15	N=20	N=25	N=30
$P_A^{(n)}$	0/45	0/46	0/49466	0/49824	0/49942	0/49982	0/49994
$P_B^{(n)}$	0/35	0/3325	0/28970	0/28693	0/28610	0/28584	0/28575
$P_C^{(n)}$	0/20	0/2075	0/21483	0/21483	0/21448	0/21434	0/21431

چنانچه ملاحظه می شود با افزایش n احتمال حالتها نیز تغییر کم تری می کنند. این امر دلالت می کند که احتمالات حالت ممکن است به سمت یک مجموعه ثابت هم گرا شوند و سرانجام بدون تغییر باقی بمانند. در این نقطه فرایند به یک حالت پایدار می

رسد و در همان حالت باقی خواهد ماند تا اینکه اعمال خارجی احتمالات را تغییر دهند.

در جدول ملاحظه می شود که احتمالات حالت پایدار برای C,B,A به ترتیب تقریبا برابر با 0/214, 0/286, 0/5 هستند؛ یعنی در بلند مدت انتظار می رود احتمالات حالت به این مقادیر برسند. این نشان می دهد که تاثیر پذیری فرایند در زمان طولانی از حال حاظر ناچیز می شود.

محاسبه احتمالات حالت پایدار

برای بدست آوردن احتمالات پایدار به طریقی که در فوق آمده است زمان زیادی نیاز دارد. به منظور ارائه یک راه حل کوتاه ، احتمالات از طریق عملیات ماتریسها محاسبه می شود.

همان گونه که ملاحظه شد، احتمال ورود به یک حالت خاص ، با ضرب احتمال در مقادیر مربوط در ستون ماتریس انتقال به دست می آید. برای مثال فوق روابط زیر برقرار است:

$$P_A = 0/9P_A + 0/1P_B + 0/1P_C$$
$$P_B = 0/05P_A + 0/8P_B + 0/15P_C$$
$$P_C = 0/05P_A + 0/1P_B + 0/75P_C$$

قبلا نیز بیان شد که جمع هر سطر در ماتریس انتقال باید برابر ۱ باشد یا به عبارتی احتمال وجود فرایند در مجموع حالتهای خود باید معادل ۱ باشد و این مطلب محدودیت زیر را اعمال می کند: $P_A + P_B + P_C = 1$

با حل ۴ معادله فوق احتمالات حالت

پایدار برای هر حالت بدین ترتیب بدست خوهد آمد :

$$P_A - 0/9P_A = 0/1P_B + 0/1P_C \Rightarrow 0/1P_A = 0/1P_B + 0/1P_C \Rightarrow P_A = P_B + P_C$$

و چون تمام احتمالات باید در مجموع ۱ باشند با استفاده از $P_B + P_C$ برای P_A می توان اینگونه نوشت:

$$(P_A + P_C) + P_B + P_C = 1 \Rightarrow 2P_B + 2P_C = 1 \Rightarrow P_B = 0/5 - P_C$$
$$P_A = (0/5 - P_C) + P_C = 0/5$$

و بنابراین:

باقرار دادن $P_B = 0/5 - P_C, P_A = 0/5$ در معادله دوم دیده می شود که :

$$0/5 - P_C = 0/05(0/5) + 0/8(0/5 - P_C) + 0/15P_C \Rightarrow P_C = 0/21429$$
$$P_B = 0/5 - 0/21429 = 0/28571$$

و مجموعه احتمالات حالت پایدار اینگونه هستند:

$$P_A = 0/5 \quad P_B = 0/28571 \quad P_C = 21429$$

که با محاسبات قبلی توافق دارد.

در واقع احتمالات حالت پایدار یا حدی بیانگر این است که در $P_{ij}^{(n)}$ هنگامی که n به سمت بی نهایت حرکت می کند، حدآن یعنی $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ به سمت یک مقدار ثابت میل می کند ، یعنی هر سطر آن هم چون معادله زیر خواهد بود:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \Pi_j$$

وقتی که این احتمالات حدی غیرشرطی که از احتمالات اولیه و زمان پاراسته n مستقل هستند وجود دارند، می توان آنها را از رابطه زیر بدست آورد:

$$\lim_{n\to\infty} \Pi^{n} = \lim_{n\to\infty} \Pi^{(n-1)} p$$

فرض کنید که $\Pi = \Pi_0, \Pi_1, \ldots$ بیانگر بردار احتمال حدی باشد، آن گاه روابط به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \Pi^{(n-1)} = \Pi$$

و بنابراین $\Pi = \Pi P$

معادله فوق ، معادله ایستای زنجیره مارکوف نامیده می شود و حل آن توزیع ایستا گفته می شود ممکن است در بعضی از موارد برای معادله ایستا حل وجود داشته باشد حتی وقتی که توزیع حدی وجود نداشته باشد.

بنابراین وقتی که یک توزیع عددی وجود دارد ، این دلالت می کند که برای معادله ایستا حل وجود دارد ، و نتیجه این توزیع ایستا ، توزیع حدی (پایدار) است. اما عکس آن صادق نیست ؛ یعنی ، وجود یک حل برای معادله ایستا بر وجود یک توزیع حدی دلالت نمی کند. برای آشنایی بیشتر به مثال زیر توجه کنید:

یک فرایند تصادفی ، مارکوف ر ا با ماتریس انتقال زیر در نظر بگیرید:

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

اکنون برای معادله ایستا حل می شود و برای توزیع ایستا بدست می آید:

$$[\Pi_0,\Pi_1]=[\Pi_0,\Pi_1]\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

که نتیجه می شود که $\Pi_0=\Pi_1$ است. با استفاده از $\Pi_0+\Pi_1=1$ توزیع ایستا $\Pi_0=\Pi_1=\frac{1}{2}$ می شود. اما آیا یک توزیع حدی نیز هست؟ طبیعتاً این گونه نخواهد بود چون که فرایند پیوسته بطور متناوب تغییر می کند و احتمال اینکه در یک حالت خاص 0 یا 1 در آینده یافت شود به مقدار خاص N انتخاب شده بستگی دارد. این موضوع به سهولت با ضرب متوالی ماتریس P به صورت زیر حاصل می شود:

$$P^{(n)}\begin{cases}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} & \text{برای n زوج}\\[2ex] \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} & \text{برای n فرد}\end{cases}$$

بنابراین صرفا با وجود یک جواب برای $\Pi=\Pi P$ حد $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}$ وجود ندارد. علاوه بر این $\lim\limits_{n\to\infty}\Pi^{(n)}$ نیز وجود ندارد مگر در صورت $\Pi^{(0)}=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ یعنی توزیع احتمال اولیه معادل با توزیع ایستاست و تنها برای $\Pi^{(0)}$ این گونه است.

$$\Pi^{(1)}=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

و از این رو $\Pi^{(n)}$ بصورت زیر درمی آید:

برای هر n $\Pi^{(n)}=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

کاربرد زنجیره های مارکوف در برنامه ریزی نیروی انسانی

برنامه ریزی نیروی انسانی یکی از مهم ترین برنامه های سازمانی است که به شیوه های مختلف در این زمینه اقدام می شود. گاهی اوقات از مدل های احتمالی برای برنامه ریزی استفاده می شود. هنگامی که نقل و انتقالات و جابجایی های نیروی انسانی سازمان تصادفی باشد، مدل های احتمالی به کمک خواهند آمد که یکی از آنها زنجیره های مارکوف است که این مدل نقل و انتقالات احتمالی نیروی انسانی را پیش بینی می کند.

جابجایی ها در نیروی انسانی

نیروی انسانی یکی از حساس ترین عوامل تولید است که کنترل آن برای سازمان از ارزش والایی برخوردار است نقل و انتقالات و جابجایی های نیروی انسانی نیز گاهی اوقات برای آینده سازمان اهمیت زیادی دارد.

علاوه بر نقل و انتقالات داخلی بین پست ها در سیستم نیروی انسانی هر سازمان ، تعداد ورودی و خروجی برای این سیستم وجود دارد که شامل ترک خدمت ها ، اخراج ها ، بازنشستگی ها ، فوت ها ، مرخصی ها ، حوادث و مواردی دیگر می شود که به همراه تغییر شغل ها و ارتقاها تشکیل دهنده نقل و انتقالات می شوند. بطور کلی نقل و انتقالات این سیستم به صورت زیر خواهد بود:

خروجی های نیروی انسانی	بازنشستگی ترک خدمت اخراج فوت	سازمان انتقال بین پست ها	استخدام رسمی //قراردادی روز فرد ماموریت	ورودیهای نیروی انسانی

در زنجیره های مارکوف برای برنامه ریزی نیروی انسانی یک ماتریس انتقال وجود دارد که ماتریس انتقال نیروی انسانی نامیده می شود. در این ماتریس ، حالتها ، پست ها می باشند که یک مرد ممکن است در زمان های مختلف در یکی از این پست ها (حالتها) باشد. در ماتریس مذکور علاوه بر پست ها به عنوان حالتها ، باید برای ورودیها و خروجی ها نیز حالت های جداگانه ای در نظر گرفت چون از ماتریس ها نیرو خارج نمی شود و سرانجام به حالت نهایی که همان خروجی است منتقل می شود. در ماتریس انتقال نیروی انسانی ، P_{ij} بیانگر احتمال انتقال یک فرد از پست i به پست j است.

احتمالات انتقال نیروی انسانی

طبق تعریف کلاسیک ، احتمال تست از فراوانی نسبی پیشامد (حالت) مورد نظر، و بدین ترتیب تعداد حالتهای مساعد مورد نظر به تعداد کل حالتها تقسیم می شود:

احتمال رخ دادن یک حالت (پیشامد) خاص =

تعداد حالتها(پیشامدها) ی مورد نظر

کل حالتها (پیشامدها) ی ممکن

احتمال انتقال یک فرد از پست I به پست J برابر است با تعداد انتقالات در فاصله زمانی معیین تقسیم بر تعداد کل نیرو ی موجود در همان دوره زمانی:

احتمال انتقال یک نفر از پست I به پست J = P_{ij} =

تعداد انتقالات از پست I به پست J برحسب نفرسال.

تعداد کل نیروی انسانی موجود در پست I برحسب نفر سال

احتمال ابقای یک فرد در پست برابر است با تعداد ابقاها در یک دوره زمانی خاص تقسیم بر تعداد کل نیروی انسانی موجود در همان دوره :

P_{ii} = احتمال ابقای یک نفر در پست I =

تعداد کل ابقاها در پست I برحسب نفر سال

تعداد کل نیروی انسانی موجود در پست I برحسب نفر سال

آن گاه با استفاده از احتمالات انتقال بدست آمده ماتریس انتقال نیروی انسانی تشکیل می شود.

فرض کنید در یک سازمان کوچک فرضی ، ۴ پست وجود داشته باشد و تعداد نیروی موجود در این سازمان نیز ثابت باشد و تنها نقل و انتقالات بین این ۴ نفر صورت گیرد و نه موارد دیگر مثل خروجی و ورودی (منظور انتقال به خارج سازمان شامل ترک خدمت ، بازنشستگی و ... انتقال از خارج سازمان مثل استخدام است.)

پس از انجام محاسبات لازم احتمالات انتقالی در ماتریس زیر آمده است:

P=

از پست / از پست	1	2	3	4
1	0/9	0/05	0	0/05
2	0/1	0/8	0/05	0/05
3	0	0/05	0/85	0/1
4	0/05	0	0	0/95

۰/۹ و سایر عناصر روی قطر اصلی ماتریس بیانگر احتمال هر مرد در پست است.۰/۰۵ سطر اول و ستون دوم احتمال انتقال از پست ۱ به پست ۲ است. و عنصر سطر سوم و ستون اول بیان می کند که احتمال انتقال از پست ۳ به پست ۱ و ۰ است.

فرض کنید نیروی انسانی موجود در هر پست برای سال جاری به ترتیب ۴و۳و۸و۱۵ نفر برای پست های ۱و۲و۳و۴ باشد. اکنون به کمک ماتریس انتقال می توان میزان موجودی نیروی انسانی در هر پست را برای سال آینده بدست آورد.

بدین منظور ماتریس سطری نیروی انسانی موجود سال جاری در ماتریس انتقال ضرب می شود.

$$[4,3,8,15]\begin{bmatrix} 0/9 & 0/05 & 0 & 0/05 \\ 0/1 & 0/8 & 0/05 & 0/05 \\ 0 & 0/05 & 0/85 & 0/1 \\ 0/05 & 0 & 0 & 0/95 \end{bmatrix} = [4/65,3,6/95,15/4]$$

همان گونه که در ماتریس های سطری حاصل ملاحظه می شود، در سال آینده در پست های ۱ و۲ و۳ و٤ به ترتیب ٤/٦٥ و۳ و٦/٩٥ و ٤/١٥ نفر نیز وجود خواهد داشت. در این جا ۲ مشکل وجود دارد ، یکی اعشاری بودن نیروی انسانی است و دیگری اینکه به خاطر سهولت محاسبه فرض شده است که تعداد نیروی انسانی ثابت باشد و انتقالی به خارج و یا از خارج وجود داشته باشد که این امر بیان می کند که اغلب نیروها پس از چند دوره از پست های ۲ و ۳ به پست های ۱ و٤ منتقل خواهند شد و در پست ۲ و۳ کمبود نیرو در پست ۱ و ٤ تورم نیرو وجود خواهد داشت و به منظور رفع این کمبود باید ورودی ها به سازمان به عنوان یک حالت و خروجی ها (به ویژه خروجی ها) نیز به عنوان یک حالت به ماتریس انتقال اضافه شود.

برای یافتن نیروی انسانی موجود در هر پست برای ۲ سال بعد ، ۱۰ سال بعد و n سال بعد باید نیروی انسانی موجود در سال جاری را در ماتریس توان دوم ، دهم ، و nام

ضرب نمود و یا به طریقه دوم باید نیروی موجود در سال آینده ، سال نهم و سال n-1ام را در ماتریس انتقال ضرب نمود.

در بین ترتیب با یافتن نیروی انسانی موجود درهر پست برای آینده می توان کمبودها و مازادها را در هر پست رابطور احتمالی برآورد کرد.

کاربرد زنجیره های مارکوف در کنترل موجودی

هر سازمان تولیدی یا تجاری ، انباری از مواد اولیه را خواهد داشت که بتواند در طول دور به فعالیت خود ادامه بدهد. اما اینکه مقدار موجودی در هر لحظه ای از زمان چقدر باشد مساله ای مهم است و یکی از مدل های مفید در این زمینه زنجیره های مارکوف است. موضوع با ارائه یک مثال تشریح می شود:

یک دوربین فروش ، دوربین خاصی را که می تواند آن را به صورت هفتگی سفارش دهد، انبار می کند. تقاضا در طی هفته اول و دوم و ... معادل D_2, D_1 و... است. فرض بر این است که D_i یک متغیر مستقل است و دارای توزیع پورسون با پاراسته $\hat{1} = 1$ است. فرض کنید که X_0 تعداد دوربین های موجود در ابتدای دوره X_1 تعداد دوربین های موجود درپایان هفته اول ، X_2 تعداد دوربین های موجود در پایان هفته دوم و الی آخر باشد و فزون کنید $X_0 = 3$ باشد. هر پنج شنبه شب فروشگاه سفارش می دهد که هنگام باز شدن فروشگاه دوشنبه تحویل می شود. فروشگاه از سیاست (X_t, S_1) استفاده می کند ، یعنی اگر تعداد دوربین های موجود در انتهای هفته $X_t \rangle 1$ باشد سفارش فروشگاه S=3 است.

در غیر این صورت فروشگاه سفارش نمی دهد. فرض این است که هنگامی که تقاضای مازاد بر موجودی در دست باشد، فروش کم خواهد شد. بنابراین $\{X_t\}$ برای t= 0,1,2,... یک فرایند تصادفی است. حالات ممکن فرایند ، اعداد صحصح $\{0,1,2,3\}$ هستند که تعداد ممکن دوربین های موجود انتهای هفته را بیان می کند. در واقع متغیر تصادفی X_t با عبارت زیر تعیین می شود.

حال دقت کنید که عناصر ماتریس انتقال یعنی احتمالات انتقال چگونه بدست می آید. برای بدست آوردن P_{00} تعیین $P\{X_t = 0 I_{t-1} = 0\}$ ضروری است. اگر $X_{t-1} = 0$ باشد آن گاه X_t = حداکثر $\{(3 - D_t), 0\}$ است. اگر $X_t = 0$ باشد تقاضا در طی هفته باید ۳ یا بیشتر باشد. از این رو $P_{00} = P\{D_t \geq 3\}$ است. این احتمال یک متغیر تصادفی پواسون با پاراسته $\lambda = 1$ است که مقدار ۳ یا بیشتر را بخود می گیرد که از جدول توزیع پواسون $P_{00} = 0/08$ می شود.

$P_{10} = P\{X_t = 0 I_{t-1} = 0\}$ نیز به همین شیوه بدست می آید. اگر $X_{t-1} = 1$ باشد آن گاه X_t حداکثر$\{(1 - D_t), 0\}$ است با داشتن $X_t = 0$ تقاضای طی هفته باید یک یا بیشتر باشد. از این رو با استفاده از جدول پواسون $P_{10} = P\{D_t \geq 1\} = 0/632$ است برای یافتن $P_{21} = P\{X_t = 1 X_{t-1} = 2\}$ دقت کنید که X_t حداکثر$\{(2 - D_t), 0\}$ می شود اگر $X_{t-1} = 2$ باشد. بنابراین اگر $X_t = 1$ باشد آن گاه تقاضا طی هفته آینده باید دقیقا یک باشد. از این رو از جدول توزیع پواسون $P_{21} = P\{D_t = 1\} = 0/368$ می شود سایر عناصر نیز به همین ترتیب محاسبه می شوند که ماتریس انتقال زیر را تشکیل می دهند:

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0/08 & 0/184 & 0/368 & 0/368 \\ 0/632 & 0/368 & 0 & 0 \\ 0/264 & 0/368 & 0/368 & 0 \\ 0/08 & 0/184 & 0/368 & 0/368 \end{bmatrix}$$

این ماتریس انتقال مرحله یک است و برای مراحل بعدی نیز با ضرب متوالی (توان) بدست می آید. البته می توان از برنامه ریزی خطی برای موجودی بهینه استفاده کرد که در این مختصر برنامه خطی این مساله نمی گنجد.

کاربرد زنجیره های مارکوف در تعمیرات و نگهداری

یک ماشین خاص در یک فرایند تولید کار می کند ، تحت استفاده سنگین ، هم از لحاظ کیفیت و هم از نظر کمیت محصول ، سریعاً خراب می شود. این ماشین به صورت دوره ای در پایان هر روز ، معاینه و بازرسی می شود. بلافاصله بعد از هر بازرسی وضعیت ماشین یادداشت می شود و به چهار حالت ممکن تقسیم می شود:

حالت	وضعیت
۰	خوب همانند ماشین نو
۱	قابل استفاده – باخرابی کم
۲	قابل استفاده – با خرابی زیاد
۳	غیرقابل استفاده – محصول با کیفیت غیرقابل قبول

فرض کنید که X_t حالت مشاهده شده ماشین بعد از بازرسی در انتها ی روز **t** ام ، و توالی حالتهای یک فرایند تصادفی باشد هم چنین فرایند تصادفی یک زنجیره مارکوف با فضای حالت متناهی با ماتریس انتقال زیر باشد:

۳	۲	۱	۰	

۰	۰	۷/۸	۱/۱۶	۱/۱۶
۱	۰	۳/۴	۱/۸	۱/۸
۲	۰	۰	۱/۲	۱/۲
۳	۰	۰	۰	۱

ماتریس نشان می دهد که هنگامی که ماشین غیرقابل استفاده باشد (وارد حالت ۳ شده باشد) ، همین طور غیرقابل استفاده باقی خواهد ماند و در این حالت دیگر ماشین ها نمی توانند برای تداوم در فرایند تولید باقی بماند و باید تعویض یا تعمیر شود و در واقع این یک حالت جاذب است که سیستم بدون دخالت عامل خارجی از آن حالت خارج تخواهد شد ، عمل تعویض ، حرکت سیستم را تغییر می دهد و این عمل یک سیاست تعمیر و نگهداری می تواند باشد. وقتی که یک ماشین غیرقابل استفاده می شود و تعویض می شود، ماشین جایگزین شده درحالت « خوب همانند ماشین نو » است، یعنی ماشین در حالت ۰ است و فرایند تعویض یک روز را برای انجام عملیات به خود اختصاص می دهد. هزینه های حاصل از هر حالت در خلال روز بعد که شامل اقلام معیوب می شود به ترتیب زیر خواهد بود :

حالت	هزینه مورد انتظار حاصل از اقلام معیوب
۰	۰
۱	۱۰۰ ریال
۲	۳۰۰۰ ریال

اما اگر ماشین تویض شود ، یک هزینه تعویض ۴۰۰۰ ریالی همراه با یک کاهش تولید ۲۰۰۰ ریالی رخ می دهد ، بنابراین تمام هزینه رخ داده در حالت ۳ ، ۶۰۰۰ ریال است. تجزیه و تحلیل زنجیره

مارکوف با ماتریس قبلی بی فایده است چون فرایند پس از چند دوره وارد حالت ۳ شده و از آن خارج نشده و ماشین غیر قابل استفاده باقی خواهد ماند. ولی با تعویض ماشین باز هم فرایند تصادفی ، سیستم را به صورت یک زنجیره مارکوف با فضای حالت متناهی در می آورد اما با ماتریس انتقال زیر:

حالت	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۷/۸	۱/۱۶	۱/۱۶
۱	۰	۳/۴	۱/۸	۱/۸
۲	۰	۰	۱/۲	۱/۲
۳	۱	۰	۰	۰

ارزیابی هزینه این « سیاست تعمیر و نگهداری» می تواند مفید باشد. اگر هزینه متوسط مورد انتظار هر روز یک معیار مناسب باشد معادلات حالت پایدار به صورت زیر نوشته می شود:

با حل همزمان معادله فوق داریم :

$$
\begin{aligned}
P_0 &= P_3 \\
P_1 &= \frac{7}{8}P_0 + \frac{3}{4}PP_1 \\
P_2 &= \frac{1}{16}P_0 + \frac{1}{8}P_1 + \frac{1}{2}P_2 \\
P_3 &= \frac{1}{16}P_0 + \frac{1}{8}P_1 + \frac{1}{2}P_2 \\
P_0 &+ P_1 + P_2 + P_3 = 1
\end{aligned}
$$

$$
P_0 = \frac{2}{13} \quad P_1 = \frac{7}{13} \quad P_2 = \frac{2}{13} \quad P_3 = \frac{2}{13}
$$

و با ضرب احتمالات فوق در هزینه متوسط ، هزینه متوسط مورد انتظار هرروز به دست می آید:

$$
P_0 + 1000P_1 + 3000P_2 + 6000P_3 = \frac{25000}{13} = 1923/02
$$

این عدد بیانگر هزینه این سیاست تعمیر و نگهداری است.

برنامه ریزی خطی و سیاست بهینه

به منظور گسترش مسأله تعمیر و نگهداری ، فرض کنید تصمیم پیاده کردن ماشین به تصمیم تعویض ماشین اضافه شود و هزینه هر تصمیم برای هر حالت طبق جدول شماره ۱ باشد.

تصمیم	هزینه حالت	هزینه مورد انتظار حاصل از اقلام معیوب	هزینه تعمیر و نگهداری	هزینه (کاهش شود)	هزینه کل
۱- رها کردن	۰	۱۰۰۰ ریال	۰	کاهش تولید	روزانه

ماشین همان گونه که هست	۱ ۲ ۳	۳۰۰۰ ریال 32∞	۰ ۰ ۰	۰ ۰ ۰	۱۰۰۰ ریال ۳۰۰۰ ریال ∞
۲- پیاده کردن ماشین	۳و۲و۱و۰	۰ ۰	۲۰۰۰ ریال 33_{∞}	۲۰۰۰ ریال ۲۰۰۰ ریال	۴۰۰۰ ریال ∞
۳- تعویض	۳و۲و۱و۰	۰	۴۰۰۰ ریال	۲۰۰۰ ریال	۶۰۰۰ ریال

جدول شماره ۱

اطلاعات فوق در جدول زیر خلاصه می شود:

تصمیم

حالت I	۱	۲	۳
۰	۰	۴۰۰۰	۶۰۰۰
۱	۱۰۰۰	۴۰۰۰	۶۰۰۰
۲	۳۰۰۰	۴۰۰۰	۶۰۰۰
۳	∞	∞	۶۰۰۰

فرض کنید D_{ik} بیانگر احتمال شرطی تصمیم ها برای زمانی که سیستم در حالت I است باشد یعنی:

l= 0,1,2,...,m و $D_{ik} = P\{...........\}$ k=1,2,...,k

و γ_{ik} احتمال غیر شرطی (حالت پایدار فرایند در حالت : با تقسیم اخذ شده k باشد یعنی:

$\gamma_{ik} = p$ {حالت= i,

و با استفاده از قواعد احتمال شرطی و قانون بهینه روابط زیر برقرار است.

$$\gamma_{ik} = \Pi_i D_{ik} \qquad\qquad \mathop{\Pi_i}_{k-1}^{k} = 4\gamma_{ik}$$

آن گاه تابع هدف برای هزینه متوسط مورد انتظار این گونه خواهد شد.

$$E(c) = \sum_{i-1}^{m}\sum_{k-1}^{k} \Pi_i C_{ik} D_{ik} = \sum_{i-1}^{m}\sum_{k-1}^{k} C_{ik}\gamma_{ik}$$

که باید حداقل (مینیمم) شود، و محدودیت های زیر نیز وجود خواهد داشت:

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{m} \Pi_i = \sum_{k=1}^{k}\sum_{i=0}^{m} \gamma_{ik} = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{k} \gamma_{ik} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=1}^{k} \gamma_{ik} p_{ij}(x) \sum_{k=1}^{k} \gamma_{ik} - \sum_{i-0}^{m}\sum_{k=1}^{k} \gamma_{ik} p_{ik}(x) = 0\end{cases}$$

$$\gamma_{ik} \geq 0, i = 0,1,2,\ldots,\Pi, k = 1,2,\ldots,k$$

فرمول برنامه ریزی خطی این سیاست این گونه می شود.

حداقل $C = 4000\gamma_{02} + 3000\gamma_{03} + 1000\gamma 11 + 4000\gamma_{12} + 6000\gamma_{13} + 3000\gamma_{21} + 4000\gamma_{22}$
$+ 6000\gamma_{23} + \Pi_1\gamma_{13} + \Pi_2\gamma_{23} + 6000\gamma_{33}$

که در آن Π اعداد بزرگ هستند . با محدودیتهای :

$$\sum_{k=1}^{3}\gamma_{0k}-(\gamma_{03}+\gamma_{13}+\gamma_{23}+\gamma_{33})=0$$
$$\sum_{k=1}^{3}\gamma_{1k}-\left(\frac{7}{8}\gamma_{01}+\gamma_{02}+\frac{3}{4}\gamma_{11}+\gamma_{12}+\gamma_{22}+\gamma_{23}\right)=0$$
$$\sum_{k=1}^{3}\gamma_{2k}-\left(\frac{1}{16}\gamma_{01}+\frac{1}{8}\gamma_{11}+\frac{1}{2}\gamma_{21}\right)=0$$
$$\sum_{k=1}^{3}\gamma_{3k}-\left(\frac{1}{16}\gamma_{01}+\frac{1}{8}\gamma_{11}+\frac{1}{2}\gamma_{21}+\gamma_{31}\right)=0$$
$$\gamma_{ik}\geq 0, i=0,1,2,3, k=1,2,3$$

حل این برنامه با استفاده از روش سیمپلکس جواب های زیر را دارد:

$\gamma_{01}=\frac{2}{21},\gamma_{11}=\frac{5}{7},\gamma_{22}=\frac{2}{21},\gamma_{33}=\frac{2}{21}$ و سایر γ_{ik}ها برابر ۰ هستند.

اکنون با استفاده از روابط قبلی D_{ik} محاسبه می شود:

$$D_{ik}=\frac{\gamma_{ik}}{\Sigma\gamma_{ik}}$$
$$D_{10}=D_{11}=D_{22}=D_{23}=1$$

و سایر D_{ik}

نیز ۰ هستند.

در اینجا ، هنگامی که ماشین در حالت ۰ و۱ باشد تصمیم ۱ یعنی رها کردن ، زمانی که ماشین در حالت ۲ باشد تصمیم ۲ یعنی پیاده کردن ، هنگامی که در حالت ۳ است تصمیم ۳ یعنی تعویض را توصیه می کند.

کاربرد زنجیره های مارکوف در فروش و بازاریابی

فرض کنید در بازار خاصی ۳ مارک ، الف ، ب، ج برای یک محصول که متناوباً خریداری می شود وجود داشته باشد. این ۳ مارک متعلق به ۳ فروشنده است که مصرف هر مارک به سهولت با مارک دیگر قابل جایگزین است هر مصرف کننده بسته به مارکی که فعلا مصرف می کند در یکی از حالتهای الف ، ب، ج قرار دارد. هر خریدار ممکن است در هر زمان تصمیمی خاصی بگیرد که می تواند تغییر از یک حالت (مارک) به دیگری را نتیجه دهد.

علاوه بر این فرض این است که تعداد مارک ها (حالتها) و تعداد مشتریان در بازار محدود و ثابت هستند. بنابراین فرایند می تواند به عنوان یک زنجیره مارکوف مورد تجزیه و تحلیل قرار بگیرد. یک مطالعه تحقیقاتی بازاریابی تعداد کل مشتری برای این محصول را ۱۰۰۰ نفر نشان می دهد. هم چنین تعداد مشتریان هر مارک را برای ۲ ماه متوالی مهر و آبان در جدول زیر نشان می دهد:

میزان فروش ۲ ماه

تعداد مشتریان

مارک	مهر	آبان
الف	۲۰۰	۲۲۰
ب	۵۰۰	٤۹۰
ج	۳۰۰	۲۹۰

جدول فوق تنها میزان افزایش یا کاهش کلی مشتریان هر مارک را نشان می دهد ولی باید تعداد کاهش ها (از دست دادن مشتری) و افزایش ها (جلب مشتری) جداگانه نشان داده شود که در جدول شماره ۲ ارائه می شود.

تغییرات کلی یک ماه

مارک	تعداد مشتریان در مهر ماه	تعداد جلب مشتری	تعداد مشتری از دست رفته	تعداد مشتریان در آبان ماه
الف	۲۰۰	٦۰	٤۰	۲۲۰
ب	۵۰۰	٤۵	۵۰	٤۹۰
ج	۳۰۰	۳۰	٤۵	۲۹۰

جدول شماره ۲

احتمالات ابقای مشتریان

مارک	تعداد مشتریان در مهر ماه	تعداد مشتری از دست رفته	تعداد ماندگاران	احتمال ابقاء
الف	۲۰۰	۴۰	۱۶۰	
	$\frac{160}{200}=0/8$			
ب	۵۰۰	۵۰	۴۵۰	
	$\frac{450}{500}=0/85$			
ج	۳۰۰	۴۵	۲۵۵	
	$\frac{255}{300}=0/85$			

جدول شماره ۳

اما برای انجام یک تجزیه و تحلیل کامل به دست آوردن ماتریس انتقال زنجیره های مارکوف به تک تک انتقالات از هر مارک به دیگری نیاز است که در جدول شماره ٤ آمده است:

نقل و انتقالات کامل مشتریان

مارک	تعداد مشتریان در مهر ماه	جلب مشتری از الف ب ج	از دست دادن به الف ب ج	تعداد مشتریان آبان ماه
الف	۲۰۰	۰ ۳۵	۲۵ ۰	۲۰ ۲۰
۲۲۰				
ب	۵۰۰	۲۰ ۰	۲۰ ۳۵	۰ ۱۵
۴۹۰				
ج	۳۰۰	۲۰	۱۵ ۰	۲۵ ۲۰ ۰
۴۹۰				

جدول شماره ٤

ماتریس انتقال حاصل از اطلاعات فوق بدین صورت است:

$$\begin{bmatrix} \frac{160}{200}=0/08 & \frac{20}{200}=0/01 & \frac{20}{200}=0/1 \\ \frac{35}{500}=0/07 & \frac{450}{500}=0/9 & \frac{15}{500}=0/03 \\ \frac{25}{200}=0/083 & \frac{20}{300}=0/067 & \frac{255}{300}=0/85 \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق احتمالات نقل وانتقال مشتریان از مارک های الف و ب و ج را به یکدیگر بطور کامل نشان می دهد.

با توجه به ماتریس فوق می توان تعداد مشتریان هرمارک را برای آذر ماه برآورد کرد. بدین منظور سهم بازار هر مارک در آبان ماه محاسبه و در ماتریس انتقال ضرب می شود:

ج ب الف ۰/۱ ۰/۱ ۰/۸ ج ب

الف

[۰/۲۸۳ ۰/۴۸۳ ۰/۲۳۴] ۰/۰۳ ۰/۹ ۰/۰۷ ۰/۴۹ ۰/۴۹

۰/۲۲

۰/۸۵ ۰/۰۶۷ ۰/۰۸۳

سهم آذر ماه سهم

آبان ماه

یعنی احتمال سهم بازار هر مارک در آذر ماه به ترتیب ۰/۲۳۴ ، ۰/۴۸۳۰ و ۰/۲۸۳ برای مارک های الف ، ب و ج خواهد بود.

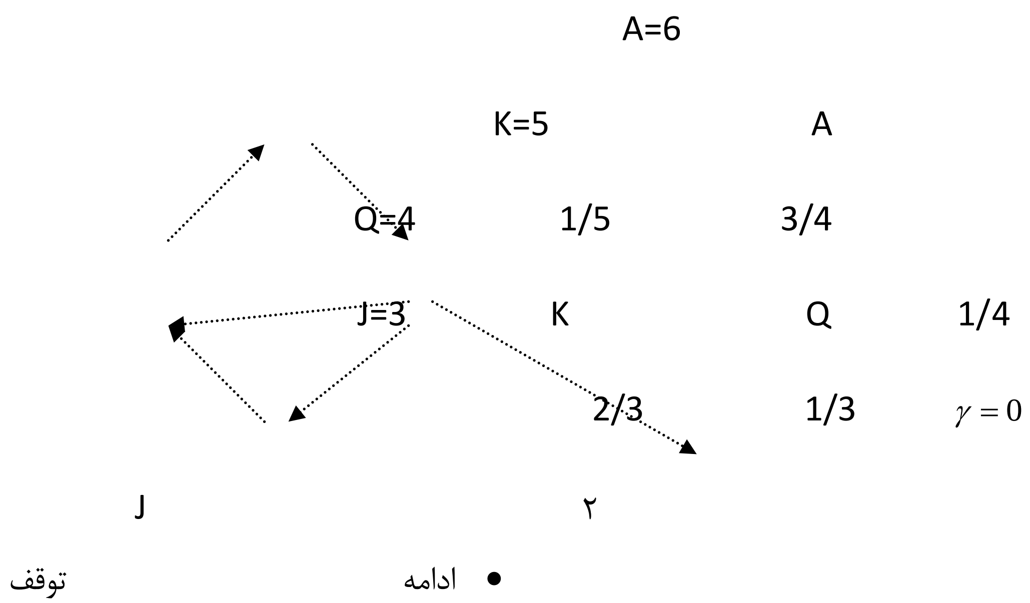
توقف بهینه

فرض کنید x یک زنجیره مارکوف با فضای حالت E و ماتریس انتقام P بود و F یک تابع مفید تعریف شده در E باشد. هرگاه کسی بخواهد می تواند فرانید X را مشاهده ، وهنگامی که بخواهد ، توقف کند اگر زمان توقف ، فرایند در حالت J باشد ، $F_{(J)}$ دریافت می کند و بازی تمام شده است اگر هرگز متوقف نشود دریافت او ۰ است ولی فرد مایل به بهینه کردن دریافت خود است. ماشین های بازی در بعضی از خیابانها مشاهده می شود. شکل شماره ۲ نیز ماشین بازی در این موضوع است:

شکل شماره ۲ ماشین توقف بهینه :

ماشین مقدار مربوط به ؟؟؟؟؟ که هنگام فشار دکمه (توقف) روش می شود می پردازد.

برای شروع ۵ سکه بیندازید   پرداخت



هنگامی که تعداد سکه های افتاده در ماشین ۵ تا باشد ، ماشین با روشن شدن یکی از ۵ علامت به کار می افتد فرض کنید که $X_0(W) = J$ باشد. با فشار دکمه توقف بازیکن می تواند $F_{(J)} = 3$ سکه را دریافت کند. اگر او دکمه ادامه را فشاردهد آن گاه Q یا K با احتمالات مشخص شده بالای پیکان های مربوط روشن خواهد شد دقت کنید که در این مورد دریافت بیش از J است و بازیکن دکمه ادامه را فشار می دهد اگر علامت Q روشن شود (یعنی $X_t(W) = Q$ باشد) تصمیم گیری مشکل تر است.

با توقف او ممکن است که $F_{(Q)} = 4$ سکه دریافت کند در حالیکه اگر ادامه دهد شانس بردن ۶ سکه یا نبردن هیچ سکه ای را دارد. از آنجا که بعد از Q ، A یا ۲ با احتمالات مربوط $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ روشن

می شوند اکر بو ادامه دهد دریافت مورد انتظار $\left(\frac{3}{4}\right)F_{(A)} + \frac{1}{4}F_{(2)} = 4/5$ سکه است این مقدار بیش از $F_{(Q)} = 4$ است. و توقف را انتخاب نمی کند و دکمه ادامه را فشار می دهد. وقتی که $X_2(W) = A$ باشد او $F_{(A)} = 6$ سکه دریافت می کند. به طور خلاصه اگر علامت روشن شده J یا Q باشد استراتژی بهینه ادامه و هنگامی که علامت روشن شده ، A,K یا ۲ باشد استراتژی بهینه توقف است. (در مورد آخر یعنی ۲ ماشین بطور اتوماتیک خاموش می شود) بنابراین بسته به احتمال برنده شدن یک بازیکن ، بازی با استفاده از استراتژی بهینه ۵ ،۶ و یا ۰ سکه پایان خواهد یافت.

برای مثال اگر پیشامد ها که اتفاق می افتد به گونه ای باشد که $X_0(W) = K$ باشد ، آن گاه زمان توقف بهینه T(w)=0 است ، و دریافت F(k) = 5 است که اگر $X_1(W) = 2, X_0(W) = Q$ باشد ، زمان توقف بهینه T(w)=1 است و دریافت F(2)=0 است . اگر $X_1(W) = A, X_0(W) = Q$ باشد ، زمان توقف بهینه باز هم T(w)=1 است و دریافت F(A)=6 است. با توجه به عبارت بهینه لازم است دقت شود که هز پیشامد ضرورتاً دریافت حداکثر را به همراه ندارد.

روشن است که زمان توقف یک متغیر تصادفی T است که مقادیر تعیین شده توسط مسیر $X_0, X_1, \ldots$ از زنجیره مارکوف X را به خود می گیرد. در زمان n تصمیم به توقف یا ادامه باید بر اساس علم به مسیر موجود در آن زمان باشد. از این رو برای هر wes که T(w)=n باشد یا نباشد باید کاملا توسط مسیر $X_0(W), X_1(W), \ldots X_n(w)$ که تا زمان N مشاهده است تعیین شود چون T یک زمان توقف برای هرn است.

در زمان توقف T فرایند در حالت X_t است و بنابراین دریافت $F(X_t)$ خوهد بود. انتخاب یک زمان توقف T به انتخاب یک استراتژی بستگی دارد و برای زمان های مختلف توقف T دریافت های مورد

انتظار $E_i(F(X_t))$ متفاوت خوهد بود انتخاب یک زمان توقف T که دریافت (ماکزیمم) حداکثر باشد جالب است که مساله زیر بدین منظور مطرح می شود:

مساله: الف) تابع زیر را محاسبه کنید:

$$V_i = \sup_t E_i(F(X_T)), iEE$$

جایی که sup (سوپریمم) حداکثر زمان ممکن است.

ب) زمان توقف T_0 را به گونه ای بیابید که : $V_i = E_i(F(X_T)), iEE$باشد.

تابع F تابع پرداخت نامیده می شود و تابع V ارزش بازی است یک زمان توقف T_0 که در قسمت ب صدق کند یک زمان توقف بهینه نامیده می شود اکنون یک مساله برای مثال ماشین بازی فوق فرموله می شود که X یک زنجیره مارکوف با فضای حالت

E {A,K,Q,J,2} و ماتریس انتقال زیر است: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

تابع دریافت F=(6,5,4,3,0) است. حالتهای A و۲ جاذب هستند با شروع در یکی از این حالتها زنجیره در حالت اولیه باقی می ماند. بنابراین V(A)=6 و V(2)=0 است. با شروع از حالت Q اگر بلافاصله توقف شود دریافت F(Q)=4 است و گرنه مرحله بعدی به A یا ۲ منجر می شود بنابراین توقف یک دریافت مورد انتظار را ندارد. و V(Q)=4/5 بهترین امکان است.

با شروع از K توقف بلافاصله یک دریافت f(k)=5 به همراه دارد: وگرنه ممکن است زنجیره به A (با احتمال ۱/۵ و دریافت F(A)=6 حرکت کند یا ممکن است به Q با احتمال ۳/۴ و شروع Q که تجزیه و تحلیل یک دریافت مورد انتظار V(Q)=4/5 را نشان می دهد حرکت کند. بنابراین با عدم

توقف در K دریافت مورد انتظار بهینه $\frac{1}{5}V(A)+\frac{4}{5}V(Q)=4/8$ می شود در صورت توقف در K دریافت مورد انتظار F(k)=5 می شود. از این رو توقف بلافاصله در K بهتر است و دریافت مورد انتظار5=f(k) =V(k) است. با شروع از j ناخواسته به توقف منجرمی شود.با انتظار یک مرحله بیشتر یا k روشن می شود که۵ =V(k) است یا Q روشن می شود که دریافت مورد انتظار V(Q)=4/5 است. از این رو برای این مثال ، ارزش باری برابر با V=(6,5,4/5,4/833,0) است.استراتژی بهینه برای توقف تنها وقتی است که علامت روشن شده A یا K و یا ۲ باشد به عبارت دیگر T_0 زمان اولین ملاقات با مجموعه حالتهای {A,K,2} است. دقت شود که این مجموعه ، مجموعه حالتهای J برای F(j)=V(j) نیز هست.

زنجیره های مارکوف د مدل منبع آب (سد)

یک سد چند منظوره برای تولید نیروی الکتریسیته و کنترل سیل مورد استفاده قرار می گیرد . ظرفیت سد ۳ واحد است. توزیع احتمال مقدار آب W_t که در سد طی ماه t (t=0,1,2,3,...) در جریان است، $P_w(m)$ نشان داده می شود که به این صورت است:

$$\begin{aligned}
P_w(0) &= p\{w=0\}=1/6\\
P_w(1) &= p\{w=1\}=1/3\\
P_w(2) &= p\{w=2\}=1/3\\
P_w(3) &= p\{w=3\}=1/6
\end{aligned}$$

فرض کنید X_t مقدار آب موجود در سد در زمان t باشد آن گاه $X_t = 0,1,2,3,...$ است . ماتریس انتقال برای این مساله بصورت زیراست:

حالت	۰	۱	۲	۳
۰	۱/۶	۱/۳	۱/۳	۱/۶
۱	۰	۱/۶	۱/۳	۱/۲
۲	۰	۰	۱/۶	۵/۶
۳	۰	۰	۰	۱

برای مثال عنصر سطر دوم و ستون چهارم P_{13} بدین ترتیب به دست می آید اگر حالت یک واحد آب در سد باشد آن گاه برای ۳ واحد آب در یک ماه بعد باید درماه جاری ۲ یا ۳ واحد آب در دست آید .

اگر حالت یک واحد آب درسد باشد آن گاه برای ۳ واحد آب در یک ماه بعد باید در ماه جاری ۲ یا ۳ واحد آب درسد جریان داشته باشد (به خاطر داشته باشید که سد ۳ واحد ظرفیت دارد به گونه ای که بیش از ۳ واحد آب مازاد آن از طریق دریچه تخلیه خواهد شد) این مقدار آب به احتمال $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ در جریان خواهد بود. اما با داشتن هزینه های مختلف برای جریان آب و ارزشهای حاصل از تولید برق و آبیاری و ... می توان تصمیم مناسبی برای کنترل آب داشت.

منابع

1. Hidden Markov Model (HMM) Toolbox for Matlab (by Kevin Murphy)
2. Hidden Markov Model Toolkit (HTK) (a portable toolkit for building and manipulating hidden Markov models)
3. Hidden Markov Models (an exposition using basic mathematics)
4. GHMM Library (home page of the GHMM Library project)
5. Jahmm Java Library (Java library and associated graphical application)
6. A step-by-step tutorial on HMMs (University of Leeds)
7. Software for Markov Models and Processes (TreeAge Software)
8. Lawrence R. Rabiner, A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition. Proceedings of the IEEE, 77 (2), p. 257–286, February 1989.
9. Richard Durbin, Sean R. Eddy, Anders Krogh, Graeme Mitchison. Biological Sequence Analysis: Probabilistic Models of Proteins and Nucleic Acids. Cambridge University Press, 1999. ISBN 0521629713.
10. Kristie Seymore, Andrew McCallum, and Roni Rosenfeld. Learning Hidden Markov Model Structure for Information Extraction. AAAI 99 Workshop on Machine Learning for Information Extraction, 1999. (also at CiteSeer: [1])
11. http://www.comp.leeds.ac.uk/roger/HiddenMarkovModels/html_dev/main.html
12. J. Li, A. Najmi, R. M. Gray, Image classification by a two dimensional hidden Markov model, IEEE Transactions on Signal Processing, 48(2):517-33, February 2000.