# جزوه محاسبات عددی

دانشگاه صنعتی شریف

مقدمه : (فصل اول )

درعلوم مهندسی همیشه یک مسئله وقتی به نتیجه می رسد که جواب نهایی آن به صورت یک عدد درست باشد ولی همین مورد در بسیاری از مسائل مشکلاتی را به وجود می آورد که از لحاظ اقتصادی مقرون به صرفه نیست، یا اینکه روش تحلیلی مستقلی را برای آن نمی توان ابلاغ کرد و یا از نظر زمانی رسیدن به آن اعداد بسیار طاقت فرسا و زمان بر است، لذا اینجاست که سروکله محاسبات عددی پیدامی شود .

**خطاها :**

خطای دستگاهها : خطاهایی وجود داردکه این خطاها برخی ازآنها قابل چشم پوشی است ولی برخی دیگر را می توانیم با انتخاب روش های کاراتر آنها را کم کنیم که خوشبختانه دردنیای کنونی و ظهورکامپیوتر این خطاها به سرعت کم وکمترمی شود.

خطای حذفی : درمسائل در خیلی از موارد ما نمی توانیم یک عددی که دارای بی نهایت رقم اعشار می باشد را جایگزین کنیم، لذا از یک مرحله به بعد باید از بقیه ارقام چشم پوشی کنیم که این عمل با گردکردن یا بریدن انجام می شود. عمل بریدن برای ارقام منصفانه نیست، ولی برای بسط ها منطقی است .

مثلاً :

بریدن $$Sin\ x = x - \frac{x^{۳}}{۳!} + \frac{x^{۵}}{۵!} - \frac{x^{۷}}{۷!} + \dots$$

گرد کردن ۳/۰۳۴۵۷۹۱۰۱۱۲۳۴

**عمل گرد کردن :**

اگر بخواهیم عمل برش را در رقم n اُم انجام دهیم رقم (n+۱)اُم ۳ حالت دارد :

۱) رقم (n+۱)اُم < ۵

۲) رقم (n+۱)اُم > ۵

۳) رقم (n+۱)اُم = ۵

در حالت اول یک واحد به رقم nاُم اضافه می کنیم و عمل برش را انجام می دهیم. اگر کوچکتر از ۵ بود (حالت دوم )، عمل برش را انجام می دهیم بدون هیچگونه تغییراتی .

و حالت سوم؛ اگرمساوی ۵ باشد، اگرارقام بعدازآن همه صفر باشند مانند حالت دوم عمل می کنیم؛ و بریدن و تمام. واگر یکی از آنها مخالف صفر باشد مانند حالت اول عمل می کنیم؛ یک واحد به ماقبل اضافه، و بعد بریدن .

مثال :

۳/۷۴۹۳۲۰ ≅ ۳/۷۵

۳/۷۴۲۰۱۴ ≅ ۳/۷۴

۳/۷۴۲۱۵۰۰۰ ≅ ۳/۷۴۲۲

۳/۷۴۲۹۵۰۰۰۱ ≅ ۳/۷۴۲۹

**نحوه تعیین ارقام بامعنا :**

ارقام معنی دار: کلیه رقم های ۱و۲و...و۹، جزء رقم های معنی دار هستند ولی صفر(دراعدادی که قدرمطلق آنها کوچکتر از ۱ باشد) اگربلافاصله بعد از ممیز شروع نشده باشد و یا برای جاهای خالی به کار نرفته باشد جزء رقم های معنی دار به حساب می آیند.

مثال : ارقام معنی دار اعداد زیر را مشخص کنید.

۲۳/۴۳۵ → ۵ رقم بامعنا

۲۳/۰۳۵ → ۵ رقم بامعنا

۰/۳۲۵ → ۳ رقم بامعنا

۰/۰۳۲۵ → ۳ رقم بامعنا

۰/۰۰۳۲ → ۲ رقم بامعنا

۶/۰۰ → ۳ رقم بامعنا

۲۳۰۰ → $۲/۳ \times ۱۰^{۳}$ → ۲ رقم بامعنا

$$= \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x^2-1)}{-1} + \frac{3x(x+1)}{2} = \frac{x(x-1) - 2(x^2-1) + 3x(x+1)}{2} =$$

$$= \frac{2x^2+2x+2}{2} = x^2 + x + 1$$

مثال : چندجمله ای درون یاب مربوط به چند جمله ای زیر را نوشته، سپس f(۱/۵) را حساب کنید.

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $7$ |

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{3} \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3 = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}(-2)$$

$$+ \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)}(-1) + \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)}(0) + \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)}(7)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3} + \frac{(x^2-1)(x-2)}{-2} + \frac{7(x^2-1)(x)}{6} = \frac{x^3-3x^2+2x}{3} +$$

$$\frac{x^3-x-2x^2+2}{-2} + \frac{7x^3-7x}{6} = \frac{2x^3-6x^2+4x+3x^3-3x-6x^2+67x^3-7x}{6}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 1 \Rightarrow f(1/5) = 2/375$$

**معایب روش لاگرانژ :**

۱) محاسبات برای تعیین چند جمله ای درون یاب واقعاً طاقت فرساست.

۲) درجهٔ چند جمله ای درون یاب تنها بعد از اتمام محاسبات تعیین می شود.

۳) بدترین و محکمترین ایراد این است که با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط یک جدول کلیهٔ محاسبات باید از نو انجام شود و این یک مصیبت است.

**روش ضرایب نامعین :**

در این روش برای کثیرالجمله ای که از نقاط $(x_0, f_0)$ ، $(x_1, f_1)$ ، $(x_2, f_2)$ ، ...، $(x_n, f_n)$ بگذرد آن را به صورت زیر می نویسیم.

$$P_n(x) = a_n x_n + a_{n-1} x^{n-1} + ....a_2 x^2 = a_1 x + a_0$$

برای محاسبهٔ پارامترهای $a_0, a_1, ..., a_n$ از دستورالعمل زیر استفاده می کنیم :

$$\sum_{j=0}^{n} p_n(x_j) = f_j \qquad j = 0,1,2,...,n$$

که پس از جایگذاری و مرتب کردن نسبت به پارامترهای مجهول $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ به صورت دستگاه زیر نشان داده می شود :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}}$$

ماتریس ضرائب A      × ماتریس      ماتریس b

سمت رلت      یاهجهو ت

$$\Rightarrow AX = b$$

که به صورت یک دستگاه $AX = b$ نیز می توان آن را نوشت که با حل آن $a_i$ها را یافت. با توجه به اطلاعات قبلی شما سیستم فوق در صورتی دارای جواب منحصر به فرد است که دترمینان ضرائب مخالف صفر باشد و این زمانی رخ می دهد که نقاط $x_0, x_1, ..., x_n$ با هم متفاوت باشند.

توجه شود که کثیرالجملهٔ درجهٔ n که از نقاط $(x_0, f_0)$ ، $(x_1, f_1)$ ، $(x_2, f_2)$ ، ... ، $(x_n, f_n)$ عبور می کنند منحصر به فرد اس. اگر f(x) خود یک کثیرالجملهٔ درجهٔ n باشد در آن صورت کثیرالجملهٔ تقریب و f(x) با هم برابرند، در حل سیستم ممکن است ضریب $a_n$ یا برخی از آنها صفر شود. در این صورت درجهٔ کثیرالجمله از n کمتر می شود.

مثال : ا لمتفاده ﺇز دو رثی ضریلی نامعن و گرانژ کثیرالجمله ای را بیابید که از نقاط زیر بگذرد ب

(۷و۲) ،(۲و۱)،(۱- و ۰)

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 = f_i$$

$$\max_{a \le x \le b} |f''(x)| \le M_2$$

$$|\mathrm{EM}(h)| \le \frac{b-a}{24} h^2 M_2$$

$$\left[\frac{b-a}{24} h^2 M_2 \le \varepsilon_e\right]$$

## خصوصیات روش نقطهٔ میانی:

این روش ظاهراً بهتراز روش ذوزنقه ای است زیرا خطای آن نصف خطای ذوزنقه ای است.

علاوه بر این برای انتگرال توابعی که در نقاط یا مقدارنامعین (بی نهایت) دارد قابل استفاده است.

اما قاعدهٔ ذوزنقه ای خاصیت جالبی دارد که نه روش میانی و نه قاعدهٔ سیمپسون آن خاصیت را ندارد. فرض کنید به ازای h ثابتی T( h) وM(h) را حساب کنید.درT( h) نقاطی که تابع در آنها حساب می شود به صورت زیر می باشد:

$$T(h) \Rightarrow a, a+h, a+2h \quad ,\cdots, a+(n-1)h, b$$

ونقاطی که برای نقطهٔ میانی استفاده می کنیم عبارت اند از:

$$M(h) \Rightarrow a+\frac{h}{2}, a+3\frac{h}{2}, \cdots, a+(n-1)h+\frac{h}{2}$$

حال اگر برای این روابط را باز نویسی کنیم داریم:

$$T(\frac{h}{2}) \Rightarrow a, a+\frac{h}{2}, a+h, a+3\frac{h}{2}, \cdots, a+(n-1)h, a+(n-1)h+\frac{h}{2}, b$$

$$M(\frac{h}{2}) \Rightarrow a+\frac{h}{4}, a+3\frac{h}{4}, a+5\frac{h}{4}, \cdots, b-\frac{h}{4}$$

**نکته:**

مشاهده می شود که تمام نقاطی که برای محاسبهٔ $T(h)$ بکار می رود در محاسبهٔ نیز دیده می شود لذا برای محایبهٔ می توان از مقادیر تابع که قبلاً حساب شده است استفاده کرد ولی هیچ کدام از نقاطی که در محاسبهٔ به کار می روند از نقاطی که در محاسبهٔ $M(h)$ به کار رفته اند نیستند.

**نکته:**

اشکال دیگر نقطهٔ میانی آن است که ممکن است نتوان آن را برای برآورد مقدار انتگرال یک زتابع جدولی به کار برد. یر اگر مقد ار تابع در نقاطی که درجدول نیست زم باشد ابتدا باید از درون یابی استفاده و سپس این مقدار را برآورد کرد.

**تمرین:**

تقریب هایی از انتگرال های زیر را با قاعدهٔ میانی به ازای $h$ های معین شده حساب کنید.

الف) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ $\quad h = 0/1$

ب) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ $\quad h = 0/2$

# پایان