# دِموی جزوه معادلات دیفرانسیل

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

دکتر بنی فاطمی

مثال: نشان دهید $y=ce^{x}$ یک جواب معادله $y'-y=0$ است.

$$y'=ce^{x} \quad , \quad y'-y=ce^{x}-ce^{x}=0$$

نکته: اگر به $x$ مقدار دهیم و $c$ را بدست آوریم یک جواب خصوصی بدست آورده‌ایم.

جواب خصوصی

جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل: جوابی است که به ازای $c$ های معینی از جواب عمومی آن بدست می‌آید و این زمانی رخ می‌دهد که به شرط اولیه نیز حضور برسد:

$$y(x=x_0)=y_0 \quad \text{یا} \quad y(x_0)=y_0$$

مثال: جواب خصوصی مثال قبل را بیابید اگر $y(0)=1$

$$x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow 1=ce^{0}=1c \Rightarrow c=1 \Rightarrow y=ce^{x}$$

جواب عمومی هر معادله مرتبه $n$ ام به صورت زیر است:

$$\varphi(x,y,c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$$

که در آن $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ثابت‌های هستند.

$$y(x_0)=\alpha_1$$

$$y'(x_0)=\alpha_2$$

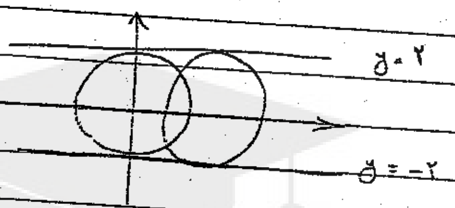
$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_n$$

s.a.m

اگر $y=\varphi(x)$ جواب معادله مرتبه اولی باشد که از روی جواب عمومی آن بدست نیامده باشد به آن جواب ویژه یا غیر عادی می‌گویند.

$(x-c)^2+y^2=4$




هر کدام از این دوایر جواب عمومی هستند اما خطوط $y=\pm 2$ جواب ویژه اند

روش بدست آوردن جواب ویژه

از دسته منحنی یک پارامتری (یک ثابت دلخواه) یک بار نسبت به پارامتر مشتق می‌گیریم و از معادله بدست آمده و دسته منحنی (دستگاه) مفروض، پارامتر را در صورت امکان حذف می‌کنیم.

مثال: اگر $(x-c)^2+y^2=4$ جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اولی باشد جواب ویژه آنرا در صورت امکان بیابید

$$\begin{cases} -2(x-c)+0=0 \Rightarrow x-c=0 \\ (x-c)^2+y^2=4 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2 \end{cases}$$

۲- برفرض $k_1 = k_2$ دو جذر حقیقی :

فرم جواب عمومی در این حالت به صورت زیر میباشد

$$y = x^{k_1}(c_1 + c_2 \ln x)$$

۳- برفرض $k_1 = \alpha + i\beta$ , $k_2 = \alpha - i\beta$ :

$$y_1 = x^{\alpha + i\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{i\beta} \qquad e^{i\beta \ln x}$$

$$y_2 = x^{\alpha - i\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{-i\beta} \qquad e^{-i\beta \ln x}$$

پس فرم جواب عمومی در این حالت به صورت زیر میباشد :

$$y = x^{\alpha}\left(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)\right)$$

روش اپراتوری

$$D = \frac{d}{dz}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dz^2}, \quad \ldots, \quad D^n = \frac{d^n}{dz^n}$$

معادله اویلری در حالت همگن به صورت زیر بود:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

$$y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} = \frac{1}{x} Dy$$

$$y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{x^2}(D^2 - D)y = \frac{1}{x^2} D(D-1)y$$

$$y''' = \frac{1}{x^3} D(D-1)(D-2)y$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{x^n} D(D-1)(D-2)\dots(D-n+1)y$$

پس اگر معادله کوشی از مرتبه بالا داشتیم، استفاده از روش اپراتوری بهتر خواهد بود.

اگر ضرایب معادله کوشی ثابت نباشد، در شرایط خاص می‌توان معادله را حل نمود.

شکل کلی معادله مرتبه دوم به صورت مقابل است: $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x)$ ۱

اگر $y_1$ یک جواب معادله همگن نظیر به صورت بیاید، ممکن است معادله فوق را با تغییر متغیر $y = U(x)V(x)$ بتوان حل کرد. ۲

$y' = U'V + V'U$ ۳

$y'' = U''V + 2U'V' + V''U$ ۴

۲ و ۳ و ۴ را در ۱ قرار میدهیم.

$$U''V + (2V' + f_1(x)V)U' + (V'' + f_1(x)V' + f_2(x)V)U = g(x) \quad ۵$$

در ۵ ضریب $U'$ را مساوی صفر قرار میدهیم:

$2V' + f_1(x)V = 0$ معادله جدایی پذیر

$$\int \frac{dV}{V} = \frac{-1}{2}\int f_1(x)dx \longrightarrow V = e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)dx}$$

ثابت انتگرال را به کار نبردیم چون در $U$ تعیین خواهد شد.

$$V' = \frac{-1}{2} f_1(x) \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)dx}}_{V} \quad ۶ \longrightarrow V' = \frac{-1}{2} f_1(x)V \quad ۷$$

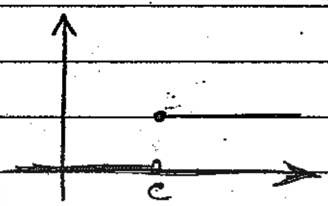
## تابع پله‌ای واحد:

تابع پله‌ای واحد را با نماد $U_c(t)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U_c(t) = \begin{cases} 0 & t<c \\ 1 & t\geq c \end{cases} \qquad (c\geq 0)$$

یا

$U(t|c)$




مثال: تابع زیر را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان کنید.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0\leq t<2 \\ -1 & 2\leq t<3 \\ 4 & t\geq 3 \end{cases}$$

چون در اصل بصورت مقابل بوده

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0\leq t<2 \\ -1 & 2\leq t<3 \\ 4 & t\geq 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0+0+0=0 & t<0 \rightarrow c=0 \\ 1+0+0=1 & 0\leq t<2 \\ 1-2+0=-1 & 2\leq t<3 \\ 1-2+5=4 & t\geq 3 \end{cases}$$

$f(t)$ برحسب تابع پله‌ای واحد بیان شد ⟸ $f(t) = U_0(t) - 2U_2(t) + 5U_3(t)$

$$\mathcal{L}(U_c(t)) = \int_0^\infty e^{-st} U_c(t)\,dt = \cancel{\int_0^c 0} + \int_c^\infty e^{-st}(1)\,dt$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left(\frac{-1}{s}e^{-st}\right)\Big|_c^h = \frac{e^{-sc}}{s} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(U_c(t)) = \frac{e^{-sc}}{s}}$$

نتیجه: (عدد ۱ ...) $\mathcal{L}$ است اگر $c=0$ باشد همان $\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}$ است.

## قضیهٔ دوم انتقال

فرض کنید $f(t)$ در شرایط قضیه وجودی تبدیل لاپلاس صدق کند، و $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$ ؛ آنگاه برای هر ثابت مثبت $c$ داریم

$$\mathcal{L}(u_c(t)\, f(t-c)) = e^{-sc} F(s)$$

اثبات:

$$\int_0^\infty e^{-st} u_c(t) f(t-c)\,dt = \int_0^c + \int_c^\infty e^{-st} (1) f(t-c)\,dt$$

$t-c=x \Rightarrow$

$t\to c \Rightarrow x\to 0$

$t\to\infty \Rightarrow x\to\infty$

$$= \int_0^\infty e^{-s(x+c)} f(x)\,dx = e^{-sc}\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$= e^{-sc} F(s) \quad \boxtimes$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(u_c(t) f(t-c))) = \mathcal{L}^{-1}(e^{-sc}F(s)) = u_c(t) f(t-c)$$

معادلاً داریم:

$$\mathcal{L}(u_c(t) f(t)) = e^{-sc}\mathcal{L}(f(t+c))$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید:

$$f(t)=\begin{cases} \sin t & 0\leq t<\pi \\ 0 & t\geq\pi \end{cases} \longrightarrow f(t)=\sin t \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0\leq t<\pi \\ 0 & t\geq\pi \end{cases}$$

$$f(t) = \sin t\,(u_0(t) - u_\pi(t))$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(u_0(t)\sin t - u_\pi(t)\sin t) = e^{-s(0)}\mathcal{L}(\overbrace{\sin(t+0)}^{\sin t}) - e^{-s(\pi)}\mathcal{L}(\overbrace{\sin(t+\pi)}^{-\sin t})$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-s\pi}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

# پایان