دِموی جزوه ریاضی عمومی ۲

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

دکتر کیانی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(x_1-a_1, x_2-a_2, \dots, x_n-a_n) = (rA_1, \dots, rA_n)$

$$\begin{cases} x_1-a_1 = rA_1 \\ x_2-a_2 = rA_2 \\ \vdots \\ x_n-a_n = rA_n \end{cases} \xrightarrow{\text{به صورت تقارنی}} r = \frac{x_1-a_1}{A_1} = \frac{x_2-a_2}{A_2} = \dots = \frac{x_n-a_n}{A_n}$$

توجه کنید اگر $A_i = 0$ معنی آن این است که $x_i = a_i$ $\frac{x_1-a_1}{0} = r \Rightarrow x_1 = a_1$

مثال: اگر خط l به صورت $\frac{x_1-4}{\sqrt{2}} = \frac{x_2-3}{0} = \frac{x_3-4}{5} = \frac{x_4-\sqrt{3}}{e}$ باشد $a \in l$ و $A \in R^n$ را چنان بیابید که $l = a + \langle A \rangle$

$x_2 = 3$

$\frac{x_1-4}{\sqrt{2}} = \frac{x_3-4}{5} = \frac{x_4-4}{e} = t$

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2}t + 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 5t + \sqrt{3} \\ x_4 = et + \sqrt{3} \end{cases}$$

$l = \{(\sqrt{2}t + 4, 3, 5t + \sqrt{3}, et + \sqrt{3}) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \underbrace{(4, 3, 4, \sqrt{3})}_{a} + \langle \underbrace{(\sqrt{2}, 0, 5, e)}_{A} \rangle$

* توجه: a می‌تواند هر نقطه‌ای از l و A می‌تواند هر مضربی از A باشد.

توجه: خط $l = a + \langle A \rangle$ که $(A \neq 0)$ با $\mathbb{R}$ در تناظر (۱-۱) است یعنی تابع $f: l \to \mathbb{R}$ وجود دارد که (۱-۱) و پوشا باشد.

$l = \{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\}$

$X \in l \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R},\ X = a + rA$

$f(X) = f(a + rA) = r$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

① تابع بودن $X = Y \xrightarrow{\exists r,s} X = a + rA \quad , \quad Y = a + sA$

$X = Y \Rightarrow \cancel{a} + rA = \cancel{a} + sA$

$\Rightarrow rA = sA$

$\Rightarrow (r - s)A = 0 \xrightarrow{A \neq 0} r - s = 0 \Rightarrow r = s$

$\Longrightarrow f(X) = f(Y)$

② (۱-۱) بودن $f(X) = f(Y)$

$X, Y \in \ell \longrightarrow \exists r,s \begin{cases} X = a + rA \\ Y = a + sA \end{cases}$

$f(X) = r$

$\Longrightarrow \xrightarrow{f(X) = f(Y)} r = s \Rightarrow rA = sA$

$f(Y) = s$

$\Rightarrow a + rA = a + sA \Rightarrow X = Y$

③ پوشا بودن $r \in \mathbb{R} \quad , \quad \exists f: \quad X = a + rA \Rightarrow f(X) = r$ پس f پوشاست.

محور

بردارهای e_1 ، ... ، e_n در $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ $\qquad e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ ام i

مؤلفه‌ی n ام است

$e_n = (0, \ldots, 0, 1)$

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$X = (x_1, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$

$(x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_n)$

مشتق ۸

تعریف: اگر $f: S \to \mathbb{R}^m$ و $S \subseteq \mathbb{R}^n$ و a نقطه‌ای درونی S باشد، f در a مشتق‌پذیر است اگر تابع مستوی $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ به گونه‌ای موجود باشد که $f(a) = A(a)$ و $\lim_{x \to a} \frac{|f(x)-A(x)|}{|x-a|} = 0$

توجه داشته باشید $A(x) = L(x) + B$ که در آن L نگاشت خطی است و $B = f(a) - L(a)$

و $A(x) = \underset{m \times n}{\overset{[f'(a)]}{L}}(x-a) + f(a)$

قضیه: برای $z = f(x,y)$ در (a,b) مشتق‌پذیر است هرگاه

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - hf_1(a,b) - kf_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

قضیه (مقدار میانگین): هرگاه $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ در همسایگی از (a,b) پیوسته و h و k به حد کافی کوچک آنگاه $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ موجود اند:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = hf_1(a+\theta_1 h, b+k) + kf_2(a, b+\theta_2 k)$$

(با شامل همسایگی از نقطه)

قضیه (مهم): فرض کنید $U \subseteq \mathbb{R}^n$ و $f: U \to \mathbb{R}^m$ $\;(f = (f_1, \dots, f_m))$

$f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ اگر مشتقات جزئی f_i ها در همه‌ی نقاط U موجود و پیوسته باشند آنگاه f در همه‌ی نقاط U مشتق‌پذیر است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دیفرانسیل: اگر $z = f(x_1, \dots, x_n)$ که $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و مشتقات جزئی مرتبه اول f موجود باشد داریم:

$$dz = df = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$$

ماتریس ژاکوبی

فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ که $f = (f_1, \dots, f_m)$ و داریم

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

پس داریم $X = (x_1, \dots, x_n)$ و $Y = (y_1, \dots, y_m)$ و به طور مختصری نویسیم $Y = f(X)$

توجه کنید اطلاعات مربوط به میزان تغییر Y نسبت به X در مشتقات جزئی مختلف $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ $\left(\begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix} \right)$

معمولاً در ماتریس $Df(x)_{m \times n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود بررسی می‌شود

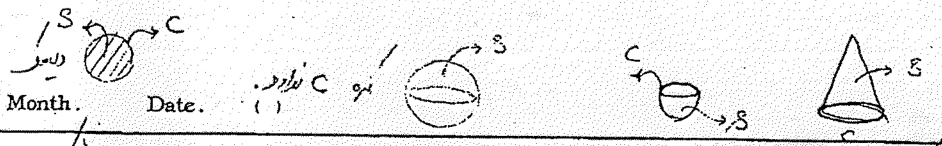
$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

توجه کنید $Df(x)$ را به صورت زیر نمایش می‌دهند

$$Df(x) = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right]_{m \times n} = \left[\frac{\partial (y_1, \dots, y_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \right]$$

توجه کنید اگر $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ داریم $Df(x)$ یک $1 \times n$ است به صورت $Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ که آن را گرادیان f نیز می‌نامیم و با $\nabla f(x)$ نیز نمایش می‌دهند

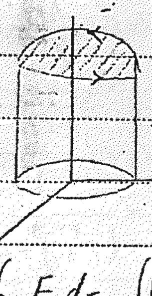
Subject: Year. Month. Date.



تعمیم استوکس: اگر S سطح جهت‌دار و قطعه‌به‌قطعه هموار در $\mathbb{R}^3$ باشد و دارای میدان برداری قائم یکه $\vec{N}$ و مرز C از یک یا چند منحنی بسته قطعه‌به‌قطعه هموار با جهت ناشی از S تشکیل شده باشد هرگاه F میدان برداری هموار بر یک مجموعه‌ی باز شامل S باشد آنگاه

$$\oint_C F\cdot T\,ds = \iint_S \text{curl}F\cdot \vec{N}\,dS$$

مثال: $\oint_C F\cdot dr$ (با $T\,ds$) را حساب کنید اگر $F=(-y^3, x^3, -z^3)$ و C منحنی محل برخورد استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحه $2x+2y+z=3$ باشد و جهت این منحنی را چنان باشد که تصویر آن روی xy خلاف عقربه‌های ساعت باشد.



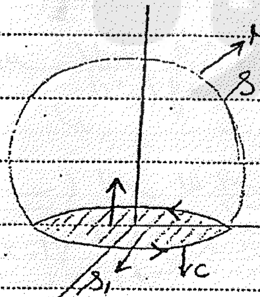
$$G(x,y,z) = 2x+2y+z-3=0$$

$$d\hat{S} = N\,dS = \pm\frac{(2,2,1)}{1}\,dx\,dy \qquad \text{curl}F = (0,0,3(x^2+y^2))$$

$$\oint_C F\cdot dr = \iint \text{curl}F\cdot \underbrace{N\,dS}_{d\hat{S}}$$

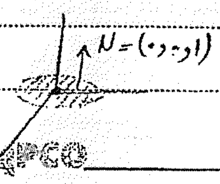
$$\Longrightarrow \oint_C F\cdot dr = \iint_{x^2+y^2\le 1} (0,0,3(x^2+y^2))\cdot(2,2,1)\,dx\,dy = \iint 3(x^2+y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2\,r\,dr\,d\theta =$$

مثال: $\iint \text{curl}F\cdot N\,dS$ را محاسبه کنید که S بخشی از کره‌ی $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ باشد که بالای صفحه‌ی xy و N قائم یکه رو به خارج S است و $F=(y^2\cos xz, x^3e^{yz}, -e^{-xyz})$



$$\iint \text{curl}F\cdot N\,dS \overset{\text{استوکس}}{=} \oint_C F\cdot dr$$

$$\overset{\text{استوکس}}{=} \iint_{S_1:\ x^2+y^2\le 4} \text{curl}F\cdot N\,dS$$



$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} \text{curl}F\cdot \vec{k}\,dA$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\text{curl}\,F\cdot k = 3x^2 - 2y \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (3r^2\cos^2\theta - 2r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$

تمرین ۵۳) $a,b,c>0$ داده شده. نشان دهید $\begin{cases} x = a\sin u\cos v \\ y = b\sin u \sin v \\ z = c\cos u \end{cases}$ که $0<u<\pi$ ، $0<v<2\pi$ پارامتری بیضی‌گون

برای بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ با استثنای دو نقطه‌ی $(0,0,\pm c)$ به صورت یک رویه هموار است. همچنین $\iint_{E_2} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$ را برای $-\frac{c}{2} < z < \frac{c}{2}$ محاسبه کنید.

۴) اگر S رویه $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{2}=1$ را در نظر بگیرید (با قائم رو به خارج) و جهان ... در این صورت $F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ ، $\iint_S F\cdot\vec{N}\,dS$ را بیابید.

۴) صحت قضیه استوکس را برای $F(x,y,z)=(-y^3, x^3, -z^3)$ بررسی کنید که در آن C منحنی فصل مشترک $x^2+y^2=1$ و صفحه $x+y+z=1$ و جهت C خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.

۵) اگر $F(x,y,z) = \left(\frac{1}{9}x^3, \frac{1}{12}y^3, \frac{1}{15}z^3\right)$ و S رویه $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}=1$ در این صورت $\iint_S F\cdot\vec{N}\,dS$ را محاسبه کنید (N قائم رو به خارج).

۱) الف) $\int_0^1\int_0^{1-y} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dx\,dy$ را محاسبه کنید.

ب) اگر W ناحیه درون $x^2+y^2+z^2=1$ و استوانه $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ باشد $\iiint_W \sqrt{1-x^2-y^2}\,dV$ را محاسبه کنید.

۲) الف) فرض کنید C به صورت $\alpha(t) = (e^{\sin t}, \cos^2 t, t^3+1)$ که $0<t<\pi$. مطلوب است محاسبه $\int_C \frac{1}{z}dx - \frac{2}{z}dy + \frac{3y-x+z^2}{z^2}dz$ (پایستار بودن بررسی شود).

PAPCO

پایان

جهت دانلود نسخه ی کامل محصول

روی دکمه زیر کلیک نمایید