# دِموی جزوه ریاضی مهندسی

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

دکتر بنی فاطمی

$$\Rightarrow b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n=1,3,5,\dots \\ 0 & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin nx}$$

گاهی اوقات اگر به توابع زوج یا فرد برخورد کنیم، نیازی نیست که هر سه انتگرال را محاسبه کنیم.

$f(-x) = -f(x)$ فرد: $f(x)$

$a_n = 0 \quad , \quad n=0,1,2,\dots$ زیرا: فرد $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$

$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$ زیرا، زوج $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \longrightarrow \text{بسط فوریه سینوسی}}$$

پس اگر تابع ما فرد باشد، بسط فوریه سینوسی دارد و اگر تابع ما زوج باشد، بسط فوریه کسینوسی خواهد داشت و گاهی اوقات می‌توانیم تابع را به قسمت های زوج و فرد تقسیم کنیم و از خاصیت بالا در هر قسمت استفاده کنیم و بسط فوریه را راحت‌تر بیابیم.

$f(-x) = f(x)$ زوج: $f(x)$

$b_n = 0$ زیرا: $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ فرد

$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad n=0,1,2,\dots$ زیرا، زوج، $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \longrightarrow \text{بسط فوریه کسینوسی}}$$

به دو بسط بالا، چون برای به دست آوردن ضرایب فوریه، در یک نیم دوره انتگرال گرفته‌ایم، بسط فوریه نیم دوره‌ای نیز می‌گویند.

مثال، تابع $f(x)=x$ که در یک نیم دوره‌ی $0<x<2$ تعریف شده است را یک بار به صورت فرد و بار دیگر به صورت زوج گسترش دهید و در هر حالت سری های فوریه‌ی آنها را بیابید.

ابتدا گسترش فرد می‌دهیم، لذا:

$a_n = 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x \sin\frac{n\pi x}{2}\, dx$$ (زیرا دوره تناوب ۴ است و $L=2$ می‌باشد)

$$= -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi$$ (از طریق جزء به جزء بدست می‌آید)

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos n\pi \sin\frac{n\pi x}{2} \quad \text{: بسط فوریه سینوسی}}$$

در گسترش زوج:

$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\, dx = 2$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x \cos\frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - 1\right) \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos n\pi - 1\right)\cos\frac{n\pi x}{2} \quad \text{: بسط فوریه کسینوسی}}$$

باید توجه داشته باشیم که در این مثال، بسط فوریه کسینوسی به دلیل وجود $n^2$ در مخرج زودتر همگرا می‌شود.

* مشتق گیری جمله به جمله از سری های فوریه:

← در حالت کلی نمی‌توان از جملات یک سری جمله به جمله مشتق گرفت و رابطه‌ای به صورت زیر ارائه نمود.

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{d f_n(x)}{dx}$$

← قبلاً دیدیم که سری فوریه تابع $f(x) = x \quad (0 < x < 2)$ به صورت زیر می‌باشد (در گسترش فرد)

$$x = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos n\pi \sin\frac{n\pi x}{2}$$

← حال اگر از سمت راست رابطه اخیر جمله به جمله نسبت به $x$ مشتق بگیریم، سری زیر بدست می‌آید:

$$\Longrightarrow \int_{BDEB} f(z)\,dz = -\int_{AFHKA} f(z)\,dz$$

$$= \int_{AKHFA} f(z)\,dz$$

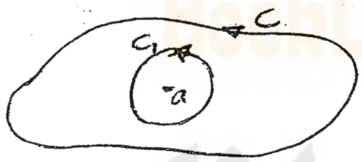
$$\Longrightarrow \boxed{\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz}$$

یعنی اگر به ما یک انتگرال روی خم بسته ای دادند که حساب کنیم، می توانیم خم بسته ای دیگر در داخل آن خم بسته بگیریم و انتگرال آن را حساب کنیم.

مثال: ثابت کنید،

$$\oint_c \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n=2,3,4 \end{cases}$$

که در آن $c$ یک خم بسته است که شامل $a$ است.




دایره ای به مرکز $a$ و به شعاع $\varepsilon$ رسم می کنیم. طبق نتیجه سوم قضیه کوشی داریم،

$$\oint_c \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{c_1} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

$c_1$ دایره ای است به مرکز $a$ و شعاع $\varepsilon$.

$|z-a| = \varepsilon$ یا $z-a = \varepsilon e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

$$\oint_{c_1} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{i\theta}\,d\theta}{(\varepsilon e^{i\theta})^n}$$

$$= \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta}\,d\theta = \begin{cases} & n \neq 1 \\ \frac{i}{1}\int_0^{2\pi} d\theta = i[\theta]_0^{2\pi} & \end{cases}$$

$$= 2\pi i \qquad n=1$$

۱۳۸۲,۹,۲۳

* فرمول انتگرال کوشی:

← اگر $f(z)$ روی و درون کانتور بسته و ساده $C$ به عنوان مرز ناحیه یک پارچه ساده $R$ تحلیلی باشد و نیز $a$ درون $C$ باشد، آنگاه داریم:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

* فرمول تعمیم یافته انتگرال کوشی:

← اگر $f(z)$ روی و درون کانتور بسته و ساده $C$ که مرز ناحیه یک پارچه و ساده $R$ می باشد، تحلیلی باشد که $a$ نقطه ای درون آن است، آنگاه $f$ در $R$ در هر مرتبه ای مشتق دارد و به علاوه همه این مشتقات نیز در $R$ تحلیلی می باشد و می توان ثابت کرد که:

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

مثال:

$$\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz$$

$C:$ $|z-1|=3$ دایره ای به مرکز ۱ و شعاع ۳ $\Rightarrow$ $\pi$ در این ناحیه است

$\pi = 3,14\dots$

← چون $\pi$ درون دایره داده شده می باشد، پس با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = 2\pi i\, \overbrace{f(\pi)}^{\cos\pi} = -2\pi i$$

مثال:

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = \oint_C e^z\left(\frac{\overset{1}{A}}{z}+\frac{\overset{-1}{B}}{z+1}\right)dz = \oint_C \frac{e^z}{z}\,dz - \oint_C \frac{e^z}{z+1}\,dz$$

$C: |z-1|=2$

$$= 2\pi i e^{0} - 2\pi i e^{-1} = 2\pi i\,(1-e^{-1})$$

(۰ و ۱- در این کانتور هستند.)

جلسه‌ای که غایب بودم

(6)

الف) اگر $a\neq 0$ ، $d\neq 0$ ؛ هر دایره‌ای که از مبدأ نمی‌گذرد با تبدیل $w=\frac{1}{z}$ به دایره‌ای که از مبدأ نمی‌گذرد تبدیل می‌شود.

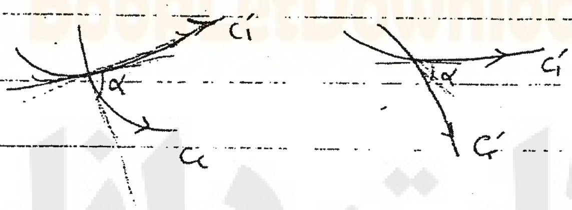
ب) اگر $a\neq 0$ و $d=0$ : در این حالت، با تبدیل $w=\frac{1}{z}$ ، دایره به خط راست تبدیل می‌شود

ج) اگر $a=0$ و $d=0$ تبدیل $w=\frac{1}{z}$ خط راست را به خط راست تبدیل می‌کند

د) اگر $a=0$ و $d\neq 0$ تبدیل $w=\frac{1}{z}$ ، خط راست را به دایره تبدیل می‌کند

نگاشت‌های همدیس

نگاشتی را که اندازه و جهت زاویه بین دو منحنی هموار گذرنده از یک نقطه مشخص را حفظ کند، در آن نقطه همدیس گوییم.




قضیه: نگاشتی که به وسیله تابع تحلیلی $w=f(z)$ تعریف می‌شود، یک نگاشت همدیس است به جز در نقاطی که $f'(z)=0$ است

$w=z^2$ نگاشتی همدیس است در همه جا به جز

$w'=2z=0 \Rightarrow z=0$

پس $w=z^2$ نگاشتی همدیس است به جز در نقطه $z=0$

قضیه: تابع همساز $\phi(x,y)$ تحت تغییراتی از تبدیل همدیس که با تابع تحلیلی $w=f(z)$ داده شده است، همساز باقی می‌ماند

## تبدیل خطی کسری یا دوخطی :

این تبدیل به صورت زیر تعریف می‌شود : $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ که در آن $a$، $b$، $c$

اعداد حقیقی یا مختلط هستند و نیز $(ad-cb) \neq 0$ است.

با توجه به شرط، صورت مخالف صفر است

$$w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

چون $ad-bc$ مخالف صفر است پس $w' \neq 0$ که به این ترتیب همدیس بودن نگاشت با شرط $ad-bc \neq 0$ تضمین می‌شود.

به طور کلی به ازای هر $z$ که $cz+d \neq 0$، دقیقاً یک عدد مختلط $w$ متناظر می‌شود.

اگر $c \neq 0$ آنگاه به $z = -\frac{d}{c}$، $w$ ای متناظر نمی‌شود. این موضوع ما را بر آن وا می‌دارد که نقطه‌ای را به صفحه $w$ ها اضافه کنیم. این نقطه را در بی‌نهایت می‌نامیم و آن را با $\infty$ نشان می‌دهیم.

صفحه مختلط با انضمام نقطه $\infty$ را صفحه مختلط توسعه یافته می‌نامیم.

قضیه: سه نقطه متمایز مفروض $z_1$، $z_2$ و $z_3$ را همواره می‌توان با یک و تنها یک تبدیل خطی کسری $w=f(z)$ بر روی سه نقطه متمایز مشخص $w_1$، $w_2$، $w_3$ نگاشت: که این نگاشت به طور ضمنی با معادله زیر مشخص می‌شود:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \times \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \times \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

و اگر یکی از نقاط، نقطه بی‌نهایت باشد، خارج قسمت تفاضلی که شامل این نقطه هستند، برابر 1 فرض می‌شود.

# پایان

جهت دانلود نسخه ی کامل محصول

روی دکمه زیر کلیک نمایید