دِموی جزوه ریاضی عمومی ۱

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

دکتر کیانی

Subject:
Year. Month. Date: ( )

* اصل تمامیت

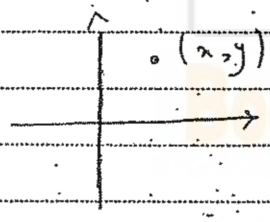
اگر زیر مجموعه ای ناتهی و کراندار از R را در نظر بگیریم حتما کوچکترین کران بالا دارد

مطلب بالا برای اعداد گویا صادق نیست

$(0,\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow$ کوچکترین کران بالا ندارد

اعداد مختلط

* معادله $x^2+1=0$ در اعداد حقیقی جواب ندارد



$R^2=\{(x,y) \mid x,y \in R\}$

در مجموعه R^2

جمع: $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$

ضرب: $(x,y)\cdot(x',y')=(xx'-yy', xy'+yx')$

$z_1=(x,y)$ $z_2=(x',y')$, $z_3=(x'',y'')$

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$ جابجایی

(2) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ شرکت پذیری

Subject:

Year. Month. Date. ( )

(۳) $(x,y)+(0,0)=(x,y)$ عنصر خنثی

(٤) $(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$ عنصر قرینه

$$Z=(x,y) \Rightarrow -Z=(-x,-y)$$

خواص ضرب:

(۱) $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$

$$(x,y)\cdot(x',y')=(xx'-yy',\ xy'+yx')$$

$$(x',y')\cdot(x,y)=(x'x-y'y,\ x'y+y'x)$$

(۲) $Z_1\cdot(Z_2\cdot Z_3)=(Z_1\cdot Z_2)\cdot Z_3$ شرکت پذیری

(۳) $(x,y)\cdot(1,0)=(x,y)$ عنصر خنثی

(٤) $(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=(1,0)$, $(x,y)\neq(0,0)$ برای عنصر وارون ضرب

(۵) $Z_1\cdot(Z_2+Z_3)=Z_1\cdot Z_2+Z_1\cdot Z_3$

خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$x\cos(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx + x\sin(\ln x) \Rightarrow$$

$$2I = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$$

$$I = \frac{1}{2}\left(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)\right)$$

فرمول‌های تحویل یافته (بازگشتی) :

$$I_n = \int w^n e^w\,dw$$

$$u = w^n \Rightarrow du = n w^{n-1}\,dw$$

$$dv = e^w\,dw \Rightarrow v = e^w$$

$$w^n e^w - n\int w^{n-1} e^w\,dw$$

$$\Rightarrow I_n = w^n e^w - n I_{n-1}$$

پس:

$$I_0 = e^w \qquad I_1 = we^w - e^w$$

$$I_2 = w^2 e^w - 2(we^w - e^w)$$

$$I_3 = w^3 e^w - 3(w^2 e^w - 2we^w + 2e^w)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$I = \int x e^{\sqrt{x}} \qquad x = w^2 \Rightarrow dx = 2w\,dw$:حل

$I = 2\int w^3 e^{w}\, dw = 2 I_3$

$\int (\sec x)^n\, dx \qquad (n \geq 2)$:حل

$I_0 = x \ , \quad I_1 = \ln|\sec x + tg\, x|$

$I_2 = tg\, x$

$I_n = \sec^n x\, dx$

$u = \sec^{n-2} x \Rightarrow du = (n-2)\sec^{n-2} x\, tg\, x\, dx$

$dv = \sec^2 x\, dx \Rightarrow v = tg\, x$

$\Rightarrow \sec^{n-2} x\, tg\, x - (n-2)\int (\sec x)^{n-2}\, tg^2 x\, dx$

$= \sec^{n-2} x\, tg\, x - (n-2)\int (\sec^{n-2} x)(\sec^2 x - 1)\, dx$

$= (\sec x)^{n-2}\, tg\, x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2} = I_n$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n-1}\left(\sec^{n-1} x\, tg\, x\right) + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} + C$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

- ۵

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{س}} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} \xrightarrow{\times x}$$

$$\frac{2x}{(1-x)^3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x^{n-1}$$

حال به جای x ، $\frac{-1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2\left(\frac{-1}{2}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \frac{(-1)^n}{2^n}$$

مثال ، اگر $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{3^n(n^2+1)}$ بازه همگرایی را بیابید.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n}{3^n(n^2+1)}}_{a_n} \left(x+\frac{5}{2}\right)^n$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2/3 \Rightarrow R = \frac{2}{3}$$

بنابراین برای $-\frac{3}{2} < x + \frac{5}{2} < 3/2$ همگراست یعنی

$$-4 < x < -1$$

If: $x = -4 \longrightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ همگراست

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

If: $x=-1 \longrightarrow$ همگراست $[-4,-1]$ بازه همگرایی

حل:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1-\ln 2x}{(2x-1)^2} & x\neq \frac{1}{2}\\[2mm] \frac{1}{2} & x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

بسط تیلور را حول $x=\frac{1}{2}$ بنویسید و بازه همگرایی را بیابید $f^{(m)}(\frac{1}{2})$

را برای هر m باشد.

$$\frac{1}{(2x-1)}-\frac{\ln(2x+1-1)}{(2x-1)^2}=\frac{1}{2x-1}+\frac{-\ln(1-(1-2x))}{(2x-1)^2}=$$

$$\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{(2x-1)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2x)^n}{n}=\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{(2x-1)^2}(-2x+1)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1-2x)^{n-2}}{n}=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-2x)^n}{n+2}}_{T(x)}$$

$T(x)=f(x)$ زیرا $T(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-2x)^n}{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n\,2^n}{n+2}}_{a_n}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

پایان

جهت دانلود نسخه ی کامل محصول

روی دکمه زیر کلیک نمایید