بوکلت دانلود | مرجع دانلود جزوات آموزشی

دِموی کتابِ

حل المسائلِ مقاومت مصالح

BookLetDownload
بوکلت دانلود

بی یر جانسون

BookLetDownload
بوکلت دانلود

فهرست

سخن ناشر		پنج
فصل ۱	مقدمه ــ مفهوم تنش	۱
فصل ۲	تنش و کرنش ــ بارگذاری محوری	۱۶
فصل ۳	پیچش	۵۲
فصل ۴	خمش خالص	۸۹
فصل ۵	تحلیل و طراحی خمش در تیرها	۱۴۴
فصل ۶	تنشهای برشی در تیرها و عضوهای با جدار نازک	۲۰۹
فصل ۷	تبدیلهای تنش و کرنش	۲۴۵
فصل ۸	تنشهای اصلی تحت بارگذاری مفروض	۲۹۴
فصل ۹	تغییر مکان تیرها	۳۲۸
فصل ۱۰	ستونها	۴۰۰
فصل ۱۱	روشهای انرژی	۴۳۹

۱

مقدمه ــ مفهوم تنش

مسئله ۱.۱

(الف) میله AB

$$P = ۴۰ + ۳۰ = ۷۰\ \text{kN} = ۷۰ \times ۱۰^{۳}\ \text{N}$$

$$A = \frac{\pi}{۴} d_{۱}^{۲} = \frac{\pi}{۴}(۵۰)^{۲} = ۱{,}۹۶۳۵ \times ۱۰^{۳}\ \text{mm}^{۲} = ۱{,}۹۶۳۵ \times ۱۰^{-۳}\ \text{m}^{۲}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{۷۰ \times ۱۰^{۳}}{۱{,}۹۶۳۵ \times ۱۰^{-۳}} = ۳۵{,}۷ \times ۱۰^{۶}\ \text{Pa}$$

$$\sigma_{AB} = ۳۵{,}۷\ \text{MPa} \quad \blacktriangleleft$$

(ب) میله BC

$$P = ۳۰\ \text{kN} = ۳۰ \times ۱۰^{۳}\ \text{N}$$

$$A = \frac{\pi}{۴} d_{۲}^{۲} = \frac{\pi}{۴}(۳۰)^{۲} = ۷۰۶{,}۸۶\ \text{mm}^{۲} = ۷۰۶{,}۸۶ \times ۱۰^{-۶}\ \text{m}^{۲}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{۳۰ \times ۱۰^{۳}}{۷۰۶{,}۸۶ \times ۱۰^{-۶}} = ۴۲{,}۴ \times ۱۰^{۶}\ \text{Pa}$$

$$\sigma_{BC} = ۴۲{,}۴\ \text{MPa} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۲.۱

میله AB

$$P = ۴۰ + ۳۰ = ۷۰\ \text{kN} = ۷۰ \times ۱۰^{۳}\ \text{N}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A_{AB}} = \frac{P}{\frac{\pi}{۴} d_{۱}^{۲}} = \frac{۴P}{\pi d_{۱}^{۲}}$$

$$d_{۱} = \sqrt{\frac{۴P}{\pi \sigma_{AB}}} = \sqrt{\frac{(۴)(۷۰ \times ۱۰^{۳})}{\pi(۱۴۰ \times ۱۰^{۶})}} = ۲۵{,}۲ \times ۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

$$d_{۱} = ۲۵{,}۲\ \text{mm} \quad \blacktriangleleft$$

میله BC

$$P = ۳۰\ \text{kN} = ۳۰ \times ۱۰^{۳}\ \text{N}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A_{BC}} = \frac{P}{\frac{\pi}{۴} d_{۲}^{۲}} = \frac{۴P}{\pi d_{۲}^{۲}}$$

$$d_{۲} = \sqrt{\frac{۴P}{\pi \sigma_{BC}}} = \sqrt{\frac{(۴)(۳۰ \times ۱۰^{۳})}{\pi(۱۴۰ \times ۱۰^{۶})}} = ۱۶{,}۵۲ \times ۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

$$d_{۲} = ۱۶{,}۵۲\ \text{mm} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۳.۱

(الف) میله AB

$$P = ۴۰\ \text{kips} \quad (\text{کششی})$$

$$A_{AB} = \frac{\pi d_{AB}^{۲}}{۴} = \frac{\pi(۲)^{۲}}{۴} = ۳{,}۱۴۱۶\ \text{in}^{۲}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A_{AB}} = \frac{۴۰}{۳{,}۱۴۱۶} = ۱۲{,}۷۳\ \text{ksi} \quad \blacktriangleleft$$

(ب) میله BC

$$F = ۴۰ - (۲)(۳۰) = -۲۰\ \text{kips} \qquad \text{یعنی } ۲۰\ \text{kips} \text{ تراکم}$$

$$A_{BC} = \frac{\pi d_{BC}^{۲}}{۴} = \frac{\pi(۳)^{۲}}{۴} = ۷{,}۰۶۸۶\ \text{in}^{۲}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F}{A_{BC}} = \frac{-۲۰}{۷{,}۰۶۸۶} = -۲{,}۸۳\ \text{ksi} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۴.۱

$$A_{AB} = \frac{\pi}{۴}(۲)^{۲} = ۳{,}۱۴۱۶\ \text{in}^{۲}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A_{AB}} = \frac{P}{۳{,}۱۴۱۶} = ۰{,}۳۱۸۳۱\ P$$

$$A_{BC} = \frac{\pi}{۴}(۳)^{۲} = ۷{,}۰۶۸۶\ \text{in}^{۲}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{(۲)(۳۰) - P}{A_{AB}} = \frac{۶۰ - P}{۷{,}۰۶۸۶} = ۸{,}۴۸۸۳ - ۰{,}۱۴۱۴۷P$$

BookletDownload
بوکلت دانلود

با مساوی قراردادن σ_{AB} با σ_{BC}

$$P = ۱۸٫۴۶ \text{ kips} \quad ◄ \qquad ۰٫۳۱۸۳۱P = ۸٫۴۸۸۳ - ۰٫۱۴۱۴۷P$$

مسئله ۵.۱

مکان در هر پیچ ورق بالایی توسط نیروی کششی P_b مربوط به پیچ به سمت پایین کشیده می‌شود. در همین زمان فاصله‌انداز برای حفظ تعادل، توسط نیروی فشاری P_s به بالا کشیده می‌شود. برای حفظ تعادل

$$P_b = P_s$$

برای پیچ

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} = \frac{۴P_b}{\pi d_b^۲}$$

یا

$$P_b = \frac{\pi}{۴}\sigma_b d_b^۲$$

برای فاصله‌انداز

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{۴P_s}{\pi(d_s^۲ - d_b^۲)}$$

یا

$$P_s = \frac{\pi}{۴}\sigma_s(d_s^۲ - d_b^۲)$$

با مساوی قراردادن P_b و P_s

$$\frac{\pi}{۴}\sigma_b d_b^۲ = \frac{\pi}{۴}\sigma_s(d_s^۲ - d_b^۲)$$

$$d_s = \sqrt{۱ + \frac{\sigma_b}{\sigma_s}}\, d_b \sqrt{۱ + \frac{۲۰۰}{۱۳۰}}\,(۱۶)$$

$$d_s = ۲۵٫۵\text{mm} \quad ◄$$

مسئله ۶.۱

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \therefore \quad A = \frac{P}{\sigma}$$

خواص هندسی:

$$A = \frac{\pi}{۴}(d_۱^۲ - d_۲^۲)$$

$$d_۲^۲ = d_۱^۲ - \frac{۴A}{\pi} = d_۱^۲ - \frac{۴P}{\pi\sigma}$$

$$d_۲^۲ = (۲۵\times۱۰^{-۳})^۲ - \frac{(۴)(۱۲۰۰)}{\pi(۳٫۸۰\times۱۰^{۶})} = ۲۲۲٫۹\times۱۰^{-۶}\text{m}^۲$$

$$d_۲ = ۱۴٫۹۳\times۱۰^{-۳}\text{m} \qquad d_۲ = ۱۴٫۹۳\text{mm} \quad ◄$$

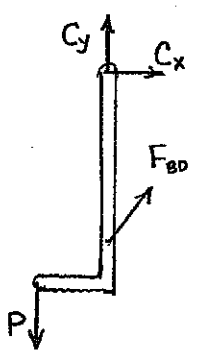
مسئله ۷.۱

$$\sigma_{BD} = ۵۰\text{ MPa} = ۵۰\times۱۰^{۶}\text{ Pa}$$

$$A_{BD} = ۸۰۰\text{ mm}^۲ = ۸۰۰\times۱۰^{-۶}\text{ m}^۲$$

$$F_{BD} = \sigma_{BD}A_{BD} = (۵۰\times۱۰^{۶})(۸۰۰\times۱۰^{-۶}) = ۴۰\times۱۰^{۳}\text{N}$$

با رسم نمودار جسم آزاد ABD



$$+\circlearrowleft M_C = ۰$$

$$(۰٫۴۵۰)\left(\frac{۲۴۰}{۵۱۰}F_{BD}\right) - ۰٫۱۳۵P = ۰$$

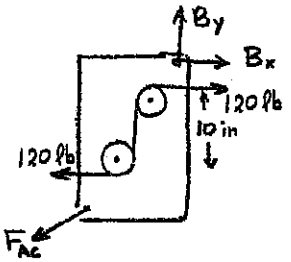
$$P = ۱٫۵۶۸۶F_{BD}$$

$$P = (۱٫۵۶۸۶)(۴۰\times۱۰^{۳}) = ۶۲٫۷\times۱۰^{۳}\text{N}$$

$$P = ۶۲٫۷\text{kN} \quad ◄$$

مسئله ۸.۱

با استفاده از ورق با دو قرقره باهم به‌عنوان جسم آزاد. توجه کنید که کشش کابل به‌وجود آمده ۱۲۰۰ lb-in کوپل ساعتگرد روی جسم اثر می‌کند



$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = ۰:$$

$$-(۱۲ + ۴)(F_{AC}\cos۳۰^\circ) + (۱۰)(F_{AC}\sin۳۰^\circ) - ۱۲۰۰ = ۰$$

$$F_{AC} = -\frac{۱۲۰۰}{۱۶\cos۳۰^\circ - ۱۰\sin۳۰^\circ} = -۱۳۵٫۵۰\text{ lb}$$

مساحت اتصال AC:

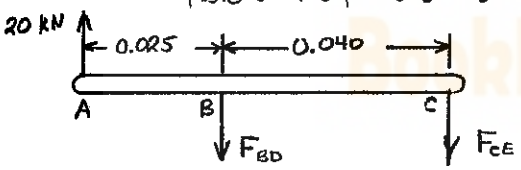
$$A = ۱\text{ in}\times\frac{۱}{۸}\text{ in} = ۰٫۱۲۵\text{ in}^۲$$

تنش در اتصال AC:

$$\sigma_{AC} = \frac{F_{AC}}{A} = -\frac{۱۳۵٫۵۰}{۰٫۱۲۵} = ۱۰۸۴\text{ psi} = ۱٫۰۸۴\text{ ksi} \quad ◄$$

مسئله ۹.۱

ABC را به‌عنوان نمودار جسم آزاد به‌کار می‌بریم



$$\Sigma M_C = ۰: \quad (۰٫۰۴۰)F_{BD} - (۰٫۰۲۵ + ۰٫۰۴۰)(۲۰\times۱۰^{۳}) = ۰$$

$$F_{BD} = ۳۲٫۵\times۱۰^{۳}\text{N}$$ اتصال BD در حالت کششی است

$$\Sigma M_B = ۰: \quad -(۰٫۰۴۰)F_{CB} - (۰٫۰۲۵)(۲۰\times۱۰^{۳}) = ۰$$

$$F_{CE} = -۱۲٫۵\times۱۰^{۳}\text{N}$$ اتصال CE در حالت فشاری است

$$A_{\text{خالص}} = (۰٫۰۸۰)(۰٫۰۳۶ - ۰٫۰۱۶) = ۱۶۰\times۱۰^{-۶}\text{m}^۲ =$$ مساحت یک اتصال در کشش

برای دو اتصال موازی $A_{\text{خالص}} = ۳۲۰\times۱۰^{-۶}\text{m}^۲$

تنش کششی در اتصال BD

(الف)

$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A_{\text{خالص}}} = \frac{۳۲٫۵\times۱۰^{۳}}{۳۲۰\times۱۰^{-۶}} = ۱۰۱٫۵۶\times۱۰^{۶}$$

یا

$$\sigma_{BD} = ۱۰۱٫۶\text{ MPa} \quad ◄$$

$$A = (۰٫۰۸۰)(۰٫۰۳۶) = ۲۸۸\times۱۰^{-۶}\text{m}^۲ =$$ مساحت در یک اتصال در حالت فشار

برای دو اتصال موازی $A = ۵۷۶\times۱۰^{-۶}\text{m}^۲$

(ب)

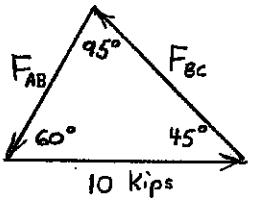
$$\sigma_{CE} = \frac{F_{CE}}{A} = \frac{-۱۲٫۵\times۱۰^{۳}}{۵۷۶\times۱۰^{-۶}} = -۲۱٫۷۰\times۱۰^{-۶}$$

یا

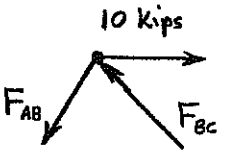
$$\sigma_{CE} = -۲۱٫۷\text{ MPa} \quad ◄$$

مسئله ۱۰.۱

مفصل B را به‌عنوان جسم آزاد به‌کار برید



مثلث نیرو



قانون سینوسها

$$\frac{F_{AB}}{\sin 45^\circ} = \frac{F_{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sin 95^\circ}$$

$F_{BC} = 8.9658 \text{ kips}$ $\quad F_{AB} = 7.3205 \text{ kips}$

اتصال AB یک عضو کششی است

حداقل مقطع در پین $\quad A_{\text{خالص}} = (1.8 - 0.8)(0.5) = 0.5 \text{ in}^2$

(الف) تنش در AB

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{\text{خالص}}} = \frac{7.3205}{0.5} = 14.64 \text{ ksi} \quad \blacktriangleleft$$

اتصال BC یک عضو فشاری است

مساحت سطح مقطع برابر است با $\quad A = (1.8)(0.5) = 0.9 \text{ in}^2$

(ب) تنش در BC

$$\sigma_{BC} = \frac{-F_{BC}}{A} = \frac{-8.9658}{0.9} = -9.96 \text{ ksi} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۱۱.۱

با استفاده از قسمت $EFGCB$ به‌عنوان جسم آزاد

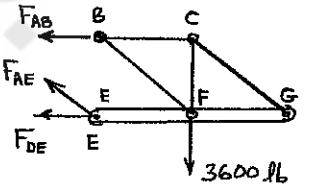
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad \frac{3}{5} F_{AB} - 3600 = 0$$

$F_{AE} = 6000 \text{ lb}$

با استفاده از تیر EFG به‌عنوان جسم آزاد

$$+\circlearrowleft M_F = 0: \quad -(4)\frac{3}{5}F_{AE} + (4)\left(\frac{3}{5}F_{CG}\right) = 0$$

$F_{CG} = F_{AE} = 6000 \text{ lb}$

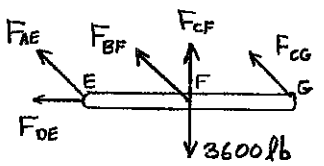


مساحت سطح مقطع عضو CG

$$A_{CG} = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4}(0.75)^2 = 0.44179 \text{ in}^2$$

تنش عمودی در CG $\quad \sigma_{CG} = \frac{F_{CG}}{A_{CG}} = \frac{6000}{0.44179} = 13580 \text{ psi}$

$$\sigma_{CG} = 13.58 \text{ ksi} \quad \blacktriangleleft$$



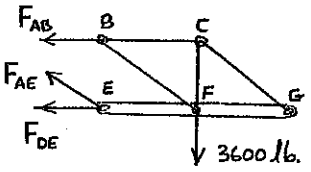
مسئله ۱۲.۱

با استفاده از قسمت $EFGCB$ به‌عنوان جسم آزاد

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad \frac{3}{5} F_{AE} - 3600 = 0$$

$F_{AE} = 6000 \text{ lb}$ $\quad \sigma_{AE} = 15 \text{ ksi}$

تنش در عضو AE

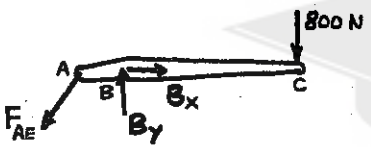


$$\sigma_{AE} = \frac{F_{AE}}{A_{AE}}$$

$$A_{AE} = \frac{F_{AE}}{\sigma_{AE}} = \frac{6.00}{15} = 0.400 \text{ in}^2 \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۱۳.۱

عضو ABC را به‌عنوان جسم آزاد به کار می‌بریم



$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad (0.150)\frac{4}{5}F_{AE} - (0.600)(800) = 0$$

$F_{AE} = 4 \times 10^3 \text{ N}$

مساحت میله در عضو AE برابر است با

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4}(20 \times 10^{-3})^2 = 314.16 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

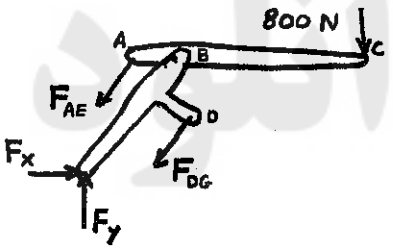
تنش در میله AE

$$\sigma_{AE} = \frac{F_{AE}}{A} = \frac{4 \times 10^3}{314.16 \times 10^{-6}} = 12.73 \times 10^6 \text{ Pa}$$

(الف)

$$\sigma_{AE} = 12.73 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

عضوهای ترکیب شده ABC و BFD را به‌عنوان جسم آزاد به کار می‌بریم



$$+\circlearrowleft \Sigma M_F = 0:$$

$$(0.150)\left(\frac{4}{5}F_{AE}\right) - (0.200)\left(\frac{4}{5}F_{DG}\right) - (1.050 - 0.350)(800) = 0$$

$F_{DG} = -1500 \text{ N}$

مساحت در میله DG

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4}(20 \times 10^{-3})^2 = 314.16 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

تنش در میله DG

$$\sigma_{DG} = \frac{F_{DG}}{A} = \frac{-1500}{314.16 \times 10^{-6}} = -4.77 \times 10^6 \text{ Pa}$$

(ب)

$$\sigma_{DG} = -4.77 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۱۴.۱

پیستون، میله، و میل‌لنگ را باهم به‌عنوان جسم آزاد به کار برده. عکس‌العملهای H دیوار و عکس‌العملهای تکیه‌گاهی A_x و A_y

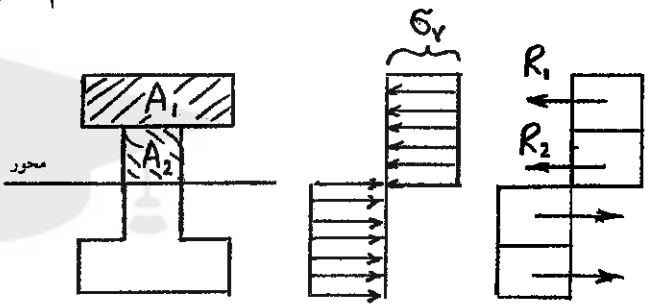
BookLetDownload

$$K = \frac{M_p}{M_Y} = \frac{۲۷٫۵۴}{۱۹٫۰۸} = ۱٫۴۴۳ \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۷۹.۴

از مسئلهٔ ۷۵.۴ $\quad E = ۲۹\times۱۰^۶ \text{ psi}$ و $\sigma_Y = ۴۲ \text{ ksi}$

$$R_۱ = \sigma_Y A_۱ = (۴۲)(۳)(۱) = ۱۲۶ \text{ kip}$$
$$\bar{y}_۱ = ۱٫۰ + ۰٫۵ = ۱٫۵ \text{ in}$$
$$R_۲ = \sigma_Y A_۲ = (۴۲)(۱)(۱) = ۴۲ \text{ kip}$$
$$\bar{y}_۲ = \frac{۱}{۲}(۱) = ۰٫۵ \text{ in}$$



(الف)

$$M_p = ۲(R_۱ y_۱ + R_۲ y_۲) = ۲[(۱۲۶)(۱٫۵) + (۴۲)(۰٫۵)] = ۴۲۰ \text{ kip.in} \quad \blacktriangleleft$$

(ب)

$$I_۱ = \frac{۱}{۱۲} b_۱ h_۱^۳ + A_۱ d_۱^۲ = \frac{۱}{۱۲}(۳)(۱)^۳ + (۳)(۱)(۱٫۵)^۲ = ۷٫۰ \text{ in}^۴$$

$$I_۲ = \frac{۱}{۱۲} b_۲ h_۲^۳ = \frac{۱}{۱۲}(۱)(۲)^۳ = ۰٫۶۶۶۷ \text{ in}^۴$$

$$I_۳ = I_۱ = ۷٫۰ \text{ in}^۴$$
$$I = I_۱ + I_۲ + I_۳ = ۱۴٫۶۶۶۷ \text{ in}^۴ \qquad c = ۲ \text{ in}$$

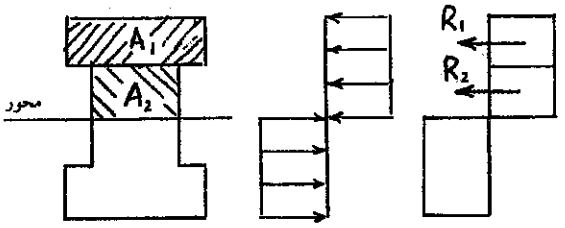
$$M_Y = \frac{\sigma_Y I}{c} = \frac{(۴۲)(۱۴٫۶۶۶۷)}{۲} = ۳۰۸ \text{ kip.in}$$

$$K = \frac{M_p}{M_Y} = \frac{۴۲۰}{۳۰۸} = ۱٫۳۶۴ \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۸۰.۴

از مسئلهٔ ۷۶.۴ $\quad E = ۲۹\times۱۰^۶$ و $\sigma_Y = ۴۲ \text{ ksi}$

$$R_۱ = \sigma_Y A_۱ = (۴۲)(۳)(۱) = ۱۲۶ \text{ kip}$$
$$y_۱ = ۱٫۰ + ۰٫۵ = ۱٫۵ \text{ in}$$
$$R_۲ = \sigma_Y A_۲ = (۴۲)(۲)(۱) = ۸۴ \text{ kip}$$
$$y_۲ = \frac{۱}{۲}(۱٫۰) = ۰٫۵ \text{ in}$$



(الف)

$$M_p = ۲(R_۱ y_۱ + R_۲ y_۲) = ۲[(۱۲۶)(۱٫۵) + (۸۴)(۰٫۵)]$$
$$= ۴۶۲ \text{ kip.in} \quad \blacktriangleleft$$

(ب)

$$I_۱ = \frac{۱}{۱۲} b_۱ h_۱^۳ + A_۱ d_۱^۲ = \frac{۱}{۱۲}(۳)(۱)^۳ + (۳)(۱)(۱٫۵)^۲ = ۷٫۰ \text{ in}^۴$$

$$I_۲ = \frac{۱}{۱۲} b_۲ h_۲^۳ = \frac{۱}{۱۲}(۱)(۲)^۳ = ۱٫۳۳۳۳ \text{ in}^۴$$

$$I_۳ = I_۱ = ۷٫۰ \text{ in}^۴$$
$$I = I_۱ + I_۲ + I_۳ = ۱۵٫۳۳۳۳ \text{ in}^۴ \qquad c = ۲ \text{ in}$$

$$M_Y = \frac{\sigma_Y I}{c} = \frac{(۴۲)(۱۵٫۳۳۳۳)}{۲} = ۳۲۲ \text{ kip.in}$$

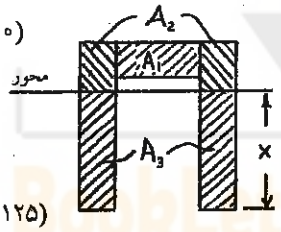
$$K = \frac{M_p}{M_Y} = \frac{۴۶۲}{۳۲۲} = ۱٫۴۳۵ \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۸۱.۴

مساحت کل $\quad A = (۲۵)(۱۰) + (۲)(۱۰)(۳۵) = ۹۵۰ \text{ mm}^۲$

$$\frac{۱}{۲}A = ۴۷۵ \text{ mm}^۲$$

$$x = \frac{\frac{۱}{۲}A}{۲b} = \frac{۴۷۵}{۲۰} = ۲۳٫۷۵ \text{ mm} = ۰٫۰۲۳۷۵ \text{ m}$$



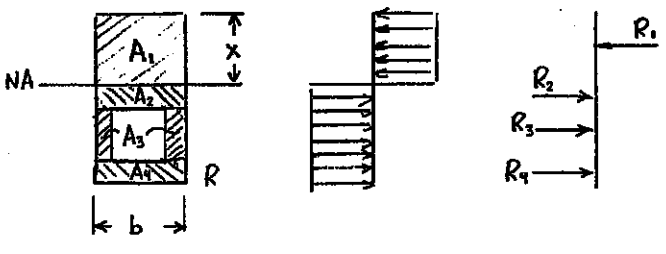
$$R_۱ = \sigma_Y A_۱ = (۲۴۰\times۱۰^۶)(۰٫۰۲۵)(۰٫۰۱۰)$$
$$= ۶۰\times۱۰^۳ \text{ N}$$
$$\bar{y}_۱ = ۳۰ - ۲۳٫۷۵ = ۶٫۲۵ \text{ m}$$
$$= ۰٫۰۰۶۲۵ \text{ m}$$
$$R_۲ = \sigma_Y A_۲ = (۲۴۰\times۱۰^۶)(۰٫۰۲۰)(۰٫۰۱۱۲۵)$$
$$= ۵۴\times۱۰^۳ \text{ N}$$
$$\bar{y}_۲ = \frac{۱}{۲}(۰٫۰۱۱۲۵) = ۰٫۰۰۵۶۲۵ \text{ m}$$
$$R_۳ = \sigma_Y A_۳ = (۲۴۰\times۱۰^۶)(۰٫۰۲۰)(۰٫۰۲۳۷۵) = ۱۱۴\times۱۰^۳ \text{ N}$$
$$\bar{y}_۳ = \frac{۱}{۲}x = ۰٫۰۱۱۸۷۵ \text{ m}$$
$$M_p = R_۱\bar{y}_۱ + R_۲\bar{y}_۲ + R_۳\bar{y}_۳$$
$$= (۶۰\times۱۰^۳)(۰٫۰۰۶۲۵) + (۵۴\times۱۰^۳)(۰٫۰۰۵۶۲۵)$$
$$+ (۱۱۴\times۱۰^۳)(۰٫۰۱۱۸۷۵)$$
$$= ۲٫۰۳۲۵\times۱۰^۳ \text{ N.m} = ۲٫۰۳ \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۸۲.۴

مساحت کل $\quad A = (۵۰)(۹۰) - (۳۰)(۳۰) = ۳۶۰۰ \text{ mm}^۲$

$$\frac{۱}{۲}A = ۱۸۰۰ \text{ mm}^۲$$

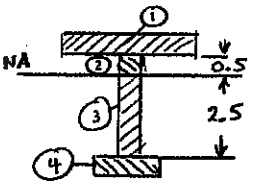
$$x = \frac{\frac{۱}{۲}A}{b} = \frac{۱۸۰۰}{۵۰} = ۳۶ \text{ mm}$$



$$A_1 = (50)(36) = 1800\ \text{mm}^2\ ,\quad \bar{y}_1 = 18\ \text{mm}$$
$$A_1\bar{y}_1 = 32.4\times10^3\ \text{mm}^3$$
$$A_2 = (50)(14) = 700\ \text{mm}^2\ ,\quad \bar{y}_2 = 7\ \text{mm}$$
$$A_2\bar{y}_2 = 4.9\times10^3\ \text{mm}^3$$
$$A_3 = (20)(30) = 600\ \text{mm}^2\ ,\quad \bar{y}_3 = 29\ \text{mm}$$
$$A_3\bar{y}_3 = 17.4\times10^3\ \text{mm}^3$$
$$A_4 = (50)(10) = 500\ \text{mm}^2\ ,\quad \bar{y}_4 = 49\ \text{mm}$$
$$A_4\bar{y}_4 = 24.5\times10^3\ \text{mm}^3$$
$$A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3 + A_4\bar{y}_4 = 79.2\times10^3\ \text{mm}^3 = 79.2\times10^{-6}\ \text{m}^3$$
$$M_p = \sigma_Y \Sigma A_i\bar{y}_i = (240\times10^6)(79.2\times10^{-6}) = 19008\ \text{N.m}$$
$$M_p = 19.01\ \text{kN.m} \blacktriangleleft$$

مسئله ۸۳.۴

مساحت کل
$$A = (4)\left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right)(3) + (2)\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4.5\ \text{in}^2$$
$$\tfrac{1}{2}A = 2.25\ \text{in}^2$$

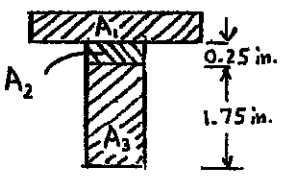


$$A_1 = 2.00\ \text{in}^2\ ,\quad \bar{y}_1 = 0.75\ ,\quad A_1\bar{y}_1 = 1.50\ \text{in}^3$$
$$A_2 = 0.25\ \text{in}^2\ ,\quad \bar{y}_2 = 0.25\ ,\quad A_2\bar{y}_2 = 0.0625\ \text{in}^3$$
$$A_3 = 1.25\ \text{in}^2\ ,\quad \bar{y}_3 = 1.25\ ,\quad A_3\bar{y}_3 = 1.5625\ \text{in}^3$$
$$A_4 = 1.00\ \text{in}^2\ ,\quad \bar{y}_4 = 2.75\ ,\quad A_4\bar{y}_4 = 2.75\ \text{in}^3$$
$$M_p = \sigma_Y(A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3 + A_4\bar{y}_4)$$
$$= (36)(1.50 + 0.0625 + 1.5625 + 2.75) = 211.5\ \text{kip.in} \blacktriangleleft$$

مسئله ۸۴.۴

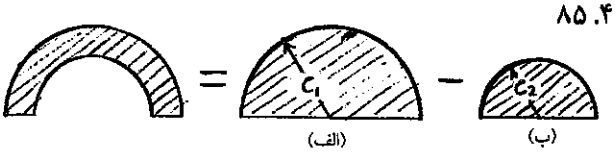
مساحت کل
$$A = (3)(0.5) + (1)(2) = 3.5\ \text{in}^2$$
$$\tfrac{1}{2}A = 1.75\ \text{in}^2 \qquad y_n = \frac{\frac{1}{2}A}{b} = \frac{1.75}{1} = 1.75\ \text{in}$$

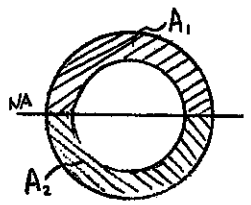
$$A_1 = (3)(0.5) = 1.5\ \text{in}^2\ ,\quad \bar{y}_1 = 0.5\ \text{in}\ ,\quad A_1\bar{y}_1 = 0.75\ \text{in}^3$$
$$A_2 = (1)(0.25) = 0.25\ \text{in}^2\ ,\quad \bar{y}_2 = 0.125\ \text{in}\ ,\quad A_2\bar{y}_2 = 0.03125\ \text{in}^3$$
$$A_3 = (1)(1.75) = 1.75\ \text{in}^2\ ,\quad \bar{y}_3 = 0.875\ \text{in}\ ,\quad A_3\bar{y}_3 = 1.53125\ \text{in}^3$$



$$M_p = \sigma_Y(A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3)$$
$$= 48(0.75 + 0.03125 + 1.53125) = 111.0\ \text{kip.in} \blacktriangleleft$$

مسئله ۸۵.۴





$$A_1\bar{y}_1 = A_a\bar{y}_a - A_b\bar{y}_b$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}c_1^2\right)\left(\frac{4c_1}{3\pi}\right) - \left(\frac{\pi}{2}c_2^2\right)\left(\frac{4c_2}{3\pi}\right)$$
$$= \frac{2}{3}(c_1^3 - c_2^3)$$
$$A_2\bar{y}_2 = A_1\bar{y}_1 = \frac{2}{3}(c_1^3 - c_2^3)$$
$$M_p = \sigma_Y(A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2) = \frac{4}{3}\sigma_Y(c_1^3 - c_2^3) \blacktriangleleft$$

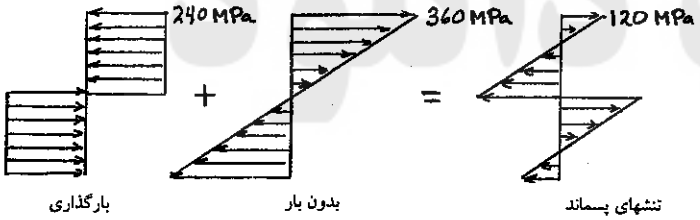
مسئله ۸۶.۴

حل مسئلهٔ ۸۵.۴ را برای به‌دست آوردن عبارت زیر ببینید
$$M_p = \frac{4}{3}\sigma_Y(c_1^3 - c_2^3)$$

داده‌ها:
$$\sigma_Y = 240\ \text{MPa} = 240\times10^6\ \text{Pa}$$
$$c_1 = 60\ \text{mm} = 0.060\ \text{m}$$
$$c_2 = 40\ \text{mm} = 0.040\ \text{m}$$
$$M_p = \frac{4}{3}(240\times10^6)(0.060^3 - 0.040^3) = 48.64\times10^3\ \text{N.m}$$
$$M_p = 48.6\ \text{kN.m} \blacktriangleleft$$

مسئله ۸۷.۴

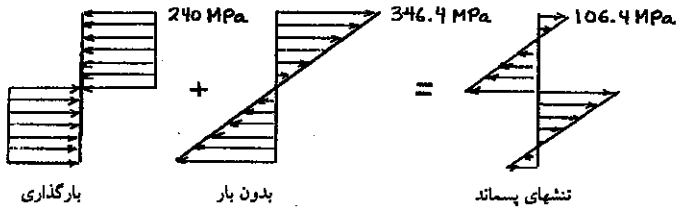
$M_p = 29.16\times10^3\ \text{N.m}$ (حل مسئله‌های ۷۳.۴ و ۷۷.۴ را ببینید)
$I = 3.645\times10^{-6}\ \text{m}^4$ $c = 0.045\ \text{m}$
$$\sigma' = \frac{M_{\max}y}{I} = \frac{M_pc}{I} \quad \text{در} \quad y = c = 45\ \text{mm}$$



$$\sigma' = \frac{(29.16\times10^3)(0.045)}{3.645\times10^{-6}} = 360\times10^6\ \text{Pa}$$
$$\sigma_{\text{پسماند}} = \sigma' - \sigma_Y = 360\times10^6 - 240\times10^6 = 120\times10^6\ \text{Pa}$$
$$\sigma_{\text{پسماند}} = 120\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

مسئله ۸۸.۴

$M_p = 27.54\times10^3\ \text{N.m}$ (حل مسئله‌های ۷۴.۴ و ۷۸.۴ را ببینید)
$I = 3.5775\times10^{-6}\ \text{m}^4$ $c = 0.045\ \text{m}$
$$\sigma' = \frac{M_{\max}y}{I} = \frac{M_pc}{I} \quad \text{در} \quad y = c$$
$$\sigma' = \frac{(27.54\times10^3)(0.045)}{3.5775\times10^{-6}} = 346.4\times10^6\ \text{Pa}$$



$$\sigma_{\text{پسماند}} = \sigma' - \sigma_Y = ۳۴۶٫۴ \times ۱۰^۶ - ۲۴۰ \times ۱۰^۶ = ۱۰۶٫۴ \times ۱۰^۶ \text{ Pa}$$

$$\sigma_{\text{پسماند}} = ۱۰۶٫۴ \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۸۹.۴

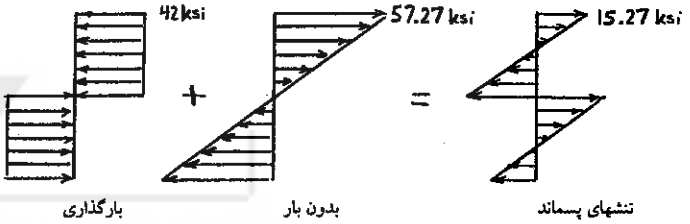
(حل مسئله‌های ۷۵.۴ و ۷۹.۴ را ببینید)

$$M_p = ۴۲۰ \text{ kip.in}$$

$$I = ۱۴٫۶۶۶۷ \text{ in}^۴, \quad c = ۲ \text{ in}$$

$$\sigma' = \frac{M_{\max} y}{I} = \frac{M_p c}{I} \quad \text{در} \quad y = c$$

$$\sigma' = \frac{(۴۲۰)(۲)}{۱۴٫۶۶۶۷} = ۵۷٫۲۷ \text{ ksi}$$



(الف) در $y = ۱ \text{ in} = \frac{۱}{۲} c$

$$\sigma' = \frac{۱}{۲}(۵۷٫۲۷) = ۲۸٫۶۴ \text{ ksi}$$

$$\sigma_{\text{پسماند}} = -۴۲ + ۲۸٫۶۴ = -۱۳٫۳۶ \text{ ksi} \quad \blacktriangleleft$$

(ب) در $y = ۲ \text{ in} = c$

$$\sigma' = ۵۷٫۲۷ \text{ ksi} \qquad \sigma_{\text{پسماند}} = -۴۲ + ۵۷٫۲۷ = ۱۵٫۲۷ \text{ ksi} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۹۰.۴

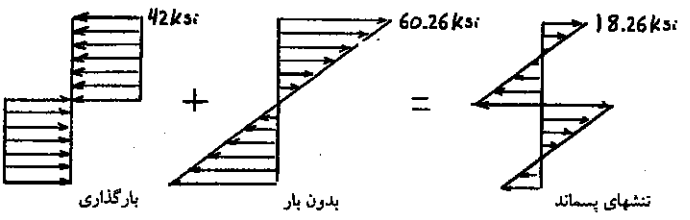
(حل مسئله‌های ۷۶.۴ و ۸۰.۴ را ببینید)

$$M_p = ۴۶۲ \text{ kip.in}$$

$$I = ۱۵٫۳۳۳۳ \text{ in}^۴, \quad c = ۲ \text{ in}$$

$$\sigma' = \frac{M_{\max} y}{I} = \frac{M_p c}{I} \quad \text{برای} \quad y = c$$

$$\sigma' = \frac{(۴۶۲)(۲)}{۱۵٫۳۳۳۳} = ۶۰٫۲۶ \text{ ksi}$$



(الف) در $y = ۱ \text{ in} = \frac{۱}{۲} c$

$$\sigma' = \frac{۱}{۲}(۶۰٫۲۶) = ۳۰٫۱۳ \text{ ksi}$$

$$\sigma_{\text{پسماند}} = -۴۲ + ۳۰٫۱۳ = -۱۱٫۸۷ \text{ ksi} \quad \blacktriangleleft$$

(ب) در $y = ۲ \text{ in} = c$

$$\sigma' = ۶۰٫۲۶ \text{ ksi} \qquad \sigma_{\text{پسماند}} = -۴۲ + ۶۰٫۲۶ = ۱۸٫۲۶ \text{ ksi} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۹۱.۴

حل مسئله ۷۳.۴ را برای توزیع کوپل خمشی و تنشی، در طول بارگذاری را ببینید.

$$M = ۲۸٫۰۸ \times ۱۰^۳ \text{ N.m} \qquad y_Y = ۱۵ \text{ mm} = ۰٫۰۱۵ \text{ m}$$

$$E = ۲۰۰ \text{ GPa} \qquad \sigma_Y = ۲۴۰ \text{ MPa}$$

$$I = ۳٫۶۴۵ \times ۱۰^{-۶} \text{ m}^۴ \qquad c = ۰٫۰۴۵ \text{ m}$$

(الف)

$$\sigma' = \frac{Mc}{I} = \frac{(۲۸٫۰۸ \times ۱۰^۳)(۰٫۰۴۵)}{۳٫۶۴۵ \times ۱۰^{-۶}} = ۳۴۶٫۷ \times ۱۰^۶ \text{ Pa} = ۳۴۶٫۷ \text{ MPa}$$

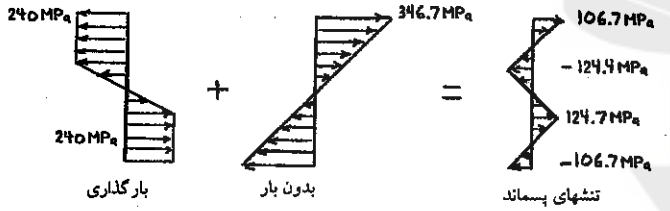
$$\sigma'' = \frac{My_Y}{I} = \frac{(۲۸٫۰۸ \times ۱۰^۳)(۰٫۰۱۵)}{۳٫۶۴۵ \times ۱۰^{-۶}} = ۱۱۵٫۶ \times ۱۰^۶ \text{ Pa} = ۱۱۵٫۶ \text{ MPa}$$

در $y = c$

$$\sigma_{\text{پسماند}} = \sigma' - \sigma_Y = ۳۴۶٫۷ - ۲۴۰ = ۱۰۶٫۷ \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

در $y = y_Y$

$$\sigma_{\text{پسماند}} = \sigma'' - \sigma_Y = ۱۱۵٫۶ - ۲۴۰ = -۱۲۴٫۴ \text{ MPa}$$



(ب)

$$\sigma_{\text{پسماند}} = ۰ \quad \therefore \quad \frac{My_۰}{I} - \sigma_Y = ۰$$

$$y_۰ = \frac{I\sigma_Y}{M} = \frac{(۳٫۶۴۵ \times ۱۰^{-۶})(۲۴۰ \times ۱۰^۶)}{۲۸٫۰۸ \times ۱۰^۳} = ۳۱٫۱۵ \times ۱۰^{-۳} \text{ m} = ۳۱٫۱۵ \text{ mm}$$

جواب

$$y_۰ = -۳۱٫۱۵ \text{ mm}, ۰, ۳۱٫۱۵ \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

(ج) در $y = y_Y$

$$\sigma_{\text{پسماند}} = -۱۲۴٫۴ \times ۱۰^۶ \text{ Pa}$$

$$\sigma = -\frac{Ey}{\rho} \quad \therefore \quad \rho = -\frac{Ey}{\sigma} = \frac{(۲۰۰ \times ۱۰^۹)(۰٫۰۱۵)}{-۱۲۴٫۴ \times ۱۰^۶} = ۲۴٫۱ \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۹۲.۴

حل مسئله ۷۵.۴ را برای توزیع کوپل خمشی و تنشی ببینید.

$$M = ۴۰۶ \text{ kip.in} \qquad y_Y = ۱٫۰ \text{ in}$$

$$E = ۲۹ \times ۱۰^۶ \text{ psi} = ۲۹ \times ۱۰^۳ \text{ ksi} \qquad \sigma_Y = ۴۲ \text{ ksi}$$

$$I = ۱۴٫۶۶۶۷ \text{ in}^۴ \qquad c = ۲ \text{ in}$$

(الف)

$$\sigma' = \frac{Mc}{I} = \frac{(۴۰۶)(۲)}{۱۴٫۶۶۶۷} = ۵۵٫۳۶ \text{ ksi}$$

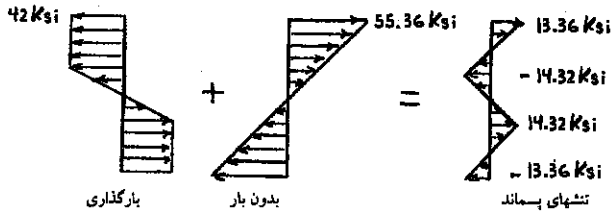
$$\sigma'' = \frac{My_Y}{I} = \frac{(۴۰۶)(۱٫۰)}{۱۴٫۶۶۶۷} = ۲۷٫۶۸ \text{ ksi}$$

در $y = c$

$$\sigma_{\text{پسماند}} = \sigma' - \sigma_Y = ۵۵٫۳۶ - ۴۲ = ۱۳٫۳۶ \text{ ksi} \quad \blacktriangleleft$$

در $y = y_Y$

$$\sigma_{\text{پسماند}} = \sigma'' - \sigma_Y = ۲۷٫۶۸ - ۴۲ = -۱۴٫۳۲ \text{ ksi}$$



$$y_C = \frac{M_0}{2EI}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 - (L)\left(\frac{L}{2}\right) + a^2\right] = -\frac{M_0}{8EI}(L^2 - 4a^2)$$

داده‌ها:

$$M_0 = 310\times10^3\,\text{N.m}\,,\quad L = 2.4\,\text{m}\,,\quad a = 0.5\,\text{m}\,,\quad E = 200\times10^9\,\text{Pa}$$

$$I = 302\times10^6\,\text{mm}^4 = 302\times10^{-6}\,\text{m}^4 \qquad EI = 60.4\times10^6\,\text{N.m}^2$$

$$y_C = -\frac{310\times10^3}{(8)(60.4\times10^6)}\left[(2.4)^2 - (4)(0.5)^2\right] = -3.05\times10^{-3}$$

$$y_C = 3.05\,\text{mm}\downarrow \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۱۶.۹

فقط قسمت ABC، و تقارن حول C را درنظر بگیرید

عکس‌العملها: $R_A = R_E = P$

شرایط مرزی:

$$[x = 0\,,\ y = 0] \qquad [x = a\,,\ y = y] \qquad \left[x = a\,,\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\right]$$

$$\left[x = \frac{L}{2}\,,\ \frac{dy}{dx} = 0\right]$$

$$0 < x < a$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = Px$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}Px^2 + C_1 \qquad (1)$$

$$EIy = \frac{1}{6}Px^3 + C_1x + C_2 \qquad (2)$$

$$[x = 0\,,\ y = 0] \longrightarrow C_2 = 0$$

$$a < x < L - a$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = Pa \qquad EI\frac{dy}{dx} = Pax + C_3$$

$$EIy = \frac{1}{2}Pax^2 + C_3x + C_4$$

$$\left[x = \frac{L}{2}\,,\ \frac{dy}{dx} = 0\right] \longrightarrow C_3 = -\frac{1}{2}PaL$$

$$\left[x = \frac{L}{2}\,,\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\right] \qquad \frac{1}{2}Pa^2 + C_1 = Pa^2 - \frac{1}{2}PaL$$

$$C_1 = \frac{1}{2}Pa^2 - \frac{1}{2}PaL$$

$$\left[x = \frac{L}{2}\,,\ y = y\right]$$

$$\frac{1}{6}Pa^3 + \left(\frac{1}{2}Pa^2 - \frac{1}{2}PaL\right)a = \frac{1}{2}Pa^3 - \frac{1}{2}Pa^2L + C_4$$

$$C_4 = \frac{1}{6}Pa^3$$

(الف) منحنی کشسان برای بخش BD

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Pax^2 + C_3x + C_4\right) = \frac{P}{EI}\left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}aLx + \frac{1}{6}a^3\right) \quad \blacktriangleleft$$

(ب) شیب در انتهای A. با قراردادن $x = 0$ در $\frac{dy}{dx}$ برای خیز در C. $x = \frac{L}{2}$ قرار دهید

$$y_C = \frac{P}{EI}\left(\frac{1}{8}aL^2 - \frac{1}{4}aL^2 + \frac{1}{6}a^3\right) = -\frac{Pa}{EI}\left(\frac{1}{8}L^2 - \frac{1}{6}a^2\right)$$

داده‌ها:

$$I = 23.9\times10^6\,\text{mm}^4 = 23.9\times10^{-6}\,\text{m}^4 \qquad E = 200\times10^9\,\text{Pa}$$

$$P = 17.5\times10^3\,\text{N} \qquad L = 2.5\,\text{m} \qquad a = 0.8\,\text{m}$$

(ب)

$$y_C = -\frac{(17.5\times10^3)(0.8)}{(200\times10^9)(23.9\times10^6)}\left\{\frac{2.5^2}{8} - \frac{0.8^2}{6}\right\}$$

$$= -1.976\times10^{-3}\,\text{m} \qquad y_C = 1.976\,\text{mm}\downarrow \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۱۷.۹

با توجه شرایط مرزی در A و B

$$w = \frac{w_0}{L^2}(4Lx - 4x^2)$$

$$\frac{dV}{dx} = -w = \frac{w_0}{L^2}(4x^2 - 4Lx)$$

$$\frac{dM}{dx} = V = \frac{w_0}{L^2}\left(\frac{4}{3}x^3 - 2Lx^2\right) + C_1$$

$$M = \frac{w_0}{L^2}\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}Lx^3\right) + C_1x + C_2$$

$$[x = 0\,,\ M = 0] \qquad 0 = 0 + 0 + 0 + C_2 \qquad C_2 = 0$$

$$[x = L\,,\ M = 0] \qquad 0 = \frac{w_0}{L^2}\left(\frac{1}{3}L^4 - \frac{2}{3}L^4\right) + C_1L + 0$$

$$C_1 = \frac{1}{3}w_0L^2$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = \frac{w_0}{L^2}\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}Lx^3 + \frac{1}{3}L^3x\right)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{L^2}\left(\frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{6}Lx^4 + \frac{1}{6}L^3x^2\right) + C_3$$

$$EIy = \frac{w_0}{L^2}\left(\frac{1}{90}x^6 - \frac{1}{30}Lx^5 + \frac{1}{18}L^3x^3\right) + C_3x + C_4$$

$$[x = 0\,,\ y = 0] \qquad 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + C_4 \qquad C_4 = 0$$

$$[x = L\,,\ y = 0]$$

$$0 = \frac{w_0}{L^2}\left(\frac{1}{90}L^6 - \frac{1}{30}L^6 + \frac{1}{18}L^6\right) + C_3L + 0$$

$$C_3 = -\frac{1}{30}w_0L^3$$

(الف) منحنی کشسان

$$y = \frac{w_0}{EIL^2}\left(\frac{1}{90}x^6 - \frac{1}{30}Lx^5 + \frac{1}{18}L^3x^3 - \frac{1}{30}L^5x\right) \quad \blacktriangleleft$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{EIL^2}\left(\frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{6}Lx^4 + \frac{1}{6}L^3x^2 - \frac{1}{30}L^5\right)$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_A = -\frac{1}{30}\frac{w_0 L^3}{EI} \qquad \theta_A = \frac{1}{30}\frac{w_0 L^3}{EI} \curvearrowright \blacktriangleleft$$

(ج) خیز در نقطه وسط. با قراردادن $x = \frac{L}{2}$ در y

$$y_C = \frac{w_0 L^4}{EI}\left\{\left(\frac{1}{90}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left(\frac{1}{30}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{30}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{w_0 L^4}{EI}\left\{\frac{1}{5760} - \frac{1}{960} + \frac{1}{144} - \frac{1}{60}\right\} = -\frac{61}{5760}\frac{w_0 L^4}{EI}$$

$$y_C = \frac{61}{5760}\frac{w_0 L^4}{EI} \downarrow \blacktriangleleft$$

مسئله ۹. ۱۸

شرایط مرزی در سمت چپ نشان داده شده است

$$\frac{dV}{dx} = -w = -w_0\left[1 - 4\left(\frac{x}{L}\right) + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$V = -w_0\left[x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right] + C_V$$

$[x = L\,,\ V = 0]$:

$$0 = -w_0[L - 2L + L] + C_V = 0 \qquad C_V = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = V = -w_0\left[x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right]$$

$$M = -w_0\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3L} + \frac{x^4}{4L^2}\right] + C_M$$

$[x = L\,,\ M = 0]$:

$$0 = -w_0\left[\frac{1}{2}L^2 - \frac{2}{3}L^2 + \frac{1}{4}L^2\right] + C_M \qquad C_M = \frac{1}{12}w_0 L^2$$

$$EI\frac{d^2y}{dx} = M = -w_0\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}\frac{x^3}{L} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{L^2} - \frac{1}{12}L^2\right]$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -w_0\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\frac{x^4}{L} + \frac{1}{20}\frac{x^5}{L^2} - \frac{1}{12}L^2 x\right] + C_1$$

$\left[x = 0\,,\ \frac{dy}{dx} = 0\right] \longrightarrow C_1 = 0$

$$EIy = -w_0\left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}\frac{x^5}{L} + \frac{1}{120}\frac{x^6}{L^2} - \frac{1}{24}L^2x^2\right] + C_2$$

$[x = 0\,,\ y = 0] \longrightarrow C_2 = 0$

(الف) منحنی کشسان

$$y = -\frac{w_0}{EIL^2}\left(\frac{1}{24}L^2x^4 - \frac{1}{30}Lx^5 + \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{24}L^4x^2\right) \blacktriangleleft$$

(ب) خیز در $x = L$

$$y_B = -\frac{w_0}{EIL^2}\left(\frac{1}{24}L^6 - \frac{1}{30}L^6 + \frac{1}{120}L^6 - \frac{1}{24}L^6\right) = -\frac{w_0 L^4}{40EI}$$

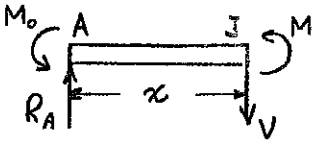
$$y_B = \frac{w_0 L^4}{40EI} \downarrow \blacktriangleleft$$

مسئله ۹. ۱۹

عکس‌العملها از نظر استاتیکی نامعین‌اند. شرایط مرزی در سمت چپ نشان داده شده است. با استفاده از جسم آزاد AJ

$$+\circlearrowleft \Sigma M_J = 0: \quad M_0 - R_A x + M = 0$$

$$M = R_A x - M_0$$



$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_A x - M_0$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}R_A x^2 - M_0 x + C_1$$

$$\left[x = L\,,\ \frac{dy}{dx} = 0\right] \qquad 0 = \frac{1}{2}R_A L^2 - M_0 L + C_1$$

$$C_1 = M_0 L - \frac{1}{2}R_A L^2$$

$$EIy = \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{1}{2}M_0 x^2 + C_1 x + C_2$$

$[x = 0\,,\ y = 0] \longrightarrow C_2 = 0$

$[x = L\,,\ y = 0]$

$$0 = \frac{1}{6}R_A L^3 - \frac{1}{2}M_0 L^2 + \left(M_0 L - \frac{1}{2}R_A L^2\right)L + 0$$

$$R_A = \frac{3}{2}\frac{M_0}{L} \uparrow \blacktriangleleft$$

مسئله ۹. ۲۰

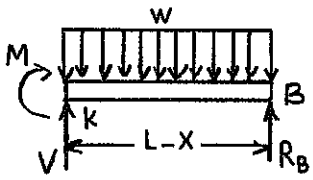
عکس‌العملها از نظر استاتیکی نامعین‌اند. شرایط مرزی در سمت چپ نشان داده شده است. با استفاده از جسم آزاد KB

$$+\circlearrowleft M_K = 0: \quad R_B(L - x) - w(L - x)\left(\frac{L - x}{2}\right) - M = 0$$

$$M = R_B(L - x) - \frac{1}{2}w(L - x)^2$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_B(L - x) - \frac{1}{2}w(L - x)^2$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}R_B(L - x)^2 + \frac{1}{6}w(L - x)^3 + C_1$$



$$\left[x = 0\,,\ \frac{dy}{dx} = 0\right]: \quad 0 = -\frac{1}{2}R_B L^2 + \frac{1}{6}wL^3 + C_1$$

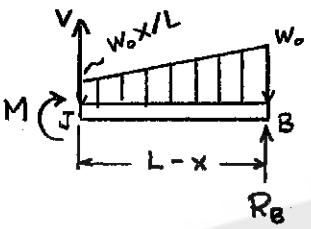
$$C_1 = \frac{1}{2}R_B L^2 - \frac{1}{6}wL^3$$

$$EIy = \frac{1}{6}R_B(L - x)^3 - \frac{1}{24}w(L - x)^3 + C_1 x + C_2$$

$$M = R_B(L-x) - \frac{w_\circ}{۶L}\left[۲L(L-x)^۲ + x(L-x)^۲\right]$$

$$= R_B(L-x) - \frac{w_\circ}{۶L}\left[۲L^۳ - ۴L^۲x + ۲Lx^۲ + xL^۲ - ۲Lx^۲ + x^۳\right]$$

$$= R_B(L-x) - \frac{w_\circ}{۶L}(x^۳ - ۳L^۲x + ۲L^۳)$$



$$EI\frac{d^۲y}{dx^۲} = R_B(L-x) - \frac{w_\circ}{۶L}(x^۳ - ۳L^۲x + ۲L^۳)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = R_B\left(Lx - \frac{۱}{۲}x^۲\right) - \frac{w_\circ}{۶L}\left(\frac{۱}{۴}x^۴ - \frac{۳}{۲}L^۲x^۲ + ۲L^۳x\right) + C_۱$$

$$EIy = R_B\left(\frac{۱}{۲}Lx^۲ - \frac{۱}{۶}x^۳\right) - \frac{w_\circ}{۶L}\left(\frac{۱}{۲۰}x^۵ - \frac{۱}{۲}L^۲x^۳ + L^۳x^۲\right) + C_۱x + C_۲$$

$$[x=\circ\,,\ y=\circ] \longrightarrow C_۲ = \circ$$

$$\left[x=\circ\,,\ \frac{dy}{dx}=\circ\right] \longrightarrow C_۱ = \circ$$

$$[x=L\,,\ y=\circ] \qquad \circ = R_BL^۳\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶}\right) - \frac{w_\circ L^۴}{۶}\left(\frac{۱}{۲۰} - \frac{۱}{۲} + ۱\right)$$

$$\frac{۱}{۳}R_B = \left(\frac{۱}{۶}\right)\left(\frac{۱۱}{۲۰}\right)w_\circ L \qquad R_B = \frac{۱۱}{۴۰}w_\circ L \uparrow \blacktriangleleft$$

مسئله ۲۳.۹

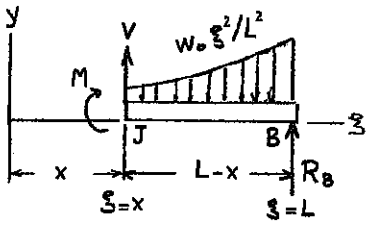
عکس‌العملها از نظر استاتیکی نامعین‌اند. شرایط مرزی در سمت چپ نشان داده شده است. با استفاده از جسم آزاد JB:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_J = \circ: \quad -M + \int_x^L \frac{w_\circ}{L^۲}\xi^۲(\xi - x)d\xi + R_B(L-x) = \circ$$

$$M = \frac{w_\circ}{L^۲}\int_x^L \xi^۲(\xi - x)d\xi - R_B(L-x)$$

$$= \frac{w_\circ}{L^۲}\left(\frac{۱}{۴}\xi^۴ - \frac{۱}{۳}x\xi^۳\right)\Big|_x^L - R_B(L-x)$$

$$= \frac{w_\circ}{L^۲}\left(\frac{۱}{۴}L^۴ - \frac{۱}{۳}L^۳x + \frac{۱}{۱۲}x^۴\right) - R_B(L-x)$$



$$EI\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{w_\circ}{L^۲}\left(\frac{۱}{۴}L^۴ - \frac{۱}{۳}L^۳x + \frac{۱}{۱۲}x^۴\right) - R_B(L-x)$$

$$[x=\circ\,,\ y=\circ]: \quad \circ = \frac{۱}{۶}R_BL^۳ - \frac{۱}{۲۴}wL^۳ + C_۲$$

$$C_۲ = -\frac{۱}{۶}R_BL^۳ + \frac{۱}{۲۴}wL^۴$$

$$[x=L\,,\ y=\circ]: \quad \circ = \circ - \circ + C_۱L + C_۲$$

$$\frac{۱}{۲}R_BL^۳ - \frac{۱}{۶}wL^۴ - \frac{۱}{۶}R_BL^۳ + \frac{۱}{۲۴}wL^۴ = \circ$$

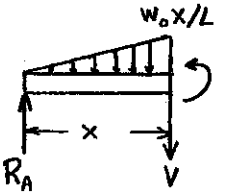
$$R_B = \frac{۳}{۸}wL \uparrow \blacktriangleleft$$

مسئله ۲۱.۹

عکس‌العملها از نظر استاتیکی نامعین‌اند. شرایط مرزی در سمت چپ نشان داده شده است.

$$w = \frac{w_\circ}{L}(L-x)$$

$$\frac{dV}{dx} = -w = -\frac{w_\circ}{L}(L-x)$$



$$\frac{dM}{dx} = V = -\frac{w_\circ}{L}\left(Lx - \frac{۱}{۲}x^۲\right) + R_A$$

$$M = -\frac{w_\circ}{L}\left(\frac{۱}{۲}Lx^۲ - \frac{۱}{۶}x^۳\right) + R_Ax$$

$$EI\frac{d^۲y}{dx^۲} = -\frac{w_\circ}{L}\left(\frac{۱}{۲}Lx^۲ - \frac{۱}{۶}x^۳\right) + R_Ax$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{w_\circ}{L}\left(\frac{۱}{۶}Lx^۳ - \frac{۱}{۲۴}x^۴\right) + \frac{۱}{۲}R_Ax^۲ + C_۱$$

$$EIy = -\frac{w_\circ}{L}\left(\frac{۱}{۲۴}Lx^۴ - \frac{۱}{۱۲۰}x^۵\right) + \frac{۱}{۶}R_Ax^۳ + C_۱x + C_۲$$

$$[x=\circ\,,\ y=\circ] \qquad \circ = \circ + \circ + \circ + C_۲ \qquad C_۲ = \circ$$

$$\left[x=L\,,\ \frac{dy}{dx}=\circ\right] \qquad -\frac{w_\circ}{L}\left(\frac{۱}{۶}L^۴ - \frac{۱}{۲۴}L^۴\right) + \frac{۱}{۲}R_AL^۲ + C_۱ = \circ$$

$$C_۱ = \frac{۱}{۸}w_\circ L^۳ - \frac{۱}{۲}R_AL^۲$$

$$[x=L\,,\ y=\circ]$$

$$-\frac{w_\circ}{L}\left(\frac{۱}{۲۴}L^۴ - \frac{۱}{۱۲۰}L^۴\right) + \frac{۱}{۶}R_AL^۳ + \left(\frac{۱}{۸}w_\circ L^۳ - \frac{۱}{۲}R_AL^۲\right)L = \circ$$

$$\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶}\right)R_A = \left(\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۲۴} + \frac{۱}{۱۲۰}\right)w_\circ L$$

$$\frac{۱}{۳}R_A = \frac{۱۱}{۱۲۰}w_\circ L \qquad R_A = \frac{۱۱}{۴۰}w_\circ L \uparrow \blacktriangleleft$$

مسئله ۲۲.۹

عکس‌العملها از نظر استاتیکی نامعین‌اند. شرایط مرزی در سمت چپ نشان داده شده است. با استفاده از جسم آزاد JB:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_J = \circ: \quad -M + R_B(L-x) + \frac{۱}{۲}w_\circ(L-x)\frac{۲}{۳}(L-x)$$

$$+\frac{۱}{۲}\frac{w_\circ x}{L}(L-x)\frac{۱}{۳}(L-x) = \circ$$

BookLetDownload
بوکلت دانلود

مسئله ۸۱.۱۱

(الف) دو نیروی P_B و P_C.

با استفاده از پیوست د، حالت ۱

$$\delta_{BB} = \frac{P_B(L/2)^3}{3EI} = \frac{1}{24}\frac{P_B L^3}{EI}$$

$$\delta_{CB} = \delta_{BB} + \frac{L}{2}\theta_B = \frac{1}{24}\frac{P_B L^3}{3EI} + \frac{L}{2}\frac{P_B(L/2)^2}{2EI}$$

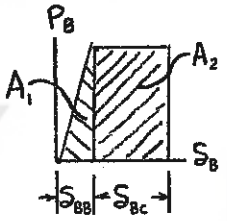
$$= \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{16}\right)\frac{P_B L^3}{EI} = \frac{5}{48}\frac{P_B L^3}{EI}$$

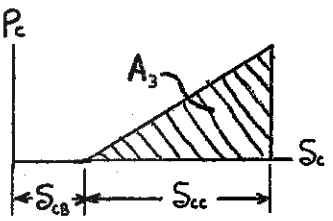
$$\delta_{CC} = \frac{1}{3}\frac{P_C L^3}{EI}$$

$$\delta_{BC} = \frac{P_C}{6EI}(3Lx^2 - x^3) = \frac{P_C}{6EI}\left(3L\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^3\right) = \frac{5}{48}\frac{P_C L^3}{EI}$$

با اعمال نخست P_B، سپس P_C

$$U = A_1 + A_2 + A_3$$





$$U = \frac{1}{2}P_B\delta_{BB} + P_B\delta_{BC} + \frac{1}{2}P_C\delta_{CC}$$

$$= \frac{1}{48}\frac{P_B L^3}{EI} + \frac{5}{48}\frac{P_B P_C L^3}{EI} + \frac{1}{6}\frac{P_C^2 L^3}{EI}$$

با $P_B = P_C = P$

$$U = \left(\frac{1}{48} + \frac{5}{48} + \frac{1}{6}\right)\frac{P^2 L^3}{EI} = \frac{7}{24}\frac{P^2 L^3}{EI}$$ ◀

روی AB:

$$M = Pv + P\left(v - \frac{L}{2}\right) = P\left(2v - \frac{L}{2}\right)$$

$$U_{AB} = \int_{L/2}^{L}\frac{M^2}{2EI}dv = \frac{P^2}{2EI}\int_{L/2}^{L}\left(4v^2 - 2Lv + \frac{1}{4}L^2\right)dv$$

$$= \frac{P^2}{2EI}\left\{\frac{4}{3}\left[L^3 - \left(\frac{L}{2}\right)^3\right] - 2L\cdot\frac{1}{2}\left[L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{4}L^2\left[L - \frac{L}{2}\right]\right\}$$

$$= \frac{P^2}{2EI}\left\{\frac{7}{6}L^3 - \frac{3}{4}L^3 + \frac{1}{8}L^3\right\} = \frac{13}{48}\frac{P^2 L^3}{EI}$$

روی BC: $M = Pv$

$$U_{BC} = \int_0^{L/2}\frac{M^2}{2EI}dv = \frac{P^2}{2EI}\int_0^{L/2}v^2 dv = \frac{P^2}{2EI}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3$$

$$= \frac{P^2 L^3}{48EI}$$

کل

$$U = U_{AB} + U_{BC} = \left(\frac{13}{48} + \frac{1}{48}\right)\frac{P^2 L^3}{EI} = \frac{7}{24}\frac{P^2 L^3}{EI}$$ ◀

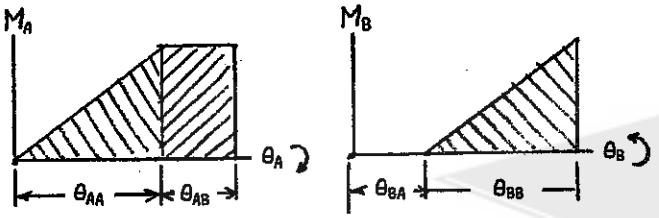
مسئله ۸۲.۱۱

(الف) کوپلهای M_A و M_B.

با استفاده از پیوست د، حالت ۷

۴ $\theta_{AA} = \frac{M_A L}{3EI}$ ۱ $\theta_{BA} = \frac{M_A L}{6EI}$

۱ $\theta_{BB} = \frac{M_B L}{3EI}$ ۴ $\theta_{AB} = \frac{M_B L}{6EI}$



نخست با اعمال M_A، سپس M_B

$$U = A_1 + A_2 + A_3$$

$$U = \frac{1}{2}M_A\theta_{AA} + M_A\theta_{AB} + \frac{1}{2}M_B\theta_{BB}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{M_A^2 L}{EI} + \frac{1}{6}\frac{M_A M_B L}{EI} + \frac{1}{6}\frac{M_B^2 L}{EI}$$

با $M_A = M_B = M_0$

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_0^2 L}{EI}$$ ◀

(ب) گشتاور خمشی $M = M_0$

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx = \frac{M_0^2 L}{2EI}$$ ◀

مسئله ۸۳.۱۱

تغییر نیرو در D، از P تا Q

عکس‌العملها

$$R_A = \frac{1}{2}(Q - P)\uparrow, \qquad R_E = \frac{1}{2}(3P + Q)\uparrow$$

انرژی کرنش

$$U = U_{AD} + U_{DE} + U_{EB}$$

تغییر مکان نقطهٔ D

$$\delta_D = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{\partial U_{AD}}{\partial Q} + \frac{\partial U_{DE}}{\partial Q} + \frac{\partial U_{EB}}{\partial Q}$$

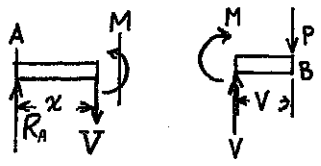
قسمت AD

$$U_{AD} = \int_0^{L/2}\frac{M^2}{2EI}dx$$

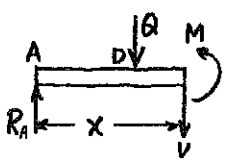
$$M = R_A x = \frac{1}{2}(Q - P)x$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{\partial U_{AD}}{\partial Q} = \int_0^{L/2}\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q}dx = 0$$



با $M = 0$، $Q = P$



قسمت DE:

$$U_{DE} = \int_{L/2}^{L}\frac{M^2}{2EI}dx$$

$$M = R_A x - Q\left(x - \frac{L}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}(Q - P)x - Q\left(x - \frac{L}{۲}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲} Q(L - x) - \frac{۱}{۲} Px$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{۱}{۲}(L - x)$$

با $Q = P$، $M = -\frac{۱}{۲} P(۲x - L)$

$$\frac{\partial U_{DE}}{\partial Q} = \int_{L/۲}^{L} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q}\,dx = -\frac{P}{۴EI}\int_{L/۲}^{L} (۲x - L)(L - x)\,dx$$

$$= -\frac{P}{۴EI}\int_{L/۲}^{L} (۳Lx - ۲x^۲ - L^۲)\,dx$$

$$= -\frac{P}{۴EI}\left(\frac{۳}{۲}Lx^۲ - \frac{۲}{۳}x^۳ - L^۲x\right)\Big|_{L/۲}^{L}$$

$$= -\frac{PL^۳}{۴EI}\left[\frac{۳}{۲} - \frac{۲}{۳} - ۱ - \left(\frac{۳}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right) + \left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۸}\right) + \frac{۱}{۲}\right]$$

$$= -\frac{PL^۳}{۹۶EI}$$

قسمت EB:

$$U_{EB} = \int_{۰}^{L/۲} \frac{M^۲}{۲EI}\,dv$$

$$M = -Pv \qquad \frac{\partial M}{\partial Q} = ۰$$

$$\frac{\partial U_{EB}}{\partial Q} = \int_{۰}^{L/۲} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q}\,dv = ۰$$

تغییر مکان نقطهٔ D

$$\delta_D = ۰ - \frac{PL^۳}{۹۶EI} + ۰ = -\frac{PL^۳}{۹۶EI} \downarrow$$

$$\delta_D = \frac{PL^۳}{۹۶EI} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۸۴.۱۱

جمع $M_۰$ در نقطهٔ D مطابق شکل نشان داده

عکس‌العملها

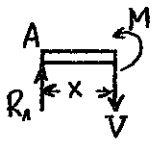
$$R_A = \frac{M_۰}{L} \uparrow, \qquad R_E = ۲P - \frac{M_۰}{L} \uparrow$$

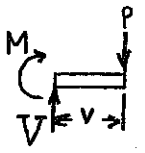
انرژی کرنش

$$U = U_{AD} + U_{DE} + U_{EB}$$

شیب در نقطهٔ D

$$\theta_D = \frac{\delta U}{\delta M_۰} = \frac{\partial U_{AD}}{\partial M_۰} + \frac{\partial U_{DE}}{\partial M_۰} + \frac{\partial U_{EB}}{\partial M_۰}$$



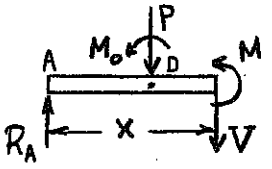


قسمت AD

$$U_{AD} = \int_{۰}^{L/۲} \frac{M^۲}{۲EI}\,dx$$

$$M = R_A x = \frac{M_۰}{L} x$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_۰} = \frac{x}{L}$$



با $M_۰ = ۰$، $M = ۰$

$$\frac{\partial U_{AD}}{\partial M_۰} = \int_{۰}^{L/۲} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_۰}\,dx = ۰$$

قسمت DE

$$U_{DE} = \int_{L/۲}^{L} \frac{M^۲}{۲EI}\,dx$$

$$M = R_A x - P\left(x - \frac{L}{۲}\right) - M_۰ = \frac{M_۰}{L} x - P\left(x - \frac{L}{۲}\right) - M_۰$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_۰} = \left(\frac{x}{L} - ۱\right)$$

با $M_۰ = ۰$، $M = -P\left(x - \frac{L}{۲}\right)$

$$\frac{\partial U_{DE}}{\partial M_۰} = \int_{L/۲}^{L} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_۰}\,dx$$

$$= -\frac{P}{EI}\int_{L/۲}^{L} \left(\frac{x}{L} - ۱\right)\left(x - \frac{L}{۲}\right)dx$$

$$= \frac{P}{۲EIL}\int_{L/۲}^{L} (L - x)(۲x - L)\,dx$$

$$= \frac{P}{۲EIL}\int_{L/۲}^{L} (۳Lx - ۲x^۲ - L^۲)\,dx$$

$$\frac{\partial U_{DE}}{\partial M_۰} = \frac{P}{۲EIL}\left(\frac{۳}{۲}Lx^۲ - \frac{۲}{۳}x^۳ - L^۲x\right)\Big|_{L/۲}^{L}$$

$$\frac{\partial U_{DE}}{\partial M_۰} = \frac{PL^۲}{۲EIL}\left[\frac{۳}{۲} - \frac{۲}{۳} - ۱ - \left(\frac{۳}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right) + \left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۸}\right) + \frac{۱}{۲}\right] = \frac{PL^۲}{۴۸EI}$$

قسمت EB

$$U_{EB} = \int_{۰}^{L/۲} \frac{M^۲}{۲EI}\,dv$$

$$M = -Pv \qquad \frac{\partial M}{\partial M_۰} = ۰$$

$$\frac{\partial U_{EB}}{\partial M_۰} = \int_{۰}^{L/۲} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_۰}\,dv = ۰$$

شیب در نقطهٔ D

$$\theta_D = ۰ + \frac{PL^۲}{۴EI} + ۰$$

$$\theta_D = \frac{PL^۲}{۴۸EI} \measuredangle \quad \blacktriangleleft$$

مسئله ۸۵.۱۱

اضافه نیروی Q در نقطهٔ D

$$U = \int_{۰}^{L} \frac{M^۲}{۲EI}\,dx$$

$$\delta_D = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_{۰}^{L} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q}\,dx = \frac{۱}{EI}\int_{۰}^{L} M\frac{\partial M}{\partial Q}\,dx$$

روی قسمت AD

$$۰ < x < \frac{L}{۲} \qquad M = -Px, \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = ۰$$

روی قسمت DB

$$\frac{L}{۲} < x < L \qquad M = -Px - Q\left(x - \frac{L}{۲}\right), \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = -\left(x - \frac{L}{۲}\right)$$

با قرار دادن $Q = ۰$

بوکلت دانلود
Booklet Download

$$\delta_D = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}(-Px)(0)\,dx + \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L}(-Px)\left[-\left(x-\frac{L}{2}\right)\right]dx$$

$$= \frac{P}{EI}\int_{L/2}^{L}\left(x^2 - \frac{L}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{P}{EI}\left\{\frac{1}{3}L^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{L}{2}\right)\frac{1}{2}L^2 + \frac{L}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right)\frac{PL^3}{EI} = \frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}\downarrow$$ ◀

مسئله ۸۶.۱۱

اضافه کوپل M_0 در نقطهٔ D

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx$$

$$\curvearrowright \theta_D = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_0}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L M\frac{\partial M}{\partial M_0}\,dx$$

روی قسمت AD:

$$0 < x < \frac{L}{2} \qquad M = -Px \qquad \frac{\partial M}{\partial M_0} = 0$$

روی قسمت DB:

$$\frac{L}{2} < x < L \qquad M = -Px - M_0 \qquad \frac{\partial M}{\partial M_0} = -1$$

با قراردادن $M_0 = 0$

$$\theta_D = \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L}(-Px)(0)\,dx + \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L}(-Px)(-1)\,dx$$

$$= \frac{P}{EI}\int_{L/2}^{L} x\,dx = \frac{P}{EI}\left[\frac{1}{2}L^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)\frac{PL^2}{EI} = \frac{3}{8}\frac{PL^2}{EI}\curvearrowleft$$ ◀

مسئله ۸۷.۱۱

با اعمال M_A در نقطهٔ A

عکس‌العملها:

$$R_A = \frac{Pb}{L} - \frac{M_A}{L}, \quad R_B = \frac{Pa}{L} + \frac{M_A}{L}$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx = \frac{1}{2EI}\int_0^a M^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_0^b M^2 dv$$

$$\curvearrowright \theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{1}{EI}\int_0^a M\frac{\partial M}{\partial M_A}\,dx + \frac{1}{EI}\int_0^b M\frac{\partial M}{\partial M_A}\,dv$$

روی قسمت AD $(0 < x < a)$

$$M = M_A + R_A x = M_A\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{Pbx}{L}, \quad \frac{\partial M}{\partial M_A} = 1 - \frac{x}{L}$$

روی قسمت DB $(0 < v < b)$

$$M = R_B v = \frac{Pav}{L} + \frac{M_A v}{L}, \quad \frac{\partial M}{\partial M_A} = \frac{v}{L}$$

با قراردادن $M_A = 0$

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^a \left(\frac{Pbx}{L}\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right)dx + \frac{1}{EI}\int_0^b \frac{Pav}{L}\frac{v}{L}\,dv$$

$$= \frac{P}{EIL^2}\left(\frac{1}{2}bLa^2 - \frac{1}{3}ba^3 + \frac{1}{3}ab^3\right)$$

$$= \frac{Pab}{6EIL^2}(3La - 2a^2 + 2b^2)\curvearrowleft$$

مسئله ۸۸.۱۱

با اعمال کوپل M_B در نقطهٔ B مطابق شکل

عکس‌العملها

$$R_A = \frac{1}{L}(M_0 + M_B)\uparrow$$

انرژی کرنش

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx$$

شیب در نقطه B

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M_B}$$

$$M = R_A x - M_0 = (M_0 + M_B)\frac{x}{L} - M_0$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_B} = \frac{x}{L}$$

با $M_B = 0$، $M = M_0\left(\frac{x}{L} - 1\right)$

$$\frac{\partial U}{\partial M_B} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_B}\,dx = \frac{M_0}{EI}\int_0^L \left(\frac{x}{L} - 1\right)\frac{x}{L}dx$$

$$= \frac{M_0}{EIL^2}\int_0^L (x - L)x\,dx$$

$$= \frac{M_0}{EIL^2}\int_0^L (x^2 - Lx)\,dx = \frac{M_0}{EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{Lx^2}{2}\right)\Big|_0^L = -\frac{M_0 L}{6EI}$$

$$\theta_B = -\frac{M_0 L}{6EI} = \frac{M_0 L}{6EI}\curvearrowleft$$ ◀

مسئله ۸۹.۱۱

با اضافه کردن Q در نقطهٔ D

عکس‌العملها

$$R_A = -\frac{Pa}{L} - \frac{1}{2}Q, \quad R_E = \frac{P(a+L)}{L} - \frac{1}{2}Q$$

$$U = U_{AD} + U_{DE} + U_{EB}, \quad \delta_D = \frac{\partial U}{\partial Q}$$

روی قسمت AD:

$$U_{AD} = \int_0^{L/2} \frac{M^2}{2EI}\,dx, \quad M = R_A x = -\frac{Pa}{L}x - \frac{1}{2}Qx$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = -\frac{1}{2}x$$

با قرار دادن $Q = 0$

بوکلت دانلود
BookLetDownload

بوکلت دانلود | مرجع دانلود جزوات آموزشی

پایان

BookLetDownload

بوکلت دانلود

جهت دانلود نسخه ی کامل محصول

روی دکمه زیر کلیک نمایید

دانلود نسخه ی کامل محصول