فهرست

مقدمه

معرفي معادلات ديفرانسيل

معادله در رياضيات وقتي با اسم خاص و صورت خاص مي آيد خود به تنهايي مسأله اي را نمايش مي دهد كه در آن مي خواهيم مجهولي را بدست آوريم.

كاربرد معادله ديفرانسيل از نظر تاريخي با معرفي مفهوم هاي مشتق و انتگرال آغاز گرديد. ساده ترين نوع معادله ديفرانسيل آن دسته از معادلاتي هستند كه مشتق تابع جواب را داشته باشيم. كه چنين محاسبه اي به ياد مشق گيري و انتگرال گيري نامعين موسوم است.

معادلات ديفرانسيل وابستگي بين توابع و مشتق هاي توابع را نشان مي دهد. كه از لحاظ تاريخي به طور طبيعي از زمان كشف مشتق به وسيله نيوتن ولايب نيتس آغاز مي شود. (قرن هفدهم ميلادي). كه با رشد سريع علم و صنعت در قرن بيستم روشهاي عددي حل معادلات ديفرانسيل مورد توجه قرار گرفتند كه توسعه و پيشرفت كامپيوتر ها در پايان قرن بيستم موجب كاربرد روش هاي تقريبي تعيين جواب معادلات ديفرانسيل در بسياري از زمينه هاي كاربردي گرديد كه باعث بوجود آمدن مباحث جديد در اين زمينه شد.

نمادها و مفاهیم اساسي

اگر تابعي از متغیر حقیقي باشد و ضابطه آن و متغیر تابع یا مقدار تابع باشد، آنگاه مشتق با یکي از نمادهاي نمایش داده مي شود. همچنین مشتق دوم، سوم،... و ام آن نیز به ترتیب با نمادهاي

نمایش داده مي شوند. اگر تابعي از دو متغیر حقیقي باشد آنگاه مشتق هاي جزئي با نمادهاي نمایش داده مي شوند. همچنین اگر آنگاه مشتق هاي جزئي با نمادهاي و یا

نمایش داده مي شوند.

همچنین داریم:

که این توابع مشتقات جزئي مرتبه دوم و مراتب بالاتر است.

همچنین براي توابع متغیر حقیقي داریم:

که فرض مي کنيم همه مشتقات جزئي تا مرتبه مورد نظر پيوسته باشند.
حال براي تابع از متغير حقيقي با مقدار حقيقي
را ديفرانسيل تابع گويند. اگر تابع از متغير
حقيقي باشد.

را ديفرانسيل كامل تابع گويند. كه در حالت خاص
اگر از دو متغير حقيقي با مقدار حقيقي باشد داريم:

معادلات ديفرانسيل معمولي و با مشتقات جزئي

يك معادله ديفرانسيل هر كدام از توابع ضمني از متغير يا متغيرهاي مستقل، متغير يا متغيرهاي تابع و مشتق هاي متغير يا متغير هاي تابع نسبت به متغير يا متغيرهاي مستقل مي تواند باشد كه حتماً بايد لا اقل يك مشتق ساده يا جزئي در آن حضور داشته باشد.
معادله ديفرانسيل
يك نوع از معادلات ديفرانسيل است كه فقط يك متغير مستقل در آن وجود دارد. و متغير تابع و
مشتقات مرتبه اول تا ام نسبت به است.
متغير مي توانند در معادلات ديفرانسيل نباشند ولي حضور لااقل يك مشتق الزامي است. معادله ديفرانسيل

يك نوع معادله است كه شامل متغير مستقل است و فقط يك متغير تابع دارد كه در آن تابعي از ها است.

براي دسته بندي معادلات ديفرانسيل مي گوييم هرگاه همه مشتق هاي ظاهر شده در معادله مشتق ساده باشند آنگاه معادله را معادله ديفرانسيل معمولي (يا ساده يا عادي) مي ناميم. اما اگر در عبارت معادله لااقل يك مشتق جزئي ظاهر شود آن را يك معادله ديفرانسيل با مشتقات جزئي يا معادله ديفرانسيل نسبي مي ناميم.

معادلات ديفرانسيل زير از جمله معادلات ديفرانسيل مهم هستند:

(معادله خطي غير همگن)؛

(معادله بزنولي)

(معادله ريكاتي)

(معادله لا پلاس)

(معادله كلرو) غير خطي؛

(معادله لاگرانژ) غير خطي؛

(معادله يك بعدي حرارتي) ثابت؛

(معادله اولر) ثابت؛

(معادله لژ اندر) ثابت؛

(معادله بسل) ثابت نا منفي؛

(معادله پواسن)

(معادله یك بعدي موج) ثابت؛

(معادله ترافیك)

(معادله لاگرانژ)

(معادله پفافي)

(معادله ارتعاش تیر) ثابت

از معادلات دیفرانسیل فوق معادلات (۳) (٤) (٥) (۷) (۸) (۱۰) (۱۱) (۱۲) معادلات دیفرانسیل معمولي و بقیه معادلات دیفرانسیل نسبي مي باشند.

اگر بخواهیم یك معادله را به صورت دیفرانسیلي بنویسیم مي توانیم به جاي عبارت را جایگزین كنیم. مثلاً براي معادله به صورت

است.

یك روش دیگر براي دسته بندي معادلات دیفرانسیل استفاده از مرتبة آنها است كه مرتبة یك معادله دیفرانسیل عبارت است از بزرگترین مرتبه مشتق یا مشتقات ظاهر شده در عبارت معادله دیفرانسیل. با توجه به معادلات فوق مي بینیم كه معادلات (۳) و(٤)و(٥)و(۷)و(۸)و(١٥)و(١٦)و(١٧) معادلات مرتبه اول و معادلات (٦)و(۹)و(۱۰)و(۱۱) و(۱۲)و(١٣)و(١٤) معادلات مرتبه دوم و معادله دیفرانسیل (١٨) یك معادله مرتبه چهارم است.

وقتي معادلات ديفرانسيل هر كدام داراي بيش از يك متغير تابع باشند در اين صورت معادلات به تنهايي ظاهر نمي شوند و مجموعه اي از آنها مورد استفاده قرار مي گيرد كه اغلب تعدادشان با تعداد متغيرهاي تابع برابر است. اين گونه معادلات را دستگاه معادلات ديفرانسيل مي ناميم.

يك روش ديگر براي دسته بندي معادلات ديفرانسيل استفاده از مفهوم خطي بودن يا غير خطي بودن معادلات ديفرانسيل است.

يك معادله ديفرانسيل معمولي يا با مشتقات جزئي داده شده را يك معادله ديفرانسيل خطي در مجموعه متغيرهاي تابعي اش گوئيم هر گاه:

۱) متغير يا متغيرهاي تابع از توان يك باشند.

۲) متغير تابع يا متغيرهاي تابع و مشتقات، ضريب متغيرهاي تابعي و مشتقات آنها نباشند.

۳) خود متغير تابعي غير خطي نباشد.

در غير اين صورت اگر هر كدام از شرطهاي بالا نقض شود معادله ديفرانسيل غير خطي است از معادلات مهم كه ارائه كرديم معادلات (۳)و(٦)و(۹)و(۱۰) و(۱۱) و(۱۲) و(۱۳) و (١٤) و (۱۸) خطي هستند و معادله (٤) (به دليل حضور) و (٥) (به دليل حضور) ، (۷) (به دليل غير خطي بودن) و (۸) (براي لا اقل غير خطي بودن)

غير خطي هستند. معادلات (١٦) و (١٧) مي توانند خطي يا غير خطي باشند.

همچنين مي توان خطي بودن را نسبت به يك عامل از معادله ديفرانسيل، مانند متغير تابع يا متغيرهاي تابع، يا مشتق از مرتبه مشخصي تعيين نمود. اين گونه معادلات نيمه خطي يا شبه خطي ناميده مي شوند. مثلاً معادله

كه يك معادله غير خطي نسبت به متغير تابع به دليل حضور و همچنين به علت حضور است را مي توان يك معادله خطي نسبت به مشتقات جزئي ناميد. يك معادله ديفرانسيل مرتبه اول خطي معمولي به صورت كلي

و معادله مرتبه دوم خطي معمولي نيز به صورت كلي

نمايش داده مي شوند. صورت كلي معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزئي مرتبه ام خطي طولاني و پيچيده است. كه در اينجا معادلات مرتبه اول و دوم خطي از آنها را نمايش مي دهيم. ولي مي توان با كمك از معادلات ديفرانسيل مراتب اول و دوم معادلات مراتب بالاتر را نيز نوشت.

معادله زير يك صورت عمومي از معادلات با مشتقات جزئي مرتبه اول خطي از متغير مستقل با يك متغير تابع است.

که در آن

توابع ضریب و تابع طرف دوم است که اگر ، صفر باشد معادله همگن خطي و در غیر این صورت معادله غیر همگن خطي نامیده مي شود. معادلات با مشتقات جزئي مرتبه دوم به صورت کلي زیر است:

که در آن

توابع متغیر حقیقي معلوم هستند که به آنها توابع ضریب معادله خطي گویند. تابع متغییر حقیقي معلوم تابع طرف دوم نامیده مي شود.

جواب یك معادله دیفرانسیل

یك تابع یا مجموعه اي از توابع (مانند یك تایي مرتب از توابع) را جواب یك معادله دیفرانسیل گوییم هرگاه با قرار دادن تابع یا توابع در عبارت معادله به جاي متغیر یا متغیرهاي تابع و مشتقات آنها معادله به یك اتحاد بر حسب متغیر یا متغیرهاي نابسته تبدیل شود. که در صورت گذاشتن مقدار در آنها این اتحاد برقرار باشد.

جواب یك معادله دیفرانسیل معمولي تابعي از متغیر حقیقي با مقدار حقیقي یا با مقدار برداري است که اگر

متغير مختلط باشد مقدار نيز مختلط خواهد بود. جواب يك معادله ديفرانسيل با مشتقات جزئي تابعي از دو يا به طور كلي متغير است كه مقدار آن حقيقي يا برداري است.

به عنوان مثال تابع جوابي از معادله ديفرانسيل معمولي زير است:

همچنين جوابي از معادله ديفرانسيل نسبي زير است:

يك معادله ديفرانسيل مي تواند داراي جوابهاي گوناگوني باشد. كه جوابي را كه براي يك معادله ديفرانسيل معمولي در تعدادي شرايط در يك نقطه يا مجموعه اي از نقاط از دامنه تابع جواب صدق مي كند و به صورت يگانه اي بدست مي آيد جواب ويژه يا خصوصي معادله ديفرانسيل است . البته ممكن است دو يا چند جواب در شرايط صدق كنند ولي يكي از آنها جواب خصوصي است .

براي يك معادله ديفرانسيل معمولي مرتبه n ام از يك متغير تابع ، تابعي را كه با n ثابت دلخواه نا بسته از يكديگر بر حسب متغير مستقل و متغير تابع بيان و همه جوابهاي خصوصي معادله با انتخاب هر مقدار مشخصي

براي ثابتها از آن بدست مي آيند جواب عمومي معادله گويند .
براي يك معادله ديفرانسيل معمومي مرتبه n ام ، جواب عمومي به صورت كلي زير است :

اگر تابع ثابت صفر جوابي از يك معادله ديفرانسيل معمولي يا با مشتقات جزئي باشد آن را جواب بديهي معادله مي ناميم. مثلاً معادله داراي جواب بديهي و معادله داراي جواب بديهي است.

براي تعيين جواب معادلات ديفرانسيل معمولاً روشهايي را بكار مي بريم كه ممكن است حل يك معادله ديفرانسيل عبارت معادله را با اعمال جبري مجاز تغيير دهيم كه با انجام اين اعمال ممكن است جوابي از معادله را ناديده انگاشته باشيم كه اين جواب را جواب حذف شده معادله مي نامند.

خانواده جواب هاي خصوصي در مورد برخي از معادلات مانند معادلات كلرو نيز معمولاً جواب معادله مي باشند.

که چنین جواب هایي را جواب تکین یا جواب غیر عادي معادله دیفرانسیل مي نامند. مثلاً براي معادله

تابع

جواب عمومي آن و تابع جواب غیر عادي آن است.

براي یك معادله دیفرانسیل جوابي از آن که همه جواب هاي معادله را در بر گیرد جواب کامل یا انتگرال کامل معادله مي خوانند. که این مفهوم براي معادلات دیفرانسیل خطي غیر همگن به کار برده مي شود.

البته هدف ما در این مجموعه حل عددي معادلات دیفرانسیل است و تنها روش هاي عددي حل معادلات را مورد بررسي قرار مي دهیم.

تفسیر هندسي جواب خصوصي و عمومي

مي دانیم اگر تابع دو متغیره پیوسته اي روي ناحیه اي از صفحه باشد آنگاه معادله ضمني

یا داراي هیچ جوابي نیست مانند

. یا یك جواب دارد مثل یا

نمایش یك منحني در صفحه است . جواب عمومي معادلات دیفرانسیل معمولي به شکل زیر هستند :

که این معادله نمایش یك منحني در صفحه است. که این موضوع براي جوابهاي عمومي به صورت

نيز قابل بيان است. اين منحني ها به پارامترهاي ثابت دلخواه وابسته
هستند و خانواده يك پارامتري از منحني ها را در صفحه نمايش مي دهند. به هر يك از اعضاي اين خانواده منحني يك منحني انتگرال يا منحني جواب معادله مي گويند.
همچنين يك جواب خصوصي معادله يا منحني اي مشخص مي شود كه از يك يا چند نقطه مشخص مي گذرد .
جوابهاي معادلات ديفرانسيل با بيش از يك متغير تابع نيز معمولا يك منحني در فضاي و يا به طور كلي در را نمايش مي دهند . به عنوان مثال معادله

كه در آن نيروي مؤثر بر نقطه مادي توابعي از متغير مي باشند و منحني هاي

مسير متحركي را نمايش مي دهد كه داراي شتاب لحظه اي است.
نمودار تابع جواب معادله فوق در فضاي قرار دارد .
از نظر هندسي جوابهاي معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزئي با توجه به وضعيت وابستگي متغير تابع به لا اقل دو متغير ، در حالت دو متغيره ، يك رويه در است .

شرایط اولیه و شرایط مرزي

تعیین جوابهاي خصوصي در معادلات دیفرانسیل معمولي و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئي همیشه به کمك مجموعه اي از شرایط امکان پذیر است که بر روي جواب اعمال مي شود یا در مسائل فیزیکي به عنوان اطلاع به ما داده میشوند که این گونه شرایط به طور کلي به دو دسته تقسیم مي شوند:

الف) شرایط اولیه

ب) شرایط مرزي (حدي یا کرانه اي)

شرایط اولیه براي یك معادله دیفرانسیل معمولي ، شرایطي بر روي جواب معادله اند که همه در یك نقطه از دامنه تابع جواب داده شده اند. این شرایط براي یك معادله دیفرانسیل معمولي مرتبه از یك متغیر تابع به صورت زیر داده مي شوند :

که در آن نقطه اي از دامنه تابع جواب مقادیر ثابت داده شده اند. این شرایط براي یك معادله مرتبه اول فقط از شرط اول تشکیل شده است. که حاکي از مختصات نقطه اي از صفحه مانند

است که جواب خصوصي مورد نظر از آن مي گذرد .

براي یك معادله دیفرانسیل مرتبه دوم فقط دو شرط اول مورد استفاده قرار مي گیرد که حاوي اطلاعاتي در مورد

منحني جواب مورد نظر است که از نقطه مي گذرد و در اين نقطه داراي ضريب زاويه است.
در مورد معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزئي آن نسبت به آن متغير مستقل داده مي شوند. شرايط مرزي مجموعه شرايطي بر روي جواب معادله اند که معمولا تعداد آنها حد اقل دو مي باشد. به طور کلي شرايطي را که به ازاي مقاديري از متغير مستقل يا متغيرهاي مستقل داده مي شوند شرايط مرزي مي گويند.
براي يك معادله ديفرانسيل مرتبه دوم معمولي شکل عمومي شرايط مرزي به صورت زير است:

که و دو نقطه از دامنه تابع جواب و ثابت هاي داده شده اند يك شکل ساده شرايط فوق به صورت زير است :

شکل عمومي شرايط مرزي براي معادلات ديفرانسيل مرتبه ام از يك متغير تابع معمولي به صورت زير است:

که در آن
نقطه داده شده و متمايز از دامنه تابع جواب مي باشند .

مثلاً براي معادلات   اين
شرايط به صورت
هستند.
بنابراين براي يك منحني انتگرال كه مي خواهيم از دو نقطه داده شده
بگذرد شرايطي از نوع مرزي بكار مي رود.
همچنين مسائل معادلات ديفرانسيل را به مسائل با شرايط مرزي و مسائل با شرايط اوليه مشخص مي كنيم.
در اين مجموعه ما به گرد آوري روشهاي عددي حل معادلات ديفرانسيل مي پردازيم و بيشتر با آناليز عددي سر و كار داريم . كه آناليز عددي شامل مطالعه ، توسعه و تجزيه و تحليل الگوريتم ها براي بدست آوردن جوابهاي عددي مسايل مختلف رياضي است ، كه به آن محاسبات علمي مي گويند .