فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

۱.۱ سیر تاریخی تحلیل پوششی داده ها

اندازه گیری کارایی به خاطر اهمیت آن و ارزیابی عملکرد یک شرکت یا سازمان همواره مـورد توجـه محققـین قرار داشته است. در سال ۱۹۵۷ فارل[۱] [v] با استفاده از روشی مانند اندازه گیری کارایی در مباحث مهندسی اقدام به اندازه گیری کارایی برای یک واحد تولیدی نمود. موردی که فارل برای اندازه گیری کارایی مد نظر قرار داده بـود شامل یک ورودی و یک خروجی بود. چنانچه مورد مد نظر دارای ورودی ها و خروجی هـای متعـدد باشـد مـدل فارل موفق نمی باشد.

چارنز[۲]، کوپر[۳]، رودز[۴] دیدگاه فارل را توسعه دادند و مدلی ارائه کردند که توانایی اندازه گیری کارایی با چنـدین ورودی و خروجی را داشت. این مدل تحت عنوان تحلیل پوششی داده ها [5]نام گرفـت و اول بـار در رسـاله دکتـری رودز و به راهنمایی کوپر به منظور ارزیابی پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مدارس ملی آمریکا در دانشـگاه کـارنگی مورد استفاده قرار گرفت و در سال ۱۹۸۷ [۳] در مقاله ای تحت عنوان «انـدازه گیـری کـارایی واحـدهای تصـمیم گیری» ارائه شد.

مدلی که توسط چازنز، کوپر و رودز ارائه شد به مدل CCR شهرت یافت. هدف از ایـن مـدل انـدازه گیـری و مقایسه کارایی نسبی واحدهای سازمانی است که دارای چند ورودی و خروجی مشابه باشند. مـدل CCR از جملـه مدل های بازده ثابت نسبت به مقیاس است[۶]. در سال ۱۹۸۴، بنکـر[۷]، چـارنز و کـوپر [۳] بـا تغییـر در مـدل هـای

---

[1] - Farrell
[2] - Charnes
[3] - Cooper
[4] - Rhodes
[5] - Data Envelopment Analysis
[6] - Constaut Return to Scale
[7] - Banker

CCR مدل جدیدی را ارائه کردند که به مدل BCC شهرت یافت. این مدل از جمله مدل های تحلیل پوششی داده هاست که به ارزیابی کارایی نسبی واحدهایی با بازده متغیر نسبت به مقیاس[1] می پردازد.

اشکال عمده ای که با گذشت زمان و در کاربردهای متعدد بر تحلیل پوششی داده ها گرفته شد، غیر قابل کنترل بودن وزن ها بود. در سال ۱۹۹۱، رول[2]، کوک[3]، گولانی[4] [۱۱] بر لزوم کراندار کردن وزن ها در تحلیل پوششی داده اشاره کرده و روشهای تجربی برای کراندار کردن وزن ها ارائه دادند.

در ادامه این کار در سال ۱۹۹۳ رول و گولانی [۱۰] علاوه بر تکمیل روش های ارائه شده قبلی روش های عملی دیگری ارائه دادند.

تحلیل پوششی داده ها همچنین تصمیم گیرنده را در تشخصی میان واحدهای تصمیم گیری کارا و ناکارا در یک گروه همگن کمک می کند. کوک و همکارانش [۵] مدل های اولویت بندی رتبه دهی واحدهای کارا ر DEA را توسعه دادند. ایده وزن های مشترک در DEA اولین بار توسط کوک و رول [y] معرفی شد. گنلی[5] و همکارانش [۸] وزن های مشترک را برای تمام واحدها به وسیله ماکزیمم سازی مجموع میزان کاریی تمام واحدها بر طبق رتبه هر واحد در نظر گرفتند. استرن[6] و همکارانش [۱۳] DR/DEA را برای فراهم کردن بهترین وزن های مشترک ورودی و خروجی های داده شده به منظور رتبه بندی کلیه واحدها در یک مقیاس یکسان گسترش دادند.

۱. ۲ تحلیل پوششی داده ها: مفهوم

تحلیل پوششی داده ها بر خلاف روشهای پارامتری که مقصود آنها بهینه کردن یک سطح رگراسیون[7] در بین تمام مشاهدات است، روی هر یک از مشاهدات بهینه سازی می کند. در تحلیل پارامتری، یک معادله رگراسیون بهینه برای امام واحدهای تصمیم گیری در نظر گرفته می شود. در صورتیکه تحلیل پوشش داده ها، اندازه کارایی هر واحد تصمیم گیری را بهینه می کند. به عبارت دیگر، به جای اینکه توجه تحلیل پوششی داده ها به میانگین ها و تخمین پارامترها باشد توجه روی تک تک مشاهدات است. روش پارامتری نیازمند یک فرم تابعی و یک معادله رگراسیون، یک تابع تولید و ... است و رم تابعی، مفروضات خاصی در مورد توزیع جملات خطا و محدودیت های زیاد دیگری لازم دارد. در عرض تحلیل پوششی داده ها تنها با این فرض که هر واحد تصمیم گیری رو یا زیر مرز واقع شود پیشینه اندازه‌کارایی هر یک از واحدهای تصمیم‌گیری را نسبت به سایر داده های موجود در دسته پیدا می‌کند.

مدل CCR، اندازه کارایی خروجی بر ورودی منفرد یک واحد تصمیم گیری را با استفاده از یک مسأله برنامه ریزی خطی کسری به حالت چند ورودی و چند خروجی تعمیم می دهد که با این برنامه ریزی، ورودی ها و خروجی های چندگانه را برای هر واحد تصمیم گیری به یک ورودی و یک خروجی مجازی[8] تبدیل می کند. کارایی کارایی فنی نسبی هر واحد تصمیم گیری، با تشکیل نسبت به مجموع وزن دار خروجی ها به مجموع وزن دار ورودی ها محاسبه می شود که در آن وزن ها (مضارب) برای ورودی ها و خروجی ها طوری تعیین می شوند که هیچ واحد تصمیم گیری نتواند کارایی بیش از یک داشته باشد.

محاسبات تحلیل پوششی داده ها برای پیشینه سازی میزان کارایی نسبی هر یک از واحدهای تصمیم گیری طراحی شده اند این بیشینه سازی مشروط بر این است که مجموعه وزنه های حاصل برای هر واحد تصمیم گیری، بایستی برای تمام واحدهای دخیل در محاسبه، شدنی باشد.

---

1 - Variable Return to Scale
2 - Roll
3 - Cook
4 - Golauny
5 - Gonly
6 - Stern
7 - Regression Plane
8 - Virtual

تحلیل پوششی داده ها، سطوح ناکارایی را برای هر یک از ورودی ها و خروجی ها مشخص می کند سطح ناکارایی با مقایسه با یک واحد تصمیم گیری مرجع یا با ترکیب محدبی از سایر واحدهای مرجع واقع در ورودی مرز کارایی، که این واحدها مقادیر ورودی یکسانی را برای تولید مقادیر خروجی یکسان یا بیشتر مصرف می کنند، تعیین می شود. این کار با افزایش برخی از خروجی ها (یا کاهش ورودی ها) جواب هایی که در قیود نامساوی صدق می کنند، بدون بدتر کردن سایر ورودی ها و خروجی ها انجام می پذیرد.

دلایل اهمیت تحلیل پوششی داده ها برای جوامع علمی عبارتند از:

- توصیف هر یک از واحدهای تصمیم گیری با یک میزان کارایی نسبی.
- تصویر کردن خاص تحلیل پوششی داده ها برای بهبود بخشی، بر اساس بهترین واحدهای تصمیم گیری مشاهده شده
- کنار گذاشته شدن روش های آماری مجرد توسط تحلیل پوششی داده ها

۱. ۳ ساختار فصول پایان نامه

در این فصل مقدمه ای بر تحلیل پوششی داده ها، کاربرد آن به عنوان ابزاری جدید برای سازماندهی و تحلیل داده ها و سیر تکاملی آن ارائه گردید. فصل دوم شامل مدل های کلاسیک تحلیل پوششی داده ها، مدل های MAJ , AP و ساعتی است و در آن اصلاحیه ارائه شده توسط چارنز، کوپر و رودز مطرح شده است. فصل دوم همچنین مشکلات انعطاف پذیری وزن ها و روش های کنترل آنها را در بردارد. در فصل سوم به بررسی و تحلیل روش تحلیل وزن های مشترک پرداخته ایم. فصل چهارم نتایج حاصل برخی از روش های مطرح شده در فصل دوم و سوم را نشان می دهد.

فصل دوم

مروری بر ادبیات موضوع

۲. ۱ مقدمه:

تحلیل پوششی یک روش برنامه ریزی ریاضی برای ارزیابی واحدهای تصمیم گیری (DMUs) است. این روش واحدهای تحت بررسی را به دو گروه «واحدهای کارا» و «غیر کارا» تقسیم می کند واحدهای کارا واحدهایی هستند که امتیاز کارایی آنها برابر با «یک» است.

واحدهای غیر کارا با کسب امتیاز کارایی قابل رتبه بندی هستند اما واحدهایی که امتیاز کارایی آنها برابر یک می باشد با استفاده از مدل های کلاسیک تحلیل پوششی داده ها قابل رتبه بندی نیستند.

در ادامه این فصل ابتدا روش های کلاسیک تحلیل پوششی داده ها را تعریف و سپس مدل هایی از تحلیل پوششی داده ها که بوسیله آن بتوان واحدهای کارا را رتبه بندی کرد، معرفی می کنیم. در ادامه علل نیاز به کنترل وزن ها مطرح و روش های کنترل آن را بیان و در نهایت روش های تعیین مجموعه مشترک وزن ها را تعریف می کنیم.

۲. ۲ مدل های کلاسیک

۲. ۲. ۱ مدل *CCR*:

این مدل یکی از پایه های ترین مدل های تحلیل پوششی داده ها (DEA) است که توسط چارنز، کوپر و رودز در سال ۱۹۷۸ بر مبنای روش فارل به منظور اندازه گیری کارایی ارائه شد. آنها اصطلاح واحد تصمیم گیری (DMU) را به منظور توضیح سازمانی که کارایی آن مطالعه می شود معرفی کردند، که به عنوان مثال می تواند یک شرکت و یا یک اداره با ورودی ها و خروجی های چندگانه باشد. در واقع یک واحد تصمیم گیری چیزی است که ورودی ها را به خروجی ها تبدیل می کند.

دل ریاضی این روش به شکل زیر است:

$$Max \qquad Zp=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r\, y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m}v_i\, x_{ip}} \qquad -۲)$$

۱)

$$s.t \qquad \frac{\sum_{r=۱}^{s}u_r\, y_{rj}}{\sum_{i=۱}^{m}v_i\, x_{ij}}\le ۱ \qquad \begin{array}{l} j=۱,۲,...,n\\ i=۱,۲,...,m\\ r=۱,۲,...,s\end{array}$$

$$u_r\ ,\ v_i\ \ge ۰$$

در ایــن مــدل xip $(i=۱,۲,...,m)$ مقــادیر ورودی اســت کــه واحــد تصــمیم گیــری p بــرای تولیــد y_{rp} $(r=۱,۲,...,s)$ یعنی مقادیر خروجی مصرف می کند، است. $v_i\, ,u_r$ به ترتیب وزن تخصیص داده شده به خروجی ها و ورودی هاست. همچنین Z_p کارایی واحد p است.

مدل های تحلیل پوششی داده ها منجمله مــدل CCR بــه دو گــروه «ورودی محــور»[۱] و «خروجــی محــور»[۲] تقسیم می شود که در ادامه این مفاهیم را بیشتر توضیح خواهیم داد.

۲. ۲. ۲ مدل *CCR* وروی محور

مدل های ورودی محور، مدل هایی هستند که با ثابت نگهداشتن خروجی ها، ورودی ها را کــاهش مــی دهنــد. شکل ریاضی این مدل به فرم زیر است:

$$Max \qquad Zp=\sum_{r=1}^{s}y_{rp}\ u_r \qquad (۲-۲)$$

$$s.t \qquad \sum_{i=1}^{m}x_{ip}\ \ v_i\ =1$$

$$\sum_{r=1}^{s}y_{rj}\ u_r-\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ \ v_i\ \le ۰ \qquad \begin{array}{l} j=۱,۲,...,n\\ i=۱,۲,...,m\\ r=۱,۲,...,s\end{array}$$

$$u_r\ ,v_i\ge ۰$$

۲. ۲. ۳ مدل *CCR* خروجی محور

نوع دیگری از مدل CCR ، مدل CCR خروجی محور، که قصد دارد خروجی ها را در زمانیکه سطوح ورودی های مشاهده شده اضافه نمی شود، ماکزیمم کند. فرم ریاضی مدل CCR خروجی محور به شکل زیر است:

[1] - Input Oriented
[2] - Out put Oriented

$$
\begin{aligned}
\min \quad & Zp=\sum_{i=1}^{m} v_i \; x_{ip} \\
s.t \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{rp} = 1 \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{rj} \geq 0 \qquad j=1,2,\ldots,n \quad i=1,2,\ldots,m \quad r=1,2,\ldots,s \\
& u_r \, , v_i \geq 0
\end{aligned}
\qquad (۳-۲)
$$

۲. ۲. ۴ مدل مضربی[۱]

روشی است که چارنز و کوپر برای تبدیل مدل نسبت CCR به یک مدل برنامه ریزی خطی به کار گرفتند. در این روش استدلال بر آن است که برای حداکثر کردن مقدار یک عبارت کافی است که مخرج کسر معادل یک عدد ثابت در نظر گرفته شده و صورت کسر حداکثر گردد. بر این اساس، مخرج کسر را معادل یک قرار داده و مدل جدید ایجاد شده را مدل مضربی می نامیم که مدل ریاضی آن به شکل زیر است:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & Z_p \\
s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ip} = 1 \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_i \leq 0 \qquad j=1,2,\ldots,n \\
& u_r \, , v_i \geq 0
\end{aligned}
\qquad (٤-۲)
$$

«مدل مضربی CCR ورودی محور»

۲. ۲. ۵ مدل پوششی[۲]

چارنز، کوپر و رودز در ساخت مدل تحلیل پوششی داده ها به یک رابطه تجربی در ارتباط با تعداد واحدهای مورد ارزیابی و تعداد ورودی ها و خروجی ها به صورت زیر رسیده اند:

(تعداد خروجی ها + تعداد ورودی ها) ۳ $\geq$ واحدهای مورد ارزیابی

عدم بکارگیری رابطه فوق در عمل موجب می شود که تعداد زیادی از واحدها بر روی مرز کارا قرار گرفته و به عبارت دیگر دارای امتیاز کارایی یک گردند لذا قدرت تفکیک مدل به این ترتیب کاهش می یابد.

از آنجا که برای هر واحد باید یک محدودیت نوشته شود، به این ترتیب مدل برنامه ریزی خطی بدست خواهد آمد که تعداد محدودیت های آن از تعداد متغیرهایش بیشتر است و از آنجا که حجم عملیات در حل سیمپلکس بیشتر وابسته به تعداد محدودیت هاست تا متغیرها، لذا مسأله ثانویه مدل فوق نیازمند حجم عملیات کمتری خواهد شد.

---

1 - Multiplier Model
2 - Envelopment Model

در صورتیکه متغیر متناظر با محدودیت $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip} = 1$ را در مدل ثانویه با θ و متغیرهای متناظر با محدودیت های $\sum_{r=1}^{m} y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} v_i \le ۰$ با λjبیان گردد، مدل ثانویه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & Min \quad y_p \\ s.t. \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \ y_{rj} \ge y_{rp} \qquad r = ۱,۲,\ldots,s \qquad (۵-۲) \\ & \theta x_{ip} - \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \ x_{ij} \ge ۰ \qquad i = ۱,۲,\ldots,m \\ & \lambda_{j\ge ۰} \quad \text{آزاد در علامت } \theta \qquad j = ۱,۲,\ldots,n \end{aligned}$$

با اندکی تغییر، مدل (۲-۵) به صورت زیر درخواهد آمد. این مدل را فرم پوششی نامند.

$$\begin{aligned} & Min \quad y_{p=\theta} \\ s.t. \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \ y_{rj} \ge y_{rp} \qquad r = ۱,۲,\ldots,s \qquad (۶-۲) \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \ x_{ij} \ge \theta xip \qquad i = ۱,۲,\ldots,m \\ & \lambda_{j\ge ۰} \quad \text{آزاد در علامت } \theta \qquad j = ۱,۲,\ldots,n \end{aligned}$$

۲. ۳ روش هایی جهت رتبه بندی واحدهای کارا

۲. ۳. ۱ روش AP

در سال ۱۹۹۳ اندرسون[۱] و پترسون[۲] [۱] روشی را برای رتبه بندی واحدهای کارا پیشنهاد کردند که امکان تعیین کاراترین واحد را میسر می سازد. با این تکنیک امتیاز واحدهای کارا می تواند از یک بیشتر شود به این ترتیب، واحدهای کارا نیز مانند واحدهای غیر کارا می توانند رتبه بندی گردند. رتبه بندی واحدهای کارا به صورت زیر انجام می پذیرد.

قدم اول . مدل مضربی (پوششی) CCR را برای واحدهای تحت بررسی حل می‌کنیم تا واحدهای کارا و غیر کارا مشخص گردند.

در صورتیکه واحد تحت ارزیابی واحد K باشد مدل مضربی و پوششی آن به صورت زیر خواهد بود:

---

1 - Anderson

2 - Peterson

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z_k = \sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rk} && (1) \\
&s.t \quad \sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ik} = 1 && (2) \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ij} \leq ۰ \quad j = 1,2,\dots,n && (3) \\
&u_r, v_i \geq 0
\end{aligned}
\qquad (۷-۲)
$$

یا

$$
\begin{aligned}
&Min \quad y_{\varphi}^{\rho} = \theta - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^{s} s_i^{+} + \sum_{i=1}^{m} s_{\bar{r}}\right) && (4) \\
&s.t \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, y_{rj} + s_i^{-} = \theta\, x_{ik} \quad i = 1,2,\dots,m && (5) \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, y_{rj} - s_r^{+} = y_{rk} \quad r = 1,2,\dots,s && (6)
\end{aligned}
\qquad (۸-۲)
$$

$\lambda_j \geq ۰ \;,\; s_r^{-} \geq ۰ \;,\; s_i^{+} \geq ۰$ آزاد در علامت θ

قدم دوم. فقط واحدهای کارایی که امتیاز آن ها در قدم اول معادل یک شده را در نظر می‌گیریم و از مجموعه محدودیت قدم اول، محدودیت مربوط به آن واحد را حذف و دوباره مدل را حل می‌کنیم.

در حالتی که واحد k واحدی کارا باشد در این قدم در مدل مضربی محدودیت های شماره (۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{j=1}^{n} u_r\, y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ij} \leq ۰ \qquad j = ۱,۲,\dots n \quad j + k$$

و در مدل پوششی محدودیت های ۵ و ۶ به صورت زیر می گردد:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_{ij} + s_i^{-} = \theta\, x_{ik} \qquad i = ۱,۲,\dots,m$$

$$j \neq k$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, y_{rj} + s_i^{+} = y_{rk} \qquad r = ۱,۲,\dots,s$$

$$j \neq k$$

از آنجا که در قدم ۲ محدودیت مربوط به واحد تحت بررسی که حد بالای آن عدد ۱ می باشد حذف می شود مقدار کارایی می توانند بیش از یک گردد. به این ترتیب واحدهای کارا با امتیازاتی بالاتر از یک رتبه بندی می گردند.

۲. ۳. ۲ مدل MAJ

در سال ۱۹۹۹ محرابیان[1]، علیرضایی[2] و جهانشاه لو[3] [۹] روش دیگری برای رتبه بندی واحدهای کارا ارائه دادند که روش AP کامل تر است.

در این دو مدل واحد ارزیابی شده از برنامه ریاضی خارج می شود لذا برنامه های زیر که هر کدام مدل ریاضی هر یک از این دو مدل است به واحد ارزیابی شده P وابسته است.

مدل MAJ

$$J_p^* = Min \quad wp + 1$$

s.t

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j x_j \le xp + wp1$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j y_j \ge y_p \qquad (۲- ۱۰)$$

$$\lambda_j \ge 0 \quad j = 1,2,\dots,n$$

مدل AP

$$a_p^* = Min \quad ap$$

s.t

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j x_j \le ap \times p$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j y_j \le y_p \qquad (۲- ۹)$$

$$\lambda_j \ge 0 \quad j = 1,2,\dots,n$$

هر چند مقادیر تابع هدف بهینه برای مدل MAJ به واحدهای اندازه گیری داده ورودی بستگی دارد، x_j ، $j = 1,2,\dots n$ ، واحد مستقل بوسیله نرمال سازی بدست می آید که این نرمال سازی از تقسیم داده ورودی بر ماکزیمم ورودی ها برای هر ورودی بدست می آید. توجه داشته باشید که برای هر مورد بطور کاملاً ناکارا زمانیکه یک واحد تصمیم گیری ماکزیمم مقدار ورودی خود را استفاده می کند، زمانیکه هیچ تولیدی ندارد، هر دو مدل AP و MAJ رتبه 0 را ایجاب نمی‌کند برای هر مورد کاملاً کارا، هر دو مدل رتبه کمتر از یک را ایجاب نمی‌کند از این‌رو a_p^* و j_p^* بین ۰ و $+\infty$ قرار می گیرند.

بطور خلاصه مدل AP در کاربرد واقعی می تواند منجر به شدن برنامه هایی گردد که بعضی از مقادیر ورودی آنها صفر است و یا در مواردی که بعضی از ورودی ها ارزش کمی دارند رتبه کارایی بزرگی به آن واحد نسبت می‌دهد در صورتیکه مدل MAJ این مشکلات را کم می کند. به طور مثال ۵ واحد تصمیم گیری (E , D , C , B , A) ، که هر کدام دو ورودی برای تولید دو خروجی با بازده به مقیاس ثابت را در نظر می‌گیریم. ما سه واحد متفاوت A که با A_1, A_2, A_3 در جدول ۱ در نظر می گیریم. واحد تصمیم گیری DMU_{A1} ، DMU_{A2} و

1 - Mehrabian
2 - Alirezaee
3 - Jahanshahloo

$DMU_{A۳}$ بطور همزمان با واحدهای تصمیم گیری (B , C , D , E) بـا مـدل CCR ، AP و MAJ مقایسـه شده اند. جدول ۲ نتایج را ارائه می دهد.

واحـــدهای تصــمیم گیری	$A_۱$	$A_۲$	$A_۳$	B	C	D	E
ورودی ۱	۲	۰	۱	٥	۱۰	۱۰	۲
ورودی ۲	۸	۸	۸	٥	٤	٦	۱۲
خروجی ۱	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۱
خروجی ۲	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۲

جدول ۱ . داده مقایسه ای

	مدل CCR	مدل AP	مدل MAJ
واحد تصمیم گیری $A_۱$	۱۰۰٪	۱٤۷ ٪	۱۲۷/٦ ٪
واحد تصمیم گیری $A_۲$	۱۰۰ ٪	نشدنی	۱۳۱/۰ ٪
واحد تصمیم گیری $A_۳$	۱۰۰ ٪	۲۰۰۰ ٪	۱۳۰/۹ ٪

جدول ۲ . نتایج

مدل AP برای ارزیابی واحد تصمیم گیری $A_۲$ منجر به نشدنی بودن مسأله مـی شـود زیـرا اولـین ورودی آن صفر است و برای ارزیابی واحد تصمیم گیری $A_۳$ منجر به بزرگترین رتبـه مـی شـود زیـرا اولـین ورودی آن ارزش نسبی کوچکی را داراست.

۲. ۳. ۳ روش ساعتی [1]

این روش در سال ۲۰۰۸ توسط ساعتی [۱۲] ارائه شد. این مدل در دو مرحله انجام می شود در مرحله اول بـا حل مسأله برنامه ریزی خطی برای هر عامل یک کران بالا برای هر یک بدست می آیـد. در مرحلـه دوم بـا فشـرده سازی فواصل وزنی از طریق حل یک مسأله برنامه ریزی خطی یک مجموعه مشترک وزن ها[2] بدست می آید.

مرحله اول: برای تعیین کران های بالا بر وزن های خروجی هر عامل مسأله زیر را در نظر می گیریم.

[1] - Saati
[2] - Common set of weight.

(۱۱-۲)

$$Max \quad u_r$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij} \le 1 \qquad \forall j$$

$$j = ۱,۲,\ldots,n$$

$$\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i \;\; x_{i\,j} \le ۰ \qquad \forall j$$

$$u_r \;, v_i \ge ۰ \qquad \forall i, r$$

مسأله مشابهی برای تعیین کران های بالای ورودی ها حاصل می شود. در مدل فوق ماکزیمم ارزش هر عامل طوری تعیین شده است که کارایی آن از یک تجاوز نکند. در این فرمول اولین محدودیت یک محدودیت نرمال کننده می باشد که عامل وزنی را نرمال می کند. در کل با حل s + m مسأله برنامه ریزی خطی کران های بالای خروجی و ورودی ها بدست می آیند. اثبات شدنی بودن و کرانداری و مثبت بودن مقادیر بهینه مدل (۲-۱۱) مهم است زیرا در غیاب این موارد روش پیشنهادی شکست پذیر خواهد بود. لذا کران های بالای ورودی و خروجی های وزنی به شکل زیر محاسبه می شود.

$$u_r^* = \frac{1}{\underset{1 \le j \le n}{Max}\{y_{rj}\}} \quad (r = 1,2,\ldots,s) \qquad , \qquad v_i^* = \frac{1}{\underset{1 \le j \le n}{Max}\{x_{rj}\}} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

(۲ – ۱۲)

مرحله دوم: با شروع از یک مدل کراندار، یک مجموعه مشترک وزن ها می تواند به وسیله بیان انحراف از هر کران بصورت کسری از دامنه میانی کران بالا و پایین بدست آید. با فرض انحراف یکسان از کران های میان همه واحدهای تصمیم گیری داریم:

$$Max \quad \Phi$$

$$s.t$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0 \qquad \forall_j$$

$$OL_r + \Phi(OU_r - OL_r) \le u_r \le OU_r - \Phi\,(OU_r - OL_r) \;\; \forall_r$$

$$IL_i + \Phi\,(IU_i - IL_i) \le v_i \le IU_i - \Phi\,(IU_i - IL_i) \qquad \forall_i$$

فشرده‌سازی فواصل وزنی به وسیله نسبت طول هر فاصله انجام می‌شود زیرا کرانهای بالای وزن عوامل یکسان نیستند. با بکارگیری روشهای ارایه شده جهت محاسبه کران بالا و قراردادن کرانهای پایین وزن عوامل مساوی با صفر زیر نتیجه می‌شود.

$$Max \qquad \Phi$$

s.t (۱۳-۲)

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0 \qquad \forall_j$$

$$\phi U_r \le u_r \le (۱-\phi) U_r \qquad \forall_r$$

$$\phi V_i \le v_r \le (۱-\phi) V_i \qquad \forall_i$$

که U_r و V_i در (۲-۱۲) محاسبه شده اند. کارایی هر واحد تصمیم گیری به شکل زیر بدست می آید:

$$e_j = \frac{\sum_{r=۱}^{s} u_r^* y_{rj}}{\sum_{i=۱}^{m} v_i^* x_{ij}} \qquad \forall_j$$

که u_r^* و v_i^* جواب های بهینه (۲-۱۳) هستند. در مواردی که تمامی واحدهای تصمیم گیری ناکارا هستند تمام وزن های خروجی را تا زمانیکه یک واحد تصمیم گیری کارا بدست می آید می توان افزایش داد (یا وزن های ورودی را کاهش داد) یک روش چنین کاری جایگزینی زیر است:

$$M_r = \frac{u_r^*}{e} \qquad N_i = v_i^* \qquad \forall_{r,i}$$

$$e = \underset{1 \le j \le n}{Max} \{e_j\}$$

وزن های نتیجه شده M_r و N_i مجموعه مشترک وزنی پیشنهادی هستند. پس از به وجود آمدن مجموعه مشترک وزن ها کارایی هر واحد تصمیم گیری به شکل زیر تعریف می شود:

$$e_j = \frac{\sum_{r=۱}^{s} M_r y_{rj}}{\sum_{i=۱}^{m} N_i x_{ij}} \qquad \forall_j$$

۲. ۴ اصلاحیه ای برای مدل CCR

یکسال پس از نشر مقاله چارنز، کوپر و رودز (۱۹۷۸) در سال ۱۹۷۹ [۴] اصلاحیه ای توسط ایشان برای مدل CCR مطرح شد. در این مقاله، در مسأله (۲-۱)، شرط نامنفی بودن متغیرها، به شرط اکیداً مثبت تبدیل شد. بطور مثال جدول زیر را در نظر می‌گیریم.

	خروجی	ورودی ها	
	y	x_1	x_2
واحد تصمیم گیری ۰	۱	۲	٦
واحد تصمیم گیری ۱	۱	۲	۵

با فرض مسأله برنامه ریزی ریاضی زیر

$$Max \qquad h_0 = \frac{1u}{2v_1 + 6v_2}$$

$$s.t \qquad 1 \geq \frac{1u}{2v_1 + 6v_2}$$

$$1 \geq \frac{1u}{2v_1 + 5v_2}$$

در صورتیکه $u \geq 0 \,,\; v_1 \,,\, v_2 \geq 0$ واحد تصمیم گیری o با اینکه ورودی دوم آن بزرگتر از ورودی دوم واحد تصمیم گیری ۱ است همچنان کارا تشخیص داده می شود. لذا اصلاحیه ارائه شده بر مدل CCR این مشکلات را رفع می کند.

۲. ۵ نتایج انعطاف پذیری وزن ها و روش های کنترل آن

کارایی نسبی یک واحد تصمیم گیری توسط مدل (۲ -۱) اصلاح شده تعیین می گردد (با قیود اکیداً مثبت). لذا وزن های انتخابی به جز غیر صفر بودنشان دارای این محدودیت می باشند که باید طوری انتخاب شوند که کارایی هر واحد تصمیم گیری بیشتر از یک نگردد.

نتیجه این انعطاف پذیری در تعیین وزن های ورودی و خروجی آن است که هنگامی که یک واحد تصمیم گیری غیر کارا تشخیص داده می شود نمی توان از انتخاب وزن ها مطمئن بود. لذا انعطاف پذیری وزن ها سبب می شود وزن های مختلفی را در محاسبه کارایی نسبی واحدهای مختلف بدست آید. از جمله مشکلات دیگر انعطاف پذیری وزن ها در DEA آن است که مدل ارزیابی کننده قادر است چنان وزن های پایینی را برای برخی از ورودی ها یا خروجی ها اختصاص دهد که به طور مؤثری آنها را از واحدهای تصمیم گیری حذف کند.

همچنین در برخی از حالات ممکن است بعضی از ورودی ها و خروجی ها در ارزیابی واحدهای تصمیم گیری اساسی تر از سایرین باشند بدین معنا که نشانگر قسمت های مهم و فعال واحد تصمیم گیری هستند. برای رفع این مشکلات روش هایی برای کنترل وزن ها توسط گولانی، کوک [۱۴] و ساعتی [۱۲] ارائه شده است:

مدل ۱: مدل (۲-۱) اصلاح شده را اجرا و ماتریس وزن ها را می یابیم و کران های مناسب را از این نتایج انتخاب می کنیم برای این منظور می توان وزن های خیلی کوچک و خیلی بزرگ را از نتایج کنار گذاشته و کران های مناسب را از بین باقیمانده وزن ها انتخاب کنیم و یا کران ها را به گونه ای انتخاب کنیم که درصدی معین از نتایج بین کران ها واقع باشند.

مدل ۲: مجدد مدل (۲-۱) اصلاح شده را اجرا و نسبت قابل قبولی از تغییرات را برای هر وزن مشخص کرده و کران ها را با این نسبت اعمال می کنیم، در این مدل درجه آزادی دیگری وجود دارد (تعیین موقعیت کران با نسبت تعیین شده) که تحلیل گر را قادر می سازد که عقیده خود را در مورد اهمیت نسبی عوامل مختلف بیازماید.

مدل ۳: مدل (۲-۱) اصلاح شده را با تغییراتی، به شکل زیر تبدیل می کنیم:

$$Max \qquad ha=\frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rp}\, y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ip}\, x_{ip}}$$

$$\begin{aligned} s.t \qquad & \sum_{r=1}^{s} u_{rp}\, y_{rj}-\sum_{i=1}^{m} v_{ip}\, x_{ij} && \forall j \\ & oL_r \;\le\; u_{rp} \;\le\; OU_r && \forall_r \\ & IL_i \;\le\; v_{ip} \;\le\; IU_i && \forall_i \end{aligned} \qquad (۱٤-۲)$$

u_{rp} و v_{ip} وزن های عوامل p امین واحد تصمیم گیری، $IU_i\, ,OL_r\, ,OU_r$ و IL_r به ترتیب کـران هـای بالا و پایین مثبت برای وزن های خروجی و ورودی هستند. توجه داشته باشید با اینکه ممکن اسـت مجموعـه وزن های یک واحد تصمیم گیری با دیگری متفاوت باشد، ولی کران ها بـرای تمـام واحـدهای تصـمیم گیـری یکسـان هستند.

فرمول بندی خطی متناظر با مدل برنامه ریزی کسری فوق بصورت زیر می باشد:

$$Max \qquad E_p=\sum_{r=1}^{s} M_{rp}\;\, y_{rp}$$

$$\begin{aligned} s.t \qquad & \sum_{i=1}^{m} N_{ip}\;\, x_{ip}=1 && \\ & \sum_{r=1}^{s} N_{rp}\, y_{rj}-\sum_{i=1}^{m} N_{ip}\, x_{ij}\le 0 && \forall j \\ & T_p\, oL_r \;\le\; M_{rp} \;\le T_p\; OU_r && \forall_r \\ & T_p\, IL_i \;\le\; N_{ip} \;\le T_p\; IU_i && \forall_i \end{aligned} \qquad (۱۵-۲)$$

$Tp=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{m} v_{ip}\, x_{ip}}$ عامل تبدیل برای p- امین واحد تصمیم گیری است، به طـوری کـه $M_{rp}=T_p w_{rp}$ و $N_{ip}=T_p\, v_{ip}$.

این فرمول بندی، مدل را قادر می سازد تا با کران های مشترک، مجموعـه وزن هـای بسـیار مناسـب را بـرای واحدهای تصمیم گیری تعیین کند. به هر حال، در اعمال این کران ها آزادی کاملی وجود ندارد و بایـد در انتخـاب آنها دقت شود تا یک جواب شدنی بدست آید.

مدل ۴: حتی اگر هیچ اطلاعاتی در مورد اهمیت نسبی عوامل مختلف وجود نداشته باشـد بـاز هـم مـی تـوان میزان تغییرات وزن هر عامل را کنترل کرد. برای این منظور الگوریتم زیرا را به کار می بریم:

مدل (۲-۱) اصلاح شده را اجرا و ماتریس وزنی را محاسبه کرده و در بین تمام واحـدهای تصـمیم گیـری وزن های میانگین Mr و Ni را برای هر عامل تعیین می‌کنیم.

میزان تغییر مجاز وزنی را برای عامل یکسانی تعیین می‌کنیم. (نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار d : 1)

به مدل (۲-۱) اصلاح شده قیود کراندار زیر را (هنگام ارزیابی واحد تصمیم گیری j ام) برای هر وزن Mrj اضافه کنید.

$$1- \frac{2M_r}{1+d} \leq M_{rj} \leq \frac{2dM_r}{1+d}$$

قیود مشابهی را سوی وزنهای ورودی بکار ببرید.

مدل مقید شده را حل کنید.

در این روش برای بهبود بخشیدن نتایج ابتدا بایستی هر بردار وزنی را با کنار گذاشتن تعداد مشخصی از کمترین و بیشترین مقدار تعدیل نموده و سپس میانگین مقادیر باقیمانده را حساب کنیم.

مدل ۵: روش دیگری برای کنترل وزن های عوامل، اعمال نسبتهایی برای وزن هاست. دسته ای از این قیود به شکل زیر می باشند:

$$\underline{\alpha i}\, N_1 \leq N_i \leq \overline{\alpha i}\, N_1 \qquad \forall_i$$

$$\underline{\beta r}\, M_1 \leq M_r \leq \overline{\beta r}\, M_1 \qquad \forall r$$

توجه داشته باشید که نسبت های $\frac{\overline{\alpha i}}{\underline{\alpha i}}$ $(\frac{\overline{\beta r}}{\underline{\beta r}},)$ مانند پارامتر d به کار می روند. دسته ای دیگر از این قیود با بستن کران هایی روی وزن های عوامل ورودی نسبت به وزن های خروجی حاصل می شود. یعنی :

$$w_i\, M_1 \leq N_i \leq \pi_i\, M_1$$

۲. ۶ مجموعه مشترک وزن ها[1] *CSW* :

انعطاف پذیری، DEA را در تعیین وزن های ورودی و خروجی هر واحد تصمیم گیری محدود می کند. کران ها بر وزن ها محدودیت های اضافی را تشکیل می دهند بطوریکه کارایی بدست آمده با روشهای کراندار بدست آمده کمتر یا مساوی کارایی بدست آمده با مدل های غیر کراندار است. زمانیکه انعطاف پذیری محدود می شود مجموعه مشترک وزن ها (CSW) برای ارزیابی واحدهای تصمیم گیری به کار می رود.

تفاوت میان کارایی اندازه گیری شده توسط مجموعه مشترک وزن ها و یک مجموعه خاص از وزن ها بر تأثیرات شرایط محیطی که یک واحد تصمیم گیری تحت آن عمل می کند دلالت دارد.

مفهوم مجموعه مشترک وزن ها به نوع جدیدی از تحلیل حساسیت در تحلیل پوششی داده ها می انجامد که توسط آن واحدهای تصمیم گیری کارای بسیار قوی مشخص می شوند.

مانند روش کران دار کردن، روش های متنوعی برای تعیین مجموعه مشترک وزن ها وجود دارد که در همه آنها بایستی دو اصل زیر رعایت شود.

۱) عناصر مجموعه مشترک وزن ها بایستی میان کران های اعمال شده باقی بماند.

۲) تا حد ممکن بخش زیادی از اجزاء واحد تصمیم گیری را تعبیر کند.

دومین اصل بر این امر دلالت می کند که با استفاده از مجموعه مشترک وزن ها حداقل یک واحد تصمیم گیری به کارایی (یک) ۱دست خواهد یافت.

چهار نمونه از روش های موجود برای تعیین یک مجموعه مشترک وزن ها عبارتند از:

۲. ۶. ۱ مدل ۱: اجرای مدل (۲ -۱) اصلاح شده و گرفتن میانگین کران های بالا و پایین ویژه هر وزن (یا میانگین کل وزن های بدست آمده).

[1] - Common set of weights (CSW)

۲. ۶. ۲ مدل ۲: کاربرد بعضی از تکنیک های وزن های برای نتایج غیر کراندار. به عنوان مثال فرض کنید u_{rj} وزن عامل r موقع ارزیابی واحد تصمیم گیری $(DMU_j)j$ ، Mj کارایی آن، $\overline{M}_r$ وزن مشترک برای r باشد که به روش زیر حاصل می گردد:

$$\overline{M}_r = \frac{\sum_{j=1}^{n} M_j u_{rj}}{\sum_{j=1}^{n} Mj}$$

۲. ۶. ۳ مدل ۳: در این روش عامل ها را به ترتیب اهمیتشان نسبت به کران ها مرتب می کنیم، کمترین وزن را به کم اهمیت ترین عامل ها و بیشترین وزن ها را به مهمترین عامل ها اختصاص می دهیم که این را می‌توان با اجرای مدلی به فرم زیر انجام داد:

$$Max \quad \overline{M}_r \qquad (۲-۱۶)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} \overline{M}_r \; y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \overline{N}_i \; x_{ij} \le 0 && \forall j \\ & OL_r \le \overline{M}_r \le OU_r && \forall_r \\ & IL_i \le \overline{N}_i \le IU_i && \forall_i \end{aligned}$$

که $\overline{N}_i$, $\overline{M}_r$ تشکیل دهنده مجموعه مشترک وزن ها هستند. برای برقراری شرط دوم $\overline{M}_r$ پیشینه و $\overline{N}_i$ کمینه می شود. وقتی مدل های ۱ یا ۲ (و نظایر آنها) اجرا شدند مدل (۲-۱۶) را می توان به جهت محک شدنی بودن مجموعه معرفی شده وزن ها به کار برد و از برقراری شرط دوم مطمئن شد.

۲. ۶. ۴ مدل ۴: روشی دیگر برای تعیین یک مجموعه مشترک وزن ها، یافتن مقادیر مرکزی برای تمام وزن‌ها است. در این روش از یک مدل مقید شروع می کنیم. در این مدل، قیود در بهینگی بیانگر انحراف وزن عامل از هر یک از کران ها هستند. این مدل را می توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$Max \quad \phi \qquad (۲- ۱۷)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} M_r \; y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} N_i \; x_{ij} \le 0 \\ & OL_r + \phi(OU_r - OL_r) \le M_r \le OU_r - \phi(OU_r - OL_r) && \forall_r \\ & IL_i + \phi(IU_r - IL_i) \le N_i \le IU_i - \phi(IU_i - IL_i) && \forall_i \end{aligned}$$

در حالتی که $\phi = ۰/۵$ (یعنی تمام وزن ها در وسط دامنه خود قرار دارند) و هیچ یـک از واحـدهای تصـمیم گیری کاملاً کارا نیستند، تمام وزن های خروجی را تا زمانیکه یک واحد تصمیم گیری کارا حاصل شود می توان با یک نسبت افزایش داد (و یا وزن های ورودی را کاهش داد).

فصل سوم

تحلیل وزن های مشترک[1] (CWA)

۳. ۱ مقدمه:

تحلیل پوششی داده ها تصمیم گیرنده ها را در تشخیص میان واحدهای تصمیم گیری کارا و ناکارا در یکگروه همگن کمک می کند. هر چند نمی تواند اطلاعات بیشتری درباره واحدهای تصمیم گیری کارا تهیه کند در این فصل روشی برای تعریف یک مجموعه مشترک وزن ها ارائه می دهیم که برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیری کارا استفاده می شود.

ابتدا مفهوم چارچوب تحلیل پوششی داده ها (DEA) را مرور می کنیم. در قسمت بعدی یک الگوریتم دو مرحله ای را نشان می دهیم که مرحله اول آن یک مدل برنامه ریزی خطی برای یافتن یک مجموعه از وزن های مشترک برای همه واحدهای تصمیم گیری کاراست. در مرحله دوم یک روش بهینه را از بین روش های تولید شده مرحله اول انتخاب می کنیم. در ادامه مثال های واقعی برای آزمایش کردن روش مان در نظر می گیریم و در نهایت در خصوص توسیع رتبه بندی واحدها تصمیم گیری کارا به همه واحدهای تصمیم گیری بحث می کنیم.

۳. ۲ چار چوب تحلیل پوششی داده ها *(DEA)*:

تحلیل پوششی داده ها در آغاز به عنوان یک روش برای تعیین کارایی نسبی واحدهای سازمانی تعریف شد. مسأله اولیه معمولاً اینچنین توضیح داده می شود: n واحد تصمیم گیری تعیین شده با m اندیس ورودی و s اندیس خروجی. برای هر واحد تصمیم‌گیری، بطور مثال واحد تصمیم گیری j ام (DMUj) ، مقادیر ورودی و خروجی به ترتیب به صورت $(x_{1j}, x_{2j},...x_{mj})$ و $(y_{1j}, y_{2j},...y_{sj})$ نشان داده می شود. ما می توانیم مسأله برنامه ریزی کسری زیر (۳-۱) یا برنامه ریزی خطی (۳-۲) را به منظور بدست آوردن مقدار تابع هدف (کارایی

[1] - Common Weight Analysis

نســـبی (θ_p^*) و یـــک مجموعـــه نســـبی از وزن هـــای ورودی $(v_{ip}, i = 1,2,...,m)$ و وزن هـــای خروجـــی $(u_{rp}, r = 1,2,...,s)$ حل کنیم . ε یک ثابت بی نهایت کوچک ارشمیدسی مثبت است که به منظور جلـوگیری از نمایش صفر در وزن ها بکار برده می شود.

$DEA - FP:$

(۱-۳)

$$\theta_P^* = Max \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rp} u_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} x_{ip} v_{ip}}$$

$$s.t \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj} u_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} v_{ip}} \le 1 \qquad j = 1,...,n$$

$$u_{rp} \ge \varepsilon > 0 \qquad r = 1,2,...,s$$
$$v_{ip} \ge \varepsilon > 0 \qquad i = 1,2,...,m$$

$DEA - LP:$

$$\theta_P^* = Max \sum_{r=1}^{S} y_{rp} u_{rp} \qquad (۲-۳)$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ip} v_{ip} = 1$$

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} v_{ip} + \sum_{r=1}^{S} y_{rj} u_{rp} \le 0 \qquad j = 1,2,...,n$$

$$u_{rp} \ge \varepsilon > 0 \qquad r = 1,2,...,s$$
$$v_{ip} \ge \varepsilon > 0 \qquad i = 1,2,...,m$$

ادعا می کنیم که واحد تصمیم گیری p ام (تابع هدف) بطور نسـبی کاراسـت و میـزان کـارایی آن $\theta_p^* = 1.0$ می باشد. لذا یک واحد تصمیم گیری کارا نامیده می شود. برای نشان دادن مجموعه واحدهای تصمیم گیری کـارا، مجموعه E را به صورت $E = \left\{ j \middle| \theta_j^* = 1.0,\ j = 1,2,...,n \right\}$ را تعریف می کنیم. تصمیم گیرنده ها همیشـه

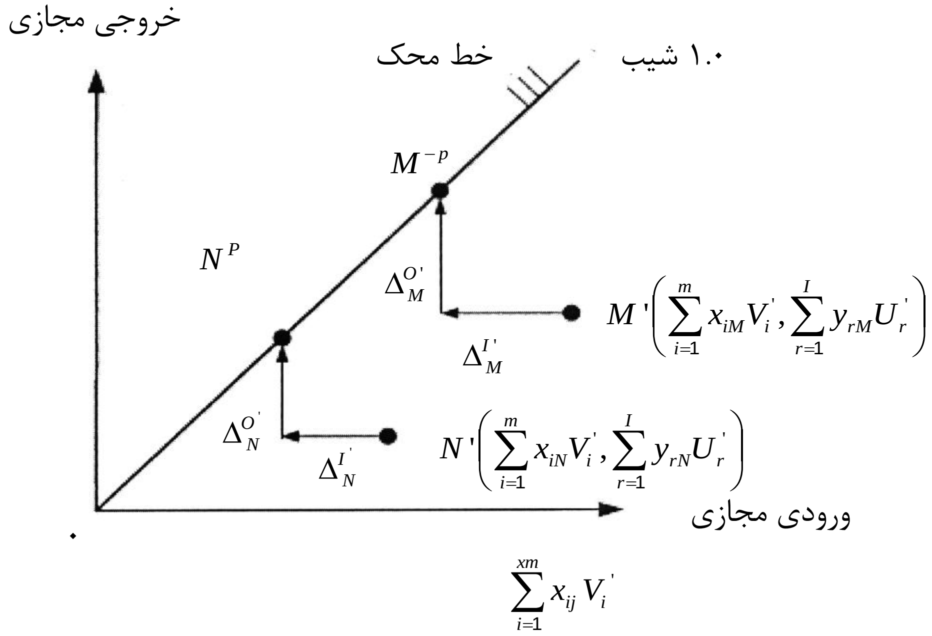
در چگونگی انجام مقایسه بیشتر در میان واحدهای تصمیم گیری مجموعه E با مشکل مواجه هستند. لذا بهتر است که تصمیم گیرنده ها تنها بر واحدهای تصمیم گیری کارا متمرکز شوند.

۳. ۳ روش تحلیل وزن های مشترک *(CWA)*:

۳. ۳. ۱ گسترش:

در مدل های متعارف تحلیل پوششی داده ها (DEA) ، هر واحد تصمیم گیری به نوبه خود رتبه کارایی تحت شرایطی که کارایی هیچ یک از واحدهای تصمیم گیری نباید بیش از ۰ ، ۱ باشد، ماکزیمم می کند. تصمیمی گیرنده معمولاً رتبه کارایی ماکزیمم را به عنوان سطح محک مشترک بر واحدهای تصمیم گیری به طور حسی ۰ ، ۱ در نظر می گیرند. ما نیز در اینجا از مزیت سطح محک استفاده می کنیم تا به ما در توضیح مشخص مفهوم ایجاد وزن های مشترک کمک می کند.

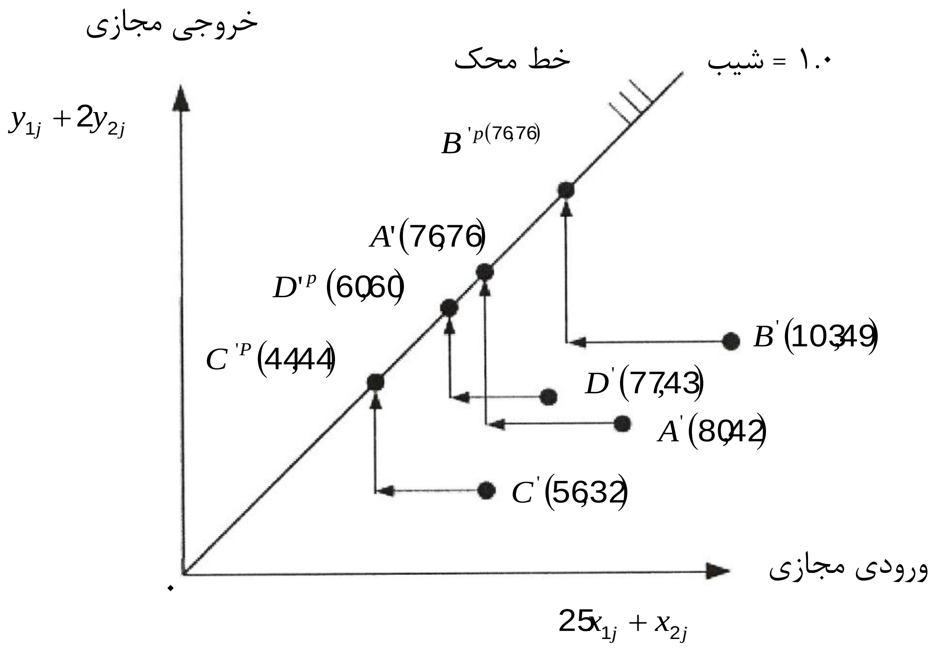
در شکل (۱) محورهای عمودی و افقی به گونه ای قرار گرفته اند تا خروجی مجازی (که وزن آن معادل حاصل جمع s خروجی است) و ورودی مجازی (که وزن آن معادل حاصل جمع m ورودی است) به ترتیب مشخص شود. بنابر تعریف رتبه کارایی، سطح محک عبارت است از خط مستقیمی با شیب ۰ ، ۱ ، که متغیرهای تصمیم وزن های مشترک را به ترتیب برای شاخص خروجی r ام و ورودی i ام مشخص می کند. علامت متغیر تصمیم گیری با اندیس بالایی " ' " نشان داده می شود که حاکی از ارزش تعیین شده اختیاری است. اگر برای هر یک از دو واحد تصمیم گیری، واحد تصمیم گیری M ام و واحد تصمیم گیری N ام ، مجموعه وزن های $U'_r\,(r=۱,۲,...,s)$ و $V'_i\,(i=1,2,...m)$ را داشته باشیم، آنگاه مختصات نقاط M' و N' در شکل (۱) عبارت است از $\sum_{r=۱}^{s} y_{rM}\,U'_r$, $\sum_{i=۱}^{m} x_{iM}\,v'_i$ و $\sum_{r=۱}^{s} y_{rN}\,U'_r$, $\sum_{i=۱}^{m} x_{iN}\,v'_i$ شکاف های مجازی بین نقاط M' و M'^p در محورهای افقی و عمودی به ترتیب با $\Delta_M^{I'}$ و $\Delta_M^{o'}$ نشان داده می شود همچنین شکاف های مجازی کلی $\Delta_M^{I'}+\Delta_M^{o'}+\Delta_N^{I'}+\Delta_N^{o'}$ نسبت خط محک وجود دارد. فرض کنید که نماد یک متغیر تصمیم با اندیس بالایی "*" حاکی از مقدار مطلوب متغیر باشد. می خواهیم مجموعه وزن های بهینه $U_r^*\,(r=۱,۲,...,s)$ و $V_i^*\,(i=1,2,...,m)$ را تعیین کنیم، به گونه ای که نقاط M^* و N^* هر دو در زیر خط محک بتوانند تا آنجا که ممکن است به نقاط تصویری شان M^{*p} و N^{*p} بر روی خط محک نزدیک شوند.



شکل (۱) . تحلیل شکاف که واحد تصمیم گیری را زیر خط محک مجازی نشان می دهد.

جدول (۱). یک مثال ساده برای نشان دادن CWA

شاخص					وزن دلخواه تعیین شده $(V_۱',V_۲')=(۲۵.۱)$ $(U_۱',U_۲')=(۱.۲)$			وزن بهینه تعیین شده $(V_۱^*,V_۲^*)=(۲۰\ ,۳۳,۱)$ $(U_۱^*,U_۲^*)=(۱,۳.۳۳)$		
DMU	$x_۱$	$x_۲$	$y_۱$	$y_۲$	$۲۵x_۱+x_۲$	$y_۱+۲y_۲$	$\Delta_j^{I'}+\Delta_j^{o'}$	$2033x_1+x_2$	$y_۱+۳.۳۳y_۲$	$\Delta_j^{I^*}+\Delta_j^{o^*}$
A	3	5	6	18	80	42	38	65.90	65.90	0
B	4	3	5	22	103	49	54	84.32	78.26	6.06
C	2	6	14	9	56	32	24	46.66	43.97	2.67
D	3	2	13	15	77	43	34	62.90	62.90	0
مجموع							150			8.73

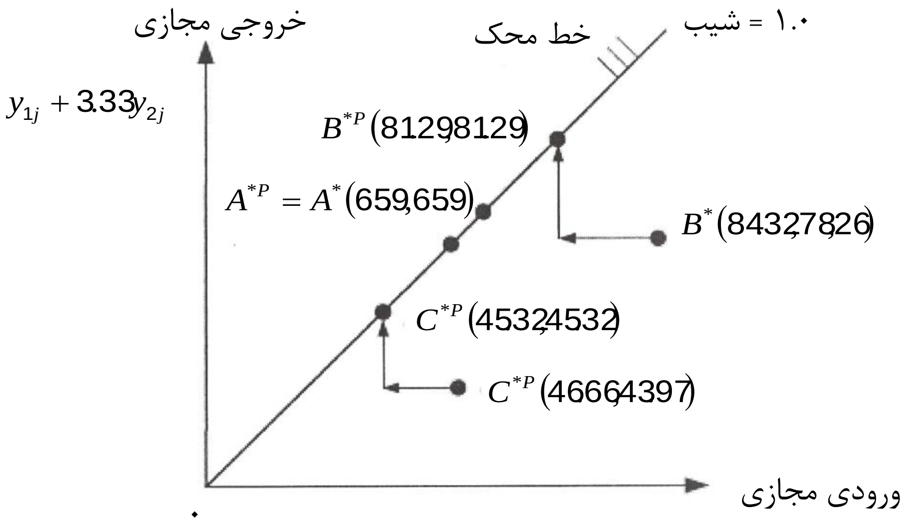


شکل (۲). مختصات واحدهای تصمیم گیری موزون که با وزن های مشترک اختیار شده اند.

به عبارت دیگر با اتخاذ وزن های بهینه، شکاف مجازی کلی $\Delta I_M^{1*} + \Delta_M^{o^*} + \Delta_N^{I^*} + \Delta_N^{o^*}$ نسبت به خط محک کمترین فاصله خواهد بود.

مثال عددی زیر سناریوی فوق را نشان می دهد. جدول (۱) مقادیر واحد تصمیم گیری A ، واحد تصمیم گیری B ، واحد تصمیم گیری C و واحد تصمیمی گیری D را بر حسب شاخص های ورودی و خروجی نشان می دهد، با در نظر گرفتن وزن های اختیاری (۲ و ۱) = $U'_r = (U'_۱, U'_۲)$ و (۱ و ۲۵) = $V_i^{'} = \left(V_1^{'}, V_2^{'}\right)$ ، مجموع وزنی ورودی ها و مجموع وزنی خروجی ها و شکاف مجازی $\Delta_j^{I^{'}} + \Delta_j^{o^{'}}$ برای هر واحد تصمیم گیری ثبت می شود. در شکل (۲) نقاط 'A ، 'B ، 'C و 'D بوسیله وزن های اختیاری U'_r و V'_i وزن دار شده اند. در صورتیکه C'^p, B'^p, A'^p و D'^p نقاط تصویر آنها بر روی خط محک باشند، از چهار واحد تصمیم گیری تا خط محک یک شکاف مجازی کلی ۱۵۰ وجود دارد.

با بکار بردن روش CWA که در زیر ارائه شده است یک مجموعه از وزن های بهینه (۳۳ ، ۳ و ۱) = $U^* = (U_۱^*, U_۲^*)$ و (۱ ، ۳۳ و ۲۰) = $V^* = (V_۱^*, V_۲^*)$ ایجاد می شود. در شکل (۳) ، A^* ، B^* ، C^* و D^* عبارتند از واحدهای تصمیم گیری وزن دار شده با مجموعه وزن های بهینه مشترک V^* و U^* که A^{*P} ، B^{*P} ، C^{*P} و D^{*P} نقاط تصویری آنها بر روی خط محک هستند. حداقل شکاف مجازی کلی نزدیک به ۷۳، ۸ می باشد. بدیهی است که مجموعه وزن ها برای این واحدهای تصمیم گیری کارا مطلوب است، زیرا آنها نزدیک خط محک می باشند. (۳-۳) گویای مدل اصلی روش ماست. در (۳-۳) عملکرد تابع هدف این است که حاصل جمع شکاف های مجازی کلی واحدهای تصمیم گیری را در مجموعه E نسبت به خط محک به حداقل برسانیم، با این شرط که صورت کسر مجموع وزنی خروجی به علاوه شکاف مجازی عمومی Δ_j^o و مخرج کسر مجموع وزنی ورودی ها منهای شکاف مجازی افقی Δ_j^I باشد، این محدودیت حاکی از آن است که نزدیکترین راستا به خط محک، رو بالا و در عین حال به سمت چپ است (با توجه به شکل ظاهری محدودیت).



شکل (۳). مختصات واحدهای تصمیم گیری وزن دار شده با مجموعه وزن های مشترک

نسبت صورت به مخرج معادل ۱ ، ۰ است و این بدین معناست که به نقطه تصویری واقع بر خط محک رسیده ایم. کلیه واحدهای تصمیم گیری در مجموعه E عملکرد یکسانی دارند. ε ثابت بی نهایت کوچک ارشمیدسی مثبت است. همچنین از این حالت که مقدار اندیس های صفر حاصل از انتخاب مجموعه وزن های صفر اجتناب می کنیم. در روش ما فرض بر این است که خط محک بالای کلیه واحدهای تصمیم گیری در مجموعه E قرار دارد. مجموعه وزن های مشترک بهینه $(r=۱,۲,...,s)$ U_r^* و $V_i^*(i=۱,۲,...,m)$ برای هر واحد تصمیم گیری کارا باید حل شود و سپس هر واحد تصمیم گیری کارا می تواند یک رتبه کارایی مطلق را به عنوان معیاری برای مقایسه حاصل کند سپس رتبه بندی واحدهای تصمیم گیری کارا کامل می شود.

CWA – FP:

(۳-۳)

$$\Delta^* = \min \sum_{j \in E} (\Delta_j^o + \Delta_j^I)$$

$$\text{s.t.} \qquad \frac{\sum_{r=۱}^{s} y_{rj} U_r + \Delta_j^o}{\sum_{i=۱}^{m} x_{ij} V_i + \Delta_j^I} = ۱, \quad j \in E,$$

$$\Delta_j^o, \Delta_j^I \geq ۰, \quad j \in E,$$
$$U_r \geq \varepsilon > ۰, \quad r = ۱,...,s,$$
$$V_i \geq \varepsilon > ۰, \quad i = ۱,...,m.$$

شکل محدودیت ها در (۳-۳) را می توان دوباره به شکل خطی نوشت و به شکل محدودیتهای (۳-۴) فرموله کرد.

CWA – $LP_۱$:

$$\Delta^* = \min \quad \sum_{j \in E} (\Delta_j^o + \Delta_j^I) \qquad (۳-٤)$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{r=1}^{s} y_{rj} U_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i + (\Delta_j^o + \Delta_j^I) = 0 \qquad j \in E$$

$$\Delta_j^o, \Delta_j^I \geq 0, \quad j \in E,$$
$$U_r \geq \varepsilon > 0, \quad r = 1,\dots,s,$$
$$V_i \geq \varepsilon > 0, \quad i = 1,\dots,m.$$

آنگاه اگر $\Delta_j^o + \Delta_j^I$ را به جای Δ_j بگذاریم، (۳-۴) به برنامه ریزی خطی (۳-۵) ساده می شود.

CWA – LP۲:

$$\Delta^* = \min \quad \sum_{j \in E} \Delta_j \qquad (۳-٥)$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{r=1}^{s} y_{rj} U_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i + \Delta_j = 0 \qquad j \in E$$

$$U_r \geq \varepsilon > 0, \quad r = 1,\dots,s,$$
$$V_i \geq \varepsilon > 0, \quad i = 1,\dots,m.$$
$$\Delta_j \geq 0, \quad j \in E,$$

(۳-۵) را می توان دوباره به صورت برنامه ریزی خطی معادل (۳-۶) نوشت و برای اینکار متغیر کمبـود Δ_j را در آورد و y_r و x_i جمع نمود که Y_r و X_i به ترتیب $Y_r = \sum_{j \in E} y_{rj}$ و $X_i = \sum_{j \in E} x_{rj}$ می باشـد.

CWA – LP۳ :

$$-\Delta^* = \max \quad \sum_{r=1}^{s} Y_r U_r - \sum_{i=1}^{m} X_i V_i \qquad (۳-٦)$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{r=1}^{s} Y_{rj} U_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i \leq 0, \qquad j \in E,$$

$$U_r \geq \varepsilon > 0, \quad r = 1,\dots,s,$$
$$V_i \geq \varepsilon > 0, \quad i = 1,\dots,m.$$

محدودیت ضمنی $\sum_{r=1}^{s} Y_r U_r - \sum_{i=1}^{m} X_i V_i \leq 0$ می تواند در (۳-۶) وجود داشته باشد. این محدودیت زائـد اسـت زیـرا یـک ترکیـب خطـی از اولـین محـدودیت در (۳-۶) اسـت. در (۳-۶) $X_i (i = 1,2,\dots,m)$ و

$Y_r\,(r=۱,۲,\ldots,s)$ را به عنوان اندیس های ورودی و خروجی یک واحد تصمیم گیری جمع شده و یا یک گروه در نظر می گیریم. هدف از (۳-۶) به حداکثر رساندن کارایی واحد تصمیم گیری جمع شده تحت این محدودیت است که رتبه کارایی هر واحد تصمیم گیری در مجموعه E نمی تواند بیشتر از یک باشد. زمانیکه کارایی بهینه واحد تصمیم گیری جمع شده رخ می دهد، مجموعه متناظری از وزن های مشترک حاصل از (۳-۶) در رتبه بندی می گیرد این مفهوم را ایجاد می کند که چرا تصمیم گیرنده وزن های مشترک را به منظور به حداکثر رساندن کارایی گروه بر می گزیند.

بطور مثال مدیر کل بانک می خواهد عملکرد تمام شعب بانک را بسنجد، اگر بتوان منابع مورد نیاز را کاهش داد و خروجی را افزایش داد یک شعبه عملکرد بالاتری خواهد داشت. منابع موجود می تواند کارکنان، تعداد باجه های خدمات رسانی بانک و غیره باشد. خروجی ها می تواند موارد کاری متعددی که در بانک وجود دارد نظیر فعالیت تجاری، وام، کارت های اعتباری و غیره باشد. بعلاوه رضایت مشتری یک خروجی مهم است. مدیر کل می تواند مجموعه ای از وزن ها را برای این منابع و اندیس های خروجی داشته باشد. البته ممکن است رئیس هر شعبه بر استراتژی و اصول کاری متفاوت و یا منابع محدود دیگری تکیه و تمرکز کند. بدین ترتیب کار سختی است که مدل کل وزن هر مورد کاری را به طور ذهنی برای شعب مختلف با نیازهای مختلف مشخص کند. در چنین مواقعی مدیر کل می تواند از تحلیل پوششی داده ها برای تشخیص و تفکیک شعب کارا از شعب ناکارا بهره ببرد. هنگامیکه رتبه بندی جزئی شعب کارا مورد نیاز است، مدیر کل می تواند مجموعه ای از وزن های مشترک را برای به حداکثر رساندن کارایی شعب کارا (کارایی گروه) تحت این شرط که بالاترین رتبه هر شعبه کارا نباید بیشتر از یک باشد، تعیین کند. از آنجا که تنها گروه شعب کارا مد نظر قرار می گیرند، مدیر کل می تواند آن شعب کارا را به عنوان یک بانک مجازی در نظر بگیرید. به عبارت دیگر مدیر کل می تواند مجموعه ای از وزن های مشترک را به منظور به حداکثر رساندن کارایی بانک مجازی، برای شعب کارا تعیین کند.

از (۳-۶) می توان برای تشخیص و تفاوت قائل شدن بین واحدهای تصمیم گیری کارا تحلیل پوششی داده ها که از مدل تحلیل پوششی داده ها با بازده به مقیاس ثابت حاصل شده است استفاده کرد. برای بدست آوردن اطلاعات بیشتر، (۳-۶) را به شکل ثانویه اش (۳-۷) تبدیل نمودیم.

$\mathrm{CWA-DLP}_۱$:

$$\max \quad \varepsilon\left(\sum_{r=۱}^{s} P_r+\sum_{i=۱}^{m} Q_i\right) \qquad (۷-۳)$$

s.t.

$$\sum_{j\in E} y_{rj}\ \pi_j - P_r = Y_r\,, \qquad r=۱,\ldots,s,$$

$$\sum_{j\in E} x_{ij}\ \pi_j + Q_i = X_i\,, \qquad i=۱,\ldots,m,$$

$$\pi_j \ge ۰, \qquad j\in E$$
$$p_r \ge ۰, \qquad r=۱,\ldots,s,$$
$$Q_i \ge ۰, \qquad i=۱,\ldots,m.$$

بطور مشابه (۳-۷) را می توان به منظور مقایسه فاز ۲ تعمیم مدل CCR (مدل ماکزیمم کمبود)، که در (۳-۸) نشان داده شده است، بکار برد که در آن پارامتر $\theta_۰^*$ برابر ۰ ، ۱ است. تفاوت عمده میان (۳-۷) و (۳-۸)

این است که P_r و Q_i به ترتیب کمبود و مازاد کلیه واحدهای تصمیم گیری کارا نسبت به خط محک می باشند که متناظر با اندیس خروجی r و اندیس ورودی i است.

فاز ۲ تعمیم مدل CCR :

$$\max \quad \varepsilon\left(\sum_{r=۱}^{s} s_r^{+} + \sum_{i=۱}^{m} s_r^{-}\right) \tag{۸-۳}$$

s.t.

$$\sum_{j\in E} y_{rj}\ \lambda_j - s_r^{+} = y_{ro}, \qquad r=۱,\dots,s,$$

$$\sum_{j\in E} x_{rj}\ \lambda_j - s_i = x_{io}, \qquad i=۱,\dots,m,$$

$$\lambda_j \geq ۰, \qquad j\in E$$

$$s_r^{+} \geq ۰, \qquad r=۱,\dots,s,$$

$$s_i^{-} \geq ۰, \qquad i=۱,\dots,m.$$

مقدار متغیر π_j^* در (۳-۷) قیمت سایه در برنامه ریزی خطی (۳-۶) است لذا تغییر در محدودیت معادلـه (۱) منجر به تغییر در محدودیت معادله (۲) خو اهد شد، یعنی اگر طرف راست قید j ام یک واحـد افـزایش یابـد آنگـاه معادله ۲ به تغییر π_j^* می رسد.

$$\sum_{r=۱}^{s} y_{rj} U_r - \sum_{r=۱}^{s} x_{ij} V_i \leq ۰+۱ \tag{۱}$$

$$\left(\sum_{r=۱}^{s}\left(\sum_{j\in E} y_{rj}\right)U_r - \sum^{m} i=۱\left(\sum_{j\in E} x_{rj}\right)V_i\right) \leq \pi_j^*(۰+۱) \tag{۲}$$

π_j^*نشان دهنده کل مقیاس شکاف مجازی نسبت به خط محک است (همانند قیمت سایه هر چه کمتر باشـد بهتر است) که می تواند زمانی که حد بالایی کارایی (۰ ، ۱) را برای واحدهای تصمیم گری آزاد مـی کنـیم (یعنـی یک واحد تصمیم گیری می تواند رتبه کارایی بیش از یک را به خود بگیـرد) کـاهش یابـد. اگـر واحـدهای تصـمیم گیری متعددی بر روی خط محک وجود داشته باشند، π_j^* اطلاعات ارزشمندی به دسـت مـی دهـد (بـه مثـال ۲ مراجعه شود) که با استفاده از آن معلوم می شود کدامیک بیشترین تأثیر را بر شـکاف مجـازی کـل دارد، ایـن امـر برای تعیین اولویت بین واحدهای تصمیم گیری واقع بر خط محک مفید است. در بخشهای بعدی قواعد رتبه بندی واحدهای تصمیم گیری کارا را بیشتر تحلیل می کنیم.

۳. ۳. ۲ CWA – کارا و قاعده رتبه بندی وزن های مشترک:

در این قسمت تعاریف CWA – کارا و قواعد رتبه بندی تحلیل وزن های مشترک را بیان می کنـیم. نخسـت باید بگوییم که رتبه CWA – کارا به صورت معادله (۳) تعریف می شود.

$$\zeta_j^* = \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj} U_r^*}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i^*} \quad j \in E.$$

با داشتن مقدار رتبه CWA – کارا می توانیم واحدهای تصمیم گیری را بـه دو طبقـه مجـزا تفکیـک کنـیم؛ آنهایی که روی خط محک قرار دارند و آنهایی که در زیر خط محک واقعند.

تعریف (۱): واحد تصمیم گیری j ام یک واحد CWA – کارا است (بر روی خط قرار دارد) اگـر $\Delta_j^* = 0$ یـا $\zeta_j^* = 1$ باشد، در غیر اینصورت واحد تصمیم گیری j ام ، CWA - ناکاراست (در زیر خط محک قرار دارد).

• سه تعریف زیر برای تشخیص اینکه واحدهای تصمیم گیری که در زیر و یا بر روی خط محـک قـرار دارنـد، ضروری است.

تعریف (۲): عملکرد واحد تصمیم گیری j ام بهتر از واحد تصمیم گیری i ام است اگر $\zeta_j^* > \zeta_i^*$.

تعریف (۳): اگر $\zeta_j^* = \zeta_i^* < 1$ یعنی هر دوی آنها CWA – ناکارا هستند (در زیر خط محک قرار دارنـد) و در اینصورت عملکرد واحد تصمیم گیری j ام بهتر از واحد تصمیم گیری i ام است اگر $\pi_j^* < \pi_i^*$.

تعریف (۴): اگر $\zeta_j^* = \zeta_i^* = 1$ یعنی هر دوی آنها CWA– کارا هستند (بر روی خط محـک قـرار دارنـد) و در اینصورت عملکرد واحد تصمیم‌گیری jام بهتر از واحد تصمیم‌گیری iام است اگر $\pi_j^* > \pi_i^*$.

مقدار رتبه CWA – کارا هر واحد تصـمیم گیـری نبایـد بیشـتر از ۰ ، ۱ باشـد، بـدین ترتیـب هـیچ یـک از واحدهای تصمیم گیری بالای خط محک نیستند. همچنین حتی می توان مطمئن بود که حداقل یک واحد تصمیم گیری وجود دارد که بر خط محک واقع است.

قضیه (۱): حداقل یک واحد تصمیم گیری وجود دارد که واقع بر خط محک می باشد.

اثبات: از برهان خلف برای اثبات قضیه فوق استفاده می کنیم. فرض کنید که هیچ واحـد تصـمیم گیـری بـر روی خط محک وجود ندارد، پس زمانیکه برای همه $j \in E$ های فرمول شده در معادله (۴)، $\Delta_j^* > 0$ در (۳-۴) باشد، می توانیم به ملاک بهینه و مقدار بهینه متناظر V_i^* ، U_r^* و Δ_j^* برسیم.

(٤)

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj} U_r^* + \Delta_j^*}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i^*} = 1, \quad j \in E,$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj} U_r^*}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i^*} < 1, \quad j \in E, \qquad (٥)$$

(٦)

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} k_j \left(y_{rj} U_r^*\right)}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i^*} = 1, \quad j \in E,$$

می توانیم مقدار ثابت k_j $(k_j > 1)$ را بگونه ای تنظیم کنیم که کارایی هر $j \in E$ فرموله شده در معادله (۶)، برابر ۱ باشد. فرض کنیم k حداقل مجموعه $\{k_{j,}\ for\ \ j \in E\}$ باشد، آنگاه می توانیم مجموعه وزن های مشترک ممکن دیگری را با KU_r^* و V_i^* به همراه Δ_j^* کوچکتر (حداقل یکی برابر صفر) برای همه $j \in E$ ها در (۳-۵) بدست آوریم. این کار منجر به ایجاد ملاک کوچکتری می شود و این با این حقیقت که ملاک فعلی مینیمم شده تناقض دارد. از این رو حداقل یک واحد تصمیم گیری وجود دارد که بر روی خط محک واقع شده است.

۳.۳ تحلیل و بررسی شکاف مجازی:

برای تحلیل شکاف مجازی می توان مدل (۳-۶) را به مدل (۳-۹) تبدیل نمود. همانطور که در (۳-۹) نشان داده شده است، P_r و Q_i را می توان به صورت $p_r = \sum_{(j \in E)} p_{rj}$ و $Q_i = \sum_{(j \in E)} q_{ij}$ تجزیه کرد P_{rj} و q_{ij} به ترتیب کمبود واحد تصمیم گیری j ام در اندیس خروجی r ام و مازاد واحد تصمیم گیری j ام در اندیس ورودی i ام نسبت به خط محک می باشند. لذا $p_{rj} = p_r \lambda_j$ و $q_{ij} = Q_i \lambda_j$ با ترکیبات محدب ضرایب $(\ j \in E\ )\ \lambda_j \geq 0$ و $\sum_{(j \in E)} \lambda_j = 1$ می باشد.

CEA – DLP₂:

$$\max \qquad \sum_{j \in E} \varepsilon \left(\sum_{r=1}^{S} p_{rj} + \sum_{i=1}^{m} q_{ij} \right)$$

s.t.

$$\sum_{j \in E} y_{rj}\, \pi_j = \sum_{j \in E} (y_{rj} + p_{rj}), \quad r = 1,\ldots s, \tag{۹-۳}$$

$$\sum_{j \in E} x_{ij}\, \pi_j = \sum_{j \in E} (x_{rj} + q_{rj}), \qquad i = 1,\ldots s,$$

$$\pi_j \geq 0, \qquad j \in E,$$

$$p_{rj} \geq 0, \qquad r = 1,\ldots,s, \quad j \in E$$

$$q_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,\ldots m, \qquad j \in E$$

کمبود p_{rj}^* و مازاد q_{ij}^* (مربوط به (۳-۹)) را می توان بطور غیر مستقیم توسط قضیه زیر بدست آورد.

قضیه (۲): کمبود p_{rj}^* و مازاد q_{ij}^* مربوط به واحد تصمیم گیری j ام، CWA – ناکارا نسبت به خط محک که متناظر با اندیس خروجی r ام و اندیس وروی i ام می باشند، عبارتند از $P_r^* (\Delta_j^* / \Delta^*)$ و $Q_i^* (\Delta_j^* / \Delta^*)$.

اثبات: از آنجا که p_{rj}^* و q_{ij}^* کمبود و مازاد واحد تصمیم گیری j ام، CWA – ناکارا نسبت به خط محک هستند، با توجه به تعریف (۱)، معادله (۷) را بصورت زیر داریم.

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} (y_{rj} + p_{rj}^*) U_r^*}{\sum_{i=1}^{m} (x_{ij} - q_{ij}^*) V_r^*} = 1 \tag{۷}$$

$$\frac{\sum_{r=۱}^{s}\left(y_{rj}+\frac{p_r^*\Delta_j^*}{\Delta^*}\right)U_r^*}{\sum_{i=۱}^{m}\left(x_{ij}-\frac{Q_i^*\Delta_j^*}{\Delta^*}\right)V_i^*}=۱ \qquad (۸)$$

برای اینکه معادله (۸) را بتوانیم اثبات کنیم، نخست صورت و مخرج کسر را تجزیه می کنیم تا بـه ترتیـب بـه معادله (۹) و (۱۰) برسیم.

$$\sum_{r=۱}^{s} y_{rj}\,U_r^* + \sum_{r=۱}^{s}\frac{p_r^*\,\Delta_j^*}{\Delta^*}\,U_r^*, \qquad (۹)$$

$$\sum_{i=۱}^{m} x_{ij}\,V_i^* - \sum_{i=۱}^{m}\frac{Q_i^*\,\Delta_j^*}{\Delta^*}\,V_i^*, \qquad (۱۰)$$

اگر معادله (۱۰) را از معادله (۹) کم کنیم معادله (۱۱) بدست می آید.

$$\sum_{r=۱}^{s} y_{rj}\,U_r^* - \sum_{i=۱}^{m} x_{ij}\,V_i^* + \frac{\Delta_j^*}{\Delta^*}\left(\sum_{r=۱}^{s} p_r^*\,U_r^* + \sum_{i=۱}^{m} Q_i^*\,V_i^*\right) \qquad (۱۱)$$

از آنجایی که حد پایینی U_r^* و V_i^*، ε می باشد بر طبق قضیه مکمل کمبود رابطه زیر برقرار می شود.

$$\sum_{r=۱}^{s} P_r^*\,U_r^* + \sum_{i=۱}^{m} Q_i^*\,V_i^* = \varepsilon\left(\sum_{r=۱}^{s} p_r^* + \sum_{i=۱}^{m} Q_i^*\right) = \Delta^* \qquad (۱۲)$$

بدین ترتیب فرمولی که در معادله (۱۱) در داخل پرانتز قرار دارد را مـی تـوان بـا طـرف راسـت معادلـه (۱۲) جایگزین کرد و معلوم است که معادله (۱۱) به سادگی به معادله (۱۳) تبدیل می شود.

$$\sum_{r=۱}^{s} y_{rj}\,U_r^* - \sum_{i=۱}^{m} x_{ij}\,V_i^* + \Delta_j^* \qquad (۱۳)$$

با جایگزاری محدودیتهای (۳-۵)، معادله (۱۳) صفر می شود. بدین ترتیب معادله (۸) وجـود خواهـد داشـت و قضیه ثابت می شود.

۳. ۳. ۴ انتخاب مجموعه وزن های مشترک بهینه متناوب:

برای پیدا کردن دامنه مناسبی از دیگر مجموعه وزن های موجود روش زیر پیشنهاد می شود:

مرحله (۱): (۳-۵) را حل کرده و مقدار بهینه Δ^* را بدست آورید.

مرحله (۲): برنامه ریزی خطی (۳-۱۰) را حل کرده و یک مجموعـه بهینـه از وزن هـای مشـترک را بدسـت می‌آوریم.

: تحلیل وزن بهینه

$$\min \qquad \sum_{r=۱}^{s} U_r - \sum_{i=۱}^{m} V_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^{s} y_{rj}U_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}V_i + \Delta_j = 0, \qquad j \in E,$$

$$\sum_{j\in E} \Delta_j = \Delta^*,$$

$$U_r \geq \varepsilon \geq 0, \quad r = 1,\ldots,s,$$
$$V_i \geq \varepsilon \geq 0, \quad i = 1,\ldots,m, \quad j \in E$$
$$\Delta_j \geq 0, \qquad j \in E$$

در مرحله نخست باید به دنبال به حداقل رساندن شکاف مجازی کل باشیم سپس در مرحله دوم وزن مناسب را تحت شرایط بهینه (۳-۱۰) انتخاب می کنیم، بدین ترتیب مقدار ملاک بهینه (۳-۵) را به عنوان یک محدودیت در برنامه ریزی خطی (۳-۱۰) می گیریم سپس مینیمم سازی حاصل جمع وزن های خروجی و ماکزیمم سازی حاصل جمع وزن های ورودی را به عنوان ملاک در نظر می گیریم.

۳. ۴. برخورد با مجموعه داده هایی که ویژگیهای خاص دارند:

در اینجا دو مجموعه از داده را به عنوان مثال ارائه می شوند. در نخستین نوع از این مجموعه داده ها، مقیاس واحدهای تصمیم گیری در دامنه های بزرگ تعریف می شوند. در دومین نوع از مجموعه داده ها تعداد واحدهای ورودی و خروجی بیش از تعداد واحدهای تصمیم گیری است. در این دو مثال معمولاً تعداد بیشتری از واحدهای تصمیم گیری کارا شناخته می شوند. روش تحلیل وزن های مشترک CWA (پیشنهادی) می تواند با چنین مجموع داده هایی سر و کار داشته و برای آنها بکار رود.

جدول (۲). مثال (۱)، داده هایی با دامنه مقیاس بزرگ

واحد تصمیم‌گیری jام	X_{1j}	X_{2j}	y_{1j}	θ_j^*	CCR-Slack (s_1^{-*})
C1	470 000	700 000	200 000	1	0
C2	4800	7000	2000	1	100
C3	49	70	20	1	0
C4	5	7	2	1	0
C5	510	700	200	1	40
C6	52 000	70 000	20 000	1	5000
C7	530 000	700 000	200 000	1	60 000

جدول (۳). نتایج مربوط به مثال (۱) که توسط روش تحلیل وزن های مشترک (CWA) تعیین شده اند.

واحد تصمیم‌گیری jام	Δ_j^*	ζ_j^*	Rank	p_{1j}^*	$100(P_{1j}^*/x_{1j})^*$
C1	0	1.000	1	0	0
C2	100	0.992	2	100	2.1
C3	2	0.983	3	2	4.1
C4	0.3	0.975	4	0.3	6.0
C5	40	0.967	5	40	7.8

C6	5000	0.959	6	5000	9.6
C7	60 000	0.951	7	60 000	11.3

۳. ۴. ۱ داده هایی با دامنه مقیاس بزرگ:

جدول (۲) مجموعه داده های شبیه سازی شده از هفت واحد تصمیم گیری را با دو ورودی و یک خروجی نشان می دهد. همانطور که ملاحظه می شود ارقام مربوط به واحدهای تصمیم گیری $C_۷ , C_۶ , C_۵ , C_۴ , C_۳ , C_۲ , C_۱$ به مقدار بسیار زیاد بزرگتر از واحد تصمیم گیری $C_۴$ می باشند و این در حالی است که همچنان دارای کارایی برابر با یک می باشند. کمبودها در اندیس X۱ پدیدار شده اند. برای تعیین کارایی هر واحد تصمیم گیری، نخست از مدل CCR ورودی (خروجی) محور استفاده می کنیم. به خاطر مسائل مربوط به مقیاس و وجود کمبودها نمی توان هفت واحد تصمیم گیری را رتبه بندی کرد. اما رتبه بندی آنها بطور شهودی عبارت است از: واحد تصمیم گیری $C_۱$ ، واحد تصمیم گیری $C_۲$، واحد تصمیم گیری $C_۳$، واحد تصمیم گیری $C_۴$، واحد تصمیم گیری $C_۵$، واحد تصمیم گیری $C_۶$ و واحد تصمیم گیری $C_۷$.

با استفاده از روش تحلیل وزن های مشترک (CWA) پیشنهاد شده، مجموعه وزن های مشترک بهینه را به صورت $(V_۱^*, V_۲^*, U_۱^*) = (۱ , ۱ , ۵ , ۸۵)$ بدست می آوریم. بر طبق رتبه های کارایی CWA (ζ)، رتبه بندی ها سازگار با رتبه بندی شهودی می باشد. همانطور که در جدول (۳) نشان داده شده است، واحد تصمیم گیری $C_۱$ تنها موردی است که بر روی خط محک واقع شده است. دو ستون آخر نشان دهنده شکاف در درصد و مقدار موجود اندیس $X_۱$ نسبت به خط محک است.

بدین ترتیب روش تحلیل وزن های مشترک (CWA) نشان می دهد که می تواند رتبه بندی و شکاف مربوطه را از نظر اطلاعات مربوط به ورودی و خروجی ها به طور کامل برای همه واحدهای تصمیم گیری فراهم کند.

۳. ۴. ۲ داده هایی با عدد بزرگ اندیس ها:

زمانیکه تعداد n واحد تصمیم گیری را ارزیابی می کنیم، مدل های DEA معمولاً بیشتر از n/۲ اندیس ندارند. در غیر اینصورت تعداد واحدهای تصمیم گیری کارا بطور غیر منطقی بزرگ می شود و این بدین معناست که توان تشخیص DEA کاهش می یابد. در مثال ارائه شده از هفت واحد تصمیم گیری با سه ورودی و سه خروجی استفاده شده است. ستون آخری در جدول (۴) نشان دهنده این است که هر هفت واحد تصمیم گیری کارا هستند، اما با مدل CCR ورودی محور، کارایی شعاعی ۱ بدست آمد. در جدول (۵) اطلاعات جزئی تری راجع به رتبه بندی آنها ارائه شده است که با بکار بردن روش تحلیل وزن های مشترک (CWA) حاصل شده است. همچنان درمی یابیم که هنوز پنج واحد تصمیم گیری بر روی خط محک قرار دارند. اگر حد بالایی رتبه کارایی ۰ ، ۱ را برای این واحدهای تصمیم گیری باز کنیم، آنگاه π_j^* از نظر مقیاس کل شکاف مجازی نسبت به خط محک رو به کاهش می گذارد. مسلماً یک واحد تصمیمی گیری، CWA – کارا با یک π_j^* بزرگتر بهتر است (زیرا π_j^* نشان دهنده شکاف مجازی کل یا قیمت سایه است که هر چه کمتر باشد بهتر است و چون در اینجا با آزاد سازی حد بالای کارایی کاهش می یابد لذا هر چه این مقدار کاهش بزرگتر باشد بهتر است.) زمانیکه حد بالای رتبه کارایی را تا بیش از ۰ ، ۱ آزاد می کنیم، شکاف مجازی کلی در مقایسه با دیگر واحدهای تصمیم گیری واقع بر خط محک می تواند ماکزیمم تا بیش از ۲۲۵،۳ کاهش یابد، بنابراین بعد از مقایسه با π_j^*، می توانیم رتبه بندی نهایی واحدهای تصمیم گیری CWA – کارا را بصورت واحد تصمیم گیری $D_۳$ ، واحد تصمیم گیری $D_۶$ واحد تصمیم گیری $D_۱$، واحد تصمیم گیری $D_۴$، واحد تصمیم گیری $D_۵$، واحد تصمیم گیری $D_۷$ و واحد تصمیم گیری $D_۲$ تعیین کنیم.

جدول (۴). مثال (۲)، عدد اندیس های بزرگتر از تعداد واحدهای تصمیم گیری

واحد تصمیم‌گیری	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	y_{1j}	y_{2j}	y_{3j}	(θ_j^*) Eficiency
D1	1621	439	205	174	497	22	1
D2	2718	314	221	172	497	22	1
D3	1523	345	215	160	443	22	1
D4	5514	1314	553	487	1925	63	1
D5	1941	507	309	220	521	36	1
D6	1496	321	339	109	699	38	1
D7	932	158	200	37	431	19	1

جدول (۵). نتایج مربوط به مثال (۲) که توسط روش تحلیل وزن های مشــترک (CWA) تعیــین شـده اند.

واحد تصمیم‌گیری	Δ_j^*	π_j^*	ζ_j^*	Rank
D1	0	3.225	1.000	1
D2	0	1.772	1.000	2
D3	0	1.118	1.000	3
D4	0	0.922	1.000	4
D5	0	0.28	1.000	5
D6	304.864	0.000	0.847	6
D7	925.362	0.000	0.778	7

جدول (۶). مثال (۳) شامل واحدهای تصمیم گیری اولیه در مثال (۲)

واحد تصمیم‌گیری	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	y_{1j}	y_{2j}	y_{3j}
D1	1621	439	205	174	497	22
D2	2718	314	221	172	497	22
D3	1523	345	215	160	443	22
D4	5514	1314	553	487	1925	63
D5	1941	507	309	220	521	36
D6	1496	321	339	109	699	38
D7	932	158	200	37	431	19
D8	2013	1937	412	198	471	32
D9	1891	976	399	191	491	22
D10	2277	891	418	241	379	28
D11	1995	693	349	167	412	31

۳. ۵ گسترش و بحث:

در این قسمت موضوع رتبه بندی به روش تحلیل وزن های مشترک (CWA) واحدهای تصمیم گیری را از مجموعه E به مجموعه $E \cup E^C$ گسترش می دهیم – که در آن E^C نشان دهنده مجموعه واحدهای تصمیم

گیری نارکارست. متأسفانه یک مورد تناقض وجود دارد و آن این است کـه برخـی از واحـدهای تصـمیم گیـری در مجموعه E^C بهتر از واحدهای تصمیم گیری در E است. البته این پدیده را می توان بدون تخطی از مفهوم اصلی DWA ، پذیرفته و توضیح داد. در واقع هر واحد تصمیم گیری در E^C دارای یک مجموعه مرجـع ویـژه خواهـد بود که متشکل از بخشهای واحدهای تصمیم گیری در E است. نباید تصور کرد که یک واحد تصمیم گیری خـاص در E بهتر از همه واحدهای تصمیم گیری در E^C است. توسـط انجـام دادن یـک مثـال کامـل کـه شـامل همـه واحدهای تصمیم گیری در مجموعه $E \cup E^C$ گسترش داده شده است. نتایج با استفاده از مـدل DEA (۳-۲) و روش تحلیل وزن های مشترک (CWA)، مدل های (۳-۵) و (۳-۱۰) ، در جدول (۷) نشـان داده شـده اسـت. بـا توجه به روش تحلیل وزن های مشترک (CWA) ملاحظه می کنیم که واحد تصـمیم گیـریD۲ مجموعـه E در مقام یازدهم رتبه بنـدی مـی شـود کـه بـدتر از واحـدهای تصـمیم گیـری D۸ ، D۹ ، D۱۰ و D۱۱ مربـوط بـه مجموعه E^C است. اگر چه واحد تصمیم گیری D۲ نمی تواند بر هیچ یک از واحدهای تصمیم گیری D۸ ، D۹ ، D۱۰ و D۱۱ به تنهایی غلبه کند.

جدول (۷). مجموعه مرجع، رتبه کارایی DWA و CWA مربوط به یازده واحد تصمیم گیری در مثال (۳)

واحد تصمیم‌گیری	مجموعه مرجع	DEA کارایی (θ_j^*)	کارایی(ζ_j^*)	رتبه‌بندی
D1	D1	1	1	1
D2	D2	1	0.69	11
D3	D3	1	0.99	4
D4	D4	1	0.97	5
D5	D5	1	1	3
D6	D6	1	1	2
D7	D7	1	0.82	6
D8	D1,D5	0.87	0.72	7
D9	D1,D5	0.91	0.73	8
D10	D5	0.93	0.74	9
D11	D5,D6	0.79	0.71	10

جدول (۸). رتبه کارایی که فقط بر پنج واحد تصمیم گیری قابل بحث در جدول (۷) مجدداً ارزیابی شده است.

واحد تصمیم‌گیری	کارایی (θ_j^*)
D2	1
D8	1
D9	1
D10	1
D11	1

بنابراین با توجه به DEA نباید استنباط کرد که واحد تصمیم گیری D۲ در مجموعه E بهتر از تصمیم گیری D۸ ، D۹ ، D۱۰ و D۱۱ در مجموعه E^C است. بعلاوه با استفاده از مدل DEA (D ۲) ، برای اندازه گیری کارایی نسبی تنها پنج واحد تصمیم گیری در اینجا، باید توجه نمود که آنها متعلق به مجموعه معادل E هستند (که در جدول (۸) نشان داده شده است) بدین ترتیب به نظر می رسد که رتبه بندی CWA را نیز می توان بدون تخطی از مفهوم اصلی DEA در مجموعه E^C بکار برد.

از رتبه بندی CWA دو نتیجه منعکس می شود، اولی آن است که در ابتدای بحث مان برای رتبه بندی واحدهای تصمیم گیری در مجموعه E بکار بردیم و دمی عبارت است از اینکه CWA برای رتبه بندی واحدهای تصمیم گیری در مجموعه $E \cup E^C$ استفاده می کنیم. همچنان می توان بدون بر هم زدن طبقه بندی اولیه DEA به نتیجه منطقی و قابل قبولی رسید.

Andersen, P., Petersen, N.C., 1993. A Procedure for ranking efficient units in data enuelopment, 39,10; ABI/INFORM Global.

1. Banker, R.D.,Charnes , A., Cooper, W.W., Rohdes, E., 1978. Sonce Models for Estimation Technincal and Scale in Efficiencies in Data Envelopment Analysis. Management Science 30.1078-1092.
2. Charnes, A., Cooper, W.W., Rohdes, E., 1978.Measuring The Efficieny of Decision Making Units. European Journal of Operational Research 2(6), 429-444.
3. Janaary 2008, Vol. 4,No. 6,51-56
   Charnes, A. Cooper W.W., Rhodes, E.Short Communication, Measuring the efficiency of decision – making units. European Journal of Operatiol Research 3 (`1979) 339.
4. Cook, W; Kress, M.,Seriford,L.Prioritization models for frontier decision making units in DEA. European Journal of Operational Research 1992;59:319-32
5. Cook W, Roll y, kazakou A.ADEA Model for measuring the relative efficiencies of highway maintenance patrols. INFOR 1990;28(2):113-24.
6. Farrell, M. J., 1957. The Measurement of Productive Efficiency.J.R, Statis, Soc. Series A120, 253-281.
7. Ganley, JA, Cubbin, JS. Public sector efficiency measurement: applications of data envelopment analysis. Amsterdam: North-Molland; 1992.
8. Mehrabian, S, Alirezaee, R.,Jahanshahloo, G.R., 1999.A Complete Efficiency Ranking of Decision Making Units in Data Envelopment Analysis. Computational Optimization and Applications, 14,261-266(1999).
9. Roll, 1993. 99-109, PP.I, NO.21, VOL.DEA, "Omege, M.R.M,.L.
10. Roll-Y, Cook, W. Golany, B. (1991) Controlling factor weights in data envelopment analysis. IIE Trans 13(1), 2-9.
11. Saati, S., Determining a Common set of weight in DEA by solving a linear programming. Journal of International.
12. Sinuany-Stem, Z,. Friedman, L. DEA and the discriminant analiysis of ratio for ranking unit. European Journal of Operational Research 1998, 111:470-8.