

فصل ۱

مقدمه:

۱- الاستیسیته

تمام مواد ساختاری تا حدی دارای ویژگی کشش هستند، به عنوان مثال اگر نیروهای خارجی، که تغییر شکل ساختار را ایجاد می‌کنند، از حد مشخصی عبور نکنند، تغییر شکل با حذف نیروها از بین می‌رود. در طول این کتاب فرض می‌شود که نمونه مورد بررسی تحت عمل نیروهای خارجی کاملاً الاستیک است، بدین معنی که پس از حذف نیروها، شکل اولیه خود را به طور کامل حفظ می‌کند.

در این کتاب ساختار مولکولی اجسام الاستیک در نظر گرفته نمی‌شود. فرض بر این است که ماده از نوع الاستیک کاملاً پیوسته و یکنواخت باشد، به طوری که کوچکترین المانی که از جسم برداشته می‌شود، همان ویژگی‌ها و خواص فیزیکی جسم را داشته باشد. به منظور ساده‌سازی بحث، فرض می‌شود که جسم آیزوتروپیک^۱ است، بدین معنا که خواص الاستیک در تمام جهات یکسان است.

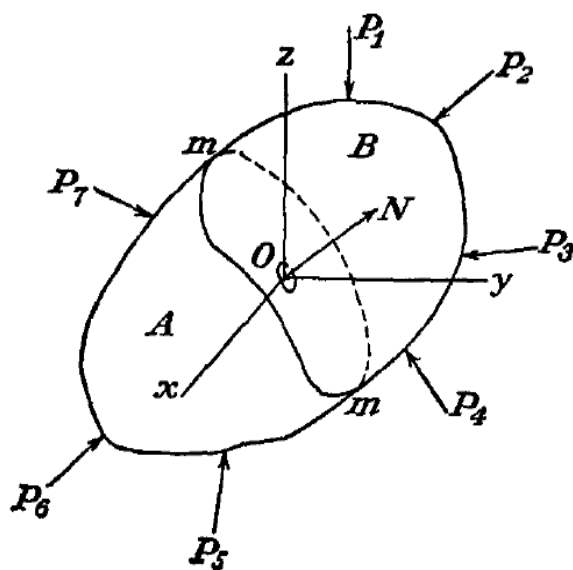
مواد ساختاری معمولاً فرضیات فوق را برآورده نمی‌کنند. به عنوان مثال، یک ماده مهم مانند فولاد، زمانی که با میکروسکوپ مطالعه می‌شود، از کریستال‌های مختلف و در جهت‌های مختلف تشکیل شده است. این ماده بسیار دور از همگن بودن است، اما تجربه نشان می‌دهد که راه‌حل‌های تئوری الاستیسیته بر پایه فرض‌های همگنی و آیزوتروپیک می‌تواند برای ساختار فولاد با دقت بسیار بالا اعمال شود. توضیح این است که کریستال‌ها بسیار کوچک هستند. در واقع معمولاً میلیون‌ها عدد از آنها در یک اینچ فولاد وجود دارد. در حالیکه خواص الاستیک یک کریستال منحصر به فرد در جهات مختلف می‌تواند بسیار متفاوت باشد، کریستال‌ها معمولاً به صورت تصادفی در ماده توزیع می‌شوند و در نتیجه خواص الاستیک قطعات بزرگتر فلز از متوسط گیری از خواص تک تک کریستال‌ها بدست می‌آید. تا زمانی که ابعاد فیزیکی نمونه مورد بررسی نسبت به ابعاد یک کریستال به اندازه کافی بزرگ است، فرض یکنواختی با دقت زیادی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و اگر کریستال‌ها به طور تصادفی در ماده توزیع شوند، ماده به صورت آیزوتروپیک رفتار می‌کند.

هنگامی که به علت فرآیندهای تکنولوژیکی خاصی نظیر نورد، یک جهت گیری متقارن از بلورها در یک فلز ایجاد می‌شود، خواص الاستیک فلز در جهت‌های مختلف متفاوت می‌شوند و شرایط غیرهمسانگردی را باید در نظر گرفت. در مورد مس نورد سرد شده، چنین شرایطی داریم.

^۱در الاستیسیته آیزوتروپیک به معنای همسانگرد نیز بکار می‌رود

۲- تنش

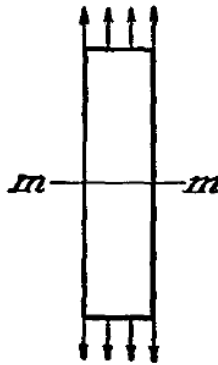
شکل ۱ جسمی را در حال تعادل نشان می‌دهد. تحت عمل نیروهای خارجی P_1, \dots, P_7 نیروهای داخلی بین قسمت‌های جسم تولید می‌شوند. برای مطالعه اندازه این نیروها در هر نقطه O ، فرض کنیم که جسم به دو بخش A و B تقسیم شود که اینکار از طریق تقاطع سطح مقطع mm (عبوری از هر نقطه O) با جسم تشکیل شود. به عنوان مثال، با توجه به یکی از این قسمت‌ها، به عنوان مثال، A می‌توان بیان کرد که تحت عمل نیروهای خارجی P_1, \dots, P_7 و نیروهای داخلی توزیع شده بر روی مقطع mm در تعادل است و به نمایندگی از عملکردهای مواد از بخش B بر روی قسمت ماده A . فرض بر این است که این نیروها به طور مداوم در ناحیه mm به هم متصل می‌شوند همانگونه که فشار هیدرواستاتیک یا فشار باد به طور مداوم بر روی سطح آن عمل می‌کند. مقادیر این نیروها معمولاً توسط شدت آنها تعریف می‌شود، به این معنی که با مقدار نیروی در واحد سطح ناحیه‌ای که آنها عمل می‌کنند. در بحث درباره نیروهای داخلی این شدت، تنش نامیده می‌شود.



شکل ۱

در ساده‌ترین حالت یک نوار شاخه‌ای که به واسطه نیروهای یکنواخت تحت تنش در دو انتهای خود قرار گرفته است (شکل ۲). نیروهای داخلی نیز به طور مساوی بر روی هر مقطع mm میلیمتر توزیع می‌شوند. در نتیجه از این رو شدت این توزیع، به عنوان مثال، تنش، می‌تواند با تقسیم نیروی کششی کل P بر سطح مقطع A به دست آید. در این مورد تنها فرض این است که تنش به طور مساوی بر روی مقطع توزیع شده است. در جسم کل، (شکل ۱) تنش به طور مساوی بر روی مقطع mm توزیع نمی‌شود. برای به دست آوردن مقدار تنش بر روی یک ناحیه کوچک δA ، که به صورت برشی از مقطع mm در هر نقطه O می‌باشد، فرض می‌کنیم که نیروهایی بر ناحیه المانی

به دلیل عکس‌العمل جسم بخش B بر روی جسم بخش A اعمال می‌شود به مقدار δP کاهش یابد. اگر در هر لحظه مقادیر المان مساحت δA موجود باشد، آنگاه نسبت $\frac{\delta A}{\delta P}$ نشان دهنده تنش اعمالی بر روی مقطع mm در نقطه O است.



شکل ۲

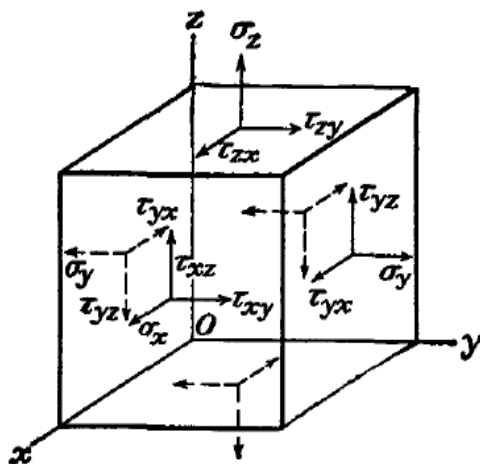
جهت محدود کردن نتیجه δP جهت تنش است. بطور کلی، جهت تنش به منطقه δA که در آن عمل می‌کند، تمایل دارد و ما معمولاً آن را به دو بخش تقسیم می‌کنیم: یک تنش طبیعی عمود بر سطح و یک تنش برشی در سطح مقطع δA .

۳- علائم نشان دهنده نیروها و تنش‌ها

دو نوع نیروهای خارجی وجود دارد که ممکن است بر روی جسم عمل کنند. نیروهای توزیع شده در طول جابجایی جسم، مانند فشار یک جسم بر روی دیگری یا فشار هیدرواستاتیک، نیروهای سطحی نامیده می‌شوند. نیروهای توزیع شده بر روی حجم جسم مانند نیروهای گرانشی، نیروهای مغناطیسی یا در صورت حرکت جسم نیروهای اینرسی، نیروهای جسم (نیروهای حجمی) نامیده می‌شوند. نیروی سطح در واحد مساحت معمولاً به سه مولفه موازی با محورهای مختصات تجزیه می‌شوند و برای این اجزاء نمادهای \bar{X} ، \bar{Y} ، \bar{Z} را استفاده می‌کنیم. همچنین نیروی جسم را در واحد حجم به سه جزء تجزیه می‌کنیم و این اجزا را توسط X ، Y ، Z مشخص می‌کنیم.

ما باید از حرف σ برای نشانه دادن تنش عمودی و از τ برای نمایش تنش برشی استفاده نماییم. برای نشان دادن جهت صفحه که تنش بر آن اعمال می‌شود، شاخص‌هایی از این حروف استفاده می‌شود. اگر المان مکعبی بسیار کوچکی را در نقطه O مطابق شکل ۱، در نظر بگیریم که سطوح آن موازی با محور مختصات باشد، آنگاه علائم و نمادهای نشان دهنده تنش‌های وارد شده بر جسم و همچنین جهات‌های مثبت مطابق شکل ۳ خواهند بود. به عنوان مثال در قسمتی از المان که عمود بر محور y است، تنش عمودی اعمالی بر این سطح توسط σ_y نشان

داده شده می‌شود. اندیس y در این عبارت نشان می‌دهد که تنش روی یک صفحه عمود بر محور y اعمال می‌شود. علامت تنش عمودی هنگامی مثبت است که تنش از نوع کششی باشد و زمانی منفی است که تنش از نوع فشاری باشد.



شکل ۳

تنش برشی به دو مولفه موازی با محور مختصات برمی‌گردد. در این حالت دو اندیس برای تنش نوشته می‌شود: اولی نشان دهنده جهت عمود بر صفحه در نظر گرفته شده و دومی نشان دهنده جهت جزء تنش است. به عنوان مثال، اگر یکبار دیگر صفحه عمود بر محور y را در نظر بگیریم، مولفه در جهت x با τ_{yx} مشخص می‌شود و مولفه در جهت z با τ_{yz} نشان داده می‌شود. جهت‌های مثبت اجزای تنش برشی در هر طرف از المان مکعبی به عنوان جهت مثبت محور مختصات گرفته شده است. اگر یک تنش کششی در یک طرف جهت مثبت محور متناظر. اگر تنش کششی دارای یک جهت مخالف محور مثبت باشد، جهت مثبت اجزای تنش برشی باید معکوس شود. با توجه به این قانون، جهت مثبت تمام اجزای تنش در سمت راست المان مکعب (شکل ۳) با جهت مثبت محور مختصات همخوانی دارد. اگر بخواهیم سمت چپ این عنصر را در نظر بگیریم، تمام جهت‌های مثبت برعکس می‌شود.

۴- اجزاء تنش

از بحث در مورد مقاله قبلی مشاهده می‌شود که برای هر جفت صفحه موازی یک المان مکعبی، مانند شکل ۳، یک نماد برای نشان دادن جزء تنش نرمال و دو نماد دیگر برای نشان دادن دو جزء تنش برشی نیاز است. برای توصیف تنش‌هایی که بر روی شش طرف یک المان مکعبی در جهت نرمال اعمال می‌شود از $\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x$ استفاده می‌شود و شش نماد $\tau_{zy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{xy}$ برای نمایش تنش‌های برشی مورد نیاز است. با توجه به تعادل المان، تعداد نمادها برای تنش برش را می‌توان به سه کاهش داد. اگر نسبت به محور x از نیروهای اعمالی گشتاور

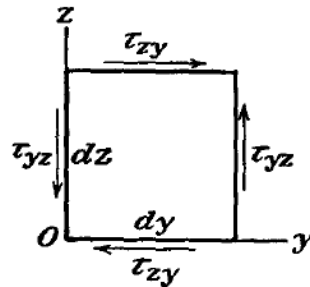
گرفته شود، به عنوان مثال تنها تنش‌های مطابق با شکل ۴ می‌بایستی در نظر گرفته شود. نیروهای جسم مانند وزن المان را می‌توان در این مورد نادیده گرفت، که از این واقعیت پیروی می‌کند که در کاهش ابعاد المان نیروهای حجمی بر روی آن بصورت مکعب خطی کاهش می‌یابد، در حالی که نیروهای سطحی بصورت مربع ابعاد خطی کاهش می‌یابد. از این رو، برای یک المان بسیار کوچک، نیروهای حجمی مقادیری کوچکتر از مرتبه بالاتر از نیروهای سطحی هستند و در محاسبه نیروهای سطحی می‌توان آنها را نادیده گرفت. به همین ترتیب، گشتاور ناشی از عدم توزیع یکنواخت نیروهای عمودی مرتبه بالاتری از آنهاست که به دلیل نیروهای برشی ایجاد می‌شود. همچنین نیروها در هر طرف می‌توانند محدوده‌ای از زمان تنش در وسط باشند. سپس ابعاد المان کوچک در شکل ۴ را با dx ، dy ، dz مشخص می‌کنیم، معادله تعادل این المان، با گرفتن گشتاور نیروها حول محور x ، به صورت زیر است:

$$\tau_{xy} dx dy dz = \tau_{yz} dx dy dz$$

دو معادله دیگر را می‌توان به همان شیوه بدست آورد. از این معادلات پیدا می‌کنیم که:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (1)$$

از این رو برای دو طرف عمود در یک المان مکعبی، اجزاء تنش برشی عمود بر خط تقاطع این دو سمت برابر است.



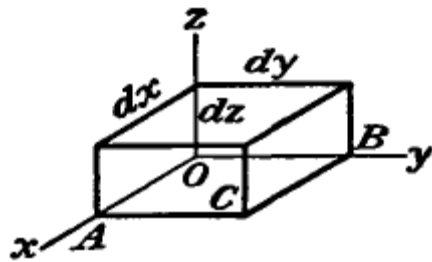
شکل ۴

شش عبارت $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{zy} = \tau_{yz}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{yx} = \tau_{xy}$ برای توصیف تنش‌های اعمالی بر روی یک صفحه در یک نقطه کافی هستند. این عبارتها به عنوان اجزای تنش در یک نقطه نامیده می‌شوند. بعداً نشان داده می‌شود (Art. ۶۷) که با این شش جزء، تنش بر روی هر سطح شیب دار از طریق همان نقطه می‌تواند تعیین شود.

۵- اجزاء کرنش

در بحث تغییر شکل جسم الاستیک، فرض می‌شود که قیود کافی برای جلوگیری از حرکت جسم به عنوان یک جسم صلب وجود دارد به طوری که بدون تغییر شکل جسم جابجایی ذرات جسم آن غیرممکن است. در این کتاب، تنها تغییرات کوچک در ساختارهای مهندسی در نظر گرفته می‌شود. جابجایی کوچک ذرات یک جسم تغییر

شکل یافته معمولا به شکل u ، v و w به ترتیب در راستای محورهای مختصات x ، y ، z نشان داده می‌شود. فرض بر این است که این اجزاء مقادیر بسیار کوچک هستند که به طور پیوسته در حجم جسم متفاوت هستند. یک المان کوچک $dx dy dz$ را از جسمی الاستیک در نظر بگیرید (شکل ۵). اگر جسم تغییر شکل داده شود، u ، v ، w اجزای جابجایی نقطه O است، جابجایی در جهت x جهت یک نقطه مجاور A در محور x به دلیل افزایش dx با افزایش مختصات x . در نتیجه افزایش طول عنصر OA به علت تغییر شکل $(\delta u / \delta x) dx$ است. از این رو طول انقباض واحد در نقطه O در جهت x ، $\delta u / \delta x$ است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که انحنای واحدی در جهت y و z توسط مشتقات $\delta v / \delta y$ و $\delta w / \delta z$ نشان داده می‌شود.



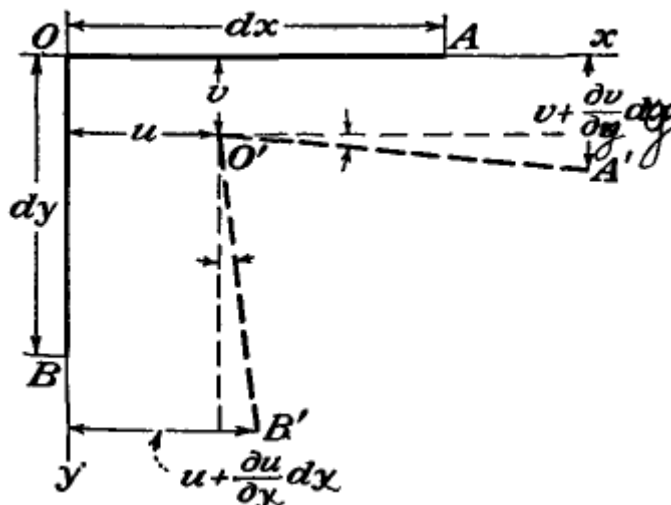
شکل ۵

فرض کنید این بار اعوجاج زاویه ای بین المان‌های OA و OB را در نظر بگیریم (شکل ۶). اگر u و v جابجایی نقطه O در جهت x و y باشد، جابه جایی نقطه A در جهت y و نقطه B در جهت x به ترتیب $v + (\delta v / \delta x) dx$ و $u + (\delta u / \delta y) dy$ هستند. با توجه به این جابجایی، جهت جدید $O'A'$ از المان OA به جهت اولیه با زاویه کوچک نشان داده شده در شکل، برابر با $\delta v / \delta x$ گرایش دارد. به همان شیوه، جهت $O'B'$ با زاویه کوچک $\delta u / \delta y$ به OB تمایل دارد. از این رو می‌بینیم که زاویه اولیه AOB بین دو عنصر OA و OB با زاویه $\delta v / \delta x + \delta u / \delta y$ کاهش می‌یابد. این فشار کششی بین xz و yz است. فشارهای برشی بین صفحه‌های xy و xz و یا yz و yz را می‌توان به همان شیوه بدست آورد.

ما از حرف ϵ برای کشیدگی خطی واحد (کرنش خطی) و حرف γ برای کرنش برشی واحد استفاده خواهیم کرد. برای نشان دادن جهت کرنش ما از همان شاخص‌های تنش برای این حروف استفاده کنیم. سپس از بحث بالا:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

بعداً نشان داده خواهد شد که با داشتن سه کشیدگی خطی واحد در سه جهت عمود و سه کرنش برشی واحد مربوط به همان جهت، کشیدگی (کرنش) در هر جهت و اعوجاج بین هر دو جهت می‌تواند محاسبه شود (نگاه کنید به Art. ۷۳) شش مقادیر $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}$ مولفه های کرنش نامیده می‌شوند.



شکل ۶

۶- قانون هوک

روابط میان اجزای تنش و اجزای کشش به صورت تجربی و به عنوان قانون هوک شناخته می‌شود. تصور کنید که یک المان مستطیلی با دو طرف موازی با محور مختصات قرار گرفته و به تنش عمودی برسد به طور مساوی در دو طرف مخالف توزیع شده است. آزمایشات نشان می‌دهد که در مورد یک ماده ایزوتروپیک، این تنش‌های عمودی هیچ‌گونه اعوجاج زاویه ای از عناصر ایجاد نمی‌کند. مقدار انحنای واحد عنصر بصورت معادله زیر داده می‌شود:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{الف})$$

در آن E مدول الاستیک در تنش است. مواد مورد استفاده در ساختارهای مهندسی دارای مدول‌هایی هستند که در مقایسه با تنش‌های مجاز زیاد هستند و کشیدگی واحد (الف) مقدار بسیار کمی است. به عنوان مثال، در مورد فولاد ساختمانی، معمولاً کمتر از ۰/۰۰۱ است. انبساط المان در جهت X با انقباض‌های جانبی همراه است،

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{ب})$$

که در آن ν ثابتی به نام نسبت پواسون است. برای بسیاری از مواد، نسبت پواسون می تواند برابر با 0.25 باشد. برای فولاد سازه‌ای معمولاً برابر با 0.3 است. معادلات (الف) و (ب) همچنین می‌توانند برای حالت تنش فشاری ساده استفاده شوند. در محدوده الاستیک، مدول الاستیسیته و نسبت پواسون در حالت فشاری با حالت کششی یکسان هستند. اگر المان فوق تحت تنش‌های نرمال $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ که به طور مساوی در دو طرف توزیع شده باشد قرار گیرد، جزء‌های کرنش می‌توانند از معادلات (الف) و (ب) بدست آیند. آزمایشات نشان می‌دهد که برای به دست آوردن این اجزاء ما باید اجزاء کرنش تولید شده توسط هر یک از سه تنش را با هم ادغام نماییم. با استفاده از این روش، معادلات را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (3)$$

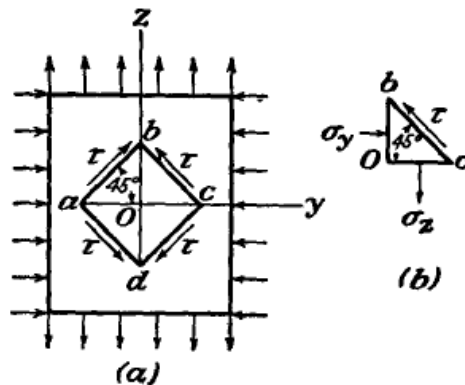
بعلاوه ما اغلب از روش سوپرپوزیشن در محاسبه تغییر شکل کل و تنش‌های تولید شده توسط نیروهای مختلف استفاده خواهیم کرد. این روش تا زمانی که تغییرات کوچک است و جابجایی‌های کوچک مربوطه به طور قابل توجهی تحت تاثیر نیروهای خارجی قرار نگیرد قابل قبول است. در چنین مواردی، ما تغییرات کوچکی در ابعاد جسم تغییر شکل داده شده و همچنین جابجایی‌های کوچک نقاط استفاده از نیروهای خارجی را نادیده می‌گیریم و محاسبات ما را بر ابعاد اولیه و شکل اولیه جسم محاسبه می‌کنیم. سپس جابجایی حاصل از آن توسط اصل سوپرپوزیشن به صورت توابع خطی نیروهای خارجی به شکل فوق العاده همانند مقادیر حاصل شده (۳) به دست می‌آیند. با این وجود، موارد استثنایی وجود دارد که در آن تغییر شکل‌های کوچک نمی‌تواند نادیده گرفته شود بلکه باید مورد توجه قرار گیرد. به عنوان نمونه ای از این نوع، همزمان بر روی نوار نازک نیروهای محوری و جانبی می‌تواند ذکر شود. نیروهای محوری به تنهایی کشش و فشار ساده تولید می‌کنند، اما اگر آنها همزمان با نیروهای جانبی عمل کنند، تاثیر قابل توجهی بر خمش نوار می‌گذارند.

در محاسبه تغییر شکل میله‌ها در چنین شرایطی، اثر انحراف بر گشتاور نیروهای خارجی باید در نظر گرفته شود، حتی اگر انحراف بسیار کوچک است. چرا که انحراف کل دیگر یک تابع خطی از نیروها نیست و نمی‌توان با اصل سوپرپوزیشن ساده به دست آورد.

معادلات (۳) نشان می دهد که رابطه بین طول و تنش ها به طور کامل توسط دو ثابت فیزیکی E و ν تعریف شده است. ثوابت مشابهی نیز می توانند برای تعریف رابطه بین کرنش برشی و تنش برشی استخراج شوند.

بگذارید مورد خاصی از تغییر شکل المان مستطیلی که در آن $\sigma_y = \sigma_z$ و $\sigma_x = 0$ است را در نظر بگیریم. برش المان $abcd$ که توسط صفحه موازی با محور X و 45° درجه محدود به محورهای Y و Z در شکل ν مشاهده می گردد. همچنین برش خالص در شکل $\nu-b$ نشان داده شده است. با جمع کردن نیروها در راستا و عمود بر bc ، تنش نرمال در محیط این المان صفر است و تنش برشی در طرفین برابر است با:

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma_z \quad (ج)$$



شکل ν

چنین وضعیت تنشی برشی خالص نامیده می شود. کشیدگی المان عمودی ob برابر با کوتاه شدگی المانهای افقی oa و oc است و با نادیده گرفتن عبارتهای با مقادیر کم و از مرتبه دوم نتیجه می گیریم که طول bc و ab از المان در طول تغییر شکل، تغییر نمی کند. زاویه بین صفحه های ab و bc تغییر می کند و اندازه ی مربوط به کرنش برشی γ از مثلث obc پیدا می شود. پس از تغییر شکل، داریم:

$$\frac{Oc}{Ob} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \epsilon_y}{1 + \epsilon_z}$$

و با جایگذاری معادله (۳):

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_y) = \frac{(1 + \nu)\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{(1 + \nu)\sigma_z}{E}$$

و همچنین برای مقادیر کوچک کرنش برشی γ :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

و در نتیجه داریم:

$$\gamma = \frac{2(1 + \nu)\sigma_s}{E} = \frac{2(1 + \nu)\tau}{E} \quad (4)$$

بنابراین رابطه بین کرنش برشی و تنش برشی توسط ثوابت E و ν تعریف می شود:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5)$$

در نتیجه رابطه (4) به صورت زیر می شود:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

ثابت G ، تعریف شده توسط (5)، مدول الاستیسیته در برش یا مدول صلبیت نامیده می شود.

اگر تنش های برشی روی محیط یک المان عمل کنند، همانطور که در شکل 3 نشان داده شده است، اعوجاج زاویه بین هر دو محور مختصات تنها به مولفه های استحکام برشی موازی با این محورها بستگی دارد:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad (6)$$

ضرایب انحنای (3) و اعوجاج (6) مستقل از یکدیگر هستند. به این ترتیب، به طور کلی در کرنش تولید شده توسط سه تنش نرمال و سه تنش برشی، می تواند به وسیله اصل سوپرپوزیشن بدست آید: در سه طول انقباض داده شده توسط معادله (3) سه سویه برش داده شده توسط معادلات (6) برآورده می شوند.

معادلات (3) و (6) مولفه های کرنش را به صورت توابع مولفه های تنش ارائه می دهند. گاهی اوقات مولفه های تنش بیان شده به عنوان توابع مولفه های کرنش مورد نیاز است. اینها را می توان به صورت زیر دریافت کرد. با اضافه کردن معادلات (3) و با استفاده از علائم و نشانه ها:

$$\begin{aligned} e &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \\ \theta &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \end{aligned} \quad (7)$$

رابطه زیر بین ضریب انبساط حجمی و مجموع تنش های نرمال به دست می آید:

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} \Theta \quad (8)$$

در حالتی که جسم تحت فشار هیدرواستاتیک p به صورت زیر باشد آنگاه داریم:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

و در نتیجه معادله (8) به صورت زیر می شود:

$$e = - \frac{3(1 - 2\nu)p}{E}$$

که این عبارت، رابطه بین ضریب انبساط حجمی و فشار هیدرواستاتیک را نشان می دهد. عبارت $E/3(1 - 2\nu)$ در علم الاستیسیته به عنوان مدول انبساط حجمی نامیده می شود.

با استفاده از عبارت های موجود در (7) و حل معادله (3) برای $\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x$ داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e + \frac{E}{1 + \nu} \epsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e + \frac{E}{1 + \nu} \epsilon_y \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e + \frac{E}{1 + \nu} \epsilon_z \end{aligned} \quad (9)$$

و یا با استفاده از علائم:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (10)$$

معادله به فرم زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2G\epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\epsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\epsilon_z \end{aligned} \quad (11)$$

مسائل

۱. نشان دهید که معادله (۱) اگر المان شکل ۴ در حال حرکت باشد و شتاب زاویه ای مانند یک جسم صلب داشته باشد، قابل استفاده است.

۲. فرض کنید یک ماده الاستیک حاوی تعداد زیادی از ذرات مغناطیسی کوچک باشد که به طور مساوی در آن توزیع شده باشد، به طوری که یک میدان مغناطیسی بر روی هر المان $dx dy dz$ یک گشتاور $\mu dx dy dz$ در محور موازی با محور x اعمال کند. چه تغییراتی در معادلات مورد نیاز است (۱)؟

۵. با استدلال بیان کنید که فرمول (۲) برای فقط برای کرنش‌های کوچک معتبر است.

۴. یک لایه الاستیسیته بین دو صفحه کاملاً صلب قرار دارد که به آن پیوند داده شده است. لایه بین صفحات فشرده شده است، تنش فشاری σ_z است. فرض بر این است که اتصال به صفحات مانع از حرکت می شود و کرنش $\epsilon_x \epsilon_y$ وجود نداشته باشد. مدول الاستیک در جهت z را برحسب E و ν بدست آورید. نشان دهید که چند بار E است اگر مواد از لایه تقریباً ناپایدار با فشار هیدرواستاتیک است.

۶. ثابت کنید که معادله (۸) از معادلات (۱۱)، (۱۰) و (۵) حاصل می شود.

فصل ۲

تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای

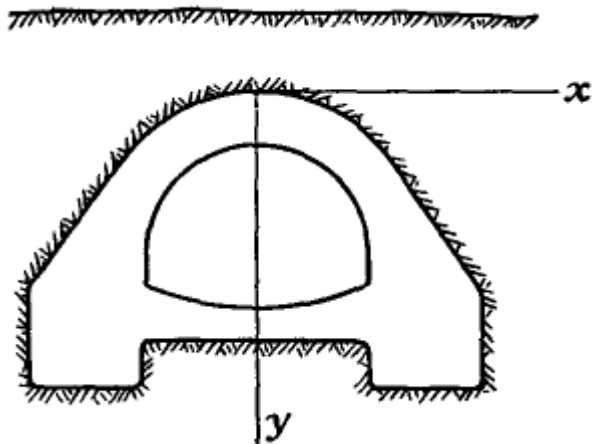
۷- تنش صفحه‌ای

اگر یک ورق نازک توسط نیروهای اعمال شده در مرزهای آن، موازی با صفحه ورق و با توزیع یکنواخت و حول ضخامت، مطابق شکل ۸ بارگذاری شده باشد، مولفه‌های تنش σ_z τ_{xz} τ_{yz} در هر دو طرف صفحات صفر می‌شود و می‌توان فرض نمود که آنها نیز درون صفحه صفر هستند. در این وضعیت تنش‌ها شامل σ_x σ_y τ_{xy} مشخص می‌شود و تنش صفحه‌ای نامیده می‌شود. همچنین ممکن است فرض شود که این سه مولفه مستقل از Z هستند، یعنی آنها از طریق ضخامت تغییر نمی‌کنند. سپس آنها فقط توابع X و Y هستند.

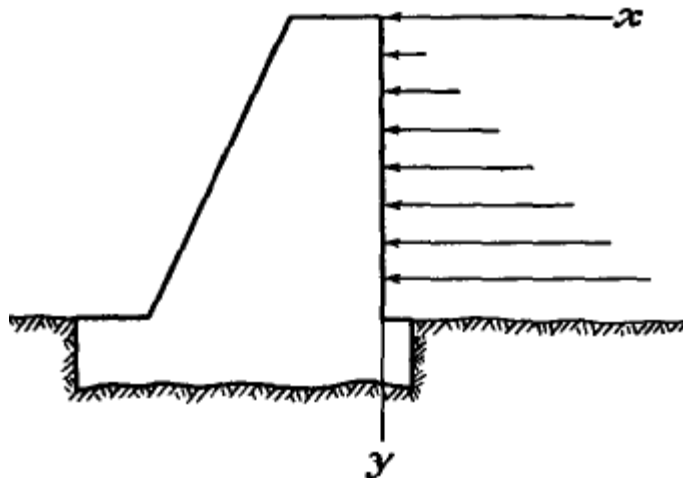
۸- کرنش صفحه‌ای

یک روش ساده مشابه دیگر ممکن است، زمانی که ابعاد جسم در جهت Z بسیار بزرگ است. اگر یک جسم استوانه‌ای یا منشوری شکل بلند با نیروهایی که عمود بر المان طولی هستند و در راستای طولی تغییر نکنند، فرض می‌شود که تمام مقاطع در یک شرایط قرار بگیرند. در ابتدا فرض می‌شود که بخش‌های انتهایی بین صفحه‌های ثابت صلب فیکس شده‌اند تا از جابه‌جایی در جهت محوری جلوگیری شود. اثر حذف این‌ها بعداً بررسی خواهد شد. از آنجایی که هیچ جابجایی محوری در انتها وجود ندارد و با تقارن در وسط بخش، می‌توان قیود مشابه در هر سطح مقطع را تصور نمود. مسائل مهم بسیاری در این حالت وجود دارد: دیوار نگهدارنده با فشار جانبی (شکل ۹)، مخزن یا تونل (شکل ۱۰)، یک لوله استوانه‌ای با فشار داخلی، یک غلتک استوانه‌ای تحت نیروهای فشاری قرار دارد (شکل ۱۱). در هر مورد البته بارگذاری نباید در راستای طول تغییر کند. از آنجائیکه شرایط در تمام مقاطع یکسان است، تنها کافی است که یک تکه را بین دو بخش جداگانه از یکدیگر جدا کنیم. مولفه‌های u و v جابجایی تابع‌های X و Y، اما مستقل از مختصات طولی Z هستند، از آنجا که جابجایی طولی W برابر صفر است، از معادله (۲) داریم:

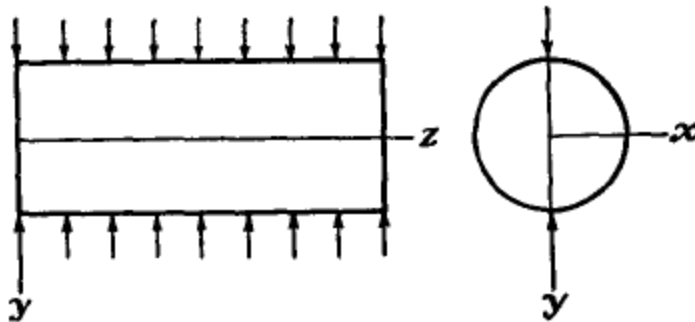
$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0\end{aligned}\tag{الف}$$



شکل ۱۰



شکل ۹



شکل ۱۱

تنش نرمال طولی σ_z را می توان به صورت تابعی از σ_y, σ_x و با استفاده از قانون هوک (معادله (۳)) بدست آورد. از آنجا که $\epsilon_z = 0$ خواهیم داشت:

$$\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

(ب)

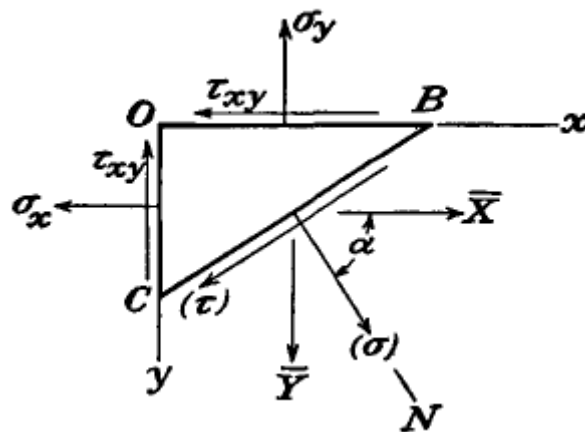
$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

این تنش های نرمال بر روی مقطع عرضی اعمال می شوند، از جمله انتهایی که در آنها نیروهای لازم برای حفظ کرنش صفحه ای را نشان می دهند، و همچنین از طریق صفحات ثابت و صیقلی و صلب مقید شده است.

با استفاده از معادله‌های (الف) و (۶)، مولفه‌های تنش τ_{yz} و τ_{xz} صفر هستند و توسط معادله (b)، σ_z را می‌توان از σ_y, σ_x یافت. بدین ترتیب، مشکل کرنش صفحه‌ای، همانند مسئله تنش صفحه‌ای، به تعیین σ_y, σ_x و τ_{xy} به عنوان توابع X و Y محدود می‌شود.

۹. تنش در یک نقطه

دانستن مولفه‌های تنش $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ در هر نقطه از یک صفحه در شرایط تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای، تنش بر روی هر یک از صفحه‌ها از طریق یک نقطه عمود بر صفحه و در جهت محور X و Y می‌تواند از معادلات استاتیک محاسبه شود. فرض کنید O یک نقطه از صفحه تحت تنش باشد و فرض کنید مولفه‌های تنش σ_x, σ_y و τ_{xy} معلوم باشد (شکل ۱۲). برای پیدا کردن تنش در هر المان واقع در صفحه Z و در راستای X و Y ، یک صفحه BC را به صورت موازی با آن در نظر می‌گیریم، که در فاصله کوچک a از نقطه O باشد. به طوری که این سطح در ترکیب با صفحه‌های حاصل از محورهای مختصات، منشور مثلثی OBC را برش می‌زند. از آنجایی که تنش‌ها به طور پیوسته در پیکره جسم تغییر می‌کنند، تنش بر روی سطح BC به تنش بر روی سطح موازی از طریق O به عنوان المان کوچکتر انجام می‌شود.



شکل ۱۲

در بحث درباره شرایط تعادل منشور کوچک مثلثی، نیروی جسم را می‌توان بعنوان یک مقدار کوچک از یک مرتبه بالاتر نادیده گرفت (صفحه ۴). به همین ترتیب، اگر المان بسیار کوچک باشد، می‌توان تغییرات تنش‌ها را از طرف‌ها نادیده گرفت و فرض کرد که تنش‌ها به صورت یکنواخت توزیع می‌شوند. بنابراین نیروهایی که بر روی منشور مثلثی عمل می‌کنند را می‌توان با ضرب کردن مولفه‌های تنش در سطح مورد نظر بدست آورد. فرض کنید N جهت نرمال به صفحه BC باشد و کسینوس‌های زاویه‌ای بین نرمال N و محورهای X و Y را با رابطه‌های زیر نشان داد:

$$\cos Nx = l, \quad \cos Ny = m$$

سپس، اگر A نشان دهنده مساحت BC از المان باشد، مساحت دو سمت دیگر Al و Am هستند. اگر مولفه‌های تنش اعمالی بر سطح BC را با \bar{X} و \bar{Y} نشان دهیم، معادلات تعادل المان منشور مثلثی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} &= m\sigma_y + l\tau_{xy} \end{aligned} \quad (12)$$

بنابراین، مولفه‌های تنش در هر یک از سطوح می‌تواند به راحتی با استفاده از کسینوس l و m از معادله (12) که در آن σ_x ، σ_y و τ_{xy} معلوم است، محاسبه شود. فرض می‌شود زاویه بین نرمال N و محور X، α باشد، در نتیجه $m = \sin\alpha$ و $l = \cos\alpha$ است، مولفه‌های نرمال و برشی تنش در صفحه BC برابر است با (از معادله 12):

$$\begin{aligned} \sigma &= \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \\ &\quad + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau &= \bar{Y} \cos \alpha - \bar{X} \sin \alpha = \tau_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &\quad + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (13)$$

می‌توان زاویه α را طوری بدست آورد که تنش برشی صفر شود. برای این حالت داریم:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha &= 0 \\ \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \tan 2\alpha \end{aligned} \quad (14)$$

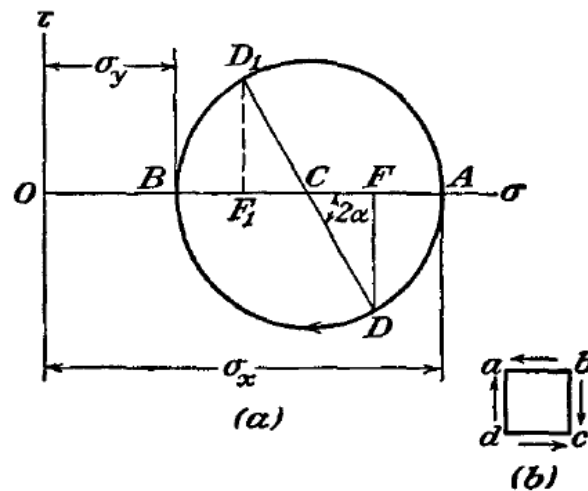
تغییرات مولفه‌های تنش σ و τ را، همانطور که ما زاویه α را تغییر می‌دهیم، می‌توان به صورت گرافیکی به صورتی که مولفه‌های تنش σ و τ محورهای مختصات را تشکیل دهنده، نشان داد. برای هر صفحه یک نقطه در این نمودار که مختصات آن نشان دهنده مقادیر σ و τ است، وجود دارد. شکل ۱۳ این نمودار را نشان می‌دهد. اکنون می‌توان اثبات کرد که می‌توان مولفه‌های تنش برای هر صفحه BC با زاویه α را (شکل ۱۲) با استفاده از مختصات یک نقطه بر روی دایره‌ای به قطر AB نشان داد. برای پیدا کردن نقطه مربوطه تنها کافی است از نقطه A در همان جهت اندازه‌گیری شود، همانطور که در شکل ۱۲ اندازه‌گیری شده است، یک قوس با زاویه ای برابر 2α اندازه‌گیری می‌شود. اگر D نقطه به دست آمده از این روش باشد، در نتیجه از شکل،

$$OF = OC + CF = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha$$

$$DF = CD \sin 2\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha$$

مقایسه با معادلات (13') مشاهده می شود که مختصات نقطه D مقادیر عددی از مولفه های تنش در صفحه BC را در زاویه α نشان می دهد. برای به دست آوردن علامت مولفه های برشی، جهت مثبت τ را رو به بالا (شکل ۱۳) نشان می دهیم و تنش های برشی را وقتی مثبت در نظر می گیریم که هر دو زوج در جهت ساعتگرد در امتداد وجه bc و ad از المان abcd باشند (شکل b ۱۳). تنش برشی در جهت مخالف، در امتداد ab و dc از المان، به صورت منفی در نظر گرفته شده است.^۲

با دوران صفحه BC حول محور عمودی بر صفحه XY (شکل ۱۲) در جهت عقربه های ساعت، و تغییر زاویه α از 0 به $\pi/2$



شکل ۱۳

نقطه D در شکل ۱۳ از A به B حرکت می کند، به طوری که نیم دایره پایینی، تغییر تنش را برای تمام مقادیر α در این محدوده تعیین می کند. نیم دایره بالایی، تنش برای محدوده $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ نشان می دهد.

^۲ این قانون فقط در دایره مور استفاده می شود. در غیر این صورت، قانون داده شده در صفحه ۳ برقرار است.

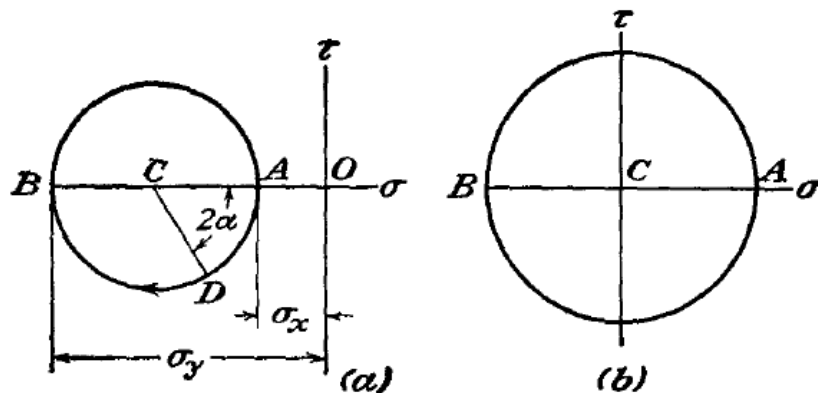
در امتداد شعاع CD تا نقطه D_1 (شکل ۱۳)، یعنی محدوده زاویه $\pi + 2\alpha$ ، تنش در صفحه عمود بر BC (شکل ۱۲) به دست می آید. این امر نشان می دهد که تنش برش روی دو صفحه عمود بر صفحات، برابر با همان مقدار به دست آمده از قبل قبلا هستند. در مورد تنش های عمودی^۴، از شکل زیر می بینیم که $OF_1 + OF = 2OC$ ، یعنی مجموع تنش های عمودی در دو سطح مقطع عمود با تغییر زاویه α ثابت باقی می ماند.

حداکثر تنش برشی در نمودار (شکل ۱۳) توسط حداکثر مقدار عددی مختصات دایره، یعنی برابر با شعاع دایره است. از این رو

$$\tau_{\max.} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (15)$$

این مقدار بر روی صفحه با $\alpha = \pi / 4$ به دست می آید، یعنی در صفحه تقسیم زاویه بین دو تنش اصلی صورت می گیرد.

این نمودار همچنین زمانی می تواند مورد استفاده قرار گیرد که یک یا هر دو تنش اصلی، منفی باشد (تحت حالت فشاری). تنها لازم است علامت مقدار طولی برای تنش فشاری تغییر کند. به این ترتیب شکل ۱۴a نشان دهنده موردی است که هر دو تنش اصلی منفی هستند و شکل ۱۴b در مورد برش خالص به کار می رود..



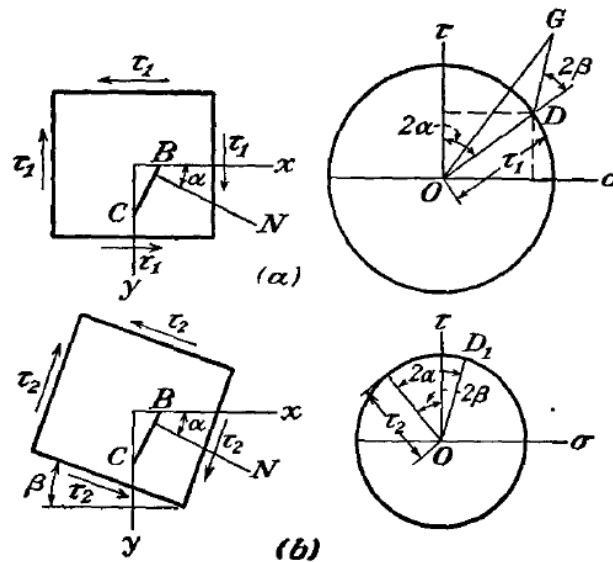
شکل ۱۴

از شکل های ۱۳ و ۱۴ مشاهده می شود که تنش در یک نقطه را می توان به دو بخش تقسیم شود: یک، تنش یکنواخت یا فشاری، که مقدار آن توسط مقدار طول مرکز دایره نشان داده می شود؛ و دیگر، برش خالص، که مقدار آن به

⁴ Normal stress

وسیله مقدار شعاع دایره نشان داده می شود. هنگامی که چند توزیع تنش صفحه روی هم قرار می گیرند، تنش های یکنواخت و یا فشاری را می توان به طور جبری با هم جمع کرد.

برش های خالص باید با توجه به جهت های صفحه ای که در آن عمل می کنند، با هم جمع شوند. می توان نشان داد که اگر دو حالت برش خالص^۵ را که در آن حداکثر برش آن ها زاویه β را با همدیگر می سازند، حالت منتهی مورد دیگری از برش خالص خواهد بود. به عنوان مثال، شکل ۱۵ نشان دهنده تعیین تنش در هر صفحه تعریف شده توسط α است، توسط دو برش خالص با اندازه های τ_1 و τ_2 اعمالی در صفحات XZ و YZ (شکل ۱۵a) و

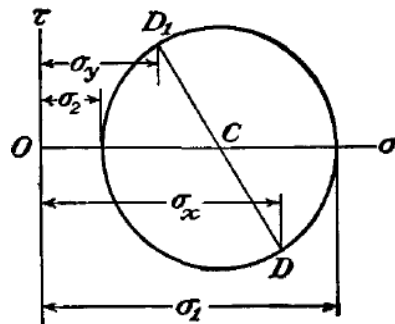


شکل ۱۵

و دیگری در صفحات مایل XZ و YZ با زاویه β است (شکل ۱۵b). در شکل ۱۵a مختصات نقطه D نشان دهنده تنش برشی و عمودی در صفحه CB تولید شده توسط حالت اول است، در حالی که مختصات D_1 (شکل ۱۵b) تنش در این صفحه را برای حالت دوم نشان می دهد. با جمع کردن OD و OD_1 از نظر هندسی، OG به دست می آید که تنش حاصل از هر دو می باشد، مختصات G تنش برشی و عمودی را نشان می دهد. توجه داشته باشید که مقدار OG به α بستگی ندارد. به این ترتیب، در نتیجه جمع کردن دو مقدار برش، دایره مور برای برش خالص به دست می آوریم، که مقدار آن به صورت OG است، صفحات برشی حداکثر مایل XZ و YZ که با مقدار نیم زاویه GOD برابر است.

⁵ Pure shear

نمودار نشان داده شده در شکل ۱۳ را می توان برای تعیین تنش های اصلی^۶ با مشخص بودن مولفه های دو صفحه عمود بر هم σ_x ، σ_y ، τ_{xy} به کار برد. در چنین مواردی با داشتن نقاط D و D_1 ، نشان دهنده مقادیر تنش ها در دو صفحه مختصات به دست می آید (شکل ۱۶).



شکل ۱۶

به این ترتیب قطر DD_1 برای دایره بدست می آید. با رسم دایره، تنش های اصلی σ_1 و σ_2 از تقاطع دایره با محور طولی حاصل می شود. از شکل داریم:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= OC + CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= OC - CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}\quad (16)$$

حداکثر تنش برشی توسط شعاع دایره به دست می آید، یعنی

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\quad (17)$$

به این ترتیب تمام ویژگی های لازم توزیع تنش در یک نقطه را می توان به دست آورد، در صورتی که تنها سه مقدار σ_x ، σ_y ، τ_{xy} به معلوم باشد.

۱۰. کرنش در یک نقطه. در صورت مشخص بودن مولفه های کرنش ϵ_x ، ϵ_y ، γ_{xy} در یک نقطه، ازدیاد طول واحد برای هر جهت و کاهش زاویه نسبت به راستا - کرنش برشی - در هر جهت در نقطه را می توان یافت. خط

⁶ Principal stress

PQ (شکل ۱۷a) بین نقاط (x, y) و $(x + dx, y + dy)$ با تغییر شکل به $P'Q'$ انتقال می یابد. مولفه های جابجایی P ، برابر u ، v و برای Q برابرند با:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

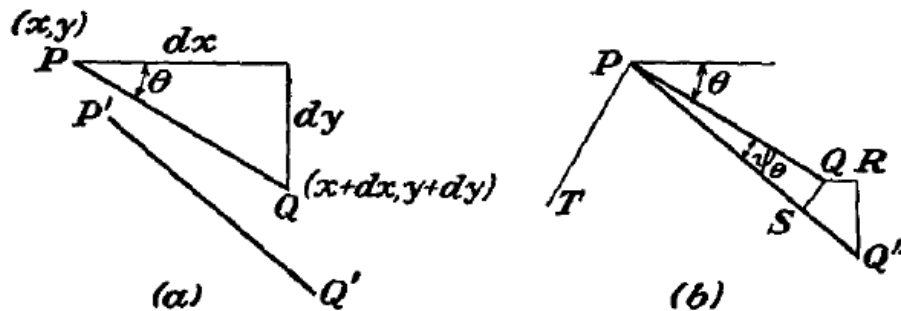
اگر $P'Q'$ در شکل ۱۷a به طوری انتقال یابد که P' به P بازگردد، آن را در موقعیت مثبت PQ'' از شکل ۱۷b، و QR ، RQ'' نشان دهنده مولفه های جابجایی نسبت Q به P هستند. بنابراین

$$QR = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad RQ'' = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (a)$$

مولفه های این جابجایی نسبی QS ، SQ'' ، عمود بر PQ'' و در امتداد PQ'' را می توان به صورت زیر یافت:

$$QS = -QR \sin \theta + RQ'' \cos \theta, \quad SQ'' = QR \cos \theta + RQ'' \sin \theta \quad (b)$$

زاویه کوچک QPS در مقایسه با θ نادیده گرفته می شود. با توجه به این که خط کوتاه QS با قوس یک دایره با مرکز P مشخص می شود، SQ'' مقدار کشیدگی PQ را نتیجه می دهد.



شکل ۱۷

از یاد طول واحد $P'Q'$ با علامت ϵ_θ برابر SQ'' / PQ است. با استفاده از (a) و (b) داریم:

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta &= \cos \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\epsilon_{\theta} = \epsilon_x \cos^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta \quad (c)$$

که ازدیاد^۷ طول واحد را برای هر جهت θ می دهد.

زاویه ψ_{θ} با دوران PQ برابر QS/PQ است. بنابراین از (b) و (a) داریم:

$$\psi_{\theta} = -\sin \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right)$$

یا

$$\psi_{\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta \quad (d)$$

خط PT و راستای PQ دارای زاویه $\theta + \pi/2$ با جهت x هستند و بنابراین دوران $\psi_{\theta} + \pi/2$ آن با جایگزینی $\theta + \pi/2$ با θ عبارت (d) را می دهد. با توجه به

$$\sin [\theta + (\pi/2)] = \cos \theta, \text{ و } \cos [\theta + (\pi/2)] = -\sin \theta,$$

داریم:

$$\psi_{\theta + \frac{\pi}{2}} = \frac{\partial v}{\partial x} \sin^2 \theta - \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \cos^2 \theta \quad (e)$$

کرنش برشی γ_{θ} برای جهت PQ، PT برابر $\psi_{\theta} - \psi_{\theta + \frac{\pi}{2}}$ بنابراین:

$$\gamma_{\theta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) 2 \sin \theta \cos \theta$$

یا

$$\frac{1}{2} \gamma_{\theta} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\epsilon_y - \epsilon_x) \sin \theta \cos \theta \quad (f)$$

با مقایسه (c) و (f) با (۱۳) مشاهده می کنیم که این عبارت ها از (۱۳) با جایگزینی σ با ϵ_{θ} ، τ با $\gamma_{\theta}/2$ ، σ_x با ϵ_x ، σ_y با ϵ_y ، τ_{xy} با $\gamma_{xy}/2$ به دست می آیند. در نتیجه برای هر عبارت از (۱۳) شامل σ و τ ، عبارتی متناظر از (c) و

⁷ Elongation

(f) شامل ϵ_θ و $\gamma_\theta/2$ وجود دارد. بنابراین دو مقدار برای θ با 90° درجه تفاوت وجود دارد، که در آن ها γ_θ صفر است که به صورت زیر داده می شود:

$$\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \tan 2\theta$$

کرنش های مربوط به ϵ_θ کرنش های اصلی هستند. نمودار دایره مور مشابه شکل ۱۳ یا شکل ۱۶ با مختصات عرضی نشان دهنده $\gamma_\theta/2$ و محور طولی ϵ_θ است. کرنش های اصلی ϵ_1 و ϵ_2 بیشترین و کمترین مقادیر ϵ_θ را به صورت تابعی از θ نشان می دهند. بزرگترین مقدار $\gamma_\theta/2$ برابر با شعاع دایره است. بنابراین بیشترین مقدار کرنش برشی^۸ $\gamma_\theta \max$ برابر است با:

$$\gamma_\theta \max = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

۱.۱. اندازه گیری کرنش های سطحی. کرنش ها یا ازدیاد طول واحد در صفحه معمولاً به راحتی با استفاده از کرنش سنج های مقاومت الکتریکی^۹ اندازه گیری می شوند. ساده ترین شکل این نوع، سیم کوتاه عایق و چسبیده به صفحه است. هنگامی که حالت کشش رخ می دهد، مقاومت سیم افزایش می یابد، و بنابراین کرنش را می توان به صورت الکتریکی اندازه گیری کرد. این اثر معمولاً با متصل کردن سیمها در جهت عقب و جلو، به شکل چندین طول سری بررسی می شود. سیم میان دو برکه کاغذ چسبانده شده و به سطح چسبانده می شوند.

استفاده از این سنسورها زمانی ساده است که جهت های اصلی معلوم باشد. یک کرنش سنج در هر جهت اصلی قرار داده شده و اندازه گیری های مستقیم ϵ_1 و ϵ_2 به دست می آید. سپس تنش های اصلی σ_1 و σ_2 را می توان از قانون هوک بدست آورد، معادله (۳) $\sigma_1 = \sigma_x$ و $\sigma_2 = \sigma_y$ ، با این فرض که هیچ گونه تنش اعمالی بروی سطح وجود ندارد. که به آن اندازه گیری ها متصل است متصل است. بنابراین:

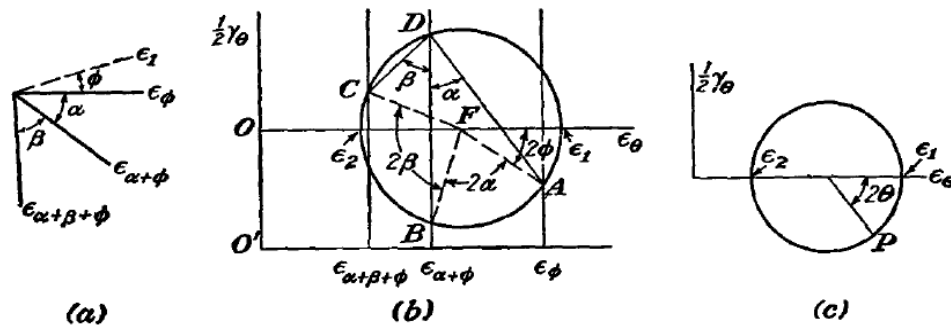
$$(1 - \nu^2)\sigma_1 = E(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2), \quad (1 - \nu^2)\sigma_2 = E(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1)$$

در صورتی که جهت اصلی از قبل معلوم نباشد، سه مورد اندازه گیری مورد نیاز است. بنابراین حالت تعیین کامل کرنش با ϵ_x ، ϵ_y ، γ_{xy} مشخص می شود.

⁸ Shear strain

⁹ نحوه انجام این روش در "راهنمای تجزیه و تحلیل تنش تجربی"، فصول ۵ و ۹ داده شده است.

اما با توجه به کرنش‌ها اندازه‌گیری شده‌اند، و کرنش برشی اندازه‌گیری نشده، اندازه‌گیری در سه جهت در یک نقطه راحت‌تر است. چنین مجموعه‌ای از کرنش‌سنج‌ها "روزت کرنش" نامیده می‌شود. دایره مور را می‌توان توسط ساختار ساده شکل ۱۲ رسم کرد و سپس کرنش‌های اصلی را محاسبه کرد. سه کرنش‌سنج توسط سه خط کامل در شکل ۱۸a نشان داده شده است. خط نقطه چین (ناشناخته) جهت کرنش اصلی ϵ_1 ، که در جهت دوران در جهت عقربه‌ساعت ϕ از اولین کرنش‌سنج اول به دست می‌آید.



شکل ۱۸

اگر جهت Z و Y برای معادله (c) و (f) به عنوان جهت‌های اصلی در نظر گرفته شود، ϵ_x برابر ϵ_1 ، ϵ_y برابر ϵ_2 ، و γ_{xy} برابر صفر است. در نتیجه معادلات به صورت زیر خواهد بود:

$$\epsilon_\theta = \epsilon_1 \cos^2 \theta + \epsilon_2 \sin^2 \theta, \quad \frac{1}{2}\gamma_\theta = -(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin \theta \cos \theta$$

که در آن θ زاویه اندازه‌گیری شده از جهت ϵ_1 است که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\theta, \quad \frac{1}{2}\gamma_\theta = -\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin 2\theta$$

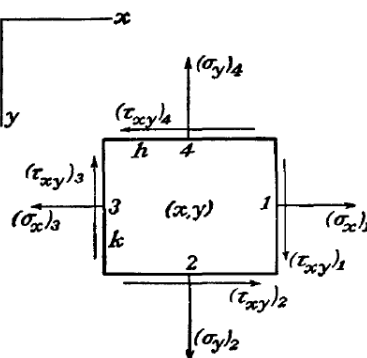
و این مقادیر توسط نقطه P در دایره در شکل ۱۸c نشان داده شده است. اگر θ دارای مقدار ϕ باشد، P مربوط به نقطه A در دایره شکل ۱۸b و جابجایی زاویه‌ای از محور ϵ_θ برابر 2ϕ است. محور طولی این نقطه ϵ_ϕ است. اگر θ دارای مقدار $\phi + \alpha$ باشد، P روی B قرار گرفته و با ایجاد زاویه $AFB = 2\alpha$ ، و محور طولی برابر $\epsilon_{\phi+\theta+\alpha}$

خواهد شد. اگر θ دارای مقدار $\phi + \theta + \alpha$ باشد، P با حرکت به سمت C، و ایجاد زاویه بیشتر $BFC = 2\beta$ ، محور طولی $\epsilon_{\phi+\beta+\alpha}$ به دست می آید.

مسئله رسم دایره مور زمانی که این سه محور طولی و دو زاویه α و β معلوم است.

۱۲. رسم دایره کرنش مور برای روزت کرنش. محور افقی از مبدأ O' ، به صورت شکل ۱۸b رسم می شود و سه کرنش اندازه گیری شده ϵ_{ϕ} ، $\epsilon_{\phi+\alpha}$ ، $\epsilon_{\phi+\beta+\alpha}$ در امتداد آن قرار داده می شود. محورهای عمودی از این نقاط کشیده می شود. با انتخاب هر نقطه D در جهت عمودی عبوری از $\epsilon_{\phi+\alpha}$ ، خطوط DA، DC در زاویه α و β نسبت به عمودی در D، همچون برای A و C رسم می شوند. دایره رسم شده از A، D، و C دایره مدنظر است. مرکز F آن بر حسب تقاطع خطوط عمود بر هم CD و DA تعیین می شود. نقاط نشان دهنده سه جهت کرنش سنج ها A، B و C هستند. زاویه AFB، دو برابر زاویه ADB در محیط برابر 2α و برای BFC برابر 2β است. بنابراین A، B، C در زاویه مورد نیاز فواصل دور دایره قرار دارند. حال، محور ϵ_{θ} را می توان به صورت OF، و فاصله از O تا تقاطعات با دایره برابر ϵ_1 و ϵ_2 هستند. زاویه 2ϕ برابر زاویه FA زیر این محور است.

۱۳. معادلات دینفرانسیل تعادل. اکنون تعادل المان مستطیلی^{۱۱} کوچک در لبه های h و k واحد را در نظر می گیریم (شکل ۱۹). تنش های اعمالی روی وجوه ۱، ۲، ۳، ۴ و جهت مثبت آنها در شکل ذکر شده اند. با تغییر تنش، به عنوان مثال، σ_x برای وجه ۱ کاملاً مشابه وجه ۳ نیست. نمادهای σ_{yx} و σ_{xy} اشاره به نقطه x ، y ، نقطه وسط مستطیل در شکل ۱۹ دارد. مقادیر در نقاط وسط سطوح با $(\sigma_x)_1$ ، $(\sigma_x)_3$ و غیره مشخص می شود. با توجه به اینکه سطح ها بسیار کوچک هستند، نیروهای متناظر با ضرب کردن این مقادیرها بر سطح نیروی اعمالی به آنها به دست می آیند^{۱۲}.



¹¹ Rectangular element

¹² حالت دقیق تر با شرایط مرتبه بالاتر غیرتاثیرگذار در روند نهایی، حذف شده اند.

شکل ۱۹

نیروی حجمی^{۱۳} اعمالی بر روی المان، که با مقدار کم و مرتبه بالاتر در تعادل منشور مثلثی شکل ۱۲ نادیده شده، در این قسمت باید مورد توجه قرار گیرد، زیرا دارای مرتبه هم اندازه تغییرات مولفه های تنش هستند. اگر X, Y مولفه های نیروی حجمی در واحد حجم باشند، معادله تعادل برای نیروها در جهت X برابر است با:

$$(\sigma_x)_1 k - (\sigma_x)_3 k + (\tau_{xy})_2 h - (\tau_{xy})_4 h + X h k = 0$$

و با تقسیم بر $h k$ داریم:

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} + X = 0$$

حال اگر المان کوچکتر و کوچکتر شود، یعنی $k \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ حد $[(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3]/h$ برابر $\partial\sigma_x/\partial x$ است که برابر با تعریف مشتق آن است. به طور مشابه $[(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4]/k$ برابر $\partial\tau_{xy}/\partial y$ می شود. معادله تعادل برای نیروها در جهت Y به همان روش به دست می آید.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

در کاربردهای عملی، نیروی وزن بدن معمولاً تنها نیروی حجمی اعمالی است. پس، با در نظر گرفتن محور Y به سمت پایین و ρ ، جرم در واحد حجم، معادله (۱۸) تبدیل به:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \rho g &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

موارد بالا، معادلات دیفرانسیل تعادل برای مسائل دو بعدی است.

¹³ Body forces

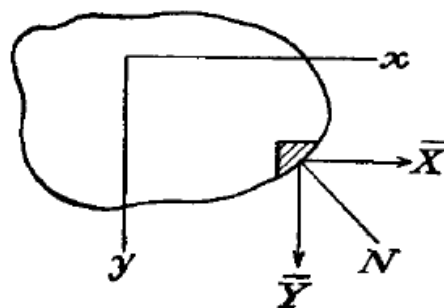
۱۴. شرایط مرزی. معادلات (۱۸) یا (۱۹) باید در تمام نقاط در سراسر حجم اراض شوند. مولفه های تنش در طول حجم صفحات متغیر هستند، و در مرز وارد، باید در تعادل با نیروهای خارجی در مرز صفحه قرار بگیرند، به طوری که نیروهای خارجی در ادامه توزیع تنش داخلی وارد عمل شوند. این شرایط تعادل در مرز را می توان از معادله (۱۲) بدست آورد. با استفاده از منشور کوچک مثلی OBC (شکل ۱۲)، به طوری که لبه BC منطبق بر مرز صفحه باشد، همانطور که در شکل ۲۰ نشان داده شده است و با استفاده از \bar{X} و \bar{Y} به عنوان مولفه های نیروهای صفحه ای در واحد صفحه در این نقطه مرزی، داریم:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} &= m\sigma_y + l\tau_{xy}\end{aligned}\quad (20)$$

که در آن l و m ، کسینوس جهت عمودی N نسبت به مرز است. در مورد خاص یک صفحه مستطیلی، محورهای مختصات معمولاً به صورت موازی با دو طرف صفحه قرار می گیرند و شرایط مرزی (۲۰) می تواند ساده شود. برای مثال، یک طرف صفحه موازی با محور X برای این قسمت از مرز، عمود N به صورت موازی با محور Y است؛ از این رو $m = \pm 1$ و $l = 0$. پس معادلات (۲۰) برابر می شوند با:

$$\bar{X} = \pm \tau_{xy}, \quad \bar{Y} = \pm \sigma_y$$

در اینجا در صورتی که عمود N در جهت مثبت محور Y باشد، علامت مثبت باید در نظر گرفته شود و علامت منفی برای مخالف جهت آن مورد نظر است. همانطور که مشاهده می شود در مرز، مولفه 14 های تنش برابر با مولفه های نیروهای صفحه در واحد صفحه مرز هستند.



شکل ۲۰

۱۵. معادلات سازگاری. مسئله تئوری الاستیسیته معمولاً تعیین کننده وضعیت تنش در حجم در معرض نیروی اعمالی است. در مورد یک مسئله دو بعدی، لازم است معادلات دیفرانسیل تعادل (۱۸) حل شود و حل باید به گونه ای باشد تا شرایط مرزی را برآورده کند (۲۰). این معادلات با استفاده از معادلات استاتیک برای مولفه های المان صلب و سه عبارت تنش، σ_x ، σ_y و τ_{xy} برای تعیین این مولفه ها کافی نیست. مسئله به صورت استاتیک نامعلوم است، و برای به دست آوردن حل، بایستی تغییر شکل^{۱۵} الاستیک بدنه را نیز مورد توجه قرار داد.

فرمولبندی ریاضی شرط سازگاری توزیع تنش با وجود توابع پیوسته u ، v ، w با تعریف تغییر شکل از معادلات (۲) به دست می آید. در مورد مسائل دو بعدی، تنها سه مولفه کرنش کافی است:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (a)$$

این سه مولفه کرنش توسط دو تابع u و v بیان می شود. از این رو آنها نمی توانند به طور دلخواه اتخاذ شوند و بین مولفه های کرنش که به راحتی از (a) به دست می آید، یک رابطه مشخص وجود دارد. با دیفرانسیل گیری از (a) نسبت به y ، و بار دوم و سوم نسبت به x ، داریم:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (21)$$

این رابطه دیفرانسیل، که شرایط سازگاری نامیده می شود، باید توسط مولفه های کرنش برای تضمین وجود توابع u و v در مولفه های کرنش معادلات (a) با استفاده از قانون هوک [معادلات (۳)] در نظر گرفت، شرط (۲۱) را می توان به رابطه بین مولفه های تنش تبدیل کرد.

در مورد توزیع تنش صفحه ای (شکل ۷)، معادله (۳) به صورت زیر کاهش می یابد:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (22)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \quad (23)$$

با جایگزینی معادلات بالا در معادله (۲۱)، داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (b)$$

این معادله را می توان با استفاده از معادلات تعادل به شکل دیگری نوشت. برای مواردی که وزن حجم، تنها نیروی اعمالی است، اولین عددی را که اولویت دارد، با دیفرانسیل گیری^{۱۶} مرتبه اول معادله (۱۹) نسبت به X و بار دوم نسبت به Y و جمع کردن آنها، درمی یابیم که:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

با جایگزینی در معادله (b)، معادله سازگاری از لحاظ مولفه های تنش برابر است با:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (24)$$

با توجه به معادلات کلی تعادل (۱۸) همانطور که در ادامه آمده است، داریم:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (25)$$

در مورد کرنش صفحه ای (شکل ۸)، داریم:

$$\sigma_x = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (25)$$

و از قانون هوک (معادله ۳)، داریم:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y] \quad (26)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \quad (27)$$

¹⁶ Differentiating

با جایگزینی در معادله (۲۱)، و با استفاده از معادلات تعادل (۱۹)، معادله سازگاری (۲۴) برای کرنش صفحه ای نیز برقرار است. برای موارد کلی نیروهای حجمی از معادله (۲۱) و (۱۸) معادله سازگاری در فرم زیر به دست می آید:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \quad (28)$$

معادلات تعادل (۱۸) یا (۱۹) همراه با شرایط مرزی (۲۰) و یکی از معادلات سازگاری بالا به ما یک سیستم معادلات را ارائه می دهد که معمولاً برای تعریف کامل توزیع تنش در دو حالت مسئله دو بعدی کافی است.^{۱۷} موارد خاص با ملاحظات اضافی بعداً مورد بحث قرار می گیرند (صفحه ۱۱۷). جالب است توجه داشته باشید که در مورد نیروهای ثابت حجمی، معادلات تعیین توزیع تنش شامل ثابت های الاستیک مواد نیستند. از این رو توزیع تنش برای تمام مواد همسانگرد یکسان است، در صورتی که معادلات برای تعیین کامل تنش ها کافی است. نتیجه گیری از اهمیت عملی به این صورت است: بعداً خواهیم دید که در مورد مواد شفاف، مانند شیشه یا زایلونیت، تنش ها را با روش نوری با استفاده از نور پلاریزه تعیین می کنند (صفحه ۱۳۱). از بحث فوق، واضح است که نتایج آزمایشگاهی که با مواد شفاف به دست می آید در اغلب موارد می تواند برای سایر مواد مانند فولاد اعمال شود.

لازم به ذکر است که در مورد نیروهای ثابت حجمی، معادله سازگاری (۲۴) هر دو برای مورد تنش صفحه و برای مورد کرنش صفحه ای نیز وجود دارد. از این رو توزیع تنش در این دو مورد یکسان است، زیرا شکل مرز و نیروهای خارجی مشابه هستند.^{۱۸}

۱۶. تابع تنش. نشان داده شد که حل مسائل دو بعدی به انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل تعادل با معادله سازگاری و شرایط مرزی کاهش می یابد. با در نظر گرفتن وزن حجمی به عنوان تنها نیروی اعمالی، معادلات مورد نظر جهت ارضا برابر هستند با (معادلات ۱۹ و ۲۴ را ببینید)

^{۱۷} در حالت تنش صفحه ای، شرایط سازگاری غیر از (۲۱) وجود دارد که در حقیقت توسط مفروضات ما نقض می شوند. این موارد شکل ۸۴ نشان داده شده است و به رغم این که روش ارائه شده در این فصل، تقریب خوبی برای صفحات نازک دارد.

^{۱۸} این عبارت ممکن است در صورت وجود سوراخ در صفحه یا سیلندر نیاز به تغییر داشته باشد، پس از آن، مسئله تنها با در نظر گرفتن جابه جایی و همچنین تنش می تواند به درستی حل شود. شکل ۳۹

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (b)$$

برای این معادلات، شرایط مرزی (۲۰) نیز باید اضافه شود. روش معمول حل این معادلات با معرفی یک تابع جدید، به نام تابع تنش^{۱۹} صورت می گیرد. همانطور که به راحتی بررسی شد، معادلات (a) با در نظر گرفتن هر تابع Φ از X و Y و قرار دادن آن ها در عبارات زیر برای مولفه های تنش ارضا می شوند:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho g y, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho g y, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (29)$$

به این ترتیب می توان انواع حل معادلات تعادل (a) را دریافت. حل واقعی این مسئله این است که معادله سازگاری (b) را نیز ارضا کند. با جایگزینی معادلات (۲۹) برای مولفه های تنش در معادله (b) درمیابیم که تابع تنش ϕ باید معادله را ارضا کند:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (30)$$

بنابراین حل مسئله دو بعدی، هنگامی که وزن حجمی تنها نیروی حجمی اعمالی است، به یافتن حل معادله (۳۰) با ارضای شرایط مرزی (۲۰) مسئله منجر می شود. در فصل های بعد، این روش حل به چند نمونه از موارد عملی اعمال خواهد شد.

مورد کلی تر از نیروهای حجمی را در نظر گرفته و فرض کنید که این نیروها دارای یک پتانسیل^{۲۰} هستند. سپس مولفه های X و Y در معادلات ۱۸ توسط معادلات زیر داده می شود:

$$X = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$Y = - \frac{\partial V}{\partial y} \quad (c)$$

^{۱۹} این تابع در حل مسائل دو بعدی توسط Brit, G. B. Airy ۱۸۶۲ معرفی شد.

که در آن V تابع پتانسیل است. معادلات (۱۸) برابر می شوند با:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

این معادلات از فرم همسان معادله (a) هستند و می با در نظر گرفتن شرایط زیر اراض می شوند:

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (31)$$

که در آن ϕ ، تابع تنش است. با جایگزینی عبارات (۳۱) در معادله سازگاری (۲۵) برای توزیع تنش صفحه ای (۳۱):

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = - (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (32)$$

معادله ی مشابهی را می توان برای موارد کرنش صفحه ای بدست آورد.

هنگامی که نیروی بدنه ای نیروی وزن باشد، پتانسیل V برابر $-\rho gh$ خواهد بود. در این حالت، سمت راست معادله (۳۲) برابر صفر می شود. با در نظر گرفتن حل $\phi = 0$ از (۳۲) یا (۳۰) توزیع تنش را از (۳۱) یا (۲۹) را به عنوان حالت احتمالی تنش با در نظر گرفتن گرانش مشاهده می کنیم،

$$\sigma_x = -\rho gy, \quad \sigma_y = -\rho gy, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (d)$$

این مورد، یک حالت فشار هیدرواستاتیک ρgy در دو بعد با تنش صفر در $y = 0$ است. این حالت می تواند در یک صفحه یا سیلندر با هر شکل در نیروهای مرزی اعمالی وجود داشته باشد. المان مرزی شکل ۱۲ را در نظر بگیرید. معادلات (۱۳) نشان می دهد که بایستی فشار عمودی ρgy در مرز و تنش برشی صفر وجود داشته باشد. در صورتی که صفحه یا سیلندر به نحوی دیگر دارای تکیه گاه باشد، بایستی تنش عمودی مرزی و نیروهای جدید تکیه گاه را در نظر بگیریم. این دو در کنار هم در تعادل قرار می گیرند و تعیین اثرات آنها مسئله نیروهای مرزی و بدون نیروهای حجمی است.^{۲۱}

^{۲۱} این مسئله و مورد کلی پتانسیل V و با حذف سمت راست معادله (۳۲)، توسط M. Biot، J. مکانیک کاربردی (Trana A.S.M.E.)، 1935، p. مورد بحث قرار گرفته است.

مسائل

۱. نشان دهید که معادلات (۱۲) برای المان شکل ۱۲ و دارای شتاب معتبر است.

۲. کرنش های اصلی و جهت های آنها را از اندازه گیری های روزت کرنش سنج زیر را رسم کنید:

$$\epsilon_{\phi} = 2 \times 10^{-3} \quad \epsilon_{\phi+\alpha} = 1.35 \times 10^{-3} \quad \epsilon_{\beta+\phi+\alpha} = 0.95 \times 10^{-3}$$

$$\beta = \alpha = 45$$

۳. نشان دهید المان های خط در نقطه x, y که دارای حداکثر و حداقل دوران هستند، در دو جهت عمود بر θ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\tan 2\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

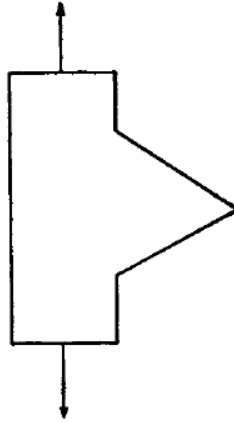
۴. تنش در یک دیسک دوار (با ضخامت واحد) می تواند به دلیل نیروی گریز از مرکز در یک دیسک ثابت باشد. نشان می دهد که این نیروی بدنه ای از پتانسیل: $V = -\frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + y^2)$ به دست می آید، که در آن ρ چگالی و ω سرعت زاویه ای چرخش (حول مبدا) است.

۵. دیسک با محور افقی آن دارای تنش گرانشی نشان داده شده توسط معادلات (d) شکل ۱۶ است. طرحی را رسم کنید که نیروهای مرزی تکیه گاه ناشی از وزن را نشان دهد. با طرح دیگری نیروهای مرزی و باید حل آن را با وزن کامل توسط واکنش صفحه افقی بر روی دیسک نشان دهید.

۶. سیلندر با محور افقی آن دارای تنش گرانشی است که توسط معادلات (d) شکل ۱۶ نشان داده شده است. انتهای آن در میان صفحه های صلب و محکم با شرایط کرنش صفحه ای قرار دارد. طرح نیروهای اعمالی روی صفحه آن از جمله انتهای آن را رسم کنید.

۷. با استفاده از روابط تنش-کرنش و معادلات (a) از شکل ۱۵ در معادلات تعادل (۱۸) نشان دهید در غیاب نیروهای بدنه ای، جابجایی در مسئله تنش صفحه ای به صورت زیر باید برآورده شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$



۸. شکل نشان دهنده یک "دندانه" بر روی یک صفحه در حالت تنش صفحه ای در صفحه کاغذ است. سطوح دندانه (دو خط مستقیم) بدون نیرو است. ثابت کنید که هیچ گونه تنشی در نوک دندانه وجود ندارد. (نتیجه مشابه را نمی توان برای گوشه های داخلی در نظر گرفت.)

فصل سوم

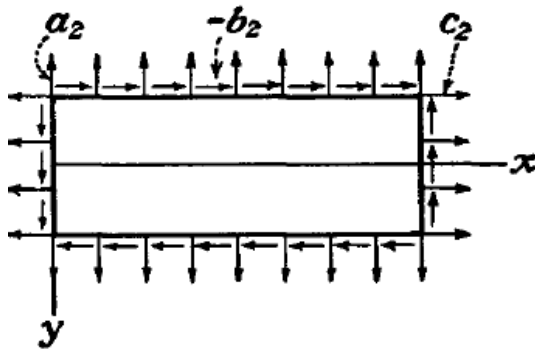
مسائل دو بعدی در مختصات مستطیلی

۱۷. حل توسط چندجمله ای ها. حل مسائل دو بعدی، بدون نیروهای بدنه ای یا ثابت، به انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل زیر تقلیل می یابد:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

با توجه به شرایط مرزی (۲۰). در مورد نوارهای طولی مستطیلی، حلهای معادلات (a) به شکل چندجمله ای هستند. با در نظر گرفتن چندجمله ای از مقادیر مختلف و ضرایب آنها، برخی از مسائل مهم را می توان حل کرد. با در نظر گرفتن چند جمله ای درجه دوم زیر:

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2 \quad (b)$$



شکل ۲۱

و ارضای معادله (a)، از معادلات (۲۹) و قرار دادن $\rho g = 0$:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = c_2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = a_2, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} = -b_2$$

تمام مولفه های تنش در سراسر حجم ثابت است، یعنی تابع تنش (b) ترکیبی از تنش و یا فشارهای^{۲۲} یکنواخت در دو جهت عمود برهم و برش واحد یکنواخت است. نیروها در مرزها باید در این نقاط با تنش های اعمالی در صفحات برابر باشند، که در صفحه ۲۳؛ در مورد یک صفحه مستطیلی با دو طرف موازی با محور مختصات بحث شده و این نیروها در شکل ۲۱ نشان داده شده است.

حال، یک تابع تنش به شکل چندجمله ای درجه سوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} x y^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3 \quad (c)$$

^{۲۲} این مقادیر بستگی به نشانه ضرایب a_2 و b_2 دارد. جهت های تنش که در شکل ۲۱ نشان داده شده است، مربوط به مقادیر مثبت a_2 ، b_2 ، c_2 هستند.

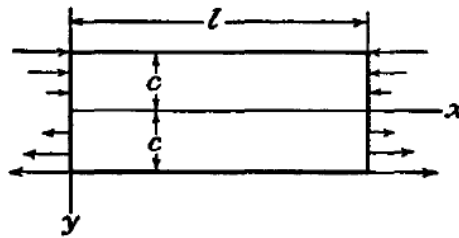
این حالت، معادله (a) را ارضا می کند. با استفاده از معادلات (۲۹) و قرار دادن $\rho g = 0$ داریم:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y$$

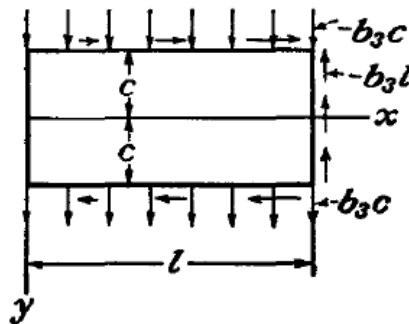
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial y} = -b_3 x - c_3 y$$

برای یک صفحه مستطیلی که در شکل ۲۲ آمده است، با فرض اینکه همه ضرایب به غیر از d_3 برابر با صفر باشند، خمش خالص به دست می آید. اگر فقط ضریب a_3 صفر نباشد، خمش خالص^{۲۳} ناشی از تنش های عمودی در $y = \pm c$ از صفحه اعمال می شود. اگر ضریب b_3 یا c_3 صفر نباشد، نه تنها تنش های عمودی، بلکه همچنین تنش های برشی که روی دو طرف صفحه عمل می کنند، به دست می آید.



شکل ۲۲



شکل ۲۳

به عنوان مثال، شکل ۲۳ نشان می دهد، مورد که در آن همه ضرایب، بجز b_3 تابع (c)، برابر با صفر است. جهت های تنش نشان داده شده برای b_3 مثبت است. در $y = \pm c$ توزیع تنش کششی و فشاری به طور یکنواخت بوده و تنش

برشی متناسب با x است. در $x = 1$ ، تنها تنش برشی ثابت بوده، و هیچ گونه تنش بر روی $x = 0$ وجود ندارد. اگر ضریب C_3 صفر نباشد، توزیع تنش به طور مشابه به دست می آید.

با تابع تنش به شکل چندجمله ای درجه دوم و سوم، در انتخاب مقادیر ضرایب کاملاً آزاد خواهیم بود، زیرا معادله (a) به ازای تمام مقادیر ارضا می شود. در مورد چندجمله ای های درجه بالاتر معادله (a) تنها در صورت وجود روابط معینی بین ضرایب، ارضا می شود. با در نظر گرفتن....