

برای مثال تابع تنش به صورت یک چندجمله‌ای درجه چهار به شکل زیر است:

$$\phi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^2 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4 \quad (d)$$

و با جایگزینی در رابطه (a) درمی‌یابیم که این رابطه تنها در صورتی ارضا می‌گردد که عبارت زیر برقرار باشد

$$e_4 = -(2c_4 + a_4)$$

مولفه‌های تنش در این مورد عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial y^2} = c_4 x^2 + d_4 x y - (2c_4 + a_4) y^2 \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x^2} = a_4 x^2 + b_4 x y + c_4 y^2 \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x \partial y} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 x y - \frac{d_4}{2} y^2 \end{aligned}$$

ضرایب a_4, \dots, d_4 در این عبارات اختیاری هستند و با تنظیم مناسب آنها می‌توانیم به شرایط متعدد بارگذاری یک صفحه مستطیلی دست پیدا می‌نمائیم. برای نمونه با برابر صفر قرار دادن تمامی ضرایب به جز d_4 عبارات زیر حاصل می‌گردند:

$$\sigma_x = d_4 x y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2 \quad (e)$$

با مثبت فرض کردن d_4 ، نیروهای وارد بر صفحه مستطیلی نشان داده شده در شکل 24 و تنش‌های به وجود آمده به شرح ذیل هستند. دراضلاع طولی $y = \pm c$ ، نیروهای برشی به صورت یکنواخت توزیع یافته‌اند و در انتهای این صفحه نیروهای برشی براساس قانون سهمی توزیع می‌گردند. نیروهای برشی وارد بر مرز صفحه به یک جفت کاهش پیدا می‌کنند.

$$M = \frac{d_4 c^2 l}{2} \cdot 2c - \frac{1}{3} \frac{d_4 c^2}{2} \cdot 2c \cdot l = \frac{2}{3} d_4 c^3 l$$

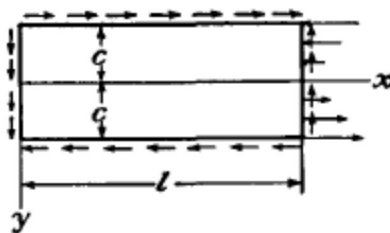


FIG. 24.

این جفت، جفت بوجود آمده بواسطه نیروهای نرمال در امتداد $Z=1$ صفحه را متعادل می‌سازد.

یک تابع تنش به فرم یک چندجمله‌ای از درجه پنجم را در نظر بگیرید.

$$\phi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^2 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5 \quad (f)$$

با جایگزینی در رابطه (a) درمی‌یابیم که این معادله در صورتی که روابط زیر برقرار باشند ارضاء می‌گردد.

$$\begin{aligned} e_5 &= -(2c_5 + 3a_5) \\ f_5 &= -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5) \end{aligned}$$

مولفه‌های متناظر تنش عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3} x^3 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5) x y^2 - \frac{1}{3} (b_5 + 2d_5) y^3 \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 x y^2 + \frac{d_5}{3} y^3 \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{3} b_5 x^3 - c_5 x^2 y - d_5 x y^2 + \frac{1}{3} (2c_5 + 3a_5) y^3 \end{aligned}$$

علاوه بر این ضرایب a_5, \dots, d_5 اختیاری هستند و با تغییر آنها به راه‌حل‌هایی برای شرایط مختلف بارگذاری یک صفحه دست پیدا می‌کنیم.

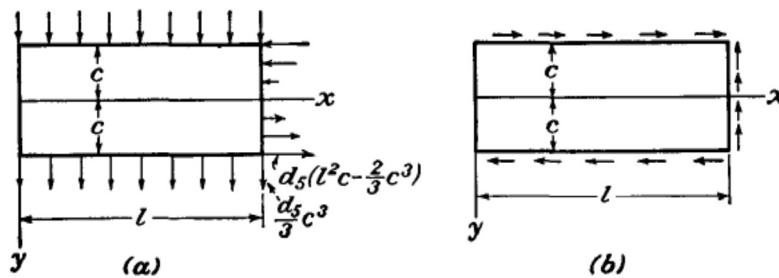


FIG. 25.

با برابر صفر قرار دادن تمامی ضرایب به غیر از d_5 درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} \sigma_x &= d_5(x^2 y - \frac{2}{3} y^3) \\ \sigma_y &= \frac{1}{3} d_5 y^3 \\ \tau_{xy} &= -d_5 x y^2 \end{aligned} \quad (g)$$

نیروهای نرمال در امتداد اضلاع طولی این صفحه توزیع شده‌اند (شکل 25a). در امتداد ضلع $x=l$ ، نیروهای نرمال از دو بخش تشکیل شده‌اند که یکی از قانون خطی و دیگری از قانون سهمی مکعب پیروی می‌کنند. نیروهای برشی با x در اضلاع طولی این صفحه متناسب بوده و در امتداد $x=l$ از قانون سهمی تبعیت می‌کنند. توزیع این تنش‌ها در شکل 25b نشان داده شده است. از آنجا که رابطه (a) یک رابطه دیفرانسیل خطی است می‌توان نتیجه گرفت که مجموع چندین حل از این رابطه نیز یک راه‌حل می‌باشد. ما می‌توانیم حل‌های مقدماتی موردنظر در این مقاله را جمع‌بندی کرده و به راه‌حل‌های جدیدی از منظر عملی دست یابیم. چندین نمونه از بکارگیری این روش مطرح خواهد شد.

18. اصل سن ونان¹. در مقاله قبلی چندین مورد مورد بحث و بررسی قرار گرفت که حل‌های دقیق هر کدام برای صفحات مستطیلی با در نظر گرفتن فرم‌های بسیار ساده تابع تنش ϕ بدست آمدند. در هر مورد تمامی روابط الاستیسیته ارضا شده ولی حل‌های بدست آمده تنها در صورتی دقیق بودند که نیروهای سطحی به روش داده شده توزیع شده باشند. در مورد مربوط به بارگذاری خالص (شکل 22)، ممان خمشی بواسطه کشش و فشردگی‌ها در دو سر تیر ایجاد می‌گردد و این کشش و فشردگی‌ها با فاصله از محور خنثی متناسب می‌باشند. بستن انتها و سر تیر در صورت امکان باید به گونه‌ای باشد که با انحراف و تغییر شکل صفحه تکیه‌گاه تداخل نداشته باشد. اگر شرایط فوق برقرار نباشد یعنی ممان خمشی به شکلی متفاوت اعمال گردد یا تکیه‌گاه مقید به گونه‌ای باشد که نیروهای دیگری در بخش سر تحمیل گردند، حل داده شده در قسمت 17 دیگر راه‌حل دقیق این مسئله نیست. با این حال استفاده عملی از این راه‌حل به این مورد خاص محدود نمی‌گردد. این راه‌حل را می‌توان با دقت کافی برای موارد مربوط به خمش که این شرایط در دو سر تیر به طور قطع برآورده نمی‌گردد مورد استفاده قرار داد. چنین گسترشی در بکارگیری این راه‌حل معمولاً براساس اصل سن و نان است. این اصل بیان می‌کند که اگر نیروهای وارد بر بخش کوچکی از سطح یک جسم الاستیک یا کشسان با سیستم معادل استاتیکی دیگری از نیروهای وارد بر همین بخش از سطح جایگزین می‌گردد و این توزیع مجدد بارگذاری تغییرات قابل توجهی را در تنش‌های محلی بوجود می‌آورد اما تاثیر ناچیزی را بر تنش‌ها در فواصلی بر جای می‌گذارد که در مقایسه با ابعاد خطی سطح که نیروهای وارد بر آن تغییر یافته‌اند بزرگ هستند. برای مثال در حالت خمش خالص یک نوار مستطیلی (شکل 22)، ابعاد سطح مقطعی که در مقایسه با طول خود کوچک هستند روش بکارگیری ممان خمشی خارجی، توزیع تنش را تنها در نزدیکی دو سر تحت تاثیر قرار داده و هیچ تاثیری بر سطح مقطع‌های فاصله‌دار و دورتر که توزیع تنش آنها در عمل همانند راه‌حل شکل 22 است ندارد.

همین مورد در حالت مربوط به کشش محوری نیز صادق می‌باشد. تنها در نزدیکی سرتیر تحت بارگذاری، توزیع تنش به شیوه اعمال نیروی کشش بستگی داشته و در سطح مقطع‌های دورتر از سر تیر تنش‌ها به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند. نمونه‌های نشان‌دهنده این جمله و نحوه توزیع یکنواخت تنش در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرد (صفحه 52).

19. تعیین جابجایی‌ها. وقتی مولفه‌های تنش از روابط قبلی بدست آیند مولفه‌های کرنش را می‌توان با استفاده از قانون هوک در روابط 3 و 6 بدست آورد. سپس جابجایی‌های u و v را می‌توان با معادلات زیر مشخص نمود:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} \quad (a)$$

انتگرال‌گیری این روابط در هر حالت خالص مشکلی را به همراه ندارد و ما با نمونه‌هایی از کاربرد آنها مواجه خواهیم بود. می‌توان مشاهده کرد که مولفه‌های کرنش (a) در صورتی که ما توابع خطی را به u و v اضافه کنیم بدون تغییر باقی می‌مانند.

$$u_1 = a + by, \quad v_1 = c - bx \quad (b)$$

که در این روابط a ، b و c ثابت هستند. این بدان معناست که جابجایی‌ها را نمی‌توان به طور کامل با تنش و کرنش‌ها مشخص و تعیین نمود. به دلیل جابجایی‌های ناشی از کرنش‌های داخلی یک جابجایی مشابه با یک جسم صلب را می‌توان در نظر گرفت. ثوابت a و c در روابط b نشان‌دهنده یک حرکت انتقالی² جسم و ثابت b یک زاویه چرخش کوچک جسم صلب حول محور Z می‌باشند.

¹ Saint-venants

² translatory motion

نشان داده شده است که (صفحه 25) در حالت مربوطه نیروهای جسم ثابت، توزیع تنش همانند توزیع تنش یا کرنش صفحه‌ای است. با این حال جابجایی‌ها برای این دو مسئله کاملاً متفاوت هستند چراکه در حالت توزیع تنش صفحه‌ای، مولفه‌های کرنش با وارد کردن در روابط a با معادلات زیر داده می‌شوند:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

و در حالت کرنش صفحه‌ای، مولفه‌های کرنشی عبارتند از:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned}$$

می‌توان به سادگی دریافت که با جایگزینی E با $E/(1 - \nu^2)$ و ν با $\nu/(1 - \nu)$ می‌توان از مجموعه قبلی به این معادلات دست یافت. این جایگزینی‌ها تاثیری بر G که برابر $E/2(1 + \nu)$ است ندارند. انتگرال‌گیری روابط (a) در ادامه برای بحث راجع به مسائل خاص نشان داده خواهند شد.

20. خمش یک تیر تحت بارگذاری در سرتیر. یک تیر دارای سطح مقطع مستطیلی باریک با عرض واحد را در نظر بگیرید که تحت خمش نیروی P اعمالی در انتهای تیر است (شکل 26). لبه‌های بالا و پایین تحت بارگذاری قرار نداشته و نیروهای برشی با داشتن برآیند P در امتداد $X=0$ توزیع شده‌اند. این شرایط را می‌توان با ترکیب مناسبی از برش خالص و تنش‌های بند 17 نشان داده شده در شکل 24 برآورده نمود. برآیند برش خالص $\tau_{xy} = -b_2$ با تنش‌های (e) به روابط زیر می‌انجامد

$$\begin{aligned} \sigma_x &= d_4xy, \quad \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} &= -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2 \end{aligned} \quad (a)$$

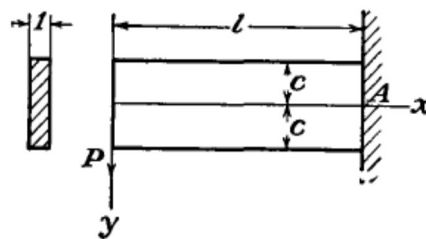


FIG. 26.

برای داشتن اضلاع طولی $y = \pm c$ فاقد نیروی اعمالی باید رابطه زیر برقرار باشد

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = -b_2 - \frac{d_4}{2} c^2 = 0$$

که در آن

$$d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}$$

به منظور برآوردن شرایط انتهای تیر بارگذاری شده، مجموع نیروهای برشی توزیع یافته بر روی این بخش باید برابر P باشند. از این رو داریم:

$$-\int_{-c}^c \tau_{xy} \cdot dy = \int_{-c}^c \left(b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy = P$$

که در این رابطه

$$b_2 = \frac{3P}{4c}$$

با جایگزینی مقادیر d_4 و b_2 در روابط (a) در می‌یابیم که

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3} xy, \quad \sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right)$$

باید توجه داشت که $\frac{2}{3}c^3$ ممان اینرسی سطح مقطع تیر است بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I}, \quad \sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{I} \frac{1}{2} (c^2 - y^2) \quad (b)$$

این رابطه بطور کامل با حل مقدماتی داده شده در کتاب‌های مقاومت مصالح همخوانی دارد. لازم به ذکر است که در صورت توزیع نیروهای برشی براساس قانون سهمی به مانند تنش برشی τ_{xy} و متناسب بودن نیروهای نرمال با y در سر تیر این راه‌حل نشانگر یک راه‌حل دقیق است. اگر نیروهای وارد در دو سر به گونه‌ای دیگر توزیع شوند، توزیع تنش یک حل درست و دقیق برای دو انتهای تیر نیست اما براساس اصل سن ونان، می‌تواند برای سطح مقطع‌های واقعدر فاصله‌ای دورتر از دو سر مناسب در نظر گرفته شود.

هم‌اکنون جابجایی را با متناظر با تنش‌ها در نظر بگیرید. با بکارگیری قانون هوک خواهیم دید که

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Pxy}{EI}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\nu Pxy}{EI} \quad (c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2IG} (c^2 - y^2) \quad (d)$$

روش دستیابی به مولفه‌های u و v جابجایی شامل انتگرال‌گیری از روابط c و d می‌باشد. با انتگرال‌گیری از رابطه c به روابط زیر می‌رسیم:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + f(y), \quad v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + f_1(x)$$

که در آنها $f_1(x)$ و $f(y)$ توابع مجهولی از x و y به تنهایی هستند. با جایگزینی این مقادیر u و v در رابطه d به رابطه زیر دست پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2)$$

در این معادله برخی عبارات تنها تابعی از x بوده و برخی نیز تنها تابعی از y هستند و یک عبارت نیز مستقل از x و y است. با نشان دادن این گروه‌ها با $F(x)$ ، $G(y)$ و K داریم:

$$F(x) = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx}, \quad G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EI} - \frac{Py^2}{2IG}$$

$$K = -\frac{Pc^2}{2IG}$$

و معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F(x) + G(y) = K$$

چنین معادله‌ای بدین معناست که $F(x)$ و $G(y)$ باید در برخی موارد ثابت باشند. در شرایطی دیگر $F(x)$ و $G(y)$ به ترتیب با x و y تغییر می‌کنند و با تغییر x و یا y به تنهایی این معادله نقض می‌گردد. بنابراین می‌توان نوشت

$$e + d = -\frac{Pc^2}{2IG} \quad (e)$$

9

$$\frac{df_1(x)}{dx} = \frac{Px^2}{2EI} + d, \quad \frac{df(y)}{dy} = -\frac{Py^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} + e$$

سپس توابع $f_1(x)$ و $f(y)$ به شکل زیر ارائه می‌گردند

$$f(y) = -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g$$

$$f_1(x) = \frac{Px^3}{6EI} + dx + h$$

با جایگزینی u و v در این عبارات به روابط زیر می‌رسیم

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + dx + h \quad (g)$$

ثابت‌های d , e , g و h را اکنون می‌توان از رابطه e و براساس سه شرط محدودیت ضروری برای جلوگیری از حرکت و جابجایی تیر به عنوان یک جسم صلب در صفحه xy تعیین نمود. فرض کنید نقطه A ، مرکز سطح مقطع سر تیر ثابت است. آنگاه u و v برای $x=l$ و $y=0$ صفر می‌باشند. پس ما از روابط a داریم:

$$g = 0, \quad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl$$

منحنی جابجایی با جایگزینی $y=0$ در رابطه دوم معادلات g حاصل می‌گردد. سپس رابطه زیر برقرار است

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l-x) \quad (h)$$

برای تعیین ثابت d در این رابطه ما باید از شرط سوم محدودیت با حذف احتمال چرخش تیر در صفحه xy حول نقطه ثابت A استفاده نماییم. این قید و محدودیت را می‌توان از طرق مختلفی محقق نمود. حال دو مورد را مد نظر قرار دهید: (1) وقتی یک المان از محور تیر در انتهای A ثابت است. سپس شرط محدودیت عبارتست از

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=l, y=0} = 0 \quad (k)$$

(2) وقتی یک المان عمودی سطح مقطع در نقطه A ثابت است.

آنگاه شرط محدودیت عبارتست از

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l, y=0} = 0 \quad (l)$$

در اولیه مورد ما از رابطه (h) به عبارت زیر می‌رسیم

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

و از رابطه (e) در می‌یابیم که

$$e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}$$

با جایگزینی تمامی این محدودیت‌ها در روابط (g) ، روابط زیر حاصل می‌گردند

$$\begin{aligned} u &= -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}\right)y \\ v &= \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \end{aligned} \quad (m)$$

رابطه منحنی تغییر شکل و خیز عبارت است از

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \quad (n)$$

که برای خیز و تغییرشکل انتهای تیر بارگذاری شده ($x=0$)، مقدار $\frac{Pl^3}{3EI}$ را ارائه می‌کند. این مقدار با مقدار بدست آمده در کتاب‌های مقدماتی راجع به مقاومت مصالح همخوانی دارد.

برای نشان دادن تغییرشکل و انحراف سطح مقطع‌های ایجادشده با تنش‌های برشی، جابجایی u در انتهای ثابت ($x=l$) را در نظر بگیرید. برای این سر تیر ما از معادلات (m) به روابط زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} (u)_{x=l} &= -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} - \frac{Pc^2y}{2IG} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l} &= -\frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} - \frac{Pc^2}{2IG} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l, y=0} &= -\frac{Pc^2}{2IG} = -\frac{3}{4} \frac{P}{cG} \end{aligned} \quad (o)$$

شکل سطح مقطع پس از انحراف و جابجایی در شکل 27a نشان داده شده است. به دلیل تنش برشی $\tau_{xy} = -3P/4c$ در نقطه A، یک المان از سطح مقطع در A حول نقطه A در صفحه xy با یک زاویه $3P/4cG$ در جهت ساعتگرد می‌چرخد.

اگر المان عمودی سطح مقطع در نقطه A ثابت باشد (شکل 27b).

ما به جای یک المان افقی از این محور از شرط (l) و اولین رابطه از معادلات (g) درمی‌یابیم که:

$$e = \frac{Pl^2}{2EI}$$

و از معادله (e) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}$$

با جایگزینی در دومین رابطه از معادلات (g) رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2IG}(l-x) \quad (r)$$

با مقایسه با رابطه (n) می‌توان نتیجه‌گیری کرد که به دلیل چرخش انتهای این محور حول نقطه A (27b)، تغییرشکل‌های این محور از تیر با مقدار زیر افزایش پیدا می‌کند.

$$\frac{Pc^2}{2IG}(l-x) = \frac{3P}{4cG}(l-x)$$

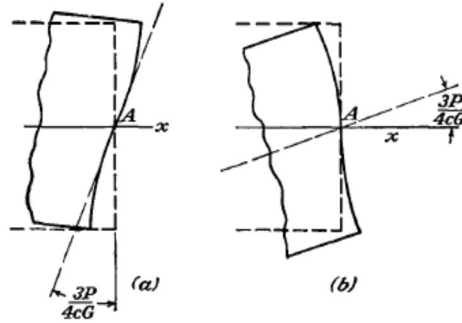


FIG. 27.

این پدیده، اثر نیروی برشی بر تغییرشکل تیر خوانده می‌شود. در عمل در سر گیردار تیر با شرایطی کاملاً متفاوت از آنچه در شکل 27 نشان داده شده است روبرو هستیم. مقطع ثابت معمولاً دچار تغییرشکل می‌شود و توزیع نیروها در این سر با توزیعات داده شده در روابط (b) متفاوت می‌باشد. با این حال راه حل (b) تنها برای تیرهای طره‌ای بلند و در فواصل قابل توجه از دو سر تیر صادق است.

21. خمش یک تیر با بار یکنواخت. یک تیر با سطح مقطع مستطیلی باریک با عرض واحد با دوتیکه‌گاه را در نظر بگیرید که تحت خمش یک بار با توزیع یکنواخت و شدت q که در شکل 28 نشان داده شده است قرار دارد. شرایط لبه‌های بالا و پایین تیر عبارتند از:

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = 0, \quad (\sigma_y)_{y=+c} = 0, \quad (\sigma_y)_{y=-c} = -q \quad (a)$$

و شرایط در دو سر تیر $x = \pm l$ را می‌توان به صورت زیر بیان نمود

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \mp ql, \quad \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-c}^c \sigma_{xy} dy = 0 \quad (b)$$

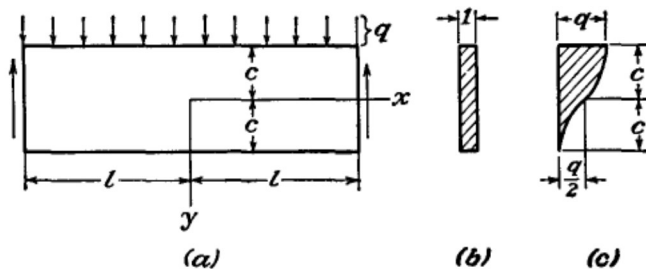


FIG. 28.

دو عبارت آخر در روابط (b) بیان می‌کنند که هیچ نیروی طولی و هیچ خمشی در دو سر تیر وجود ندارد. تمامی شرایط (a) و (b) را می‌توان با ترکیب راه‌حل‌های معین در قالب چندجمله‌ای‌ها همانند بند 17 برآورده نمود. برای حذف تنش‌های کششی در امتداد ضلع $y=c$ و تنش‌های برشی در امتداد اضلاع $y = \pm c$ یک نیروی فشاری ساده $\sigma_y = a_2$ از حل (b) در بند 17 و تنش‌های $\sigma_y = b_3y$ و $\tau_{xy} = -b_3x$ در شکل 23 را در نظر می‌گیریم. براین اساس روابط زیر حاصل می‌گردند:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= d_5(x^2y - \frac{2}{3}y^3) \\ \sigma_y &= \frac{1}{3}d_5y^3 + b_3y + a_2 \\ \tau_{xy} &= -d_5xy^2 - b_3x \end{aligned} \quad (c)$$

و از شرایط (a)، روابط زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned} -d_3 c^2 - b_3 &= 0 \\ \frac{1}{8} d_3 c^3 + b_3 c + a_2 &= 0 \\ -\frac{1}{8} d_3 c^3 - b_3 c + a_2 &= -q \end{aligned}$$

که در این روابط

$$a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = \frac{3q}{4c}, \quad d_3 = -\frac{3q}{4c^3}$$

با جایگزینی در روابط (c) و با توجه به اینکه $2c^3/3$ برابر ممان اینرسی ناحیه سطح مقطعی با عرض واحد است، داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3q}{4c^3} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) = -\frac{q}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) \\ \sigma_y &= -\frac{3q}{4c^3} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) = -\frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \quad (d) \\ \tau_{xy} &= -\frac{3q}{4c^3} (c^2 - y^2) x = -\frac{q}{2I} (c^2 - y^2) x \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که این مولفه‌های تنش نه تنها شرایط (a) بر روی اضلاع طولی بلکه دو شرط اول (b) در دو سر تیر را برآورده می‌سازند. برای خنثی شدن جفت‌ها در دو سر تیر، ما حل (d) را یک خمش خالص در نظر می‌گیریم که در شکل 22 نشان داده شده و ثابت d_3 را از شرایط مرزی در $x = \pm l$ تعیین می‌کنیم.

$$\int_{-c}^c \sigma_{xy} dy = \int_{-c}^c \left[-\frac{3q}{4c^3} \left(l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y \right] y dy = 0$$

که از آن ثابت d_3 به صورت زیر حاصل می‌گردد

$$d_3 = \frac{3q}{4c} \left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right)$$

در نهایت رابطه زیر برقرار می‌باشد

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3q}{4c^3} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + \frac{3q}{4c} \left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right) y \\ &= \frac{q}{2I} (l^2 - x^2) y + \frac{q}{2I} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) \end{aligned} \quad (33)$$

اولیه عبارت در رابطه فوق نشانگر تنش‌های داده شده با تئوری اولیه خمش و دومین عبارت اصلاح لازم و ضروری این رابطه را شامل می‌گردد. این اصلاح به X وابسته نبوده و در مقایسه با حداکثر تنش خمشی به شرط بزرگ بودن دهانه تیر نسبت به طول آن کوچک می‌باشد. برای چنین تیرهایی، تئوری مقدماتی خمش مقدار دقیقی را برای تنش‌های σ_x ارائه می‌کند. لازم به ذکر است که عبارت 33 در صورتی یک راه حل دقیق به شمار می‌رود که دو انتهای $x = \pm l$ ، نیروهای نرمال طبق قانون زیر توزیع شده باشند.

$$\bar{X} = \frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right)$$

به‌عنوان مثال اگر نیروهای نرمال در دو سر تیر همانند σ_x برای $x = \pm l$ از رابطه 33 یکسان باشند. این نیروها از یک نیروی برآیند و یک کوپل برآیند برابر صفر برخوردارند. از این رو می‌توانیم از اصل سن ونان نتیجه‌گیری کنیم که اثرات آنها بر تنش‌ها در فواصل قابل توجه از دو سر یعنی در فواصل بزرگتر از عمق تیر را می‌توان نادیده گرفت. بنابراین راه‌حل (33) در چنین نقاطی برای حالتی که هیچ نیرویی وجود ندارد به‌اندازه کافی دقیق می‌باشد.

اختلاف میان حل دقیق (33) و حل تقریبی با توجه به اولین عبارت (33) ناشی از این واقعیت است که برای رسیدن به حل تقریبی فرض بر این است که رشته‌های تیر در شرایط کشش ساده قرار دارند. از حل (d) می‌توان مشاهده کرد که تنش‌های فشاری σ_y بین رشته‌ها وجود دارد. این تنش‌ها دلیل وجود عبارت اصلاحی دوم حل (33) به شمار می‌روند. توزیع تنش‌های فشاری σ_y بر روی عمق تیر در شکل 28c نشان داده شده است. توزیع تنش برشی داده شده با سومین رابطه از معادلات (d) بر روی یک سطح مقطع از تیر با توزیع ارائه‌شده از نظریه اولیه منطبق است.

وقتی تیر به جای بار توزیع شده q با وزنش بارگذاری شود این راه‌حل باید با قراردادن $q = 2\rho g c$ در رابطه 33 و دو رابطه آخر از معادلات (d) و اضافه کردن تنش‌ها اصلاح گردد.

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \rho g(c - y), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (e)$$

توزیع تنش (e) را می‌توان با در نظر گرفتن $\phi = \frac{1}{2} \rho g(c x^2 + y^3/3)$ از روابط (29) که نشان‌دهنده حالت ممکن تنش ناشی از وزن و نیروهای مرزی به دست آورد. در لبه بالایی $y = -c$ رابطه $\sigma_y = 2\rho g c$ برقرار است و در لبه پایین‌تر روابط $y = c, \sigma_y = 0$ برقرارند. از این رو وقتی تنش‌های (e) به راه‌حل قبلی اضافه می‌گردند با $q = 2\rho g c$ ، تنش بر روی هر دو لبه افقی صفر است و بار قرار گرفته بر روی تیر تنها شامل وزن خود تیر است.

جابجایی‌های u و v را می‌توان با روش نشان داده شده در بخش قبلی محاسبه نمود. با این فرض که در مرکز سطح مقطع $(x = 0, y = 0)$ جابجایی افقی برابر صفر است و جابجایی عمودی برابر تغییر شکل است. ما با استفاده از روابط (d) و (33) در می‌یابیم:

$$u = \frac{q}{2EI} \left[\left(l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + v x \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right]$$

$$v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + v \left[(l^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\}$$

$$- \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} v \right) c^2 x^2 \right] + \delta$$

می‌توان از عبارت مربوط به u مشاهده نمود که سطح خنثی تیر در خط مرکزی قرار ندارد. به دلیل تنش فشاری

$$(\sigma_y)_{y=0} = -\frac{q}{2}$$

خط مرکزی دارای کرنش کششی $\nu q/2E$ است و ما به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(u)_{y=0} = \frac{\nu qx}{2E}$$

از عبارت مربوط به ν می‌توان به رابطه منحنی تغییر شکل دست یافت

$$(v)_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu\right) c^2 x^2 \right] \quad (f)$$

با فرض اینکه تغییر شکل در دو انتهای $(x = \pm l)$ خط مرکزی صفر است داریم:

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad (34)$$

ضریب قبل از کروشه‌ها، تغییرشکلی است که از تحلیل مقدماتی با فرض صفحه‌ای باقی ماندن سطح مقاطع تیر درحین خمش بدست می‌آید. عبارت دوم در کروشه‌ها نشانگر اصلاح است که معمولاً اثر نیروی برشی خوانده می‌شود.

با دوبار مشتق‌گیری از رابطه f نسبت به x برای منحنی تغییر شکل، عبارت زیر برای انحنا حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_{y=0} = \frac{q}{EI} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad (35)$$

مشاهده می‌شود که انحنا دقیقاً با ممان خمشی $q(l^2 - x^2)/2$ متناسب نیست. عبارت اضافی در کروشه‌ها نشان‌دهنده اصلاح لازم برای فرمول اولیه است. ارزیابی کلی تر انحنای تیرها نشان می‌دهد که عبارت اصلاحی داده شده در رابطه 35 را می‌توان برای هر شدت متغیر و پیوسته از بار مورد استفاده قرار داد. تاثیر نیروی برشی بر تغییر شکل در حالت یک بار متمرکز در ادامه توضیح داده خواهد شد (صفحه 107).

بررسی نیروی برشی بر انحنای منحنی تغییر شکل تیرها توسط رانکین در انگلستان و گراشف در آلمان انجام گرفته است. با در نظر گرفتن حداکثر کرنش برشی در محور خنثی یک تیر مستطیلی با عرض واحد به صورت $\frac{3}{2}(Q/2cG)$ که در آن Q نیروی برشی است، افزایش متناظر در انحنا با مشتق‌گیری از کرنش برشی فوق نسبت به x که برابر $\frac{3}{2}(q/2cG)$ است داده می‌شود. عبارت اصلاحی برای انحنا با تحلیل مقدماتی به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{q}{EI} \cdot \frac{l^2 - x^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{q}{2cG} = \frac{q}{EI} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2(1 + \nu) \right]$$

با مقایسه این عبارت با رابطه 35 می‌توان دید که راه‌حل مقدماتی مقدار اغراق‌آمیزی را برای این اصلاح ارائه می‌کند.

عبارت اصلاحی در رابطه 35 برای انحنا را نمی‌توان تنها به نیروی برشی نسبت داد. این عبارت تاحدی بواسطه تنش‌های فشاری ایجاد می‌شود. این تنش‌ها در عمق تیر به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند. انبساط جانبی در جهت x ایجاد شده با این تنش‌ها از بالا تا پایین تیر از بین رفته و به این ترتیب یک انحنای معکوس (محدب به سمت بالا) ایجاد می‌گردد. این انحنا به همراه تاثیر نیروی برشی دلیل وجود عبارت اصلاحی در رابطه 35 هستند.

22. موارد دیگر از تیرهای تحت بارگذاری پیوسته. با افزایش درجه چندجمله‌ای‌های نشانگر راه‌حل‌های مسئله دوبرعی (بند 17)، می‌توان به راه‌حل‌های مسائل خمشی با انواع بارهای متغیر پیوسته برسیم. به‌عنوان مثال بادر نظر گرفتن یک راه‌حل در قالب یک چندجمله‌ای از درجه 6 و ترکیب آن با راه‌حل‌های قبلی بند 17 می‌توانیم به تنش‌ها در یک تیر طره‌ای عمودی تحت بارگذاری فشار هیدرواستاتیک دست پیدا کنیم که در شکل 29 نشان داده شده است. بدین ترتیب می‌توان نشان داد که تمامی شرایط اضلاع طولی تیر طره‌ای با سیستم تنشی زیر برآورده می‌گردند:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{qx^3y}{4c^3} + \frac{q}{4c^3} \left(-2xy^3 + \frac{6}{5} c^2xy \right) \\ \sigma_y &= -\frac{qx}{2} + qx \left(\frac{y^3}{4c^3} - \frac{3y}{4c} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{3qx^2}{8c^3} (c^2 - y^2) - \frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - y^2)\end{aligned}\quad (a)$$

از این رو q وزن حجم واحد سیال است به‌گونه‌ای که شدت بار در عمق x برابر qx می‌باشد. نیروی برشی و ممان خمشی در همین عمق به ترتیب $qx^2/2$ و $qx^3/6$ هستند. بدیهی است که اولین عبارت در روابط σ_x و τ_{xy} مقادیر تنش‌های محاسبه‌شده با فرمول اولیه معمول می‌باشد. در انتهای بالای تیر ($x=0$) تنش نرمال برابر صفر است. تنش برشی عبارت است از

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - y^2)$$

گرچه این تنش‌ها کاملاً متفاوت با صفر هستند، آنها در تمامی سطح مقاطع بسیار کوچک بوده و برآیند آنها صفر می‌باشد به‌گونه‌ای که این شرایط به شرایط مربوط به انتهای فاقد نیروهای خارجی نزدیک می‌گردد.

با افزودن عبارت qx به σ_x در روابط (a) که در آن q وزن حجم واحد ماده تیر طره‌ای است، اثر وزن تیر بر توزیع تنش مدنظر قرار داده می‌شود. استفاده از راه‌حل بدست آمده از این طریق برای محاسبه تنش‌ها در سدها با مصالح بنایی³ با سطح مقطع مستطیلی پیشنهاد شده است. لازم به‌ذکر است که این راه‌حل شرایط انتهای سد را برآورده نمی‌سازد. راه‌حل (a) در صورتی که نیروهای اعمالی در انتها همانند σ_x و τ_{xy} در راه‌حل (a) توزیع یافته باشند دقیق می‌باشد. در حالت عملی انتهای سد به فونداسیون متصل است و شرایط با آنچه که در این راه‌حل ارائه شده است کاملاً متفاوت می‌باشد. براساس اصل سن ونان می‌توان بیان کرد که تاثیر محدودیت بر انتهای سد در فواصل بزرگ از انتها ناچیز است اما در مورد سد با مصالح بنایی ابعاد سطح مقطعی $2c$ معمولاً در مقایسه با ارتفاع a کوچک نبوده و این اثر را نمی‌توان نادیده گرفت.

بادر نظر گرفتن تابع تنش به صورت یک چندجمله‌ای از درجه 7، تنش‌ها در یک تیر تحت بارگذاری با بار توزیع‌شده سهمی حاصل می‌گردند.

در حالت کلی یک توزیع پیوسته بار q در شکل 30، تنش‌ها در هر سطح مقطع در فاصله قابل توجه از دو سر یعنی در فاصله بزرگتر از عمق تیر را می‌توان از روابط زیر به صورت تقریبی به دست آورد:

³ masonry dams

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{My}{I} + q \left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3y}{10c} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} + q \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{2I} (c^2 - y^2)\end{aligned}\quad (36)$$

که در آن M و Q به ترتیب ممان خمشی و نیروهای برشی محاسبه شده به طریق معمول و q شدت بار در سطح مقطع موردنظر است. این روابط با روابط بدست آمده برای یک تیر تحت بارگذاری یکنواخت همخوانی دارند (بند 21).

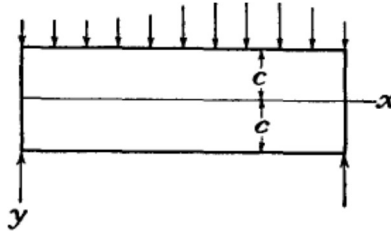


Fig. 30.

اگر بار با شدت q در جهت پایین و در امتداد لبه پایینی تیر ($y = +c$) توزیع یافته باشد، روابط مربوط به تنش‌ها را می‌توان از معادلات 36 با قراردادن تنش کششی یکنواخت $\sigma_y = q'$ بدست آورد و

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{My}{I} + q \left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3y}{10c} \right) \\ \sigma_y &= \frac{q}{2} + q \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{2I} (c^2 - y^2)\end{aligned}\quad (36')$$

23. راه‌حل مسئله دوبعدی در قالب یک سری فوریه. می‌توان نشان داد که در صورت توزیع پیوسته بار در امتداد طول یک تیر مستطیلی با سطح مقطع کوچک، تابع تنش را می‌توان در قالب یک چندجمله‌ای در موارد ساده مورد استفاده قرار داد. اگر بار پیوسته باشد، یک تابع تنش در قالب یک سری مثلثاتی استفاده نمود. اگر بار پیوسته باشد، یک تابع تنش در قالب یک سری مثلثاتی را می‌توان مورد استفاده قرار داد. رابطه تابع تنش

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

را می‌توان بادر نظر گرفتن تابع ϕ به صورت زیر برآورده نمود.

$$\phi = \sin \frac{m\pi x}{l} f(y) \quad (b)$$

که در آن m یک عدد صحیح و $f(y)$ تنها تابعی از y می‌باشد. با جایگذاری (b) در معادله (a) و با استفاده از $m\pi/l = \alpha$ به رابطه زیر برای تعیین $f(y)$ دست می‌یابیم

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{IV}(y) = 0 \quad (c)$$

با انتگرال گیری از این رابطه دیفرانسیلی خطی با ضرایب ثابت عبارت زیر حاصل می‌گردد

$$f(y) = C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y$$

آنگاه تابع تنش عبارتست از

$$\phi = \sin \alpha x (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y) \quad (d)$$

و مولفه‌های تنش مربوطه عبارتند از

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sin \alpha x [C_1 \alpha^2 \cosh \alpha y + C_2 \alpha^2 \sinh \alpha y + C_3 \alpha (2 \sinh \alpha y \\ &\quad + \alpha y \cosh \alpha y) + C_4 \alpha (2 \cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y)] \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\alpha^2 \sin \alpha x (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y) \quad (e) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\alpha \cos \alpha x [C_1 \alpha \sinh \alpha y + C_2 \alpha \cosh \alpha y + C_3 (\cosh \alpha y \\ &\quad + \alpha y \sinh \alpha y) + C_4 (\sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y)] \end{aligned}$$

یک مورد خاص از یک تیر مستطیلی دوسرته‌دار و در معرض نیروهای عمودی با توزیع پیوسته و به ترتیب با شدت $A \sin \alpha x$ و $B \sin \alpha x$ را در نظر بگیرید. شکل 31 حالتی که $\alpha = 4\pi/l$ است و همچنین مقادیر مثبت A و B را نشان می‌دهد. توزیع تنش برای این حالت را می‌توان از راه حل (e) به دست آورد. ثابت‌های انتگرال گیری C_1, \dots, C_4 را می‌توان از شرایط لبه‌های بالایی و پایینی تیر $y = \pm c$ تعیین نمود. این شرایط عبارتند از:

For $y = +c$,

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = -B \sin \alpha x$$

(f)

For $y = -c$,

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = -A \sin \alpha x$$

با جایگزینی این مقادیر در سومین رابطه از معادلات (e) به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} C_1 \alpha \sinh \alpha c + C_2 \alpha \cosh \alpha c + C_3 (\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c) \\ + C_4 (\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c) &= 0 \\ -C_1 \alpha \sinh \alpha c + C_2 \alpha \cosh \alpha c + C_3 (\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c) \\ - C_4 (\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c) &= 0 \end{aligned}$$

که در روابط فوق

$$\begin{aligned} C_3 &= -C_2 \frac{\alpha \cosh \alpha c}{\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c} \\ C_4 &= -C_1 \frac{\alpha \sinh \alpha c}{\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c} \end{aligned} \quad (g)$$

با استفاده از شرایط مرزی اضلاع در دومین رابطه از معادلات (e) در می‌یابیم که

$$\begin{aligned}\alpha^2(C_1 \cosh \alpha c + C_2 \sinh \alpha c + C_3 c \cosh \alpha c + C_4 c \sinh \alpha c) &= B \\ \alpha^2(C_1 \cosh \alpha c - C_2 \sinh \alpha c - C_3 c \cosh \alpha c + C_4 c \sinh \alpha c) &= A\end{aligned}$$

با جمع و تفریق این معادلات و با استفاده از معادلات (g)، به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{A+B}{\alpha^2} \cdot \frac{\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \\ C_2 &= -\frac{A-B}{\alpha^2} \cdot \frac{\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \\ C_3 &= \frac{A-B}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \\ C_4 &= -\frac{A+B}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c}\end{aligned} \quad (h)$$

با جایگذاری در روابط (e) عبارات زیر برای مولفه‌های تنش حاصل می‌گردند:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (A+B) \frac{(\alpha c \cosh \alpha c - \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \sin \alpha x \\ &\quad - (A-B) \frac{(\alpha c \sinh \alpha c - \cosh \alpha c) \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cdot \sin \alpha x \\ \sigma_y &= -(A+B) \frac{(\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \sin \alpha x \\ &\quad + (A-B) \frac{(\alpha c \sinh \alpha c + \cosh \alpha c) \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cdot \sin \alpha x \\ \tau_{xy} &= -(A+B) \frac{\alpha c \cosh \alpha c \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \cos \alpha x \\ &\quad + (A-B) \frac{\alpha c \sinh \alpha c \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cdot \cos \alpha x\end{aligned} \quad (k)$$

این تنش‌ها شرایط نشان داده شده در شکل 31 درامتداد اضلاع $y = \pm c$ را برآورده می‌سازند. در دو سر تیر یعنی $x=0$ و $x=l$ ، تنش‌های σ_x صفر بوده و تنها تنش برشی τ_{xy} وجود دارد. این تنش با دو عبارت نمایش داده می‌شود (روابط (k)). اولین عبارت که با $A+B$ متناسب است نشانگر تنش‌های نیمه‌های بالا و پایین سطح مقطع انتهایی تیر دارای اندازه یکسان ولی علامت مخالف است. برآیند این تنش‌ها در این سر تیر صفر است. دومین عبارت که متناسب با $A-B$ است از برآیندهایی در دو سر تیر برخوردار است که با بارهای اعمالی در اضلاع طولی در تعادل هستند ($y = \pm c$).

اگر این بارها برای هر دو ضلع یکسان باشند، ضریب A برابر B بوده و نیروهای عکس‌العمل در دو سر تیر صفر می‌شوند. اکنون این مورد خاص را به صورت دقیق‌تر با این فرض که طول تیر در مقایسه با عمق آن بزرگ است در نظر می‌گیریم. از رابطه دوم معادلات (k)، تنش‌های نرمال σ_y بر روی صفحه میانی تیر $y = 0$ عبارتند از:

$$\sigma_y = -2A \frac{\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \sin \alpha x \quad (l)$$

برای تیرهای بلند که αc برابر $m\pi c/l$ است به شرط اینکه تعداد موج‌های m بزرگ نباشد، کوچک است. سپس با جایگزینی در (l) رابطه زیر برقرار است:

$$\sinh \alpha c = \alpha c + \frac{(\alpha c)^3}{6} + \frac{(\alpha c)^5}{120} + \dots; \quad \cosh \alpha c = 1 + \frac{(\alpha c)^2}{2} + \frac{(\alpha c)^4}{24} + \dots$$

و بانادیده گرفتن مقادیر کوچک مراتب بالاتر از $(\alpha c)^4$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\sigma_y = -A \sin \alpha x \left(1 - \frac{(\alpha c)^4}{24} \right)$$

از این رو برای مقادیر کوچک αc ، توزیع تنش‌ها بر روی صفحه میانی در عمل برابر توزیع تنش بر لبه‌های افقی تیر ($y = \pm c$) است. می‌توان نتیجه‌گیری کرد که فشارها از طریق یک تیر با صفحه بدون هرگونه تغییر قابل توجه به شرط سریع نبودن تغییرات این فشارها در امتداد اضلاع انتقال می‌یابند.

تنش‌های برشی τ_{xy} برای این حالت بسیار کوچک هستند. بر روی نیمه‌های بالایی و پایینی سطح مقطع تیر، آنها به برآیندهای کوچک لازم برای متعادل کردن اختلاف اندک میان فشارهای وارد بر لبه‌های افقی ($y = \pm c$) و صفحه میانی ($y = 0$) اضافه می‌گردند.

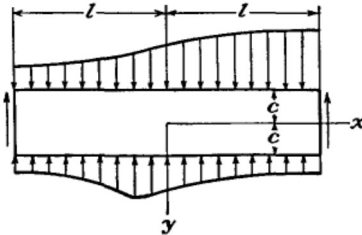


Fig. 32.

در کلی‌ترین حالت، توزیع بارگذاری عمودی در امتداد لبه‌های بالایی و پایینی یک تیر (شکل 32) را می‌توان با سری‌های زیر نمایش داد.

For the upper edge,

$$q_u = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m' \cos \frac{m\pi x}{l}$$

For the lower edge,

$$q_l = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m' \cos \frac{m\pi x}{l}$$

(m)

عبارات A_0 و B_0 ثابت نشان‌گر یک بارگذاری یکنواخت از تیر هستند که در بند 21 مورد بحث و بررسی قرار گرفت. تنش‌های ایجادشده با عبارات حاوی $\sin (m\pi x/l)$ با جمع راه‌حل‌های (k) به دست می‌آیند. تنش‌های ایجادشده با عبارات حاوی $\cos (m\pi x/l)$ بسادگی از راه‌حل‌های (k) با تبدیل $\sin \alpha x$ به $\cos \alpha x$ و برعکس و با تغییر علامت τ_{xy} به دست می‌آیند.

برای نشان دادن این روش کلی محاسبه تنش در صفحات مستطیلی، موردنشان داده‌شده در شکل 33 را در نظر بگیرید. برای این مورد بارگذاری متقارن، عبارات با $\sin (m\pi x/l)$ از روابط (m) حذف شده و ضرایب A_0 و A_m' به روش معمول به دست می‌آیند.

$$A_0 = B_0 = \frac{qa}{l}, \quad A_m' = B_m' = \frac{1}{l} \int_{-a}^a q \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2q \sin \frac{m\pi a}{l}}{m\pi} \quad (n)$$

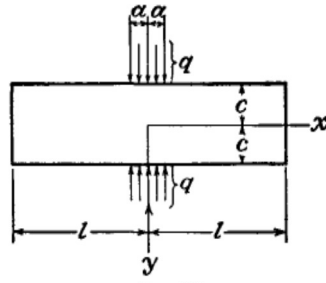


FIG. 33.

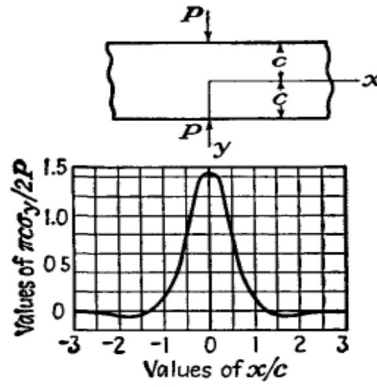


FIG. 34.

عبارات A_0 و B_0 نشان‌دهنده فشار یکنواخت در جهت y و برابر qa/l هستند. تنش‌های ایجاد شده با عبارات مثلثاتی با استفاده از راه‌حل‌های (k) و با تبدیل $\sin \alpha x$ به $\cos \alpha x$ و برعکس و با تغییر علامت τ_{xy} به دست می‌آیند. صفحه میانی $y = 0$ را که در آن تنها یک تنش نرمال وجود دارد را در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه دوم معادلات (k) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a}{l} \cdot \frac{m\pi c}{l} \cosh \frac{m\pi c}{l} + \sinh \frac{m\pi c}{l}}{\sinh \frac{2m\pi c}{l} + 2 \frac{m\pi c}{l}} \cdot \cos \frac{m\pi x}{l}$$

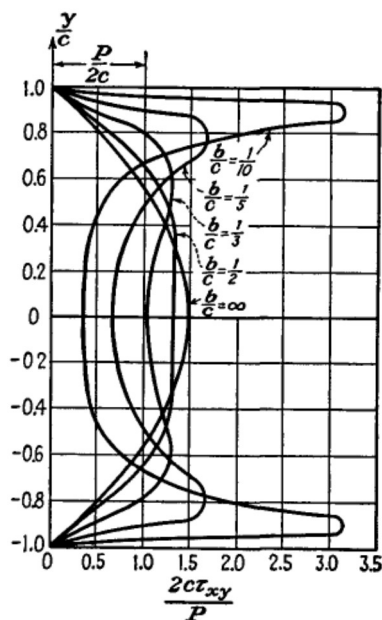


FIG. 36.

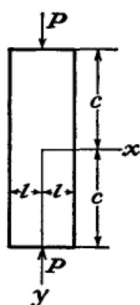


FIG. 37.

این تنش توسط فیلون برای یک نوار بی نهایت طولانی وقتی ابعاد بسیار کوچک است (یعنی نیروی متمرکز $P = 2qa$) مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج این محاسبه در شکل 34 نشان داده شده است. می توان مشاهده کرد که σ_y با x به سرعت کاهش پیدا می نماید. در مقدار $x/c = 1.35$ σ_y صفر می شود و سپس با کشش جایگزین می گردد. فیلون مورد نشان داده شده در شکل 35 را با جایگزینی نیروهای P نسبت به یکدیگر مورد بررسی قرار می دهد. توزیع تنش های برشی بر روی سطح مقطع nn در این حالت در شکل 36 نشان داده شده است. برای مقادیر کوچک با نسبت b/c ، این توزیع مشابه توزیع سهمی بدست آمده از تئوری مقدماتی نیست و در حالی که بخش میانی تیر در عمل فاقد تنش های برشی است تنش های بسیار بزرگی در بالا و انتهای تیر وجود دارد. در مسئله شکل 34 به دلیل تقارن هیچ تنش برشی و هیچ جابجایی عمودی در خط میانی $y=0$ وجود ندارد. بنابراین نیمه بالایی با یک لایه الاستیک قرار گرفته بر روی پایه صلب متناظر است. اکنون یک حالت بی نهایت دیگر را وقتی عمق صفحه $2c$ در مقایسه با طول 2l بزرگ است در نظر می گیریم (شکل 37). ما می توانیم از این مورد برای نشان دادن اینکه توزیع تنش ها در سطح مقطع ها با افزایش فاصله نقطه اعمال نیروهای P به یکنواختی نزدیک می گردد استفاده کنیم. با استفاده از رابطه دوم معادلات (K) با $\cos \alpha x$ به جای $\sin \alpha x$ و عبارات (n) برای ضرایب A_m' برابر B_m'' به روابط زیر می رسیم:

$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha a}{m} \cdot \frac{(\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \cos \alpha x \quad (p)$$

که در آن $qa = P/2$. اگر l در مقایسه با c کوچک باشد، αc یک عدد بزرگ است و می توان در مقایسه با $\sinh \alpha c$ نادیده گرفت. ما می توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم

$$\sinh \alpha c = \cosh \alpha c = \frac{1}{2}e^{\alpha c}$$

برای سطح مقطع ها در یک فاصله بزرگ از وسط صفحه می توانیم رابطه $\sinh \alpha y = \cosh \alpha y = \frac{1}{2}e^{\alpha y}$ را بنویسیم. با جایگزینی این روابط در معادله (p) به رابطه زیر می رسیم

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha a}{2m} [(\alpha c + 1)e^{\alpha(y-c)} - \alpha y e^{\alpha(y-c)}] \cos \alpha x \\ &= -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a}{l}}{2m} \left[\frac{m\pi}{l} (c - y) + 1 \right] e^{\frac{m\pi}{l}(y-c)} \cos \frac{m\pi x}{l} \end{aligned}$$

اگر $c - y > l/2$ بسیار کوچک نباشد، یعنی $c - y > l/2$ ، این سری به سرعت همگرا شده و تنها چند جمله از این سری برای محاسبه σ_y لازم است. سپس می توانیم از هم ارزی زیر استفاده کنیم

$$\sin \frac{m\pi a}{l} = \frac{m\pi a}{l}$$

و با قراردادن $2aq = P'$ به رابطه زیر می رسیم

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m\pi}{l} (c - y) + 1 \right] e^{\frac{m\pi}{l}(y-c)} \cos \frac{m\pi x}{l}$$

به عنوان مثال برای $y = c - l_x$

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \left(\frac{\pi + 1}{e^{\pi}} \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{2\pi + 1}{e^{2\pi}} \cos \frac{2\pi x}{l} + \frac{3\pi + 1}{e^{3\pi}} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)$$

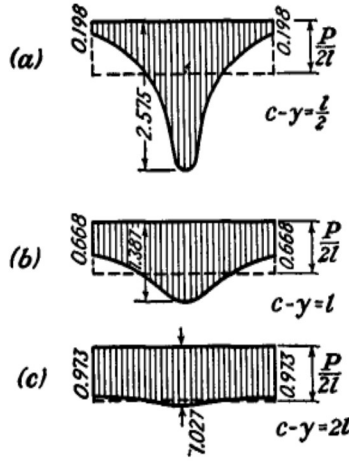


FIG. 38.

سه عبارت اول سری برای ارائه دقت مناسب کافی هستند و توزیع تنش در شکل 38b نشان داده شده است. در همین شکل توزیعات تنش برای و نیز داده شده‌اند. بدیهی است که در یک فاصله از انتهای برابر با پهنای نوار، توزیع تنش در عمل یکنواخت است که نتیجه‌گیری صورت گرفته براساس اصل سن ونان را تایید می‌کند. برای یک نوار بلند نظیر شکل 37، تنش‌های σ_x از طریق پهنای 2l صفحه با تغییر اندک انتقال می‌یابند به شرط اینکه نرخ تغییرات در امتداد لبه بسیار سریع نباشد. با این حال تنش‌های راه‌حل فعلی در این مورد و بخصوص در نزدیکی دو سر تیر $y = \pm c$ نیازمند اصلاح می‌باشد. یک راه‌حل از مسئله شکل 37 با $c=2l$ با روشی متفاوت، یک تنش فشاری یکنواخت قرار گرفته در بخش افقی میانی را ارائه می‌کند که با شکل 38c همخوانی دارد. تنش‌های واقع در نزدیکی نقطه اعمال بارهای P در ادامه مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت (صفحه 85 را ببینید).

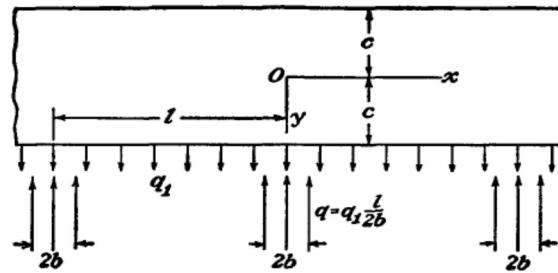


FIG. 39.

24. کاربردهای دیگر سری‌های فوریه. بارگذاری گرانشی. مسائل در نظر گرفته شده در بند 23 به یک دهانه l یا $2l$ می‌پردازند. با این حال این راه‌حل‌ها را می‌توان به عنوان حالت‌های متناوب تنش در نوارهای بلند موازی با محور x مدنظر قرار داد چراکه یک سری فوریه یک تابع متناوب را به تصویر می‌کشد. یک تیر پیوسته شامل ترتیبی از دهانه‌های برابر تحت بارگذاری یکسان در صورت مناسب بودن شرایط انتهای تیر از چنین توزیع متناوبی برخوردار خواهد بود. اگر همانند ساخت‌وسازهای تقویت‌شده با بتن خاص که تیر در نقاطی که فاصله آنها قابل مقایسه با عمق است تیر دو سرگیردار باشد (شکل 39)، نتایج ارزشمندی را می‌توان با روش فعلی بدست آورد. تئوری مقدماتی تیر کافی نیست. یک بار با توزیع یکنواخت q_1 بر لبه پایین‌تر با تکیه‌گاه حاوی نیروهای عکس‌العمل به سمت بالا که در عرض $2b$ در بازه‌های l توزیع یافته است نمونه خاصی از روابط (m بند 23) را ارائه می‌کند. اگر بار q_1 بر لبه بالایی اعمال گردد، صرفاً اضافه کردن توزیع تنش به دلیل فشارها با توزیع یکنواخت برابر و مخالف q_1 بر لبه‌های بالایی و پایینی ضروری می‌باشد.

اگر بار وزن خود تیر باشد مسئله نیرو-جسم حاصل را می‌توان به یک مسئله لبه-بار کاهش داد. توزیع تنش ساده

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -\rho g(y + c), \quad \tau_{xy} = 0$$

معادلات تعادل و همسازی 19 و 24 را برآورده می‌سازد. این حالت تکیه‌گاهی را با فشار توزیعی یکنواخت بر لبه پایینی در شکل 39 به نمایش می‌گذارد. این شرط که σ_y در لبه پایینی صفر است بجز در تکیه‌گاه‌ها (با عرض $2b$)، با افزودن این توزیع تنش به توزیع نشان داده شده با شکل 39 با جایگزینی q_1 با $2\rho g c$ و تنش ناشی از q و q_1 بدون نیروی جسم برآورده می‌شود.

مسائل

1. بررسی کنید که کدام مسئله تنش صفحه‌ای با تابع تنش حل می‌گردد

$$\phi = \frac{3F}{4c} \left(xy - \frac{xy^3}{3c^2} \right) + \frac{P}{2} y^2$$

2. بررسی کنید که چه مسئله با رابطه زیر حل می‌شود که در ناحیه $y=0, y=d, x=0$ بر ضلع مثبت x اعمال می‌گردد.

$$\phi = -\frac{F}{d^3} xy^2(3d - 2y)$$

3. نشان دهید که رابطه زیر

$$\phi = \frac{q}{8c^3} \left[x^2 (y^3 - 3c^2 y + 2c^3) - \frac{1}{5} y^5 (y^2 - 2c^2) \right]$$

یک تابع تنش است و وقتی برای یک ناحیه $y = \pm c, x = 0$ بر ضلع x مثبت به کار می‌رود نشان دهید که برای چه مسئله‌ای حل می‌گردد.

4. تابع تنش $\phi = s \left(\frac{1}{4} xy - \frac{xy^2}{4c} - \frac{xy^3}{4c^2} + \frac{ly^2}{4c} + \frac{ly^3}{4c^2} \right)$ برای حل مسائل یک تیر طره‌ای ($y = \pm c, 0 < x < l$)

تحت بارگذاری برشی یکواخت در امتداد لبه پایینی پیشنهاد شده است و لبه بالایی و انتهای تیر فاقد بار هستند. این راه‌حل از چه جهاتی ناقص است؟ عبارات مربوط به تنش را با روابط بدست آمده از فرمول‌های کشش و خمش مقدماتی را با هم مقایسه کنید.

5. تیر شکل 28 به جای بار q بر لبه بالایی تحت بارگذاری وزن خود تیر قرار دارد. روابط مربوط به مولفه‌های جابجایی u و v بیابید. یک رابطه را نیز برای تغییر ضخامت (در اصل واحد) بیابید.

6. تیر طره‌ای شکل 26 به جای داشتن یک سطح مقطع مستطیلی باریک از سطح مقطع مستطیلی عریضی برخوردار است و با نیروهای مناسب در امتداد اضلاع عمودی در کرنش صفحه‌ای باقی می‌ماند. بار P به ازای عرض واحد بر انتهای تیر وارد می‌گردد. اینکه تنش‌های $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ به مانند بند 20 یکسان هستند را بررسی نمایید. رابطه‌ای را برای σ_x بیابید و توزیع آن در امتداد اضلاع تیر طره‌ای را رسم نمایید. روابط مربوط به τ با ثابت بودن المان افقی این محور در $X=L$ بنویسید.

7. نشان دهید که اگر V یک تابع هارمونیک صفحه‌ای باشد یعنی رابطه لاپلاس را ارضا کند

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

آنگاه توابع هر کدام رابطه (a) بند 17 را ارضا نموده و می‌توانند به عنوان توابع تنش مورد استفاده قرار گیرند.

8. نشان دهید که رابطه $(Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y} + Cy e^{\alpha y} + Dy e^{-\alpha y}) \sin \alpha x$ یک تابع تنش است.

عبارت سری برای تنش‌ها را در یک صفحه نیمه‌بی‌نهایت $y > 0$ ناشی از فشار نرمال بر لبه مستقیم ($y=0$) دارای توزیع زیر را بدست آورید.

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

نشان دهید که تنش σ_z در یک نقطه واقع بر لبه یک تنش فشاری برابر فشار اعمالی در این نقطه است. فرض کنید که تنش با بزرگتر شدن y تمایل به صفر شدن دارد.

9. نشان دهید که (a) تنش‌های ارائه شده با روابط (e) بند 23 و (b) تنش‌های مسئله 8 رابطه (b) بند 16 را برآورده می‌سازد.

فصل چهارم

مسائل دوبعدی در مختصات قطبی

26. روابط کلی در مختصات قطبی. در تنش‌های مورد بحث در دیسک‌ها و رینگ‌های مدور، میله‌های منحنی‌شکل با سطح مقطع مستطیلی باریک با یک محور مدور استفاده از مختصات قطبی سودمند می‌باشد. موقعیت یک نقطه در سطح میانی یک صفحه با فاصله از مبدا O (شکل 40) و با زاویه θ^1 میان r و یک محور معین OX ثابت در این صفحه تعریف می‌گردد.

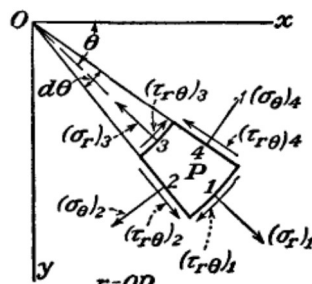


FIG. 40.

اکنون تعادل یک المان کوچک برش‌داده شده 1234 از این صفحه را با مقاطع دایروی 02، 04، نرمال بر صفحه و با سطح سیلندری 3 و 1 نرمال بر صفحه در نظر می‌گیریم. مولفه تنش نرمال در جهت شعاعی با σ_r و مولفه نرمال در جهت محیطی با σ_θ و مولفه تنش برشی با $\tau_{r\theta}$ نمایش داده می‌شوند و هر نماد نشانگر تنش در نقطه r و θ است که نقطه میانی p این المان محسوب می‌گردد. با در نظر گرفتن تغییرات تنش، مقادیر تنش در نقاط میانی اضلاع 1، 2، 3 و 4 کاملاً با مقادیر σ_r ، σ_θ ، $\tau_{r\theta}$ یکسان نبوده و با شکل 40 نشان داده می‌شوند. شعاع اضلاع 3 و 1 با r_1 و r_2 نشان داده می‌شوند. نیروی شعاعی ضلع 1 برابر $\sigma_{r1} r_1 d\theta$ است که می‌تواند به صورت $(\sigma_{rr})_1 d\theta$ نوشته شود و به همین ترتیب نیروی شعاعی وارد بر ضلع 3 برابر $d\theta (\sigma_{rr})_3$ است. نیروی نرمال وارد بر ضلع 2 از یک مولفه در امتداد شعاع $(\sigma_\theta)_2 (r_1 - r_3) \sin(d\theta/2)$ برخوردار است که می‌تواند با $(\sigma_\theta)_2 dr (d\theta/2)$ جایگزین گردد. مولفه متناظر با این در ضلع 4 برابر $(\sigma_\theta)_4 dr (d\theta/2)$ است. نیروهای برشی وارد بر اضلاع 2 و 4 مولفه $[(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4] dr$ را ارائه می‌کنند.

با جمع نیروها در جهت شعاعی از جمله نیروی جسم R بر حجم واحد در جهت شعاعی ما به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(\sigma_{rr})_1 d\theta - (\sigma_{rr})_3 d\theta - (\sigma_\theta)_2 dr \frac{d\theta}{2} - (\sigma_\theta)_4 dr \frac{d\theta}{2} + [(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4] dr + Rr d\theta dr = 0$$

این رابطه با تقسیم بر $dr d\theta$ به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{(\sigma_{rr})_1 - (\sigma_{rr})_3}{dr} - \frac{1}{2} [(\sigma_\theta)_2 + (\sigma_\theta)_4] + \frac{(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4}{d\theta} + Rr = 0$$

اگر ابعاد این المان کوچک و کوچک‌تر شده تا به صفر نزدیک شوند اولین عبارت این معادله به $\partial(\sigma_{rr})/\partial r$ تبدیل می‌گردد. دومین و سومین عبارت به σ_θ و $\partial\tau_{r\theta}/\partial\theta$ تبدیل می‌گردند. معادله تعادل در جهت مماسی را می‌توان به همین ترتیب به دست آورد. این دو رابطه به شکل زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

وقتی ما مسائل دوبعدی را با استفاده از مختصات قطبی حل می‌کنیم، این معادلات به صورت روابط (18) درمی‌آیند. وقتی نیروی جسم R صفر گردد آنها با قرار دادن روابط زیر ارضاء می‌گردند

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\phi}{\partial r \partial\theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

که ϕ تابع تنش به عنوان تابعی از r و θ است. این رابطه را می‌توان با جایگزینی مستقیم مورد بررسی قرار داد. یک مشتق‌گیری از رابطه 38 در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای ارائه یک توزیع تنش ممکن این تابع باید شرط همسازي را برآورده سازد. در مختصات کارتزین (صفحه 26) این شرط به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4\phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

برای این منظور ما نیاز داریم که این معادله را به مختصات قطبی تبدیل کنیم. رابطه میان مختصات قطبی و کارتزین به صورت زیر داده می‌شود

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

که در آن

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

با استفاده از این روابط و با در نظر گرفتن ϕ به عنوان تابعی از r و θ ، به روابط زیر می‌رسیم

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \sin \theta$$

برای دومین مشتق‌گیری نسبت به x تکرار عملیات فوق ضروری می‌باشد؛ از این رو داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \\ &\quad + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \quad (b) \end{aligned}$$

به همین ترتیب به رابطه زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} \\ &\quad - 2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \quad (c) \end{aligned}$$

با جمع روابط (b) و (c) رابطه زیر حاصل می‌گردد

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (d)$$

با استفاده از رابطه $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$ و معادله (d) رابطه همسازي به شکل زیر درمی‌آید

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (39)$$

از راه‌حل‌های متعدد این رابطه دیفرانسیلی جزئی ما به حل مسائل دوبعدی در مختصات قطبی برای شرایط مرزی مختلف می‌رسیم. چندین نمونه از چنین مسائلی در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرند.

اولین و دومین عبارت از روابط (38) از معادلات (b) و (c) حاصل می‌گردند. اگر ما هر نقطه‌ای را در صفحه مشخص کنیم و محور x را از آن بگذرانیم $\theta = 0$ است و σ_x, σ_y برای این نقطه خاص همانند σ_r, σ_θ می‌باشند. از این رو از رابطه (c) و با قراردادن $\theta = 0$ به رابطه زیر می‌رسیم

$$\sigma_r = \sigma_x = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

این رابطه در هر جهت گیری محور x ، به نشان دادن σ_r ادامه می دهد. ما از رابطه (b) و با قراردادن $\theta = 0$ داریم

$$\sigma_\theta = \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

و می توان سومین رابطه از 38 را با یافتن عبارت $-\partial^2 \phi / \partial x \partial y$ مشابه با روابط (b) و (c) بدست آورد.

26. توزیع متقارن حول یک محور. اگر توزیع تنش نسبت به این محور در نقطه 0 عمود بر صفحه xy (شکل 40) متقارن باشد، مولفه های تنش به θ وابسته نبوده و تنها تابعی از r هستند. از تقارن می توان نتیجه گرفت که تنش برشی $\tau_{r\theta}$ باید صفر گردد. تنها اولین رابطه از معادلات تعادل (37) باقی مانده و رابطه زیر را داریم

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad (40)$$

اگر نیروی وارد بر جسم R صفر باشد می توان از تابع تنش ϕ استفاده نمود. وقتی این تابع تنها به r بستگی دارد رابطه همسازی (39) به صورت زیر درمی آید

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{d^4 \phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (41)$$

این یک رابطه دیفرانسیلی معمولی است که می تواند با وارد کردن یک متغیر جدید λ به گونه ای که $r = e^\lambda$ باشد به یک رابطه دیفرانسیلی خطی با ضرایب ثابت تبدیل گردد. به این طریق راه حل کلی معادله (41) را می توان به سادگی به دست آورد. این راه حل از چهار ثابت انتگرال گیری برخوردار است که باید از شرایط مرزی تعیین گردند. با جایگذاری می توان بررسی کرد که رابطه (42) $\phi = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D$ یک راه حل کلی است. راه حل های تمامی مسائل توزیع تنش متقارن و هیچکدام

از نیروهای وارد بر جسم از این رابطه بدست نمی آیند. مولفه های تنش متناظر از رابطه 38 عبارتند از

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \log r) + 2C \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \log r) + 2C \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

اگر هیچ سوراخی در مبداء مختصات وجود نداشته باشد ثابت های A و B صفر می شوند چراکه مولفه های تنش (43) وقتی $r=0$ بی نهایت می شوند. از این رو برای صفحه بدون یک حفره در مبداء و بدون هیچ نیروی وارد بر جسمی، تنها یک مورد از توزیع تنش متقارن نسبت به این محور یعنی وقتی که $\sigma_r = \sigma_\theta = \text{constant}$ است وجود دارد و این صفحه در تمامی جهات در شرایط کشش یا فشردگی یکنواخت قرار دارد.

اگر در مبداء مختصات حفره وجود داشته باشد راه‌حل‌های دیگری از کشش یا فشردگی یکنواخت را می‌توان از روابط 43 بدست آورد. به عنوان مثال با صفردر نظر گرفتن B، معادلات 43 به شکل زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2C\end{aligned}\quad (44)$$

این راه‌حل را می‌توان برای نمایش توزیع تنش در یک سیلندر توخالی تحت فشار یکنواخت بر سطوح داخلی و بیرونی (شکل 41) مورد استفاده قرار داد. فرض کنید a و b شعاع درونی و خارجی سیلندر و p_1 و p_0 فشارهای یکنواخت داخلی و خارجی هستند. سپس شرایط مرزی عبارتند از:

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_i, \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_o \quad (a)$$

با جایگذاری در اولین رابطه از معادلات 44 به روابط زیر برای تعیین A و C دست پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{A}{a^2} + 2C &= -p_i \\ \frac{A}{b^2} + 2C &= -p_o\end{aligned}$$

که در آنها

$$\begin{aligned}A &= \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \\ 2C &= \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}\end{aligned}$$

با جایگزینی این روابط در معادلات 44، عبارات زیر برای مولفه‌های تنش حاصل می‌گردند:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \\ \sigma_\theta &= -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}\end{aligned}\quad (45)$$

جالب اینجاست که $\sigma_r + \sigma_\theta$ در ضخامت دیواره سیلندر ثابت می‌باشد. بنابراین تنش‌های σ_r و σ_θ یک انبساط یا انقباض یکنواخت را در جهت محور سیلندر بوجود می‌آورد و سطح مقطع‌های عمود بر این محور صفحه‌ای باقی می‌مانند. از این رو تغییر شکل ناشی از تنش‌ها در یک المان برش خورده سیلندر با دو سطح مقطع مجاور با تغییر شکل المان‌های مجاور تداخل نداشته و در نظر گرفتن المان در شرایط تنش صفحه‌ای همانند بحث فوق مورد تایید می‌باشد.

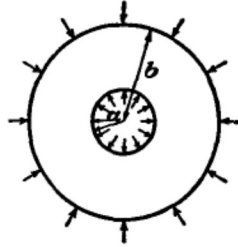


FIG. 41.

در یک مورد خاص وقتی که $p_o = 0$ است و سیلندر تنها در معرض فشار داخلی وجود دارد روابط 45 به صورت زیر ارائه می گردند

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 p_1}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2 p_1}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

این معادلات نشان می دهند که σ_r همیشه یک تنش فشاری و σ_θ یک تنش کششی است. در سطح داخلی سیلندر به حداکثر مقدار خود می رسد که

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{p_1(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} \quad (47)$$

همیشه از لحاظ عددی بزرگتر از فشار داخلی است و با افزایش b به این مقدار نزدیک می شود به گونه ای که این مقدار هرگز نمی تواند به میزانی پایین تر از p_1 برسد اما با این حال بسیاری از مواد به لایه بیرونی اضافه می گردد. کاربردهای متعدد روابط 46 و 47 در طراحی ماشین معمولاً در کتابهای مقدماتی مقاومت مصالح مورد بحث و بررسی قرار گرفته اند.

مسئله متناظر برای یک سیلندر با یک حفره خارج از مرکز نیز در بند 66 در نظر گرفته شده است. این مسئله توسط جفری حل شده است. اگر شعاع حفره a و شعاع سطح خارجی b باشد و در صورتی که فاصله میان مراکز آنها e باشد وقتی سیلندر تحت فشار داخلی p_1 باشد حداکثر تنش، تنش مماسی در سطح داخلی در نازک ترین بخش است و اگر $e < \frac{1}{2}a$ باشد به صورت زیر است

$$\sigma = p_1 \left[\frac{2b^2(b^2 + a^2 - 2ae - e^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)} - 1 \right]$$

اگر $e = 0$ باشد این رابطه با معادله 47 منطبق می باشد.

