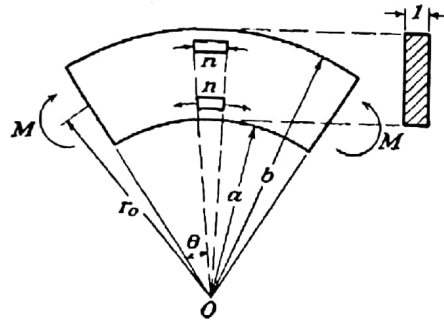


۲۷- خمش خالص میله خمیده شده

اجازه دهید میله ای خمیده شده^۱ با مقطع عرضی^۲ مستطیلی باریک پیوسته و محور دایروی که در صفحه خمش توسط کوپل M اعمال شده در دوسر خمیده شده است (شکل ۴۲). در این حالت لنگر خمشی در طول میله ثابت بوده و به طور طبیعی انتظار داریم توزیع تنش در مقطع شعاعی یکسان باشد، و به همین دلیل حل مساله را می توان با استفاده از عبارت (42) بدست آورد. با مشخص کردن a و b به عنوان شعاع های داخلی و خارجی و واحد در نظر گرفتن عرض مقطع عرضی، شرایط مرزی هستند:

$$\begin{aligned} (1) \quad \sigma_r &= 0 \quad r=a, r=b \\ (2) \quad \int_b^a \sigma_\theta dr &= 0 \quad \int_b^a \sigma_\theta r dr = -M \\ (3) \quad \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$



(شکل ۴۲)

حالت (۱) به معنی اینست که مرزهای محدب و مقعر میله فاقد نیروی نرمال است. حالت (۲) نشان میدهد که تنش های نرمال تنها باعث افزایش کوپل M در انتهای میله میشود و حالت (۳) نشان میدهد که هیچ گونه نیروی مماسی در مرزها اعمال نمیشود. با استفاده از ابتدای معادله (43) و حالت (۱) از شرایط مرزی (a) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{A}{a^2} + B(1 + 2 \log a) + 2C &= 0 \\ \frac{A}{b^2} + B(1 + 2 \log b) + 2C &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

از بحث عمومی مسائل دوبعدی "فن ۱۵" در ذیل آمده است که جوابهای بدست آمده ی زیر جا میگیرند در حالت حداکثری زمانی که بعد مقطع عرضی عمود بر صفحه خمش بسیار بزرگ باشد، به عنوان نمونه طاق تونل (شکل ۱۰)، اگر بار در تمام طول تونل یکسان باشد.

از حالت (۲) از شرایط (a) داریم:

$$\int_b^a \sigma_{\theta} dr = \int_b^a \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} dr = \left| \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_a^b = 0$$

با جاگذاری ϕ در رابطه (42) به دست می آوریم:

$$\left[\frac{A}{b} + B(b + 2b \log b) + 2Cb \right] - \left[\frac{A}{a} + B(a + 2a \log a) + 2Ca \right] = 0 \quad (c)$$

با مقایسه ای با (b) به آسانی میتوان مشاهده نمود (c) اثبات میشود، و نیروها در انتهای میله برای کوپل قابل کاهش هستند که حالات ارائه شده (b) اقتناع^۳ میشوند. برای داشتن کوپل خمشی معادل M حالت

$$\int_a^b \sigma_{\theta} r dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} r dr = -M \quad (d)$$

باید محقق شود. داریم:

$$\int_b^a \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} r dr = \left| \frac{\partial \phi}{\partial r} r \right|_a^b - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = \left| \frac{\partial \phi}{\partial r} r \right|_a^b - \left| \phi \right|_a^b$$

با توجه به اینکه در محاسبه (b)

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial r} r \right|_a^b = 0$$

از (d) می یابیم

$$\left| \phi \right|_a^b = M$$

با جایگزینی عبارت (42) در ϕ

$$A \log \frac{b}{a} + B(b^2 \log b - a^2 \log a) + C(b^2 - a^2) = M \quad (e)$$

این معادله در کنار دو معادله (b) به طور کامل ثابت های^۴ A, B, C را تعیین میکند و داریم:

$$A = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \log \frac{b}{a} \quad B = -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2)$$

$$C = \frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \log b - a^2 \log a)] \quad (f)$$

³ Satisfied
⁴ Constants

برای سادگی قرار دادیم:

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left(\log \frac{b}{a}\right)^2 \quad (g)$$

با جایگذاری مقادیر (f) ثابت ها در عبارت (43) برای اجزای تنش داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4M}{N} \left(\frac{a^2b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right) \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

این توزیع تنشی که تمام شرایط مرزی^۱ (a) برای خمش را ارضا کند می دهد و پاسخ قطعی مساله را ارائه می کند، توزیع نیروهای نرمال در انتهای میله که توسط قسمت دوم معادله (48) داده شده را ارائه میکند. اگر نیروهای تولیدکننده کوپل خمشی M در انتهای میله بصورت دگرگی توزیع^۵ شوند، توزیع تنش در انتهای از حل معادله (48) متفاوت خواهد بود. ولی بر اساس اصل سنت-ونانت میتوان نتیجه گرفت که انحراف^۶ از جواب (48) بسیار کوچک بوده و شاید در فواصل زیاد از انتها نادیده گرفته شود، در فواصل بیشتر از عمق میله. به عنوان تمرین عملی میتوان حل (48) با راه حلهای ابتدایی که معمولاً در کتابهای مقاومت مصالح آورده میشود را مقایسه نمود. اگر عمق میله b-a، در مقایسه با شعاع محور مرکزی (b+a)/2، کوچکتر باشد، توزیع تنش مشابه بامیله های مستقیم در نظر گرفته می شود. اگر این عمق کوچک نباشد به طور معمول در عمل فرض می شود که مقطع عرضی میله در طول خمش صاف باقی می ماند، از آنجایی که می توان نشان داد که توزیع تنش های نرمال σ_θ بر روی هر مقطع عرضی از قانون هیپربولیک^۲ تبعیت می کند. در تمام موارد بیشترین و کمترین مقدار تنش σ_θ را می توان از رابطه زیر به دست آورد

$$\sigma_\theta = m \frac{M}{a^2} \quad (h)$$

^۱ این راه حل بر اساس H. Golovin, St. Petersburg است. مقاله ای که در روسیه منتشر شد و در سایر کشورها ناشناخته ماند و مساله مشابه بعدها حل شد توسط M. C. Rubiere و توسط L. Prandtl.
^۲ این تنوری تقریبی توسط H. Resal و E. Vinkler توسعه یافت. پیشرفت های بعدی این تنوری توسط F. Grashof انجام شد

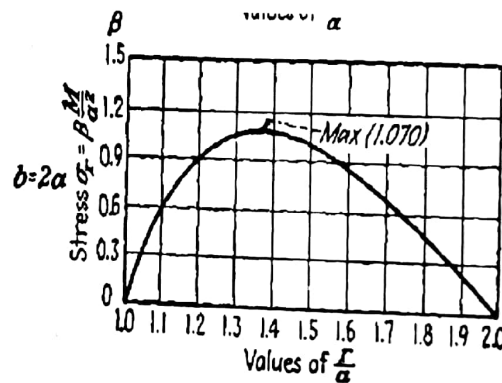
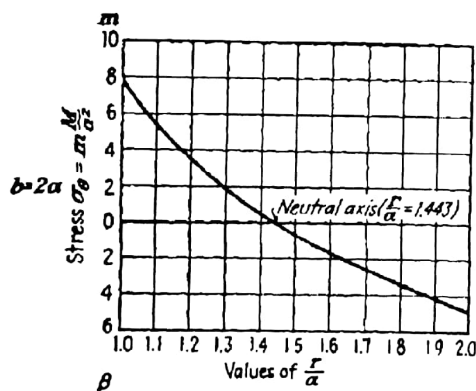
^۵ Distribution
^۶ Deviations

جدول زیر مقادیر عددی ضریب m را می دهد که توسط دو روش ابتدایی که بالا گفته شد محاسبه شده و توسط فرمول (48)!

ضریب m بر مبنای (h)

$\frac{b}{a}$	توزیع تنش خطی	توزیع تنش هیپربولیک	رادخل دقیق
1.3	± 66.67	+72.98, -61.27	+73.05, -61.35
2	± 6.000	+7.725, -4.863	+7.755, -4.917
3	± 1.500	+2.285, -1.095	+2.292, -1.130

از جدول میتوان مشاهده کرد که حل ابتدایی بر اساس تئوری مقطع عرضی صاف جوابهای بسیار درستی می دهد.



(شکل ۴۳)

بعدا نشان داده خواهد شد که در حالت خمش خالص مقطع عرضی صاف و مسطح باقی می ماند، و اختلاف^۷ بین راه حل های ابتدایی و قطعی از این واقعیت می آید که حل ابتدایی عضو تنش σ_0 در نظر گرفته نمیشود^۸ و فرض می شود که فیبرهای طولی میله ی خمیده شده در کشش یا فشار هستند.

نتایج از تزهای دکتری بدست آمده است دانشگاه میشیگان ۱۹۳۱ V. Billevicz.

^۷ Discrepancy

^۸ Neglected

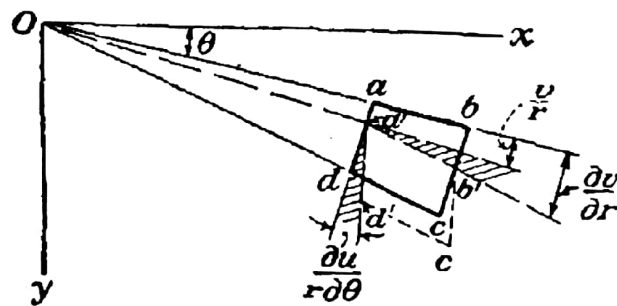
از قسمت اول معادله (48) می توان نشان داد که تنش σ_r برای جهت خمش نشان داده شده در شکل ۴۲ همیشه مثبت است. نتیجه مشابه را می توان از جهت تنش های σ_θ اعمال شده بر اجزای n-n در شکل ۴۲ نتیجه گرفت. نیروهای مماسی^۹ مربوطه در جهت شعاعی منتج میشوند و تمایل به جدا کردن فیبرهای طولی و تولید تنش کششی در جهت شعاعی دارند. این ماکزیمم همیشه خیلی کوچک تر از $(\sigma_\theta)_{max}$ است. برای مثال، برای $b/a = 1.3$ داریم $(\sigma_r)_{max} = 0.06 (\sigma_\theta)_{max}$ برای $b/a = 2$ داریم $(\sigma_r)_{max} = 0.138 (\sigma_\theta)_{max}$ برای $b/a = 3$ داریم $(\sigma_r)_{max} = 0.193 (\sigma_\theta)_{max}$. در شکل ۴۳ توزیع σ_r و σ_θ برای $b/a = 2$ داده شده است. در این شکل می بینیم که نقطه ماکزیمم تنش σ_r تا حدودی در محور خنثی در جهت مرکز تقعر قرار گرفته است.

۲۸- مولفه های کرنش در مختصات قطبی

در نظر گرفتن جابجایی در مختصات قطبی اجازه دهید که با u و v مولفه های جابجایی^{۱۰} در جهت های شعاعی و مماسی در نظر بگیریم. اگر u جابجایی شعاعی سمت ad از المان $abcd$ باشد (شکل ۴۴)، جابجایی شعاعی سمت bc خواهد بود $u + (\partial u / \partial r) dr$. تغییر طول واحد المان $abcd$ در جهت شعاعی خواهد بود

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

(۴۹)



(شکل ۴۴)

همانند کرنش در جهت مماسی باید مشاهده شود که کرنش مماسی نه تنها به جابجایی v بلکه به جابجایی شعاعی u نیز بستگی دارد. با در نظر گرفتن، به طور مثال، که نقطه a و d از المان $abcd$ (شکل ۴۴) فقط جابجایی شعاعی داشته باشند، طول جدید کمان ad $(r+u)d\theta$ خواهد بود و بنابراین کرنش مماسی خواهد بود

$$\frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}$$

^۹ Tangential force
^{۱۰} Elongation

اختلاف در جابجایی مماسی ab و cd از المان abcd خواهد بود $(\partial v / \partial \theta) d\theta$ ، و کرنش مماسی مرتبط با این جابجایی v خواهد بود $\partial v / r \partial \theta$. بنابراین^{۱۱} کرنش مماسی کل خواهد بود

$$\epsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \quad (50)$$

حال برای در نظر گرفتن کرنش برشی، فرض میکنیم $a'b'c'd'$ موقعیت تغییر^{۱۱} یافته المان abcd باشد (شکل ۴۴). زاویه بین ad و $a'd'$ به علت جابجایی شعاعی u و برابر $\partial u / r \partial \theta$ ، به همین ترتیب زاویه بین $a'b'$ و ab برابر $\partial v / \partial r$ ، باید توجه داشت که تنها قسمت زاویه که (در شکل هاشور زده شده) مرتبط با کرنش برشی^{۱۲} است و قسمت دیگر، v/r ، معرف جابجایی زاویه ای به خاطر چرخش المان abcd به عنوان عضو صلب حول محور O است. بنابراین تغییر کلی در زاویه dab ، که نشان دهنده کرنش برشی است:

با جایگذاری عبارت های المان های کرنشی (49)(50)(51) در معادلات قوانین هوک^{۱۳} معادلات کافی برای تعیین u و v به دست می آید.

۲۹. جابجایی ها برای توزیع تنش متقارن

با جایگذاری اجزای تنش از معادله 43 در قسمت اول معادله (52) در می یابیم

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} \left[\frac{(1 + \nu)A}{r^2} + 2(1 - \nu)B \log r + (1 - 3\nu)B + 2(1 - \nu)C \right]$$

با انتگرال گیری داریم

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1 + \nu)A}{r} + 2(1 - \nu)Br \log r - B(1 + \nu)r + 2C(1 - \nu)r \right] + f(\theta) \quad (a)$$

نماد ϵ_{θ} در Art 10 به معنای متفاوتی به کار برده شده است
^{۱۲} اینجا فرض شده است که با تنش مسطح سروکار داریم، به عنوان مثال تنش σ_r عمود بر صفحه وجود ندارد
 که در آن $f(\theta)$ فقط تابع θ است. با استفاده از معادله 50 از معادله (52) داریم

^{۱۱} Deformation
^{۱۲} Shearing strain

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta)$$

که با استفاده از انتگرال داریم

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - \int f(\theta) d\theta + f_1(r) \quad (b)$$

که $f_1(r)$ فقط تابع r ^{۱۳} است. با جایگذاری $f_1(r)$ و (b) در معادله (51) و در نظر گرفتن اینکه $\gamma(r)$ و $\tau(r)$ صفر است داریم

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta - \frac{1}{r} f_1(r) = 0 \quad (c)$$

که در آن

$$f_1(r) = Fr, \quad f(\theta) = H \sin \theta + K \cos \theta \quad (d)$$

که F, H و K ثابت هایی هستند که باید از شرایط محدودیت میله خم شده به دست آورد. با جایگذاری عبارت های (d) در معادلات (a) و (b) عبارت های زیر را برای جایجایی ها^{۱۴} می یابیم

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \log r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r \right] + H \sin \theta + K \cos \theta \quad (53)$$

$$v = \frac{4Br\theta}{E} + Fr + H \cos \theta - K \sin \theta$$

که در آن مقادیر ثابت های A, B و C برای هر مورد مشخص باید محاسبه شود. برای مثال خمس خالص را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن مرکز سطح مقطع از θ محاسبه شده (شکل ۴۲) و المانی از شعاع در این نقطه که به طور صلب میباشد، شرایط مرزی خواهند بود

¹³ Function
¹⁴ Substituting

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \text{ for } \theta = 0 \text{ and } r = r_0 = \frac{a+b}{2}$$

معادله (c) تنها زمانی ارضا میشود که $\int f(\theta)d\theta$ به دست آمده از (d) بدون ثابت اضافی باشد

با اعمال اینها به عبارت (53) معادلات زیر را برای محاسبه ثابت های انتگرال F.H.K به دست می آوریم

$$\frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r_0} + 2(1-\nu)Br_0 \log r_0 - B(1+\nu)r_0 + 2C(1-\nu)r_0 \right] + K = 0$$

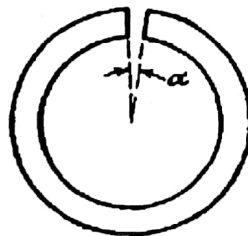
$$Fr_0 + H = 0$$

$$F = 0$$

از این در می یابیم $F=H=0$ ، و برای جابجایی v داریم

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - K \sin \theta \quad (54)$$

این بدین معنی است که جابجایی هر مقطع شامل یک جابجایی انتقالی $K \sin \theta$ ، به طور مشابه برای هر نقطه در مقطع، و یک چرخش^{۱۵} مقطع بوسیله زاویه $4B\theta/E$ حول مرکز خمش O میباشد (شکل ۴۲). می بینیم که مقطع عرضی همانطور که معمولاً در تئوری های ابتدایی خمش خالص^{۱۶} در خمش میله های منحنی فرض میشود ثابت باقی می ماند.



(شکل ۴۵)

در مبحث توزیع تنش متقارن در حلقه کامل (صفحه ۵۹) ثابت B در حل کلی (43) صفر در نظر گرفته شده است، و در این روش به حل مساله لامه میرسیم. حال با بست آوردن عبارت های (53) برای جابجایی با صفر در نظر

¹⁵ Rotation

¹⁶ Pure bending

گرفتن B چه تاثیرهایی بوجود می آید. B مرتبط به جابجایی v در $4B\theta/E$ است. این عبارت به تنهایی ارزیابی نمیشود چون با تغییر θ به اندازه 2π که دوباره به همان نقطه شروع میرسیم تغییر میکند. چنین عبارت چند متغیره برای جابجایی عملا در حلقه کامل غیرممکن است پس بنابراین در این مورد باید در حل کلی (43) $B=0$ در نظر گرفته شود.

حلقه کامل مثالی از عضو متصل پیوسته است به عبارت دیگر، عضوی که بتوان سرتاسر برش داد بدون اینکه عضو دو تکه شود. در تعیین تنش ها در چنین عضو هایی معمولا به این نتیجه میرسیم که شرایط مرزی مربوط به تنش ها برای تعیین توزیع تنش کافی نیستند، و معادلات اضافی، که بیانگر حالاتی است که جابجایی ها تنها ارزیابی شوند باید در نظر گرفته شود (صفحه ۱۱۸ را ببینید)

مفهوم فیزیکی راه حل های چند ارزیابی را میتوان چنین تعریف کرد که با در نظر گرفتن تنش های اولیه ممکن در عضو متصل پیوسته است. اگر قسمتی از حلقه مجاور^{۱۷} به دو مقطع عرضی برش داده شود، و دو سر حلقه دوباره بوسیله جوش یا هر روش دیگری متصل شوند، حلقه ای با تنش های اولیه اش خواهیم داشت

به عبارت دیگر، زمانی که نیروهای خارجی نباشند در حلقه تنش هایی وجود دارد. اگر α زاویه کوچکی که از حلقه جدا شده باشد جابجایی مماسی مورد نیاز برای بهم رساندن انتهای حلقه بهم خواهد بود

$$v = \alpha r \quad (e)$$

همان جابجایی به دست آمده از معادله (54) با قرار دادن $\pi r = \theta$ خواهد بود

$$v = 2\pi \frac{4Br}{E} \quad (f)$$

از (e) و (f) خواهیم داشت

$$B = \frac{\alpha E}{8\pi} \quad (g)$$

نابت B وارد شده به عبارت چند مقداری جابجایی (54) حال ارزش مقدار معینی بسته به جایی که تنش اولیه در حلقه ایجاد میشود دارد. با جایگذاری (g) در معادلات (5) در معادلات (62)، میبینیم که لنگر خمشی^{۱۸} مورد نیاز برای رساندن دو انتهای حلقه بهم (شکل ۴۵) است

¹⁷ Adjacent

¹⁸ Bending moment

$$M = -\frac{\alpha E}{8\pi} \frac{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left(\log \frac{b}{a}\right)^2}{2(b^2 - a^2)} \quad (h)$$

با استفاده از این تنش های اولیه در حلقه را به راحتی میتوان با حل (48) از خمش خالص به دست آورد.

۳۰ - صفحه های دوار

توزیع تنش در صفحه های گرد دوار اهمیت بسیار زیادی دارد^{۱۹}. اگر ضخامت صفحه در مقایسه^{۱۹} با شعاع آن کوچک باشد، از اختلاف تنش های مماسی و شعاعی در ضخامت میتوان صرف نظر کرد^{۲۰} و مساله به راحتی حل میشود^{۲۱}. اگر ضخامت صفحه ثابت باشد معادله (40) را میتوان بکار برد و فقط باید نیروی داخلی و خارجی را برابر قرار داد^{۲۲}.

$$R = \rho\omega^2r \quad (a)$$

مبحث کامل این مساله و کتابشناسی این موضوع را میتوان در کتاب معروف A. Stodola یافت^{۲۳}. حل قطعی مساله صفحه صاف بیضوی دورانی به وسیله C. Chree به دست آمد. نشان میدهد که اختلاف بین ماکزیمم و مینیمم تنش در محور دوران فقط ۵ درصد بیشترین تنش در صفحه ای با ضخامت یک هشتم قطرش میباشد. بحث با جزئیات بیشتر این مساله در ادامه خواهد آمد (طرح ۱۱۹).^{۲۴} از وزن صفحه صرف نظر شده است

در حالیکه ρ جرم در واحد حجم مصالح صفحه و ω سرعت زاویه ای^{۲۵} صفحه میباشد. معادله (40) را میتوان به فرم زیر نوشت

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho\omega^2r^2 = 0 \quad (b)$$

این معادله ارضا میشود اگر اجزای تنش را از تابع تنش F به روش زیر به دست آوریم

$$r\sigma_r = F, \quad \sigma_\theta = \frac{dF}{dr} + \rho\omega^2r^2 \quad (c)$$

¹⁹ Comparison
²⁰ Angular velocity

اجزای کرنش در حالت تقارن از معادلات (49) و (50) هستند

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

با حذف u ²¹ بین این معادلات می یابیم

$$\epsilon_\theta - \epsilon_r + r \frac{d\epsilon_\theta}{dr} = 0 \quad (d)$$

با جایگذاری عبارتهای اجزای کرنش در عبارتهای اجزای تنش، (52)، و با استفاده معادلات (C)، می بینیم که تابع تنش F باید در معادله زیر صدق کند

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} - F + (3 + \nu) \rho \omega^2 r^3 = 0 \quad (e)$$

با جایگذاری میتوان دریافت که حل عمومی²² این معادله بصورت زیر است

$$F = Cr + C_1 \frac{1}{r} - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r^3 \quad (f)$$

و از معادلات (C) می یابیم

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \\ \sigma_\theta &= C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{aligned} \quad (g)$$

ثابت های انتگرالی C و C_1 از شرایط مرزی به دست می آیند.

برای یک صفحه صلب باید $C_1 = 0$ در نظر گرفته شود چون در غیر اینصورت تنش ها (g) در مرکز بی نهایت به دست می آیند. ثابت C از شرایط حاشیه ای ($r=b$) صفحه به دست می آید.

اگر هیچ نیرویی اعمال نشود، داریم

$$(\sigma_r)_{r=b} = C - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 b^2 = 0$$

²¹ Eliminating

²² General

که در آن

$$C = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 b^2$$

و اجزای تنش از معادلات (g)، هستند

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) \\ \sigma_\theta &= \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 b^2 - \frac{1 + 3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{aligned} \quad (55)$$

تنش ها در مرکز صفحه بزرگترین مقدار هستند، که

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \quad (56)$$

در حالتی که صفحه دارای سوراخی در مرکز به شعاع a باشد ثابت های انتگرالی^{۲۳} در معادلات (g) از شرایط مرزی^{۲۴} داخلی و خارجی به دست می آیند. اگر هیچ نیروی خارجی اعمال نشود، داریم

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0 \quad (h)$$

که از آن داریم

$$C = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 + a^2); \quad C_1 = -\frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 a^2 b^2$$

با جایگذاری در معادلات (g)،

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right) \end{aligned} \quad (57)$$

²³ Integration
²⁴ Boundaries

تنش شعاعی ماکزیمم در $r = \sqrt{ab}$ است که

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{3 + \nu}{8} \cdot \rho \omega^2 (b - a)^2 \quad (58)$$

تنش مماسی ماکزیمم در مرز داخلی است که

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{3 + \nu}{4} \rho \omega^2 \left(b^2 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} a^2 \right) \quad (59)$$

خواهیم دید که این تنش بزرگتر از $(\sigma_r)_{\max}$ خواهد بود.

زمانی که شعاع a حفره به صفر میرسد، تنش مماسی ماکزیمم به دو برابر تنش ماکزیمم صفحه صلب میرسد (56)، به عبارت دیگر با ایجاد حفره گرد کوچک در وسط صفحه صلب دوار²⁵ ما تنش ماکزیمم را دو برابر می کنیم. در مورد پدیده تمرکز تنش²⁶ در حفره بعداً بحث خواهد شد (صفحه 78).

با فرض اینکه تنش در ضخامت صفحه تغییری نمی کند، روش آنالیز برای صفحه های با ضخامت ثابت به صفحه های با ضخامت متغیر توسعه می یابد. اگر h ضخامت صفحه باشد، که با شعاع تغییر میکند، معادله تعادل چنین المانی همچنان که در تصویر 40 نشان داده شده است خواهد بود

$$\frac{d}{dr} (hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (k)$$

معادله با قرار دادن مقادیر زیر ارضا میشود

$$hr\sigma_r = F, \quad h\sigma_\theta = \frac{dF}{dr} + h\rho\omega^2 r^2$$

که F باز هم تابع تنش میباشد.

با جایگذاری این عبارت ها برای اجزای تنش در معادلات سازگاری (d) برای تابع تنش F به این معادله میرسیم

²⁵ Solid rotating disk
²⁶ Stress concentration

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} - F + (3 + \nu) \rho \omega^2 h r^3 - \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} - \nu F \right) = 0 \quad (l)$$

در این روش مشکل پیدا کردن توزیع تنش^{۲۷} در صفحه با ضخامت متغیر به حل معادله (l) کاهش می یابد. در حالت خاص که ضخامت با توجه به معادله زیر تغییر میکند:

$$h = Cr^n \quad (m)$$

که در آن C ثابت بوده و n هر عددی میتواند باشد، معادله (l) به آسانی قابل انتگرال گیری است.^۱ حل عمومی به فرم زیر خواهد بود

$$F = mr^{n+3} + Ar^\alpha + Br^\beta$$

این مورد توسط Stodola مورد بررسی قرار گرفت

که

$$m = - \frac{(3 + \nu) \rho \omega^2 C}{(\nu n + 3n + 8)}$$

و A و B ثابت های انتگرال هستند که با استفاده از شرایط مرزی به دست می آیند.

$$x^2 - nx + \nu n - 1 = 0$$

یک تقریب خوب به اشکال واقعی صفحه گردان را میتوان با تقسیم صفحه به تکه هایی و جانمایی تقریبی هر تکه در منحنی تیپ (m) بدست آورد^۱. صفحه مخروطی^{۲۸} توسط مولفان بسیاری بحث شده است.^۲ معمولا محاسبات با تقسیم صفحه به قسمت هایی و با فرض هر تکه به عنوان قسمتی از صفحه با ضخامت یکسان صورت میگیرد.^۳

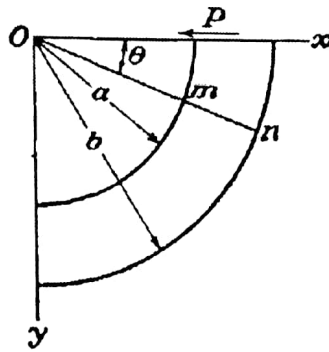
۳۱- خمش میله خمیده شده به وسیله نیرویی در انتها^۴

با نمونه ساده نشان داده شده در شکل ۴۶ شروع می کنیم. میله ای با مقطع عرضی مستطیلی نازک با محور دایردای که انتهای پایینی اش ثابت شده و به وسیله نیروی P اعمال شده در ابتدای میله در جهت شعاعی خمیده میشود. لنگر خمشی در هر مقطع mn متناسب با $\sin \theta$ است. و تنش نرمال σ_θ ، با توجه به تئوری ابتدایی خمش

²⁷ Stress distribution

²⁸ Conical

میله های خمیده ، متناسب^{۲۹} با لنگر خمشی است. با فرض^{۳۰} اینکه این مفروضات برای حل دقیق نیز صحیح میباشند، فرضی که نتایج با آن توجیه میشوند، از قسمت دوم معادلات (38) میبینیم که تابع تنش ϕ ، که در معادله زیر صدق میکند



(شکل ۴۶)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (a)$$

باید متناسب با $\sin \theta$ باشد. با در نظر گرفتن

$$\phi = f(r) \sin \theta \quad (b)$$

و با جایگذاری در معادله (a) میبینیم که $f(r)$ باید معادلات دیفرانسیلی زیر را ارضا کند.

همچنین M.GRUBLER را ببینید

همچنین A.Fischer, H.M.Martin, B.Hodkinson, K.E.Bishop را ببینید

^{۲۹} این روش توسط M. Donath ابداع شد. توسط H.HEARLE به انگلیسی ترجمه شد. توسعه ها بعدی توسط R.Grammel

انجام شد. موردی که مصالح از قانون هوک تبعیت نمیکنند توسط M.Grubler ابداع شد

H.Golovin*

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} \right) = 0 \quad (c)$$

²⁹ Proportional

³⁰ Assuming

این معادله را میتوان به معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب^{۳۱} ثابت تبدیل کرد (صفحه ۵۸)، و حل عمومی اش بصورت زیر است

$$f(r) = Ar^3 + B \frac{1}{r} + Cr + Dr \log r \quad (d)$$

که در آن A, B, C, D ثابت های انتگرال هستند از شرایط مرزی به دست می آیند. با جایگذاری حل (d) در عبارت (b) برای تابع تنش، و با استفاده از روابط کلی (38)، برای اجزای تنش عبارت های زیر را به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta \\ \tau_{r\theta} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = - \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \cos \theta \end{aligned} \quad (60)$$

از آنجایی که مرزهای درونی و بیرونی میله منحنی (شکل ۴۶) فاقد نیروی خارجی هستند، لازم داریم که

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \text{ for } r = a \text{ and } r = b$$

یا از معادلات (۶۰)

$$\begin{aligned} 2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a} &= 0 \\ 2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b} &= 0 \end{aligned} \quad (e)$$

حالت آخر این است که مجموع نیروی برشی^{۳۲} توزیع شده در انتهای بالایی میله باید با نیروی P برابر باشد. با ثابت در نظر گرفتن عرض مقطع یا P به عنوان بار واحد در ضخامت صفحه برای $\theta = 0$ داریم

³¹ coefficients

³² Shearing forces

$$\int_a^b \tau_{r\theta} dr = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) dr = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_b^a$$

$$= \left[Ar^2 + \frac{B}{r^2} + C + D \log r \right]_b^a = P$$

یا

$$-A(b^2 - a^2) + B \frac{(b^2 - a^2)}{a^2 b^2} - D \log \frac{b}{a} = P \quad (f)$$

از معادلات (e) و (f) می یابیم

$$A = \frac{P}{2N}, \quad B = -\frac{Pa^2 b^2}{2N}, \quad D = -\frac{P}{N} (a^2 + b^2) \quad (g)$$

که در آن

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a}$$

با جاگذاری مقادیر (g) از ثابت های انتگرال در رابطه (60)، به تعاریفی برای مولفه های تنش می رسیم. برای بخش بالایی تیر^{۳۳} $\theta=0$ خواهد بود، که در این صورت داریم:

$$\sigma_\theta = 0$$

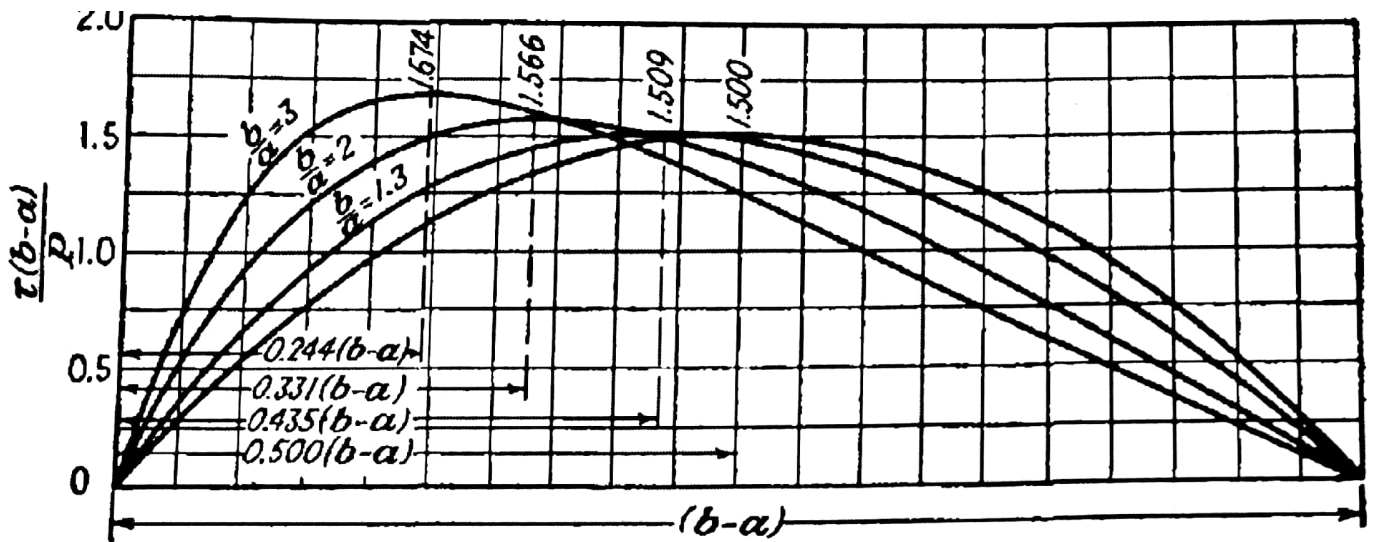
$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{N} \left[r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{1}{r} (a^2 + b^2) \right] \quad (h)$$

برای بخش انتهایی پایینی $\theta=\pi/2$ خواهد بود

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (k)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{N} \left[3r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - (a^2 + b^2) \frac{1}{r} \right]$$

تعاریف^{۳۴} (60) شامل یک راه حل دقیق برای مساله است، فقط در حالی که نیروها در انتهای تیر منحنی به طریقی که در روابط (h) و (k) آمده است توزیع شوند.



(شکل ۴۷)

برای توزیع های دیگر نیروها، توزیع تنش نزدیک انتهای تیر متفاوت با راه حل ارائه شده در (60) خواهد بود، اما در فواصل بزرگتر این راه حل بر اساس اصل سن ونانت^{۳۵} صحیح خواهد بود. محاسبات نشان می دهد که تئوری ساده بر اساس این فرض که مقطع عرضی تیر در حین خمش مسطح باقی می ماند، مجدداً نتایج رضایت بخشی را می دهد.

شکل ۴۷ توزیع تنش برشی τ_{r1} در مقطع عرضی $\theta=0$ (برای حالتی که $b=3a, 2a, 1.3a$) را نشان می دهد. محور افقی^{۳۶} فاصله شعاعی از مرز داخلی است ($r=a$). محور قائم^{۳۷} نشانگر فاکتورهای عددی است که با ضرب کردن آنها در تنش برشی متوسط $P/(b-a)$ ، به تنش برشی در نقطه مورد نظر در سوال می رسیم. مقدار 1.5 برای این فاکتور حداکثر تنش برشی را همان طور که در توزیع سهمیگون^{۳۸} برای تیرهای مستطیلی مستقیم محاسبه شده است را می دهد. از شکل می توان متوجه شد که، زمانی که عمق مقطع عرضی کم می شود، توزیع تنش های برشی به توزیع سهمیگون نزدیک می شود. برای چنین نسبتی که در قوس ها و طاق ها معمول است، توزیع سهمیگون تنش برشی را می توان به مانند تیرهای مستطیلی مستقیم با دقت کافی فرض کرد.

بیاید جابه جایی تولید شده توسط نیروی P را در نظر بگیریم (شکل ۴۶). با استفاده از معادلات (49) تا (52) و جاگذاری برای مولفه های تنش تعاریف (60)، به دست می آوریم

³⁵ Saint-Venant's principle

³⁶ Abscissas

³⁷ Ordinates

³⁸ Parabolic

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin \theta}{E} \left[2Ar(1 - 3v) - \frac{2B}{r}(1 + v) + \frac{D}{r}(1 - v) \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r \epsilon_{\theta} - u \quad (l)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

یا انتگرال گیری از اولین رابطه، روابط بالایی به دست می آوریم

$$u = \frac{\sin \theta}{E} \left[Ar^2(1 - 3v) + \frac{B}{r^2}(1 + v) + D(1 - v) \log r \right] + f(\theta) \quad (m)$$

که $f(\theta)$ فقط تابعی از θ است. با جاگذاری (m) در رابطه دومی از روابط (l) به طور همزمان با تعریف برای ϵ_{θ} و انتگرال گیری، به دست می آوریم

$$v = -\frac{\cos \theta}{E} \left[Ar^2(5 + v) + \frac{B}{r^2}(1 + v) - D \log r(1 - v) + D(1 - v) \right] - \int f(\theta) d\theta + F(r) \quad (n)$$

که در آن $F(r)$ فقط تابعی از r است. اکنون با جاگذاری (m) و (n) در رابطه سوم از روابط (l) به رابطه زیر می رسیم

$$\int f(\theta) d\theta + f(\theta) + rF'(r) = -\frac{4D \cos \theta}{E}$$

این رابطه با جاگذاری موارد زیر درست می شود

$$F(r) = Hr, \quad f(\theta) = -\frac{2D}{E} \theta \cos \theta + K \sin \theta + L \cos \theta \quad (p)$$

که در آن H, K, L ثابت های اختیاری^{۳۹} بوده که با استفاده از شرایط محدودیت مشخص می شوند. مولفه های^{۴۰} جابه جایی از (m) و (n) به صورت زیر است

$$u = -\frac{2D}{E} \theta \cos \theta + \frac{\sin \theta}{E} \left[D(1 - v) \log r + A(1 - 3v)r^2 + \frac{B(1+v)}{r^2} \right] + K \sin \theta + L \cos \theta$$

³⁹ Arbitrary
⁴⁰ Components

(q)

$$v = \frac{2D}{E} \theta \sin \theta - \frac{\cos \theta}{E} \left[A(5 + \nu)r^2 + \frac{B(1 + \nu)}{r^2} - D(1 - \nu) \log r \right] + \frac{D(1 + \nu)}{E} \cos \theta + K \cos \theta - L \sin \theta + Hr$$

تغییر شکل^{۴۱} شعاعی در انتهای قسمت بالایی تیر با جاگذاری $\theta = 0$ در تعریف برای u به دست می‌آید، که نتیجه می‌دهد

$$(u)_{\theta=0} = L \quad (r)$$

ثابت L از شرط در انتهای داخلی بدست می‌آید (شکل ۴۶). برای $\theta = \pi/2$ داریم $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$; $\nu = 0$ ، در نتیجه از رابطه دوم از روابط (q)

$$H = 0, \quad L = \frac{D\pi}{E} \quad (s)$$

تغییر شکل انتهای قسمت بالایی با استفاده از (g) عبارتست از

$$(u)_{\theta=0} = \frac{D\pi}{E} = - \frac{P\pi(a^2 + b^2)}{E \left[(a^2 - b^2) + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a} \right]} \quad (61)$$

کاربرد این فرمول بعداً ارایه خواهد شد. زمانی که b به a نزدیک می‌شود و عمق تیر منحنی، $h = b - a$ ، در مقایسه با a کوچک است، می‌توانیم از تعریف زیر استفاده کنیم

$$\log \frac{b}{a} = \log \left(1 + \frac{h}{a} \right) = \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{h^3}{a^3} - \dots$$

با جاگذاری در (61) و صرف نظر از عبارات با توان بزرگتر، به دست می‌آوریم

$$(u)_{\theta=0} = - \frac{3\pi a^3 P}{Eh^3}$$

که با فرمول اولیه برای این مورد تلاقی^{۴۲} دارد^۱. با در نظر گرفتن تابع تنش در فرم

$$\phi = f(r) \cos \theta$$

⁴¹ Deflection

⁴² Coincide

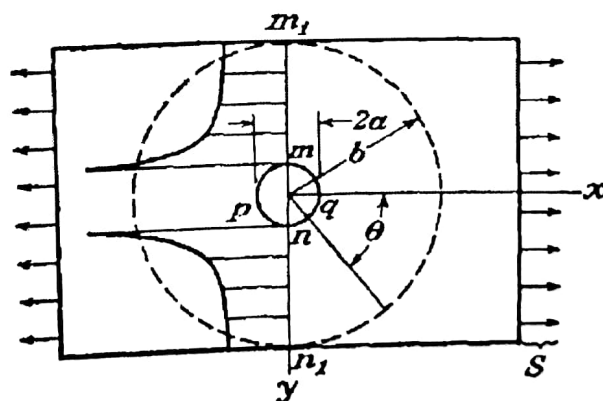
مراجعه شود به S. Timoshenko. "Strength of Materials." vol.2. Art 13. 1941.

و ادامه دادن به مانند بالا، به راه حلی برای حالتی که بار قائم و زوج نیرو^{۴۳} به قسمت انتهایی و بالایی تیر اعمال می‌شود، می‌رسیم (شکل ۴۶). با کم کردن تنش‌های تولید شده توسط زوج نیرو از این راه‌حل، تنش‌های در اثر نیروی قائم اعمال شده به قسمت بالایی تیر باقی می‌مانند. با داشتن راه‌حلهایی برای حالات افقی و قائم بار، راه‌حل برای هر نیروی مایلی با استفاده از اصل جمع آثار قوا به دست می‌آید.

در بحث‌های بالایی همیشه فرض شد که روابط (e) ارضا می‌شوند و مرزهای دایره‌ای تیر آزاد از هر نیرویی هستند. با در نظر گرفتن تعاریف در (e) متفاوت از صفر حالتی را بدست می‌آوریم که در آن نیروهای قائم و مماسی متناسب با $\sin \theta$ و $\cos \theta$ در مرزهای دایره‌ای تیر توزیع می‌شوند. با ترکیب کردن چنین راه‌حلهایی با راه‌حل‌های قبلی که برای خمش خالص و خمش به وسیله نیروی اعمالی در انتها بدست آوردیم، می‌توانیم به شرایط بارگذاری یک طاق^{۴۴} که بوسیله ماسه و خاک پوشانده شده است نزدیک شویم!

۳۲- تاثیر سوراخ‌های دایره‌ای در توزیع‌های تنش در صفحات

شکل ۴۸ نشانگر یک صفحه است که تحت یک کشش یکنواخت با اندازه S در راستای X قرار گرفته است.



(شکل ۴۸)

اگر یک سوراخ دایره‌ای کوچک در مرکز صفحه ایجاد شود، توزیع تنش در مجاورت سوراخ تغییر خواهد کرد، اما از اصل سن ونانت می‌توان نتیجه گرفت، تغییرات در فواصل در مقایسه با شعاع سوراخ، بزرگتر هستند قابل صرف نظر کردن است.

قسمتی از صفحه با دایره متمرکز با شعاع b را که در مقایسه با a بزرگتر است، را در نظر بگیرید. تنش‌ها در شعاع b به طرز موثری برابر با صفحه بدون سوراخ هستند و به همین جهت به صورت زیر داده می‌شوند

$$(\sigma_r)_{r=b} = S \cos^2 \theta = \frac{1}{2} S (1 + \cos 2\theta) \quad (a)$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=b} = -\frac{1}{2} S \sin 2\theta$$

مثال‌های متعددی در این مورد توسط Golvin, loc., and Ribiere, loc. Cit., and

Compt. Rend., vol. 132, p. 315, 1901. بحث شده است.

این نیروها که در اطراف بیرونی حلقه⁴⁵ با شعاع داخلی $r = a$ و شعاع بیرونی $r = b$ اعمال می‌شوند، توزیع تنش در داخل حلقه را بدست می‌دهند که ممکن است ما آنها را شامل دو بخش در نظر بگیریم. بخش اول در اثر مولفه ثابت $\frac{1}{2} S$ از نیروهای قائم است. تنش‌هایی که این بخش می‌تواند تولید کند را می‌توان از روابط (45) محاسبه کرد (صفحه 59). بخش باقی مانده شامل نیروهای قائم $\frac{1}{2} S \cos 2\theta$ همراه با نیروهای برشی $-\frac{1}{2} S \sin 2\theta$ تنش‌هایی را تولید می‌کند که می‌توان از تابع تنش به فرم زیر بدست آورد

$$\phi = f(r) \cos 2\theta \quad (b)$$

با جاگذاری این در معادله سازگاری⁴⁶

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right)$$

معادله دیفرانسل معمولی زیر را بدست می‌آوریم تا $f(r)$ تعیین گردد

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0$$

جواب عمومی عبارتست از

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D$$

تابع تنش در نتیجه عبارتست از

22

⁴⁵ Ring

⁴⁶ Compatibility equation

$$\phi = \left(Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D \right) \cos 2\theta \quad (c)$$

و مولفه های تنش متناظر از روابط (38) عبارتند از

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = - \left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (d)$$

$$\tau_{r\theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

ثابت های انتگرال را می توان اکنون با استفاده از شرایط (a) برای مرز بیرونی و از شرط اینکه مرز سوراخ، آزاد از نیروهای خارجی است، تعیین کرد. از این شرایط نتیجه می شود

$$2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2} = -\frac{1}{2}S$$

$$2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} = 0$$

$$2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2} = -\frac{1}{2}S$$

$$2A + 6Ba^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} = 0$$

با حل این معادلات و جاگذاری $\frac{a}{b} = 0, i. e.$ با فرض صفحه بزرگ^{۴۷} نامحدود، به دست می آوریم

$$A = -\frac{S}{4}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{a^4}{4}S, \quad D = \frac{a^2}{2}S$$

با جاگذاری این مقادیر ثابت ها در معادلات (d) و اضافه کردن تنش های تولید شده توسط کشش یکنواخت^{۴۸} $\frac{1}{2}S$ بر مرز خارجی که از معادلات (45) محاسبه شده است، به دست می آوریم

$$\sigma_r = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (62)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta$$

اگر r خیلی بزرگ باشد، σ_r و $\tau_{r\theta}$ به مقادیر داده شده در معادلات (a) نزدیک می‌شوند. در مرز سوراخ $r = a$ می‌باشد و به دست می‌آوریم

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = S - 2S \cos 2\theta$$

می‌توان مشاهده نمود که، $\sigma_{\theta\theta}$ زمانی که $\theta = \frac{\pi}{2}$ یا $\theta = \frac{3\pi}{2}$ است، در انتهای m و n از قطر عمود بر جهت کشش، بزرگترین است (شکل ۴۸). در این نقاط $(\sigma_{\theta\theta})_{max} = 3S$ است. این حداکثر تنش کششی بوده و سه برابر تنش یکنواخت S است، که در انتهای صفحه اعمال می‌شود.

در نقاط p و q ، θ برابر π و 0 است، داریم

$$\sigma_\theta = -S$$

بنابراین یک تنش فشاری در جهت مماسی در این نقاط داریم.

این راه حل توسط Prof. G. Kirsch: see V.D.I., vol. 42, 1898 به دست آمد. توسط اندازه گیری کرنش و روش فتوالاستیک به دفعات متعدد اثبات شده است. (به فصل ۵ این کتاب و کتاب های ارجاع داده شده در صفحه ۱۳۱ مراجعه شود).

برای مقطع عرضی صفحه که از مرکز سوراخ رد شده و بر محور x عمود^{۴۹} می‌شود، $\theta = \frac{\pi}{2}$ و از معادلات (62) داریم

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right)$$

مشخص است که تاثیر سوراخ یک ویژگی محلی^{۵۰} بوده و با افزایش r ، تنش $\sigma_{\theta\theta}$ به مقدار S به سرعت نزدیک می‌شود. توزیع این تنش در شکل به صورت ناحیه هاشور خورده نشان داده شده است. ویژگی محلی تنش ها در اطراف سوراخ توجیه کننده کاربرد راه حل (e) می‌باشد، که برای یک صفحه بزرگ نامحدود تا یک صفحه با ضخامت

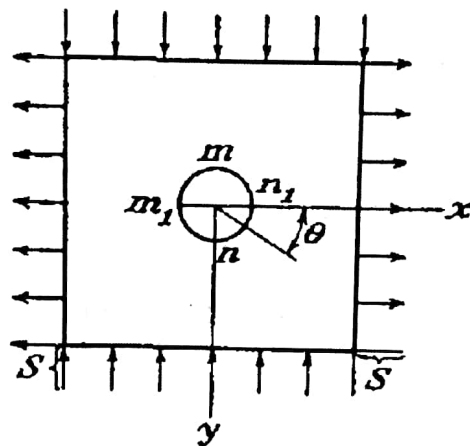
⁴⁹ Perpendicular

⁵⁰ Localized character

محدود بدست آمد. اگر ضخامت صفحه کمتر از چهار برابر قطر سوراخ نباشد، خطای راه حل (62) در محاسبه $(\sigma_{\theta})_{max}$ از ۶ درصد تجاوز نمی کند.^۱

با داشتن راه حل (d) برای کشش یا فشار در یک جهت، راه حل برای کشش یا فشار در دو راستای عمود برهم به سادگی از اصل جمع آثار قوا می تواند بدست آید. برای مثال با در نظر گرفتن تنش های کششی در دو راستای عمود برهم برابر S ، در مرز سوراخ تنش کششی را برابر $\sigma_{\theta} = 2S$ بدست می آوریم (شکل ۷۲). با در نظر گرفتن یک تنش کششی S در جهت x و یک تنش فشاری $-S$ در جهت y ، برش خالص^{۵۱} را بدست می آوریم. تنش های مماسی در مرز سوراخ از معادلات (62) عبارتند از

$$\sigma_{\theta} = S - 2S \cos 2\theta - [S - 2S \cos(2\theta - \pi)]$$



(شکل ۴۹)

برای $\theta = \frac{\pi}{2}$ یا $\theta = \frac{3\pi}{2}$ در نقاط m و n $\sigma_{\theta} = 4S$ را بدست می آوریم. برای $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ در m_1 و n_1 $\sigma_{\theta} = -4S$ را بدست می آوریم. در نتیجه برای یک صفحه بزرگ تحت برش خالص، حداکثر تنش مماسی چهار برابر بزرگتر از برش خالص اعمال شده می باشد.

تمرکز تنش بالای موجود در لبه های سوراخ دارای اهمیت زیادی است. برای مثال می توان سوراخ های بر روی عرشه^{۵۲} یک کشتی را ذکر کرد. زمانی که تنه^{۵۳} کشتی خم می شود، کشش یا فشار در عرشه ها تولید می شود و دارای تمرکز تنش بالایی در سوراخ ها می باشد. تحت چرخه های تنش تولید شده توسط موج ها، خستگی فلز در ناحیه های اضافه تنش در نهایت ممکن است منجر به ایجاد ترک های خستگی^{۵۴} شود.^۲

⁵¹ Pure shearing

⁵² Deck

⁵³ Hull

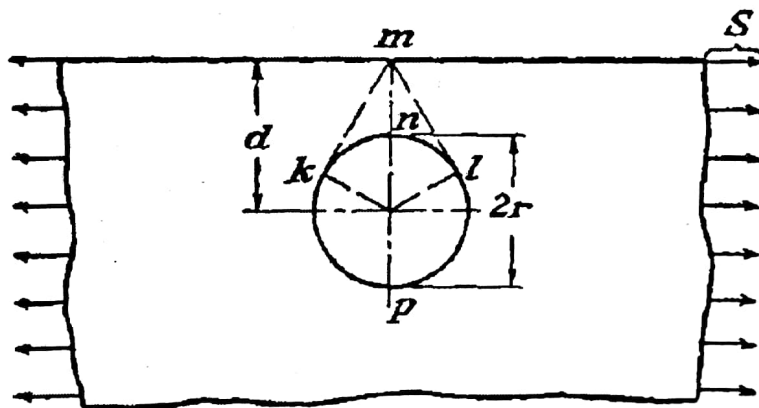
⁵⁴ Fatigue failure

^۱مراجعه شود به S. Timoshenko, Bull. Polytech. Inst., Kiev, 1907. بایستی S را برابر بار تقسیم بر سطح خالص صفحه در نظر بگیریم.

^۲مراجعه شود به مقاله T. L. Wilson, The S.S. Levrathan, Damage, Repairs and Strength Analysis که در American Society of Naval Architects and Marine Engineers, November, 1930 ارائه شده است.

معمولا ضروری است که از تمرکز تنش در سوراخ ها کاسته شود، مانند سوراخ های دسترسی^{۵۵} در بال و بدنه هواپیماها. این امر با اضافه کردن یک مهره^۱ یا حلقه تقویت کننده^۲ می تواند انجام گردد. مساله تحلیلی با توسعه روش به کار رفته برای سوراخ حل شده و نتایج با اندازه گیری های کرنش سنج مقایسه شده است.^۲

مورد سوراخ دایره ای نزدیک مرز مستقیم یک صفحه ی نیمه محدود تحت کشش موازی با این مرز (شکل ۵۰) توسط جفری^۳ تحلیل شده است. یک نتیجه تصحیح شده و یک مقایسه با آزمایشات فتوالاستیک (مراجعه شود به فصل ۵) بعدا توسط میندلین^۴ ارائه شد.



(شکل ۵۰)

تنش در سوراخ در نقطه n نزدیک لبه یک مقدار بسیار بزرگی از تنش کششی دست نخورده^{۵۶} می شود، زمانی که mn در مقایسه با np کوچک است.

جفری همچنین حالتی که یک فشار نرمال یکنواخت p_1 بر مرز سوراخ اعمال می شود را مورد تحقیق قرار داد. این یک مساله کاربردی است. تنش های نزدیک سوراخ پرچ را زمانی که پلاستیک داغ پرچ تحت نیروهای فشاری قرار دارد را می دهد. اگر سوراخ از لبه ی مستقیم خیلی دور باشد، تنش ها در مرز سوراخ از معادلات (46) (صفحه ۶۰ کتاب) بصورت زیر است

$$\sigma_{\theta} = p_1, \quad \sigma_r = -p_1$$

⁵⁵ Access
⁵⁶ Undisturbed

اگر سوراخ نزدیک لبه ی مستقیم باشد، تنش های مماسی در مرز سوراخ دیگر ثابت نیستند. حداکثر تنش مماسی در نقاط k و l به صورت زیر است

$$(\sigma_{\theta})_{max} = p_1 \frac{d^2 + r^2}{d^2 - r^2} \quad (63)$$

مراجعه شود به: S. Timoshenko. J. Franklin Inst., vol. 197, p.505. 1924. همچنین
"Strength of Materials" 2d ed., vol. 2, p. 317.

S. Levy, A. E. McPherson, and F. C. Smith, J. Applied Mechanics(Trans. A.S.M.E.), vol. 15, p. 160, 1948. منابع قبل از این کار در این مقاله ممکن است که پیدا شود.

Trans. Roy. Soc. (London), series A, vol. 221, p. 265, 1921*

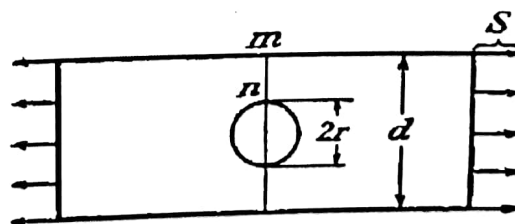
Proc. Soc. Expl. Stress Analysis, vol. 5, p. 56, 1948*

این تنش باید با تنش کششی در نقطه m در لبه⁵⁷ مستقیم صفحه مقایسه شود، که به صورت فرمول زیر است

$$\sigma_{\theta} = \frac{4p_1 r^2}{d^2 - r^2} \quad (64)$$

برای $d = r\sqrt{3}$ دو تعریف اندازه ی یکسانی دارند. اگر d بزرگتر از این باشد حداکثر تنش در مرز دایره ای است و اگر از این مقدار کم باشد، حداکثر تنش در نقطه m می باشد.

مورد یک صفحه با عرض محدود و یک سوراخ دایره ای بر روی محور متقارن⁵⁸ توسط هاولند¹ بحث شد. او برای مثال یافت که، زمانی که $2r = \frac{1}{2}d$ در نقطه n، $\sigma_{\theta} = 4.3S$ بوده و در نقطه m، $\sigma_{\theta} = 0.75S$ است.



(شکل ۵۱)

از روش مورد استفاده در این کتاب برای تحلیل تنش ها در اطراف یک سوراخ دایره ای کوچک زمانی می توان استفاده کرد، که صفحه تحت خمش خالص قرار گرفته باشد². همچنین مورد هایی که در آنها یک ردیف از سوراخ

های دایره ای در یک صفحه نامحدود^۳ و^۴، یک ردیف از سوراخ ها در یک نوار^۵ و در یک صفحه نیمه محدود^۵ و یک حلقه از سوراخ ها در یک صفحه^۷ (تحت کشش همه جانبه)، مورد تحقیق قرار گرفته اند. روشی که توسط (Hengst) ارائه شد برای موردی که یک سوراخ در یک صفحه مربعی^۸ تحت کشش یکسان در هر دو جهت و تحت برش^۹ زمانی که سوراخ ساده یا مسلح شده^۹ می باشد، قرار دارد، اعمال شده است.

راه حل هایی برای صفحه نامحدود با سوراخ دایره ای زمانی که نیروهایی به مرز های سوراخ اعمال شد^۱،

R. C. J. Howland, Trans. Roy. Soc. (London), Series A, vol. 229, p. 49, 1930^۱

Z. Tuzi, Phil. Mag., February, 1930, p. 210; also Sci. Papers Inst. Phys. Chem. Research (Tokyo),^۲

vol. 9, p. 65, 1928. مساله مرتبط با سوراخ بیضوی قبلتر توسط K. Wolf, Z. tech. Physik, 1922; p. 160 حل شده

بود. سوراخ دایره ای در یک نوار توسط R. C. J. Howland and A. C. Stevenson, Trans. Roy. Soc. (London),

series A, vol. 232, p. 155, 1933

R. C. Knight, Quart. J. Math, Oaford series, vol. 5, p. 255, 1934

M. Sadowsky, Z. angew. Math. Mech., vol. 8, p. 107, 1928^۳

R. C. J. Howland, Proc. Roy. Soc. (London), series A, vol. 148, p. 471, 1935^۴

K.J. Schulz, Proc. Nederl. Akad. van Wetenschappen, vol. 45, pp. 233, 341, 457, and 524, 1942,^۵

vol. 48, pp. 282 and 292, 1945

C. B. Ling, P. S. Wang, and K. S. Jing, Tech. Rept. No. 9, Bur. Aeronaut. Research, Chengtu,^۶

China, Jan. 1944

C. B. Ling and P. S. Wang, Tech. Rept. No. 6, ibid., June, 1943^۷

H. Hengst, Z. angew. Math. Mech., vol. 18, p. 44, 1938^۸

C. K. Wang, J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.), vol. 13, p. A-77, 1946^۹

W. G. Bickley, Trans. Roy. Soc. (London), series A, vol. 227, p. 383, 1928^{۱۰}

برای مساله نوار^۱ و برای یک ردیف سوراخ های موازی و نزدیک لبه های مستقیم از یک صفحه نیمه محدود^۲ (ردیفی از سوراخ های پرچ شده^۳)، به دست آمده است.

⁵⁹ Reinforced

⁶⁰ Rivet

اگر یک سوراخ بیضوی در یک صفحه نامحدود تحت کشش S ایجاد شود، با یکی از محورهای اصلی موازی با کشش، تنش‌ها در انتهاهای محور سوراخ که عمود بر جهت کشش است، به صورت زیر می‌باشد

$$\sigma = S(1 + 2 \frac{a}{b}) \quad (65)$$

جایی که $2a$ محور عمود بیضی بر کشش بوده و $2b$ محور دیگر است. این و دیگر مسایل مرتبط با بیضی‌ها، هذلولی‌ها و دو دایره‌ها در فصل ۷ مورد بحث قرار گرفته است و ارجاعات در آن بخش موجود است.

یک سوراخ بسیار لاغر (a/b بزرگ) عمود بر راستای کشش باعث تمرکز تنش بالایی می‌شود.^{۶۱} این دلیل اینکه چرا ترک‌های متقاطع به نیروهای اعمالی تمایل به توزیع شدن دارند را توضیح می‌دهد. این توزیع شدن را میتوان با ایجاد سوراخ‌هایی در انتهاهای ترک‌ها متوقف کرد، تا منحنی‌های تیز که دلیل تمرکز تنش بالا هستند را حذف نمود.

زمانی که سوراخ با موادی که صلب^{۶۱} بوده یا الاستیک با ثابت‌های متفاوت با صفحه (تنش مسطح) یا جسم (کرنش مسطح) دارد، پر شده است، مساله‌ی گنجایش^{۶۲} صلب یا الاستیک خواهیم داشت. برای حالات دایره‌ای^۴ و بیضوی^۵ این مساله گنجایش حل شده است. نتایج برای گنجایش دایره‌ای صلب با استفاده از روش فتوالاستیک صحت‌سنجی شده است^۶ (به فصل ۵ مراجعه شود).

تنش‌های داده شده توسط روابط (62) برای مساله نشان داده شده توسط شکل (۴۸) برای کرنش مسطح همانند تنش مسطح می‌باشند. در کرنش مسطح با این حال تنش محوری

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

R. C. Knight, Phil. Mag., series 7, vol. 19, p.517, 1935.

C. B. Lung and M. C. Hsu, Tech. Rept. No. 16, Bur. Aeronaut. Research, Chengtu, China, February, 1945.

^۳ مساله یک نوار باریک توسط M. Sadowsky, Z. angew. Math. Mech., vol. 10, p. 77, 1930 بحث شد.

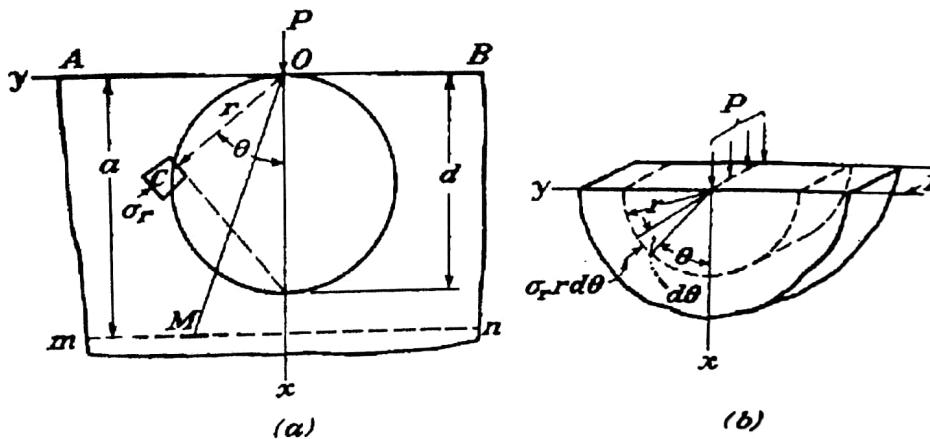
K. Sezawa and G. Nishimura, Rept. Aeronaut. Reseach Inst., Tokyo Imp. Univ., vol. 6, no. 25, 1931; J. N. Goodier, Trans. A.S.M.E., vol. 55, p. 39(1933).

L. H. Donnell, "Theodore von Karman Anniversary Volume," p. 293, Pasadena, 1941.

بایستی در انتها های صفحه اعمال شوند، که موازی صفحه XY می باشند، تا مقدار ϵ_z صفر گردد. با حذف کردن این تنش ها از انتها ها تا به شرط انتها های آزاد برسیم، تنش مضاعفی را تولید خواهد کرد که دیگر ویژگی دوبعدی (تنش مسطح یا کرنش مسطح) ندارد. اگر سوراخ⁶² دارای قطر کوچک در مقایسه با ضخامت بین انتها ها باشد، توزیع فقط محدود به مجاورت انتها ها خواهد بود. اما اگر قطر و ضخامت دارای اندازه یکسانی باشند، با مساله باید به صورت سه بعدی رفتار⁶⁴ نمود. بررسی ها درباره این مورد¹ نشانگر این هستند که σ_r بزرگترین مولفه ی تنش باقی می ماند و مقدارش نزدیک به مقدار ارائه شده توسط تئوری دو بعدی می باشد.

۳۳- نیروی متمرکز در یک نقطه از یک مرز مستقیم

بیاید اکنون یک نیروی قائم متمرکز P را که بر یک مرز مستقیم افقی AB از یک صفحه نامحدود بزرگ اعمال می شود را در نظر بگیریم (شکل ۵۲-ا).



(شکل ۵۲)

توزیع بار در راستای ضخامت صفحه یکنواخت است، همانطور که در شکل ۵۲-ب نشان داده شده است. ضخامت صفحه برابر واحد در نظر گرفته شده است در نتیجه P بار بر ضخامت واحد است.

توزیع تنش در این حالت یک مورد بسیار ساده است² و با عنوان توزیع شعاعی ساده خوانده می شود. هر المان C در فاصله r از نقطه اعمال بار تحت یک فشار ساده در راستای شعاعی قرار دارد، تنش شعاعی عبارتست از

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad (66)$$



A. E. Green, Trans. Roy. Soc. (London), series A, vol. 193, p. 229, 1948; E. Sternberg and M. Sadowsky, J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.), vol. 16, p. 27, 1949.

۲ راه حل این مساله از روش سه بعدی، J. Boussinesq (p. 362) by Flamant, Compt. rend. vol. 114, p. 1465, 1892. Paris Boussinesq, Compt. rend., vol. 114, p. 1510, 1892. See also the paper by J. H. Michell, Proc. London Math. Soc, vol.32, p. 35. 1900 توزیع تنش که کار تئوریک بالایی را پیشنهاد داد توسط Carus Wilson, Phil. Mag., vol. 32, p. 481, 1891 انجام شد. تنش مماسی σ_{θ} و تنش برشی $\tau_{r\theta}$ صفر هستند. درک این مساله که این مقادیر مولفه های تنش روابط تعادل (37) را ارضا می کنند، ساده است (صفحه ۵۶ کتاب).

همچنین شرایط مرزی به دلیل اینکه σ_{θ} و $\tau_{r\theta}$ در طول لبه مستقیم صفحه صفر هستند، ارضا می شود، که آزاد از هر نیروی خارجی به جز نقطه ای که بار اعمال می شود ($r=0$)، است. در اینجا σ_r بی نهایت می شود. برآیند^{۶۵} نیروهایی که بر سطح استوانه ای^{۶۶} به شعاع r اعمال می شوند (شکل ۵۲-b) باید با P در تعادل باشند. با جمع مولفه های قائم $\sigma_r r d\theta \cos \theta$ که بر هر المان سطح $r d\theta$ اعمال می شوند، بدست می آید. به این ترتیب می یابیم

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cos \theta \cdot r d\theta = -\frac{4P}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = -P$$

برای اثبات اینکه راه حل (66) راحل دقیق مساله است، بایستی معادله سازگاری (39) را در نظر بگیریم. راحل فوق از تابع تنش به صورت زیر نتیجه می شود

$$\phi = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta \quad \checkmark \quad (a)$$

می توانیم با استفاده از معادلات (38) این رابطه را به صورت زیر صحت سنجی^{۶۷} کنیم

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \left[-\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \right] \rightarrow 2 \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0$$

(66)

31

⁶⁵ Resultant
⁶⁶ Cylindrical
⁶⁷ Verify

$$d = \frac{r}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \phi = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0$$

σ_r

که با راه حل (66) متلاقی است. با جاگذاری تابع (a) در رابطه (39)، می توانیم به راحتی نشان دهیم که این معادله ارضا شده است. در نتیجه (a) بیانگر تابع تنش واقعی و و معادلات (66') توزیع تنش واقعی را بدست می دهد.

با در نظر گرفتن هر دایره ای با شعاع d و مرکز بر روی محور X و مماس بر محور Y در نقطه O (شکل ۵۲-ا)، برای هر نقطه C از دایره داریم، $d \cos \theta = r$. در نتیجه از معادله (66)

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}$$

به عبارتی دیگر تنش در تمام نقاط دایره به جز نقطه O ، نقطه اعمال بار، یکسان است.

با در نظر گرفتن صفحه mn در فاصله a از لبه ی مستقیم^{۶۸} صفحه، مولفه های نرمال و برشی تنش در این صفحه در هر نقطه M (شکل ۵۲-ا) از فشار ساده در راستای شعاعی محاسبه می شود

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos^2 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \cos^4 \theta$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

(67)

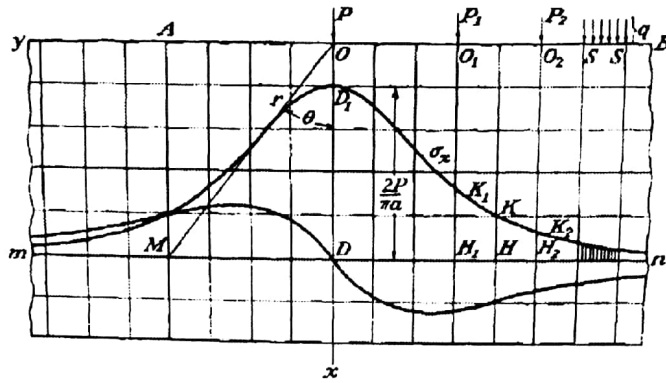
$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \sin \theta \cos^3 \theta$$

در شکل ۵۲ توزیع تنش های σ_x و τ_{xy} در طول صفحه افقی mn به صورت گرافیکی نشان داده شده است.

در نقطه ی اعمال بار از نظر تئوری تنش به طرز نامحدودی بزرگ است، به خاطر اینکه یک نیروی محدود^{۶۹} بر یک سطح کوچک نامحدود اعمال می شود.

⁶⁸ Straight
⁶⁹ Limited





(شکل ۵۳)

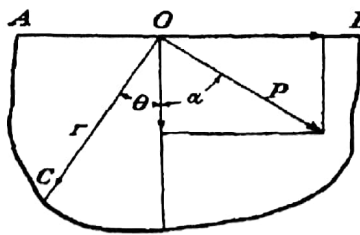
در عمل در نقطه‌ی اعمال همیشه تسلیم شدن مواد روی می‌دهد، که در نتیجه بار بر روی یک ناحیه محدود توزیع خواهد شد. تصور کنید قسمتی از ماده که دچار جریان پلاستیک شده است، از صفحه به وسیله‌ی یک سطح استوانه‌ای دایره‌ای با شعاع کوچک جدا شود (شکل ۵۲-ب). سپس معادلات الاستیسیته بر روی بخش باقی مانده صفحه می‌تواند اعمال شود.

یک راه حل مشابه را می‌توان برای نیروی افقی P که به مرز مستقیم صفحه نیمه محدود اعمال شده است را بدست آورد (شکل ۵۴). مولفه‌های تنش برای این حالت از همان معادلات (66') بدست می‌آیند، فقط ضروری است که مقدار زاویه θ از راستای نیرو اندازه‌گیری شود، همانطور که در شکل نشان داده شده است. با محاسبه برآیند نیروهای اعمال شده بر سطح استوانه‌ای که در شکل ۵۴ با خط چین^{۷۰} نشان داده شده است، می‌یابیم

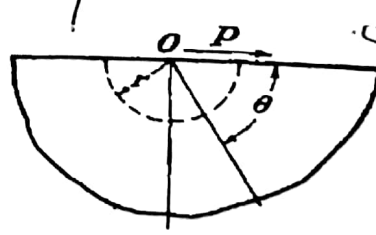
$$-\frac{2P}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = -P$$

این برآیند، نیرو خارجی^{۷۱} P را متعادل می‌کند، و با توجه به صفر بودن مولفه‌های تنش σ_{11} و τ_{11} در لبه مستقیم، راه‌حل (66') شرایط مرزی را ارضا می‌کند.

تنش‌های بی‌نیم برای



(شکل ۵۵)



(شکل ۵۴)

مولفه‌های تنش همان 66' است.

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\sigma_{\theta} = 0$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

⁷⁰ Dotted line
⁷¹ external



با داشتن راه‌حل‌هایی برای نیروهای متمرکز افقی و قائم، راه‌حل‌هایی برای نیروهای مایل^{۷۲} با استفاده از اصل جمع آثار قوا بدست می‌آید. با تجزیه کردن نیروی مایل P به دو مولفه، $P \cos \alpha$ قائم و $P \sin \alpha$ افقی (شکل ۵۵)، تنش مماسی در هر نقطه C از معادلات (66') به صورت زیر است

$$\sigma_r = -\frac{2}{\pi r} \left[P \cos \alpha \cos \theta + P \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] = -\frac{2P}{\pi r} \cos(\alpha + \theta) \quad (68)$$

در نتیجه از معادلات (66') برای هر راستای نیرو می‌توان استفاده نمود، در هر حالت زاویه θ را نسبت به راستای نیرو اندازه می‌گیریم.

از تابع تنش (a) ممکن است همچنین در حالتی که یک زوج نیرو بر مرکز^{۷۳} مستقیم یک صفحه نامحدود اعمال می‌شود، استفاده نمود (شکل ۵۶-a). ساده است که ببینیم تابع تنش برای حالتی که نیروی کششی P در نقطه O_1 است، در فاصله a از مبدا، از ϕ بدست می‌آید، معادله (a)، با توجه به اینکه ممان تابعی از x و y به جای r و θ است، با نوشتن $y + a$ به جای y و نیز $-P$ به جای P . این و تابع تنش اصلی ϕ می‌توانند ترکیب شوند، و تابع تنش برای دو نیروی یکسان و مخالف هم که در O_1 و O اعمال شده‌اند، را به فرم زیر بدست آورد

$$\phi(x, y + a) + \phi(x, y)$$

زمانی که a بسیار کوچک باشد، به مقدار زیر نزدیک می‌شود

$$\phi_1 = -a \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (b)$$

با جاگذاری (a) در معادله (b) و با توجه به این (مراجعه شود به صفحه ۵۷ کتاب)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

می‌یابیم

$$\phi_1 = \frac{Pa}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta) = \frac{M}{\pi} (\theta + \underbrace{\sin \theta \cos \theta}_{\frac{1}{2} \sin 2\theta}) \quad (69)$$

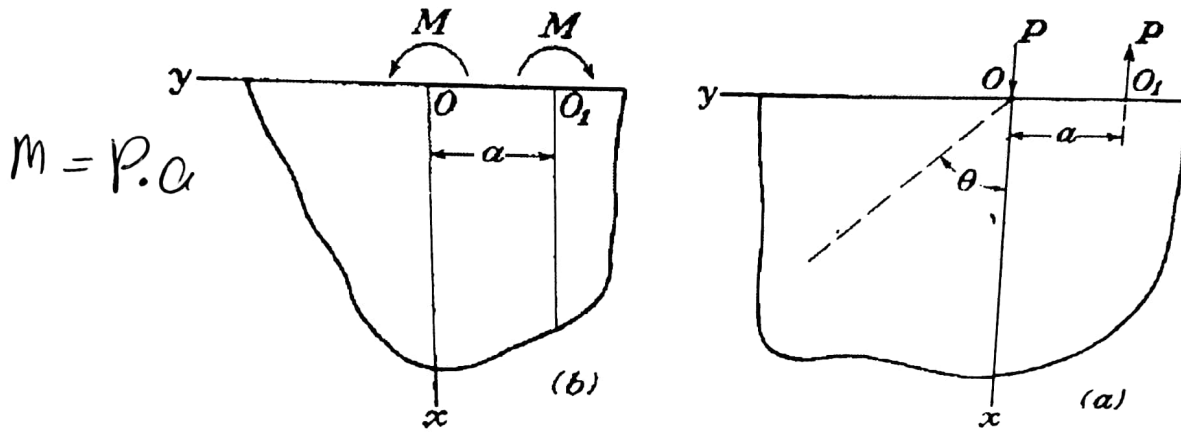
که در آن M لنگر زوج نیرو است.

$$\Rightarrow \phi_1 = \frac{M}{\pi} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]$$

⁷² Inclined
⁷³ Boundary

با همین استدلال، در می‌یابیم که با مشتق‌گیری^{۷۴} از ϕ_1 ، می‌توان تابع تنش ϕ_2 برای حالتی که دو زوج لنگر برابر و مخالف M که بر دو نقطه‌ی O و O_1 با فاصله نزدیک اعمال می‌شوند، را بدست آورد. در نتیجه می‌یابیم

$$\phi_2 = \phi_1 - \left(\phi_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} a \right) = -a \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{2Ma}{\pi r} \cos 3\theta \quad (70)$$



(شکل ۵۶)

اگر جهت‌های زوج نیروها یا لنگر‌ها تغییر کنند، فقط ضروری است که علامت تابع تغییر کند.

یک سری تابع‌های تنش با مشتق‌گیری متوالی برای حل مسأله‌ی تمرکز تنش در اثر سوراخ نیمه دایره‌ای در صفحه نیمه محدود در کشش موازی با لبه، به کار برده شد.^{۷۵} حداکثر تنش کششی کمی بزرگتر از سه برابر تنش کششی دست نخورده دور از سوراخ است. همچنین یک نوار^{۷۵} با یک سوراخ نیمه دایره‌ای در هر لبه مورد بررسی قرار گرفته است.^{۷۶} فاکتور تمرکز تنش که (نسبت حداکثر به میانگین تنش در مقطع حداقل) کمتر از سه می‌شود، با بزرگتر شدن سوراخ‌ها به واحد نزدیک می‌شود.

با داشتن توزیع تنش‌ها، جابه‌جایی‌های متناظر^{۷۶} را می‌توان با روش معمول با اعمال معادلات (49) تا (51)، بدست آوریم. برای یک نیرو عمود بر مرز مستقیم داریم (شکل ۵۲)

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi E r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} = \nu \frac{2P \cos \theta}{\pi E r} \quad (c)$$

⁷⁴ Differentiation

⁷⁵ strip

⁷⁶ Corresponding

$$\gamma_{r\theta} = r \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0$$

F. G. Maunsell, Phil. Mag., vol. 21, p. 765, 1936.

C. B. Ling, J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.) vol. 14, p.A-275, 1947; H Poritsky, H. D. Snively, and C.R. Wylie, ibid., vol. 6, p. A-63, 1939.

با انتگرال گیری از اولین معادله از معادلات، می یابیم

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log r + f(\theta) \quad (d)$$

جایی که $f(\theta)$ فقط تابعی از θ است. با جاگذاری در دومین معادله از معادلات (c) و انتگرال گیری از آن، به دست می آوریم

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \theta - \int f(\theta) d\theta + F(r) \quad (e)$$

که در آن $F(r)$ فقط تابعی از r است. با جاگذاری (d) و (e) در معادله سوم از معادلات (c)، نتیجه می گیریم

$$f(\theta) = -\frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta, \quad F(r) = Cr \quad (f)$$

A, B و C ثابت های انتگرال هستند، که با استفاده از شرایط⁷⁷ وابستگی مشخص می گردند. تعاریف برای جابه-جایی ها⁷⁸، از معادلات (d) و (e) به صورت زیر هستند

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log r - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta \quad (g)$$

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \theta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \cos \theta + \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \sin \theta + A \cos \theta - B \sin \theta + Cr$$

⁷⁷ Condition

⁷⁸ Displacement