

مرز مستقیم صفحه... جابجایی‌های افقی با قرار دادن $\theta = \pm\pi/2$ در روابط اول روابط (g) بدست می‌آید. در نتیجه داریم:

$$(u)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{(1-\nu)P}{2E}, \quad (u)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = -\frac{(1-\nu)P}{2E} \quad (71)$$

مرز مستقیم در هر قسمت مبدا بنابراین دارای جابجایی ثابتی می‌باشد (۷۱)، در تمام نقاط، به سمت مبدا جهت دارند. ممکن است ما اینگونه جابجایی را به احتمال فیزیکی نسبت دهیم اگر ما بیاد آوریم که در اطراف نقطه کاربرد بار P ما بخش مصالح محدود شاهد با سطح استوانه با شعاع کوچک حذف شده است (شکل 52b) که در آن بخش از روابط الاستیسیته قرار ندارد. در واقع این مصالح تغییرشکل پلاستیک داشته و اجازه جابجایی (۷۱) در امتداد مرز مستقیم را می‌دهد. جابجایی‌های قائم در مرز مستقیم از روابط دوم رابطه (g) بدست آمده است. بیاد باید آورد که مقدار ν مثبت است اگر جابجایی در جهت افزایش θ باشد و اینکه تغییرشکل با توجه به محور x متقارن می‌باشد، ما می‌توانیم جابجایی‌های قائم به سمت پائین را در فاصله r از مبدا بصورت زیر بیابیم:

$$(v)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = - (v)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2P}{\pi E} \log \frac{d}{r} - \frac{(1+\nu)P}{\pi E} \quad (72)$$

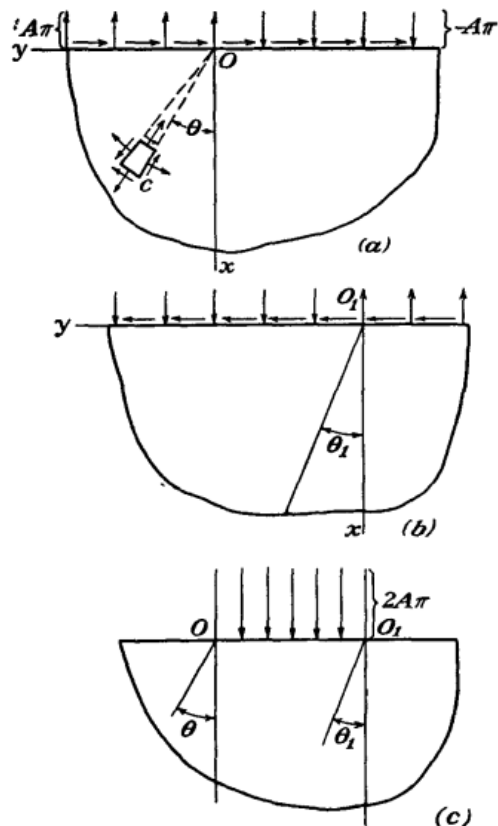
در مبدا این رابطه جابجایی بی‌نهایت بزرگی می‌دهد. برای از بین بردن این مشکل ما باید همانند قبل فرض کنیم که بخشی از مصالح در اطراف نقطه دارای کاربرد بار با سطح استوانه شعاع کوچک برش داده شده است.

۳۴ هرگونه بار قائم مرز مستقیم. منحنی‌های σ_x و τ_{xy} در مقاله قبلی (شکل ۵۳) را می‌توان بصورت خطوط تاثیرگذار بکار برد. ما فرض می‌کنیم که این منحنی‌ها تنش‌هایی برای P برابر با مقدار نیروی واحد ارائه می‌دهد که مثلا برابر با 1 lb می‌باشد. پس برای هر مقدار دیگر نیروی P تنش σ_x در هر نقطه از H در صفحه mn با ضرب HK بعد قائم با P بدست می‌آید.

اگر نیروهای قائم زیادی P, P₁, P₂ و ... بر مرز مستقیم افقی AB صفحه نیمه بینهایت وارد شود، تنش‌های وارد بر صفحه افقی mn با اصل سوپروپوزیشن تنش‌های تولید شده با هر یک از این نیروها بدست می‌آید. برای هر یک از آنها، منحنی‌های σ_x و τ_{xy} با انتقال دادن منحنی‌های σ_x و τ_{xy} بدست می‌آید، برای P ساخته شده است تا مبدهای O₁, O₂, ... جدید ایجاد شوند. با دنبال کردن این کار تنش σ_x تولید می‌شود، برای مثال، با نیروی P₁ در صفحه mn در نقطه D با ضرب بعد قائم H₁K₁ با P₁ بدست می‌آید. به همین طریق تنش σ_x در D با P₂ تولید می‌شود که H₂K₂*P₂ و غیره بدست می‌آید. تنش نرمال کل در D بر روی صفحه با P, P₁, P₂ و ... تولید می‌شود که برابر است با:

$$\sigma_x = \overline{DD_1} \cdot P + \overline{H_1K_1} \cdot P_1 + \overline{H_2K_2} \cdot P_2 + \dots$$

بنابراین منحنی σ_x نشان داده شده در شکل ۵۳ خط تاثیرگذار برای تنش نرمال σ_x در نقطه D می‌باشد. به همین طریق ما نتیجه می‌گیریم که منحنی σ_{xy} خط تاثیرگذار برای تنش برشی در صفحه mn در نقطه D می‌باشد.



شکل ۵۷

با داشتن این منحنی‌ها، مولفه‌های تنش در D برای هر نوع بارگذاری قائم گوشه AB صفحه را می‌توان بسادگی بدست آورد.

اگر بجای نیروهای متمرکز ما یک بارگذاری یکنواخت با شدت q توزیع شده در بخش SS مرز مستقیم وجود داشته باشد (شکل ۵۳)، تنش نرمال σ_x تولید شده با این بار در نقطه D با ضرب کردن q با مساحت تاثیرگذار نشان داده شده با سایه در شکل بدست می‌آید.

مساله بار توزیع شده یکنواخت را می‌توان با روش دیگری بوسیله تابع تنش بصورت زیر حل کرد:

$$\phi = Ar^2\theta \quad (a)$$

که در این رابطه A عددی ثابت می‌باشد. مولفه‌های تنش مرتبط عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 2A\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 2A\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -A \end{aligned} \quad (b)$$

با اعمال این بر صفحه نیمه بینهایت ما به بار توزیع شده در شکل 57a می‌رسیم. در گوشه مستقیم صفحه نیروی برشی با توزیع یکنواخت با شدت A وجود داشته و بار نرمال توزیع یافته یکنواخت با شدت $A\pi$ وجود دارد

که در مبدا O سریعاً علامت خود را تغییر می‌دهد. جهات نیرو از جهات مثبت مولفه‌های تنش وارد بر یک المان C پیروی می‌کند.

با انتقال مبدار به O_1 و تغییر علامت تابع تنش ϕ ، ما به توزیع بار نشان داده شده در شکل 57b می‌رسیم. با استفاده از اصل سوپروپوزیشن دو بار توزیع شده (شکل 57a,b)، ما حالت بارگذاری یکنواخت بخش مرز مستقیم صفحه نیمه بینهایت نشان داده شده در شکل 57c بدست می‌آوریم. برای بدست آوردن شدت q داده شده با بار یکنواخت، داریم:

$$2A\pi = q, \quad A = \frac{1}{2\pi} q$$

تنش در هر نقطه از صفحه با تابع تنش داده می‌شود:

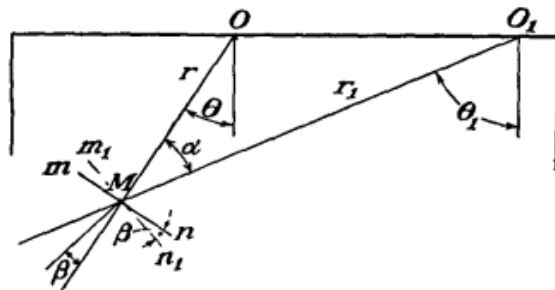
$$\phi = A(r^2\theta - r_1^2\theta_1) = \frac{q}{2\pi} (r^2\theta - r_1^2\theta_1) \quad (c)$$

از روابط (b) ما می‌بینیم که رابطه اول تابع تنش (c) در هر نقطه از M از صفحه را می‌دهد (شکل 58a)، کشش یکنواخت در تمام جهات در صفحه برابر با $2A\theta$ بوده و برش خالص $-A$ می‌باشد. به همین ترتیب عبارت دوم تابع تنش فشردگی یکنواخت $-1A\theta_1$ و برش خالص A را می‌دهد. کشش یکنواخت و فشردگی را می‌توان بسادگی با هم اضافه کرد و ما یک تنش فشردگی یکنواختی را بدست می‌آوریم:

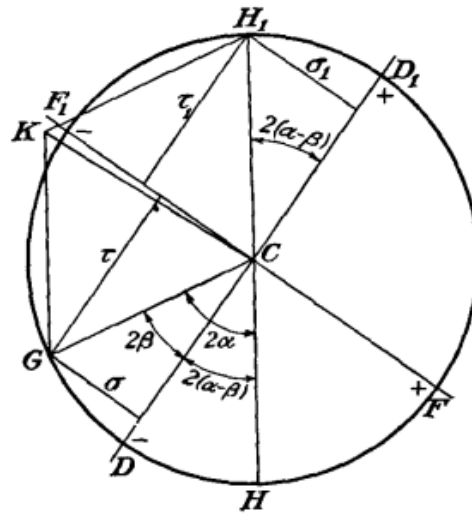
$$p = 2A\theta - 2A\theta_1 = 2A(\theta - \theta_1) = -2A\alpha \quad (d)$$

که در این رابطه α زاویه بین شعاع‌های r و r_1 می‌باشد.

با استفاده از اصل سوپروپوزیشن دو نوع برش خالص، یکی مربوط به جهت r و دیگری در جهت r_1 ، ما می‌توانیم از دایره مور استفاده کنیم (شکل 58b)، که در این حالت شعاع برابر با مقدار عددی برش‌های خالص A می‌باشد. با در نظر گرفتن دو قطر DD_1 ، موازی با r و FF_1 پیرامون به r_1 بصورت محورهای r و σ می‌باشد، ما ارائه‌ای از برش خالص مربوط به جهت r را داریم. شعاع‌های CF و CF_1 تنش‌های اصلی A و $-A$ را با زوایای $\pi/4$ با r در نقطه M ارائه می‌دهد که مربوط به این برش خالص می‌باشد و شعاع CD نمایش دهنده تنش برشی $-A$ بر روی صفحه mn پیرامون r می‌باشد. برای هر صفحه m_1n_1 قرار گرفته در زاویه β به mn (شکل 58a)، مولفه‌های تنش با مختصات σ و τ در نقطه G از دایره با زاویه GCD برابر با 2β می‌دهد.



(a)



(b)

شکل ۵۸

دایره مشابهی را می‌توان بکار برد تا مولفه‌های تنش ناشی از برش خالص در جهت r_1 را بدست آورد (به صفحه ۱۶ مراجعه شود). مجدداً با در نظر گرفتن صفحه $m_1 n_1$ و با اینکه نرمال به این صفحه زاویه $\alpha - \beta$ با جهت r_1 ایجاد می‌کند (شکل 58a)، به نظر می‌رسد که مولفه‌های تنش با مختصات نقطه H از دایره داده می‌شود. برای خلاص شدن از علامت برش خالص مربوط به جهت r_1 ، ما باید علامت‌های مولفه تنش را تغییر دهیم، و به همین ترتیب ما نقطه H_1 را در دایره پیدا می‌کنیم. تنش کل وارد بر صفحه $m_1 n_1$ با بردار CK داده شده است، مولفه‌هایی که تنش نرمال $-(\sigma + \sigma_1)$ و تنش برشی $\tau_1 - \tau$ می‌دهد. بردار CK دارای بزرگای مشابه با تمام مقادیر β می‌باشد چراکه طول‌های مولفه‌های آن CH_1 و CG و زاویه بین آن‌ها، $\pi - 2\alpha$ مستقل از β می‌باشد. بنابراین، با ترکیب دو برش خالص ما مجدداً برش خالص را بدست می‌آوریم (به صفحه ۱۷ مراجعه شود).

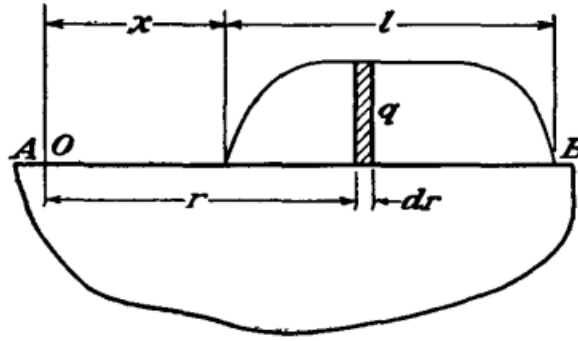
وقتی که $\tau_1 - \tau = 0$ باشد، زاویه β جهت یکی از تنش‌های اصلی را در M تخمین می‌زند. از شکل می‌توان مشاهده کرد که τ و τ_1 برابر خواهند بود اگر $2\beta = 2(\alpha - \beta)$ برقرار باشد، که از آن $\beta = \alpha/2$ می‌باشد. جهت تنش اصلی بنابراین زاویه بین شعاع‌های r و r_1 را قطع می‌کند. بزرگای تنش‌های اصلی بنابراین بصورت زیر خواهد بود:

$$\pm 2\sigma = \pm 2A \sin 2\beta = \pm 2A \sin \alpha \quad (e)$$

با ترکیب این با فشردگی یکنواخت (d) ما برای مقادیر کلی تنش‌های اصلی در هر نقطه M پیدا می‌کنیم:

$$-2A(\alpha + \sin \alpha), \quad -2A(\alpha - \sin \alpha) \quad (f)$$

در امتداد هر دایره از O و O₁ زاویه α ثابت باقی می‌ماند، و بنابراین تنش‌های اصلی (f) نیز ثابت هستند. در مرز، بین نقاط O و O₁ (شکل 58a)، زاویه α برابر با π بوده و ما از (f) می‌یابیم که هر دو تنش‌های اصلی برابر با $-q$ است و هر دو تنش اصلی برابر با صفر می‌باشد.



شکل ۵۹

بنابراین اگر یک توزیع بار دلخواه (شکل ۵۹) متشکل از تعداد بزرگی از بارهای با شدت متغیر بر روی المان‌های کوتاه مرزی در نظر گرفته شود، تنش افقی σ_x تحت یک بار المان (همانطور که در شکل ۵۹ بیان شده است) کلا ناشی از آن المان می‌باشد، و:

$$\sigma_x = \sigma_y = -q \quad (g)$$

تماما در امتداد مرز مستقیم می‌باشد.

موارد زیادی دیگری از توزیع بار بر مرز مستقیم صفحه نیمه بینهایت توسط S. D. Carothers and M. Sadowsky مورد بحث قرار گرفته است. دیگر روش حل این مساله در آینده مورد بحث قرار خواهد گرفت (به صفحه ۱۲۵ مرلجه شود).

تغییرشکل‌های مرز مستقیم صفحه را می‌توان برای هر توزیع بار با استفاده از رابطه (۷۲) بدست آمده برای نیروی متمرکز یافت. اگر شدت توزیع بار قائم (شکل ۵۹) باشد، تغییرشکل تولید شده در هر نقطه O در فاصله r از المان حاشورخورد $q dr$ بار از رابطه (۷۲) بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{2q}{\pi E} \log \frac{d}{r} dr - \frac{(1+\nu)q}{\pi E} dr$$

و کل تغییرشکل در O برابر است با:

$$v_0 = \frac{2}{\pi E} \int_x^{l+x} q \log \frac{d}{r} dr - \frac{1+\nu}{\pi E} \int_x^{l+x} q dr \quad (h)$$

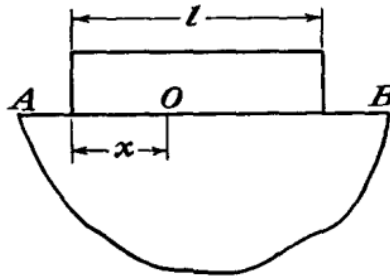
در مورد توزیع بار یکنواخت، q ثابت بوده و بصورت زیر داریم:

$$v_0 = \frac{2q}{\pi E} \left[(l+x) \log \frac{d}{l+x} - x \log \frac{d}{x} \right] + \frac{1-\nu}{\pi E} ql \quad (i)$$

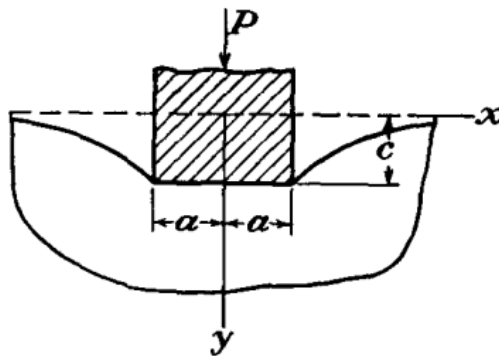
به همین ترتیب، برای نقطه در زیر بار (شکل ۶۰)، داریم:

$$v_0 = \frac{2q}{\pi E} \left[(l-x) \log \frac{d}{l-x} + x \log \frac{d}{x} \right] + \frac{1-\nu}{\pi E} ql \quad (j)$$

رابطه (h) را نیز می‌توان برای پیدا کردن شدت توزیع بار q بکار برد، که تغییرشکل داده شده را در مرز مستقیم تولید می‌کند



شکل ۶۰.



شکل ۶۱.

با فرض اینکه برای مثال تغییرشکل در امتداد بخش بار مرز مستقیم ثابت می‌باشد (شکل ۶۱)، می‌توان نشان داد که توزیع فشار در امتداد این بخش با رابطه زیر ارائه شده است:

$$q = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$$

۳۵ نیروی وارده بر انتهای گوه. توزیع تنش شعاعی ساده بیان شده در بند ۳۳ را نیز می‌توان در بررسی تنش‌ها در گوه ناشی از نیروی متمرکز در نوک آن بکار برد. یک حالت متقارن را در نظر می‌گیریم، همانطور که در شکل ۶۲ نشان داده شده است. ضخامت گوه در جهت پیرامون صفحه xy برابر با واحد در نظر گرفته می‌شود. شرایط در امتداد سطوح، $\theta = \pm\alpha$ ، گوه با در نظر گرفتن برای مولفه‌های تنش با مقادیر زیر ارضا می‌گردد:

$$\sigma_r = -\frac{kP \cos \theta}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (a)$$

عدد k ثابت تنظیم خواهد شد تا شرط تعادل در نقطه O را ایجاد نماید. ایجاد مجموع فشارهای بر سطح استوانه (نشان داده شده با خط نقطه چین) برابر با $-P$ بوده و داریم:

$$-2 \int_0^\alpha \frac{kP \cos^2 \theta}{r} r d\theta = -kP \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = -P$$

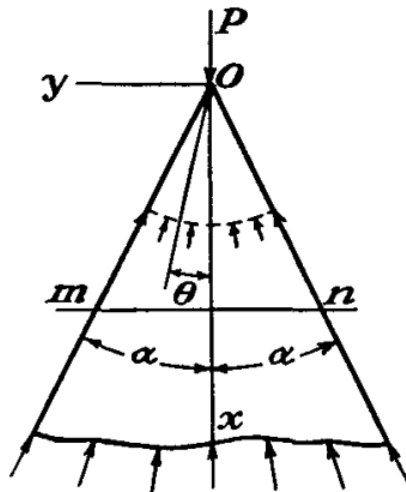
که از آن:

$$k = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

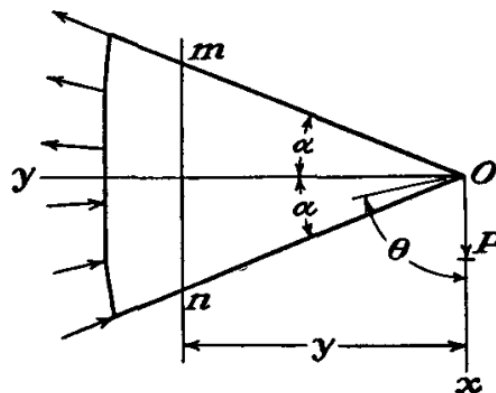
پس، از روابط (a):

$$\sigma_r = - \frac{P \cos \theta}{r(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \quad (73)$$

با ایجاد $\alpha = \pi/2$ ما به راه حل (66) برای صفحه نیمه بینهایت می‌رسیم، که تاکنون مورد بحث قرار گرفته است. می‌توان مشاهده کرد که توزیع تنش‌های نرمال در هر مقطع برشی mn یکنواخت نمی‌باشد و نسبت تنش نرمال در نقاط m یا n به حداکثر تنش در مرکز مقطع برشی برابر با $\cos^4 \alpha$ بدست می‌آید.



شکل ۶۲



شکل ۶۳

اگر نیرو در پیرامون محور گوه باشد (شکل ۶۳)، راه حل مشابه (a) را می‌توان بکار برد اگر θ از جهت نیرو اندازه‌گیری شود. ضریب ثابت k از رابطه تعادل زیر پیدا می‌شود:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sigma_r \cos \theta \cdot r d\theta = -P$$

که از آن:

$$k = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

و تنش شعاعی برابر است با:

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \quad (74)$$

تنش‌های نرمال و برشی در مقطع برشی mn برابر است با:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{Pyx \sin^4 \theta}{y^3(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \\ \tau_{xy} &= -\frac{Px^2 \sin^4 \theta}{y^3(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \end{aligned} \quad (b)$$

در حالت زاویه کوچک α ، می‌توانیم داشته باشیم:

$$2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{(2\alpha)^3}{6}$$

پس با نوشتن I برای ممان اینرسی مقطع برشی mn ما از رابطه (b) داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{Pyx}{I} \cdot \left(\frac{\tan \alpha}{\alpha}\right)^3 \sin^4 \theta \\ \tau_{xy} &= -\frac{Px^2}{I} \cdot \left(\frac{\tan \alpha}{\alpha}\right)^3 \sin^4 \theta \end{aligned} \quad (c)$$

برای مقادیر کوچک α ، ضریب $(\tan \alpha / \alpha)^3 \sin^4 \theta$ می‌تواند بسیار نزدیک به مقدار واحد باشد. پس رابطه برای σ_y مطابق با فرمول تیر مقدماتی می‌باشد. حداکثر تنش برشی در نقاط m و n رخ داده و دو برابر مقدار نظریه مقدماتی برای مرکز مقطع برشی تیر مستطیلی می‌باشد.

از آنجایی که ما راه حل برای دو حالت ارائه شده در شکل‌های ۶۲ و ۶۳ داریم، ما با هر زاویه از نیرو P در صفحه xy با تجزیه نیرو به دو مولفه و با استفاده از روش سوپروپوزیشن غلبه کنیم. قابل ذکر است که راه حل‌های (۷۳) و (۷۴) راه حل دقیقی را ارائه می‌دهند که تنها برای انتهای گوه حاوی تکیه‌گاه بوده و با نیروهای توزیع یافته با راه حل داده شده قرار گرفته است. در غیر اینصورت راه حل‌ها تنها در نقاط در فواصل زیادی از انتهای حاوی تکیه‌گاه دقیق می‌باشد.

مساله گوه بارگذاري شده با كوپل خمشي M ، در صفحه گوه، و متمرکز شهد در نوک، با تابع تنش حل شده است.

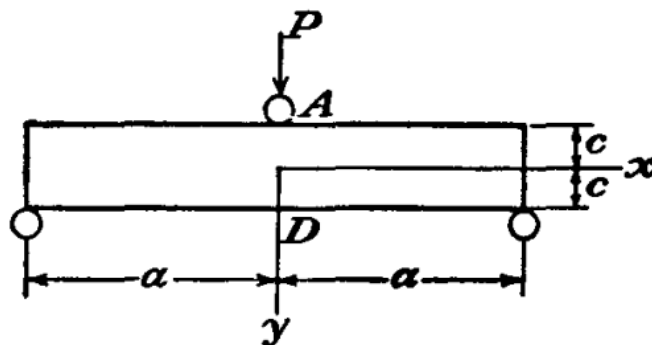
$$\phi = M \frac{\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \quad (d)$$

که در این رابطه θ در شکل ۶۲ بیان شده و کوپل M اعمالی با جهت برعکس ساعت می‌باشد. تنش‌ها عبارتند از:

$$\sigma_r = - \frac{M}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \cdot \frac{4}{r^2} \sin 2\theta, \quad \sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{M}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \cdot \frac{2}{r^2} (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \quad (e)$$

۳۶ نیروی متمرکز وارد بر تیر. مساله توزیع تنش در تیر تحت نیروی متمرکز توجه زیادی را به خود جلب کرده است. همانطور که قبلاً نشان داده شده است (بند ۲۲) در تیرهای با مقطع برشی مستطیلی باریک تحت بارگذاري پیوسته توزیع تنش با دقت خوبی با نظریه اولیه رایج خمش قابل دستیابی می‌باشد. در نزدیکی نقطه کاربرد نیروی متمرکز انحراف موضعی جدی در توزیع تنش باید انتظار رود و بررسی بیشتری از مساله لازم می‌باشد. مطالعه اولیه این تنش‌های موضعی بطو آزمایشگاهی توسط Carus Wilson انجام شده است. انجام آزمایش با تیر مستطیلی شیشه بر روی دو تکیه گاه (شکل ۶۴) با بار در میانه، و با استفاده از نور قطبی (مراجعه شود به صفحه ۱۳۲)، او نشان داده است که در نقطه A ، که در آن بار اعمال شده است، توزیع تنش می‌رسد که در صفحه نیمه بینهایت با نیروی متمرکز نرمال تولید شده است. در امتداد مقطع برشی AD تنش نرمال σ_x از قانون خطی پیروی نمی‌کند، و در نقطه D ، برخلاف A ، تنش کششی کوچکتر از مقدار انتظاری از نظریه تیر اولیه می‌باشد. این نتایج برپایه فرضیات تجربی قطعی توسط G. G. Stokes بیان شده است. سیستم نمایش داده شده در شکل ۶۴ را می‌توان با اصل سوپرپوزیشن دو سیستم نشان داده شده در شکل ۶۵ بدست بیاید. تنش‌های فشردگی شعاعی وارد بر مقاطع np ، mn و pq صفحه نیمه بینهایت (شکل 65a) با تنش‌های کششی شعاعی وارد بر وجوه تیر تکیه گاهی مستطیلی در n و p حذف شده است (شکل 65b). تنش‌ها در این تیز باید با تنش‌ها در صفحه نیمه بینهایت برای بدست آوردن مورد بیان شده توسط Stokes سوپرپوزیشن شده است.



شکل ۶۴

در محاسبه تنش‌ها در تیر، فرمول تیر اولیه اعمال خواهد شد. لنگر خمشی در میانه مقطع برشی AD تیز با گرفتن ممان واکنشی $P/2$ و تفریق کردن لنگر تمام نیروهای کششی جهت دار شعاعی اعمالی به نصف تیر بدست می‌آید. این لنگر پیشین بسادگی محاسبه می‌شود اگر مشاهده کنیم که نیروهای کششی توزیع شعاعی بطور استاتیکی با توزیع فشار در ربع چهارم ab سطح استوانه abc در نقطه A برابر می‌باشد (شکل 65c) یا، با استفاده از رابطه (66)، برابر با نیروی افقی P/π بوده و نیرو قائم $P/2$ می‌باشد، در نقطه A اعمال شده است (شکل 65d). پس لنگر خمشی، به عبارت دیگر تقریباً در نزدیکی نقطه O برابر است با:

$$\frac{P}{2}l - \frac{P}{\pi}c$$

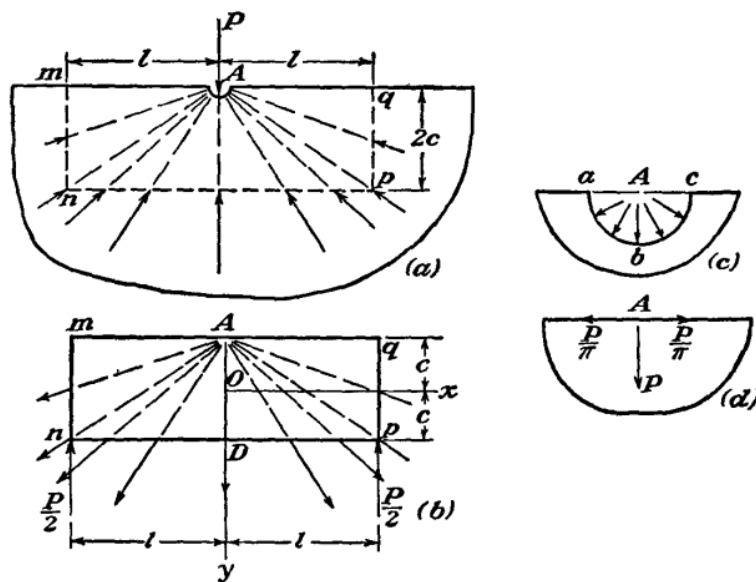
و تنش‌های خمشی مربوطه عبارتند از:

$$\sigma_{x'} = \frac{P}{I} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y = \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y$$

برای این تنش‌های خمشی تنش کششی با توزیع یکنواخت $P/2\pi c$ تولید شده توسط نیروی کششی P/π باید اضافه شود. تنش‌های نرمال در مقطع برشی AD، همانطور که در این روش اولیه بدست آمده است و بنابراین:

$$\sigma_x = \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c}$$

این با فرمول ارائه شده توسط Stokes تطابق دارد.



شکل ۶۵

تقریبی مناسبی بدست می‌آید اگر ما مشاهده کنیم که بار با توزیع پیوسته به پائین تیر اعمال شود (شکل 65b) و از رابطه (36') استفاده شود. شدت این بار در نقطه D، از رابطه (66)، برابر با $P/\pi c$ می‌باشد. با جاگذاری این در رابطه (36') و ترکیب با مقدار σ_x بالا، ما بصورت تقریب ثانویه داریم:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3y}{10c} \right) \\ \sigma_y &= \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right)\end{aligned}\quad (a)$$

این تنش‌ها باید بر روی تنش‌ها سوپرپوزیشن شوند:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi(c+y)} \quad (b)$$

همانند صفحه نیمه بینهایت، برای بدست آوردن تنش‌های کل در امتداد مقطع AD می‌باشد.

مقایسه‌ای با راه حل دقیق اخیر ارائه شده در زیر (مراجعه شود به جدول صفحه ۱۰۶)، نشان می‌دهد که روابط (a) و (b) تنش‌هایی با دقت بسیار خوبی در تمام نقاط بجز نقطه D در پائین تیر می‌دهد که در آن اصلاح به تیر ساده بصورت زیر ارائه شده است:

$$-\frac{3P}{2\pi c} + \frac{P}{2\pi c} + \frac{1}{5} \frac{P}{\pi c} = -0.254 \frac{P}{c}$$

درحالی که راه حل دقیق‌تر تنها مقدار $-0.133(P/c)$ را می‌دهد.

تلاش اول برای بدست آوردن یک راه حل دقیق‌تر از مساله توسط J. Boussinesq انجام شده است. او از راه حل Flamant برای صفحه نیمه بینهایت استفاده کرد (مراجعه شود به بند ۳۳). برای خنثی کردن تنش در مرز np (شکل 65a)، او یک سیستم برابر و مخالفی از تنش‌ها را اضافه کرده و مجدداً از راه حل Flamant استفاده می‌کند، به عبارت دیگر تیر را بصورت صفحه نیمه بینهایت توسعه یافته تا بالای np در نظر گرفته شده است. این سیستم اصلاح کننده تنش‌های اضافی در بالای تیر تعریف می‌کند، که مجدداً می‌توان با کاربری تکراری از راه حل Flamant حذف کرد و همینطور ادامه داد. این فرایند همگرایی بسیار آهسته داشته و منجر به نتیجه مورد قبولی نشده است.

یک راه حل مساله بوسیله سری مثلثاتی توسط L. N. G. Filon بدست آمده است. او این راه حل را به بارهای متمرکز اعمال کرد و محاسباتی برای موارد مختلف خاص انجام داد (مراجعه شود به بند ۲۳)، که تطابق خوبی با بررسی‌های اخیر دارد.

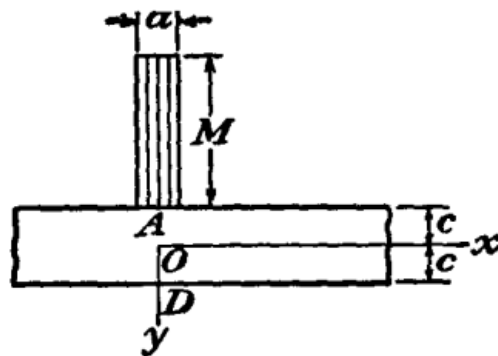
پیشرفت بیشتر در راه حل مساله توسط H. Lamb صورت گرفته است. با در نظر گرفتن یک تیر نامحدود بارگذاری شده در فواصل برابر با نیروهای متمرکز برابر وارد در جهات رو به بالا و رو به پائین، او راه حل مساله دو بعدی را ساده کرده و برای حالت‌های زیادی روابطی برای منحنی‌های تغییرشکل بدست آورده است. در این حالت نشان داده شده است که نظریه برنولی-اویلر دارای دقت خوبی می‌باشد اگر عمق تیر در مقایسه با طول آن کوچک باشد. همچنین نشان داده شده است که تصحیح برای نیروی برشی همانطور که توسط رانکین و Grashof در نظریه اولیه ارائه شده است (به صفحه ۴۳ مراجعه شود) تا حدودی مبالغه شده و باید تا تقریباً 0.75 مقدار آن کم شود.

مطالعه با جزئیات بیشتر توزیع تنش و انحنای نزدیک نقطه کاربرد بار متمرکز توسط T. v. Karman و F. Seewald انجام شده است. Kraman یک تیر طویل نامحدود را در نظر گرفته و از راه حل برای صفحه نیمه بینهایت با دو کوپل وارده برابر و مخالف هم را در همسایگی نقاط مرز مستقیم بکار گرفته است (شکل 56b). تنش‌ها در امتداد پائین تیر که توسط این روش تعریف شده است را می‌توان با استفاده از یک راه حل بصورت سری مثلثاتی حذف کرد (بند ۲۳)، که برای تیر طویل نامحدود توسط انتگرال فوریه ارائه خواهد شد. بدین ترتیب Karman به تابع تنش می‌رسد:

$$\phi = \frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \sinh \alpha c \sinh \alpha y \cdot \alpha y}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cos \alpha x \, d\alpha$$

$$- \frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha c \sinh \alpha c + \cosh \alpha c) \sinh \alpha y - \cosh \alpha c \cosh \alpha y \cdot \alpha y}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cos \alpha x \, d\alpha \quad (c)$$

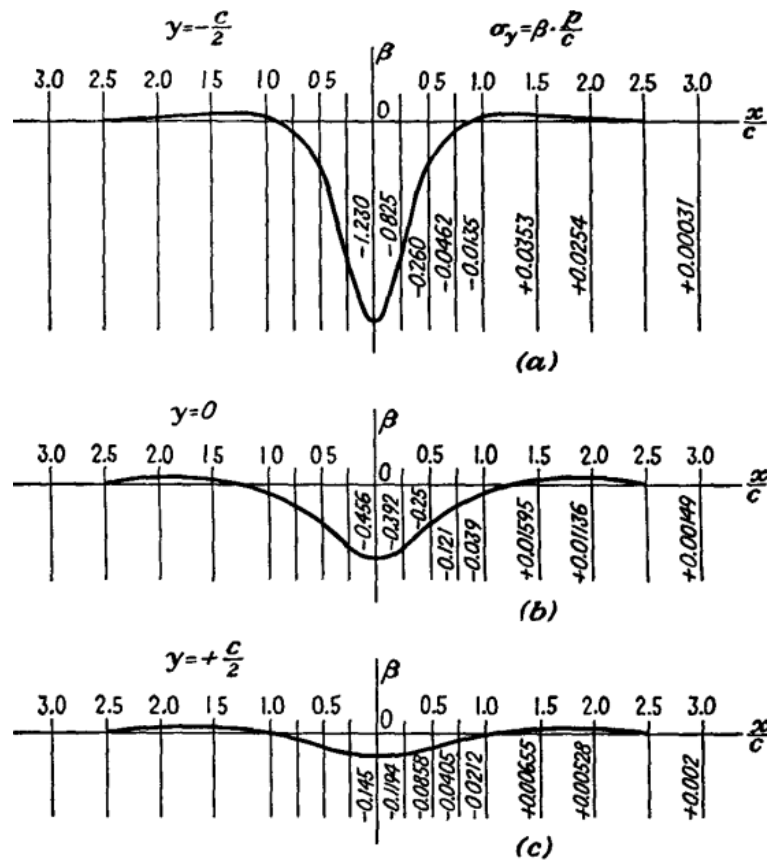
این تابع توزیع تنش در تیر را در هنگام دیاگرام لنگر خمشی شامل یک مستطیل بسیار باریک همانطور که در شکل ۶۶ نشان داده شده می‌دهد. برای معمول‌ترین حالت بارگذاری تیر با نیروهای قائم وارد شده در بالای تیر مربوط به دیاگرام لنگر خمشی را می‌توان به مستطیل‌های اولیه همانند نشان داده شده در شکل ۶۶ تقسیم کرد و تابع تنش مربوطه با انتگرالگیری از رابطه (c) در امتداد تیر بدست خواهد آمد.



شکل ۶۶

این روش راه حل توسط Seewald به تیر تحت بار نیروی متمرکز P توسط Seewald اعمال شده است (شکل ۶۴). او نشان داده است که تنش σ_x را می‌توان به دو قطعه تقسیم کرد: مورد اول که می‌توان با فرمول تیر اولیه رایج محاسبه کرد؛ و دیگری که نمایش دهنده تاثیر محلی در نزدیکی نقطه وارد شدن بار می‌باشد. این قطعه پیشین با نام σ_x' را می‌توان بصورت $\beta(P/c)$ نمایش داد که در آن β یک ضریب عددی وابسته به موقعیت نقطه برای تنش‌های موضعی محاسبه شده می‌باشد. مقادیر این ضریب در شکل ۶۷ داده شده است. دو مولفه تنش دیگر τ_{xy} و σ_y را نیز بصورت $\beta(P/c)$ نمایش داد. مقادیر مربوطه β در شکل‌های ۶۸ و ۶۹ داده شده است. از شکل‌ها می‌توان مشاهده کرد که تنش‌های موضعی سریعاً با افزایش فاصله از نقطه وارد شدن بار کاهش پیدا کرده و در فاصله‌ای برابر با عمق تیر معمولاً قابل صرف نظر می‌باشد. با استفاده از مقادیر ضریب β برای $x=0$ ، تنش‌های موضعی در پنج نقطه مقطع برشی AD تحت بار (شکل ۶۴) در زیر در جدول آورده شده است. برای مقایسه

تنش‌های موضعی همانطور که از روابط (a) و (b) بدست آمده است (صفحه ۱۰۱) نیز داده شده است. از این روابط می‌توان مشاهده کرد که تنش‌های موضعی دقت مناسبی داشته‌اند.

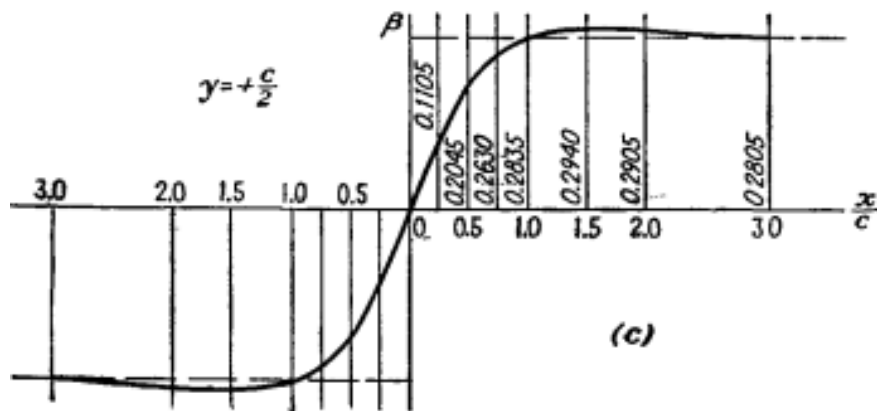
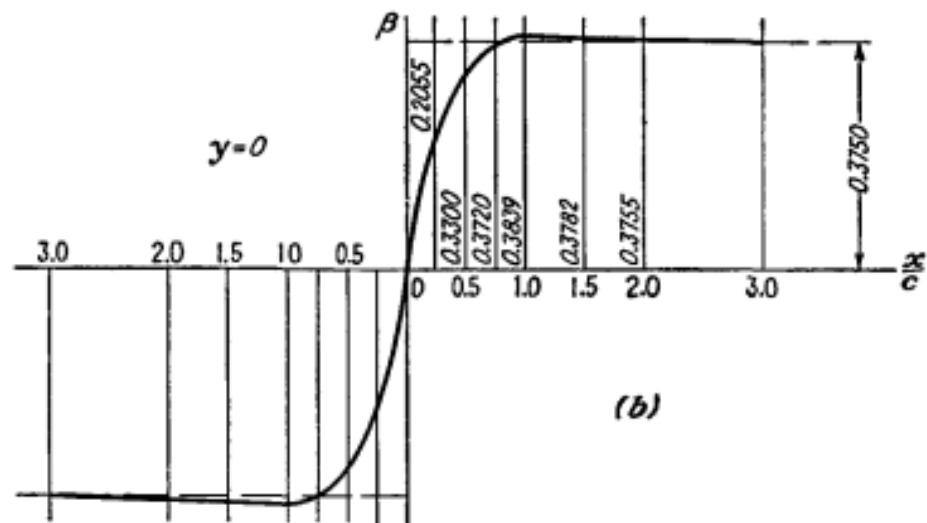
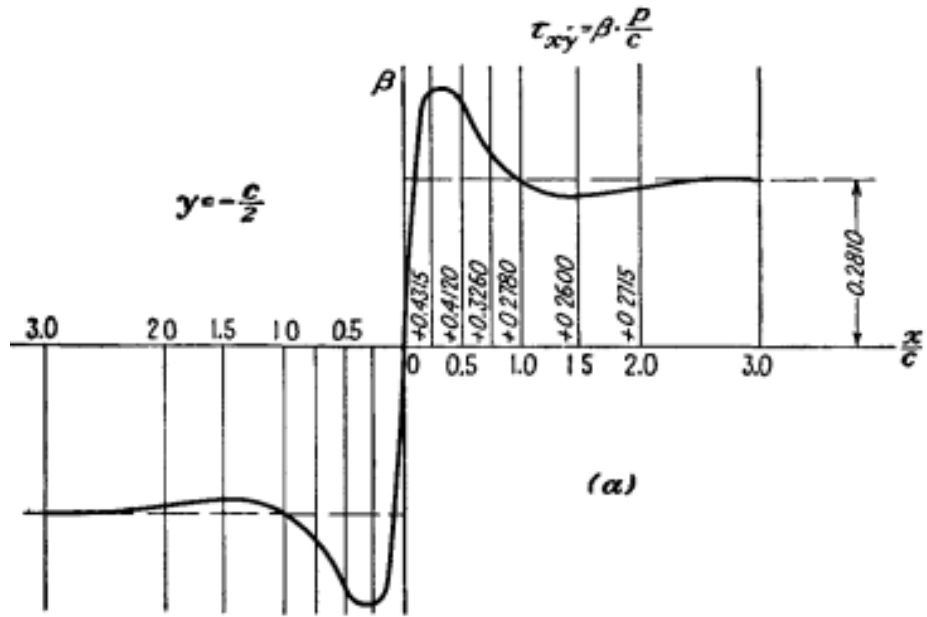


شکل ۶۸

با در دست داشتن تنش‌ها، انحنا و تغییر شکل تیر را می‌توان بدون هرگونه مشکلی محاسبه کرد. این محاسبات نشان می‌دهد که انحنای تغییر شکل منحنی را نیز می‌توان در دو قطعه تقسیم کرد - یکی بصورت نظریه تیر اولیه ارائه شده است و دیگری با تاثیر موضعی بار متمرکز P بیان شده است. این انحنا اضافی خط مرکزی را می‌توان با فرمول زیر بیان کرد:

$$\frac{1}{r} = \alpha \frac{P}{Ec^2} \quad (d)$$

که در این رابطه α یک ضریب عددی متغیر در امتداد طول تیر می‌باشد. مقادیر متعددی از این ضریب در شکل ۷۰ ارائه شده است. قابل مشاهده است که مقاطع برشی در فاصله بزرگتر از نصف عمق تیر انحنای اضافی قابل صرف نظر کردن می‌باشد.

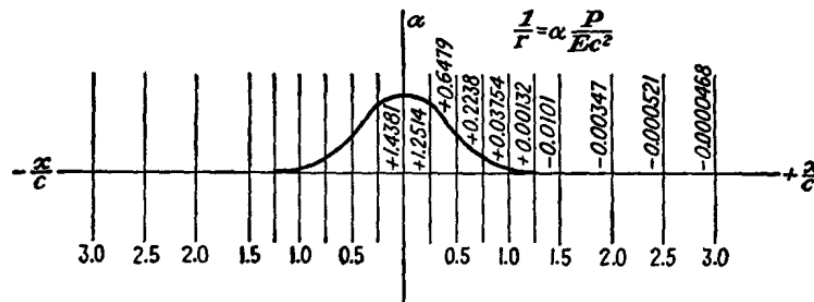


شکل ۶۹

جدول ضرایب β برای میانه

$y =$	$-c$	$-\frac{c}{2}$	0	$\frac{c}{2}$	c
Exact solution					
$\sigma_x' =$	0 428	0 121	-0 136	-0 133
$\sigma_y =$	∞	-1 23	-0 456	-0 145	0
Approximate solution					
$\sigma_x' =$	0 573	0 426	0 159	-0 108	-0 254
$\sigma_y =$	∞	-1.22	-0.477	-0 155	0

(Exact Solution: راه حل دقیق؛ Approximate Solution: راه حل تقریبی)



شکل ۷۰.

با در نظر گرفتن این اثر موضعی در انحنا، دو شاخه منحنی تغییرشکل AB و AC (شکل ۷) را می‌توان برای بوجود آوردن زاویه برابر با رابطه زیر در نظر گرفت:

$$\gamma = \frac{P}{c} \left(\frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) \quad (e)$$

تغییرشکل مربوط در میانه برابر است با:

$$\delta_1 = \frac{\gamma l}{4} = \frac{Pl}{4c} \left(\frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) \quad (f)$$

از این تغییرشکل تصحیح کوچک δ_2 با از بین بردن تغییر ناگهانی شیب در A باید کم شود. این مقدار نیز با تحقیقات Seewald محاسبه شده و برابر است با:

$$\delta_2 = 0.21 \frac{P}{E}$$

حال با علامتگذاری δ_0 تغییرشکل محاسبه شده با استفاده از نظریه اولیه، کل تغییرشکل تحت بار برابر است با:

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 - \delta_2 = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Pl}{4c} \left(\frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) - 0.21 \frac{P}{E} \quad (75)$$

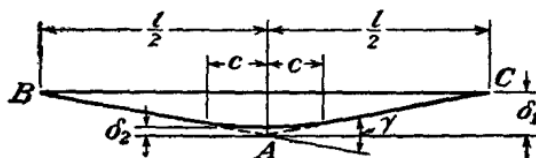
با در نظر گرفتن $\nu=0.3$ ، این نیز رابطه زیر را می‌دهد:

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} \left[1 + 2.85 \left(\frac{2c}{l} \right)^2 - 0.84 \left(\frac{2c}{l} \right)^3 \right] \quad (75')$$

نظریه رانکین - Grashof اولیه (به صفحه ۴۳ مراجعه شود) برای این حالت رابطه زیر را ارائه می دهد:

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} \left[1 + 3.90 \left(\frac{2c}{l} \right)^2 \right] \quad (g)$$

به نظر می رسد که رابطه (g) یک مقدار بیش از حدی را برای تصحیح ناشی از برش می دهد. در این فرمولها تغییرشکل ناشی از تغییرشکل وضعی در تکیه گاهها در نظر گرفته نشده است.



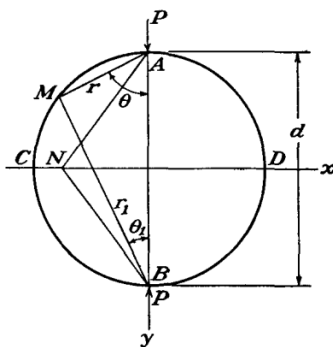
شکل ۷۱.

۳۷ تنشها در دیسک دایروی

اجازه دهید تا با در نظر گرفتن دو نیروی برابر و مخالف هم P وارد در امتداد قطر AB شروع کنیم (شکل ۷۲). با فرض اینکه هر یک از نیروها یک توزیع تنش شعاعی ساده تولید می کند (رابطه ۶۶)، ما می توانیم نیروهایی که باید در محیط دیسک اعمال شود پیدا کنیم تا اینگونه توزیع تنش حفظ شود. در هر نقطه M از محیط ما فشردگی در جهات r و r_1 به ترتیب برابر با $(2P/\pi)(\cos\theta/r)$ و $(2P/\pi)(\cos\theta_1/r_1)$ داریم. از آنجایی که r و r_1 عمود بر یکدیگر می باشند و:

$$\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\cos\theta_1}{r_1} = \frac{1}{d} \quad (a)$$

که در این رابطه d قطر دیسک است، ما نتیجه می گیریم که دو تنش اصلی M برابر با تنشهای فشردگی با بزرگای $2P/\pi d$ می باشد. بنابراین تنش فشردگی مشابهی در هر سطح از M عمود بر سطح دیسک وارد می شود و نیروهای فشردگی نرمال با شدت ثابت $2P/\pi d$ باید بخ محیط دیسک اعمال شود تا ترکیب توزیع تنش ساده فرض شده حفظ گردد.



شکل ۷۲.

اگر مرز دیسک از نیروهای خارجی آزاد باشد، تنش در هر نقطه با سوپرپوزیشن کشش یکنواخت در صفحه دیسک با بزرگای $2P/\pi d$ در بالای دو توزیع تنش شعاعی ساده بدست می‌آید. اجازه دهید تا تنش در مقطع قطری افقی دیسک در N را در نظر بگیریم. از تقارن می‌توان نتیجه گرفت که تنش برشی در این صفحه وجود نخواهد داشت. تنش‌های نرمال تولید شده با دو فشردگی شعاعی برابر بصورت زیر می‌باشد:

$$-2 \cdot \frac{2P \cos \theta}{\pi r} \cdot \cos^2 \theta$$

که در این رابطه r فاصله AN است و θ زاویه بین AN و قطر قائم می‌باشد. با سوپرپوزیشن بر روی این کشش یکنواخت $2P/\pi d$ ، تنش نرمال کل در صفحه افقی در N برابر است با:

$$\sigma_y = -\frac{4P \cos^3 \theta}{\pi r} + \frac{2P}{\pi d}$$

یا با استفاده از این رابطه زیر:

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4x^2}}$$

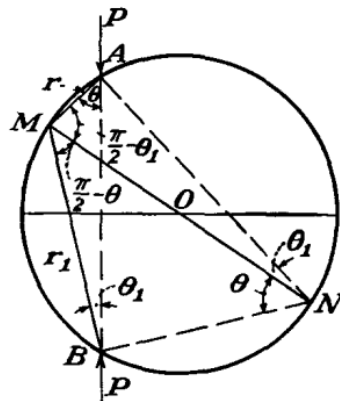
داریم:

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi d} \left[1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4x^2)^2} \right] \quad (b)$$

حداکثر تنش فشردگی در امتداد قطر CD در مرکز دیسک است که در آن:

$$\sigma_y = -\frac{6P}{\pi d}$$

در انتهاهای قطر تنش فشردگی σ_y از بین می‌رود.



شکل ۷۳.

حال حالتی از دو نیروی برابر و مخالف هم در امتداد تار AB (شکل ۷۳) در نظر گرفته می‌شود. مجدداً با فرض دو توزیع ارتعاشی شعاعی ساده از A و B ، تنش در صفحه تانژانتی به محیط در M با سوپرپوزیشن دو فشردگی شعاعی با $(2P/\pi)(\cos\theta/r)$ و $(2P/\pi)(\cos\theta_1/r_1)$ به ترتیب در جهات r و r_1 بدست آمده است.

MN نرمال به تانژانت در M قطر دیسک است؛ بنابراین MAN و MBN مثلث‌های زاویه راست بوده و زوایایی که MO نرمال با r و r₁ می‌سازند به ترتیب $\pi/2 - \theta_1$ و $\pi/2 - \theta$ می‌باشد. تنش‌های نرمال و برشی بر روی یک المان مرزی در M بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) - \frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\cos \theta \sin^2 \theta_1}{r} + \frac{\cos \theta_1 \sin^2 \theta}{r_1} \right) \quad (c) \\ \tau &= -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\cos \theta}{r} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin \theta \cos \theta \right)\end{aligned}$$

این روابط را می‌توان ساده کرد اگر ما مشاهده کنیم که از مثلث‌ها MAN و MBN بصورت زیر باشند:

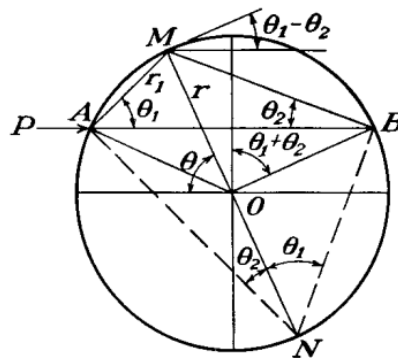
$$r = d \sin \theta_1, \quad r_1 = d \sin \theta$$

با جاگذاری در روابط (c)، داریم:

$$\sigma = -\frac{2P}{\pi d} \sin(\theta + \theta_1), \quad \tau = 0 \quad (d)$$

از شکل ۷۳ می‌توان مشاهده کرد که $\sin(\theta + \theta_1)$ در اطراف مرز ثابت باقی می‌ماند. بنابراین نیروهای فشردگی با توزیع یکنواخت با شدت $2P/\pi d \sin(\theta + \theta_1)$ باید به مرز اعمال شود تا توزیع‌های تنش شعاعی فرضی حفظ شود. برای بدست آوردن راه حلی برای یک دیسک با مرز آزاد آن از فشردگی یکنواخت تنها سوپرپوز کردن بر روی دو توزیع شعاعی ساده یک کشش یکنواخت با شدت $2P/\pi d(\theta + \theta_1)$ لازم می‌باشد.

مساله توزیع تنش در یک دیسک را می‌توان برای حالت عمومی‌تر حل کرد وقتی که هر سیستمی از نیروها در تعادل بر مرز دیسک وارد شده باشد. اجازه دهید تا یکی از این نیروها را در نظر بگیریم که در A در جهت تار AB وارد شده باشد (شکل ۷۴). با فرض مجدد یک توزیع تنش شعاعی ساده ما در نقطه M دارای فشردگی شعاعی ساده با بزرگای $(2P/\pi) \cos \theta_1 / r_1$ وارد در جهت AM می‌باشد.



شکل ۷۴.

اجازه دهید تا مبدا را مختصات قطبی در مرکز O دیسک در نظر بگیریم، و مقدار θ را همانطور که در شکل نشان داده شده است اندازه بگیریم. پس مولفه‌های نرمال و برشی تنش وارده بر المان تانژانتی به مرز در M را می‌توان

بسادگی محاسبه کنیم اگر ما مشاهده کنیم که زاویه بین MO نرمال به المان و جهت r_1 فشردگی برابر با $\pi/2-\theta_2$ باشد، پس:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin^2 \theta_2 \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin \theta_2 \cos \theta_2\end{aligned}\quad (e)$$

از آنجایی که از مثلث AMN، $r_1 = d \sin \theta_2$ می باشد، روابط (e) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{P}{\pi d} \sin (\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \sin (\theta_2 - \theta_1) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{\pi d} \cos (\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \cos (\theta_2 - \theta_1)\end{aligned}\quad (f)$$

این تنش وارده بر المان مثلثی به مرز در نقطه M را می توان با سوپرپوز کردن سه تنش زیر در المان بدست آورد:

(۱) یک تنش نرمال با توزیع یکنواخت در امتداد مرز:

$$-\frac{P}{\pi d} \sin (\theta_1 + \theta_2) \quad (g)$$

(۲) یک تنش بری با توزیع یکنواخت در امتداد مرز:

$$-\frac{P}{\pi d} \cos (\theta_1 + \theta_2) \quad (h)$$

(۳) یک تنش که مولفه های نرمال و برشی آن عبارتند از:

$$-\frac{P}{\pi d} \sin (\theta_2 - \theta_1) \quad \text{and} \quad -\frac{P}{\pi d} \cos (\theta_2 - \theta_1) \quad (k)$$

با مشاهده اینکه زاویه بین نیروی P و تانژانت در M برابر با $\theta_1 - \theta$ می باشد، می توان نتیجه گرفت که تنش (k) دارای بزرگای $P/\pi d$ است و در جهت مخالف به جهت نیروی P وارد می شود. حال فرض شود که نیروهای زیادی بر دیسک وارد شده و هر کدام از آنها توزیع تنش شعاعی ساده وارد می کنند. پس نیروهایی که در مرز باید برای حفظ اینگونه توزیع تنش وارد شوند عبارتند از:

(۱) یک توزیع نیروی یکنواخت نرمال در امتداد مرز با شدت:

$$-\sum \frac{P}{\pi d} \sin (\theta_1 + \theta_2) \quad (l)$$

(۲) نیروهای برشی دارای شدت زیر می باشد:

$$-\sum \frac{P}{\pi d} \cos (\theta_1 + \theta_2) \quad (m)$$

(۳) یک نیرو، شدت و جهت آن با مجموع برداری روابط (k) بدست می آید. مجموع باید در تمام نیروها وارده در مرز بسط یابد.

ممان تمام نیروهای خارجی با توجه به O از شکل ۷۴ بصورت زیر می باشد:

$$\sum \frac{P \cos (\theta_1 + \theta_2) d}{2}$$

و از آنجایی که این ممان باید برای سیستم در تعادل صفر باشد، ما نتیجه می‌گیریم که نیروهای برشی (m) صفر می‌باشند. نیروی بدست آمده با مجموع تنش‌ها (k)، متناسب با جمع برداری نیروهای خارجی می‌باشد که آن نیز برای سیستم در تعادل برابر با صفر می‌باشد. بنابراین تنها لازم است تا در مرز دیسک یک فشردگی یکنواختی (l) وارد شود تا توزیع‌های شعاعی ساده حفظ شود. اگر مرز از فشردگی یکنواخت آزاد باشد، تنش در هر نقطه از دیسک با سوپرپوز کردن بزرگای کشش یکنواخت بر توزیع‌های شعاعی ساده بدست می‌آید:

$$\sum \frac{P}{\pi d} \sin (\theta_1 + \theta_2)$$

با استفاده از روش کلی، موارد مختلفی از توزیع تنش در دیسک‌ها را بسادگی می‌توان حل کرد. برای مثال ما ممکن است موردی برای کوپل وارده بر دیسک را انتخاب کنیم (شکل 75). با فرض اینکه دو توزیع شعاعی در A و B برابر باشند، ما می‌بینیم که در این حالت (l) و مجموع (k) صفر بوده و تنها نیروهای برشی (m) نیاز به اعمال شدن در مرز دارند تا توزیع‌های تنش شعاعی ساده حفظ شوند. شدت این نیروها از (m) برابر است با:

$$-\frac{2P}{\pi d} \cos (\theta_1 + \theta_2) = -\frac{2M_t}{\pi d^2} \quad (n)$$

که در این رابطه M_t ممان کوپل می‌باشد. برای آزاد کردن مرز دیسک از نیروهای برشی و انتقال تعادل کوپل ترکیب نیروهای P از محیط دیسک به مرکز آن لازم است تا توزیع‌های شعاعی تنش‌ها در مورد نشان داده شده در شکل 75b سوپرپوز شود. این تنش‌های پیشین، تولید شده با برش محیطی خالص، را می‌توان بسادگی محاسبه کرد اگر ما مشاهده کنیم که برای هر دایره مرکزی شعاع r تنش‌های برشی باید کوپل M_t بدهد. بنابراین:

$$\tau_{r\theta} 2\pi r^2 = M_t, \quad \tau_{r\theta} = \frac{M_t}{2\pi r^2} \quad (p)$$

این تنش‌ها همچنین ممکن است از روابط عمومی (38) با در نظر گرفتن آن بصورت تابع تنش زیر استخراج شوند:

$$\phi = \frac{M_t \theta}{2\pi} \quad (q)$$

که از آن:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = \frac{M_t}{2\pi r^2}$$

۳۸ نیرو در یک نقطه از یک صفحه نامحدود. اگر یک نیرو P در میانه صفحه یک صفحه نامحدود وارد شود (شکل 76a)، توزیع تنش را می‌توان بسادگی با اصل احتمال آثار سیستم‌ها بدست آورد که تا الان در رابطه با آن بحث کرده‌ایم. اگرچه ما قادر به ساخت یک راه حل با اصل احتمال آثار با دو راه حل برای صفحه نیمه بینهایت نشان داده شده در شکل 76b و 76c نمی‌باشیم. اگرچه جابجایی‌های قائم درامتداد مرزهای مستقیم

متفاوت می‌باشد. در حالی که در مورد 76b این جابجایی دور از نقطه O می‌باشد و در مورد 76c به سمت نقطه O می‌باشد. بزرگاری این جابجایی‌ها در هر دو حالت از رابطه (71) برابر است با:

$$\frac{1-\nu}{4E} \cdot P \quad (a)$$

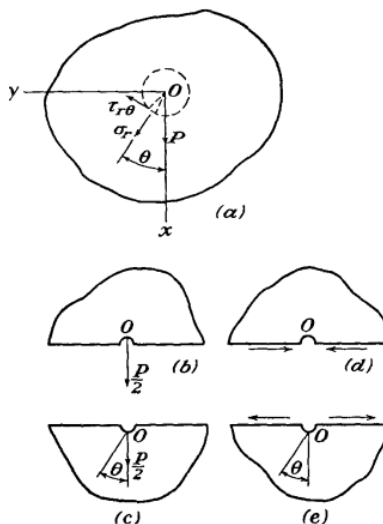
این اختلاف در جابجایی‌های افقی را می‌توان با ترکیب موارد 76b و 76c با حالت‌های 76d و 76e در نیروهای برشی وارده در امتداد مرزهای مستقیم حذف کرد. جابجایی‌ها برای این حالت‌های آخری را می‌توان از مساله خمش یک میله خمیده همانند شکل ۴۶ بدست آورد. در این صورت شعاع داخلی این میله به سمت صفر میل کرده و شعاع خارجی تا بینهایت افزایش پیدا می‌کند، ما به حالت صفحه نیمه بینهایت دست پیدا می‌کنیم. جابجایی در امتداد مرز مستقیم این صفحه در جهت نیروی برشی وارد بر مرز از رابطه (61) برابر است با:

$$\frac{D\pi}{E} \quad (b)$$

مقدار عدد ثابت از انتگرال D باید تنظیم شود تا جابجایی حاصل از (a) و (b) حذف شود. پس:

$$\frac{D\pi}{E} = \frac{1-\nu}{4E} P, \quad D = \frac{1-\nu}{4\pi} P \quad (c)$$

با این تنظیمات نتیجه اصل اجتماع آثار حالت‌های 76b، 76c، 76d و 76e یک صفحه نامحدود بارگذاری شده در نقطه می‌باشد، شکل 76a.



شکل ۷۶.

حال توزیع تنش در صفحه به راحتی با اصل اجتماع آثار در صفحه نیمه بینهایت تولید شده با بار نرمال $P/2$ در مرز بر تنش‌های (مراجعه شود به بند ۳۳) میله خمیده شامل عدد ثابت انتگرال D تولید می‌شود. مشاهده اختلاف در اندازه‌گیری زاویه θ در شکل ۴۶ و ۷۶ با استفاده از روابط (60)، تنش‌ها در میله خمیده برای θ همانند شکل ۷۶ می‌باشد:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1 - \nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1 - \nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{D \sin \theta}{r} = \frac{1 - \nu}{4\pi} \frac{P \sin \theta}{r}\end{aligned}$$

با ترکیب این دو تنش‌های (۶۶) برای بار $P/2$ محاسبه می‌شود، ما توزیع تنش در صفحه نامحدود را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1 - \nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} - \frac{P \cos \theta}{\pi r} = -\frac{(3 + \nu)}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{1 - \nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1 - \nu}{4\pi} \frac{P \sin \theta}{r}\end{aligned} \quad (76)$$

با برش زدن صفحه در نقطه O (شکل 76a) یک المان کوچک با سطح استوانه‌ای با شعاع r محدود شده است و نیروهای وارده بر مرز استوانه‌ای از المان را بر محورهای x و y نمایان کرده و داریم:

$$\begin{aligned}X &= 2 \int_0^\pi (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r d\theta = P \\ Y &= 2 \int_0^\pi (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r d\theta = 0\end{aligned}$$

به عبارت دیگر نیروهای وارده بر مرز المان استوانه‌ای نماینده بار P وارده در نقطه O می‌باشد. با استفاده از روابط (13) مولفه‌های تنش در مختصات کارتزین از روابط (76) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{P \cos \theta}{4\pi} \frac{1}{r} [-(3 + \nu) + 2(1 + \nu) \sin^2 \theta] \\ \sigma_y &= \frac{P \cos \theta}{4\pi} \frac{1}{r} [1 - \nu - 2(1 + \nu) \sin^2 \theta] \\ \tau_{xy} &= -\frac{P \sin \theta}{4\pi} \frac{1}{r} [1 - \nu + 2(1 + \nu) \cos^2 \theta]\end{aligned} \quad (77)$$

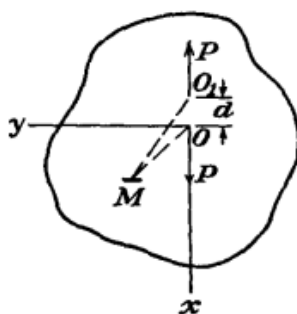
از راه حل (۷۷)، برای یک نیروی متمرکز، راه حل‌ها برای دیگر انواع بارگذاری را می‌توان با اصل اجتماع آثار بدست آورد. برای مثال حالتی که در شکل ۷۷ نشان داده شده است را در نظر بگیرید، که در آن دو نیروی برابر مخالف بر یک صفحه نامحدودی در نقاط O و O₁ با فاصله بسیار کوچک d جدا از هم وارد شده است. تنش در هر نقطه M با اصل اجتماع آثار بر تنش تولید شده با نیرو در O تنش تولید شده با دیگر نیرو در O₁ بدست می‌آید. با در نظر گرفتن، برای مثال، یک المان در محیط M نسبت به محور x و با پارامتر σ_x تنش نرمال بر روی المان با نیرو در O تولید شده است، تنش نرمال σ_x' با دو نیرو نشان داده شده در شکل تولید شده است که برابر است با:

$$\sigma_x' = \sigma_x - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d \right) = -d \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -d \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_x}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right)$$

بنابراین مولفه‌های تنش برای حالت شکل ۷۷ از روابط (۷۷) با مشتق‌گیری بدست می‌آید. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{dP}{4\pi r^2} [-(3 + \nu) \cos^2 \theta + (1 - \nu) \sin^2 \theta + 8(1 + \nu) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \\ \sigma_y &= \frac{dP}{4\pi r^2} [(1 - \nu) \cos^2 \theta + (1 + 3\nu) \sin^2 \theta - 8(1 + \nu) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \\ \tau_{xy} &= \frac{dP}{4\pi r^2} [-(6 + 2\nu) + 8(1 + \nu) \sin^2 \theta] \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\quad (78)$$

قابل مشاهده است که مولفه‌ها سریعاً با افزایش r کاهش یافته و قابل صرف نظر کردن می‌باشند وقتی که r در مقایسه با d بزرگ باشد. اینگونه نتیجه قابل انتظار است که مطابق با اصل Saint-Venant می‌باشد اگر ما دو نیرو در تعادل اعمالی بسیار نزدیک بهم باشند.



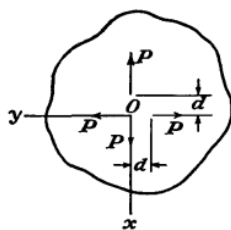
شکل ۷۷.

با استفاده از اصل اجتماع آثار دو توزیع تنش همانند رابطه (۷۸) داده شده را ما می‌توانیم راه حل مساله را در شکل ۷۸ نشان داده شده بدست آوریم. مولفه‌های تنش برای این حالت عبارتند از:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -2(1 - \nu) \frac{dP}{4\pi r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ \sigma_y &= 2(1 - \nu) \frac{dP}{4\pi r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ \tau_{xy} &= -2(1 - \nu) \frac{dP}{4\pi r^2} \sin 2\theta\end{aligned}$$

توزیع تنش مشابه در مختصات قطبی بیان شده است:

$$\sigma_r = -2(1 - \nu) \frac{dP}{4\pi r^2}, \quad \sigma_\theta = 2(1 - \nu) \frac{dP}{4\pi r^2}, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (79)$$



شکل ۷۸.

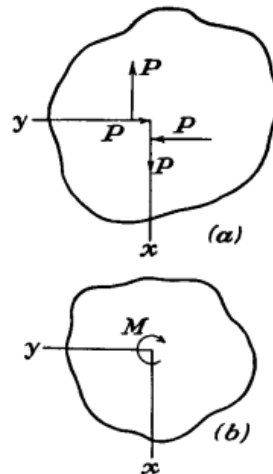
این راه حل را می‌توان بگونه‌ای ایجاد کرد که با راه حل (۴۶) برای استوانه با ضخامت وارد شده با فعالیت فشار داخلی اگر قطر خارجی استوانه بسیار نامحدود در نظر گرفته شده است.

به همین ترتیب ما می‌توانیم راه حلی برای حالت نشان داده شده در شکل 79a پیدا کنیم. مولفه‌های

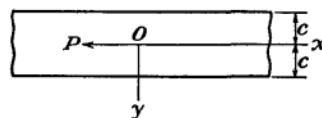
تنش عبارتند از:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{M}{2\pi r^2} \quad (80)$$

آن‌ها تنش‌های تولید شده با کوپل M اعمالی در مبدأ را نشان می‌دهد (شکل 79b).



شکل ۷۹.



شکل ۸۰.

اگر بجای یک صفحه نامحدود ما باید با یک نوار طویل نامحدود تحت نیروی طولی P سر و کار داریم (شکل ۸۰)، ممکن است ما با راه حل (۷۷) شروع کنیم بطوری که اگر صفحه در تمام جهات نامحدود بوده است. تنش‌ها در امتداد گوشه‌های نوار حاصل از این روش را می‌توان با اصل اجتماع آثار با سیستم برابر و مخالف خنثی کرد. تنش‌های تولید شده با این سیستم اصلاحی را می‌توان با استفاده از روش کلی بیان شده در بند ۲۳ تخمین زد. محاسبات انجام شده توسط R. C. J. Howland نشان داده است که تنش‌های موضعی تولید شده با نیروی متمرکز P سریعا با فاصله گرفتن از افزایش بار از بین می‌رود، و در فواصل بزرگتر از عرض نوار توزیع تنش‌ها در مقطع برشی عملا یکنواخت می‌باشد. در جدول زیر مقادیر زیادی از تنش‌ها σ_x و σ_y داده شده، بر حسب فرضیه ثابت بودن نوار در انتها $x=+\infty$ و نسبت پواسون برابر با $1/4$ محاسبه شده است.

	$\frac{x}{c} =$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{18}$	$-\frac{\pi}{30}$	0
$y = 0$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	-0 118	-0.992			∞
$y = c$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	+0.159	+0.511	0 532	0.521	0.500
$y = 0$	$\frac{\sigma_y 2c}{P} =$	0.110	0 364			.
	$\frac{x}{c} =$	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = 0$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$.		1 992	1 118	1 002
$y = c$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	0 479	0 468	0 489	0 841	0 973
$y = 0$	$\frac{\sigma_y 2c}{P} =$			-0 364	-0 110	-0 049

تنش‌های تولید شده در صفحه نیمه بینهایت با نیروی اعمالی در فاصله‌ای از گوشه توسط E. Melan بحث شده است.

۳۹. راه حل کلی مساله دو بعدی در مختصات قطبی. با بحث حالت‌های خاص انجام شده از مساله دو بعدی در مختصات قطبی ما در موقعیتی قرار داریم تا بتوان راه حل کلی مساله را بنویسیم. رابطه کلی تابع تنش ϕ ، با ارضا کردن تطابق رابطه (۳۹) برابر است با:

$$\begin{aligned} \phi = & a_0 \log r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \log r + d_0 r^2 \theta + a_0' \theta \\ & + \frac{a_1}{2} r \theta \sin \theta + (b_1 r^3 + a_1' r^{-1} + b_1' r \log r) \cos \theta \\ & - \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta + (d_1 r^3 + c_1' r^{-1} + d_1' r \log r) \sin \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2} + a_n' r^{-n} + b_n' r^{-n+2}) \cos n\theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{n+2} + c_n' r^{-n} + d_n' r^{-n+2}) \sin n\theta \quad (81) \end{aligned}$$

سه عبارت اول در خط اول این رابطه نشان دهنده راه حلی برای توزیع تنش متقارن با توجه به مبدا مختصات می‌باشد (به بند ۲۶ مراجعه شود). عبارت چهارم توزیع تنش برای حالت نشان داده شده در شکل ۵۷ را نشان می‌دهد. عبارت پنجم راه حلی برای برش خالص را می‌دهد (شکل 75b). عبارت اول در خط دوم توزیع شعاعی ساده برای یک بار در جهت $\theta=0$ می‌باشد. دیگر عبارتهای باقیمانده خط دوم ارائه دهنده راه حلی برای یک

بخشی از حلقه دایروی خمیده با نیروی شعاعی می‌باشد (شکل ۴۶). با ترکیبی از تمام عبارات‌ها خط دوم راه حل برای یک نیروی وارده بر صفحه نامحدود بدست می‌آید (بند ۳۸). راه حل‌های قابل قیاس نیز از خط سوم رابطه (۸۱) بدست می‌آید، تنها اختلاف آن است که جهت نیرو با $\pi/2$ تغییر می‌کند. عبارات‌های دیگر (۸۱) راه حل‌هایی برای نیروهای برشی و نرمال ارائه می‌دهد که متناسب با $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ وارده بر مرزهای دایروی حلقه دایروی می‌باشد. ما مثالی از این نوع را در بحث توزیع تنش اطراف سوراخ دایره کوچک داشتیم (بند ۳۲).

در حالت بخشی از حلقه دایروی مقادیر ثابت انتگرال در رابطه (۸۱) را می‌توان بدون هرگونه سختی از شرایط مرزی محاسبه کرد. اگر ما یک حلقه کامل داشته باشیم، بررسی‌های اضافی بیشتری از جابجایی‌ها بعضاً در تخمین این مقادیر ثابت لازم می‌باشد. ما باید حالت عمومی یک حلقه کامل را در نظر گرفته و فرض شود که شدت‌های نیروهای برشی و نرمال در مرزها برابر با $r=a$ و $r=b$ با سری مثلثاتی زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned}(\sigma_r)_{r=a} &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \\(\sigma_r)_{r=b} &= A_0' + \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n' \sin n\theta \\(\tau_{r\theta})_{r=a} &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin n\theta \\(\tau_{r\theta})_{r=b} &= C_0' + \sum_{n=1}^{\infty} C_n' \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n' \sin n\theta\end{aligned}\tag{a}$$

در این روابط مقادیر ثابت A_0, A_n, B_n و ... باید طبق معمول از توزیع داده شده از نیروها در مرزها محاسبه شوند (مراجعه شود به صفحه ۴۹). محاسبه کردن مولفه‌های تنش از رابطه (۸۱) با استفاده از روابط (۳۸)، و مقایسه مقادیر این مولفه‌ها برای $r=a$ و $r=b$ با آن مقادیر داده شده با رابطه (a)، ما می‌توانیم تعداد کافی از روابط را برای تخمین مقادیر ثابت انتگرال در تمام حالت‌ها با $n > 2$ بدست آوریم. برای $n=0$ ، به عبارت دیگر برای عبارات در خط اول از رابطه (۸۱) و برای $n=1$ به عبارت دیگر برای عبارات در خط دوم و سوم، بررسی‌های بیشتری لازم می‌باشد. با در نظر گرفتن خط اول رابطه (۸۱) بصورت تابع تنش، مقدار ثابت a_0 با بزرگای نیروهای برشی توزیع یکنواخت در امتداد مرزها تخمین زده می‌شود (مراجعه شود به صفحه ۱۱۱). توزیع تنش داده شده با عبارت با ضریب d_0 دارای مقادیر زیادی می‌باشد (مراجعه شود به صفحه ۹۳) و در حلقه کامل، ما باید فرض کنیم که $d_0=0$ می‌باشد. برای تخمین سه مقدار ثابت باقیمانده a_0, b_0 و c_0 ما تنها دو رابطه داریم:

$$(\sigma_r)_{r=a} = A_0 \quad \text{and} \quad (\sigma_r)_{r=b} = A_0'$$

رابطه اضافی برای تخمین این مقادیر ثابت از در نظر گرفتن جابجایی‌ها بدست آمده است. جابجایی‌ها در حلقه کامل باید با توابع تک مقداری از θ باشند. بررسی پیشین ما نشان می‌دهد (مراجعه شود به بند ۲۶) که این شرط

اگر ما $c_0=0$ در نظر بگیریم بوجود می‌آید. پس دو مقدار ثابت باقیمانده a_0 و b_0 از دو شرایط مرزی بیان شده در بالا تخمین زده می‌شود.

اجازه دهید تا فرض کنیم، با جزئیات بیشتر، برای عبارت $n=1$. برای تخمین هشت مقادیر ثابت a_1 , b_1 , d_1' , c_1 , d_1 وارد شده در خطوط دوم و سوم رابطه (۸۱)، ما مولفه‌های تنش σ_r و $\tau_{r\theta}$ را با استفاده از این بخش ϕ محاسبه می‌کنیم. پس با استفاده از شرایط (a) و با برابر قرار دادن ضرایب مربوط به $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ در مرزهای داخلی و خارجی، ما هشت رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1')a^{-1} + 2b_1a - 2a_1'a^{-3} &= A_1 \\ (a_1 + b_1')b^{-1} + 2b_1b - 2a_1'b^{-3} &= A_1' \\ (c_1 + d_1')a^{-1} + 2d_1a - 2c_1'a^{-3} &= B_1 \\ (c_1 + d_1')b^{-1} + 2d_1b - 2c_1'b^{-3} &= B_1' \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} 2d_1a - 2c_1'a^{-3} + d_1'a^{-1} &= -C_1 \\ 2d_1b - 2c_1'b^{-3} + d_1'b^{-1} &= -C_1' \\ 2b_1a - 2a_1'a^{-3} + b_1'a^{-1} &= D_1 \\ 2b_1b - 2a_1'b^{-3} + b_1'b^{-1} &= D_1' \end{aligned} \quad (c)$$

مقایسه روابط (b) با (c) قابل مشاهده است که آن‌ها تنها زمانی تطابق دارند اگر:

$$\begin{aligned} a_1a^{-1} &= A_1 - D_1 \\ a_1b^{-1} &= A_1' - D_1' \\ c_1a^{-1} &= B_1 + C_1 \\ c_1b^{-1} &= B_1' + C_1' \end{aligned} \quad (d)$$

که از آن:

$$a(A_1 - D_1) = b(A_1' - D_1'), \quad a(B_1 + C_1) = b(B_1' + C_1') \quad (e)$$

قابل مشاهده است که روابط (e) همیشه ایجاد می‌شوند اگر نیروهای وارده بر حلقه در تعادل باشند. برای مثال با در نظر گرفتن مجموع مولفه‌های تمام نیروها در جهت محور x برابر با صفر بوده و داریم:

$$\int_0^{2\pi} \{ [b(\sigma_r)_{r=b} - a(\sigma_r)_{r=a}] \cos \theta - [b(\tau_{r\theta})_{r=b} - a(\tau_{r\theta})_{r=a}] \sin \theta \} d\theta = 0$$

با جاگذاری برای σ_r و $\tau_{r\theta}$ از (a)، ما به روابط اول (e) دست پیدا می‌کنیم. به همین ترتیب، با تجزیه تمام نیروها در امتداد محور y ، ما روابط دوم (e) را بدست می‌آوریم.

وقتی که a_1 و c_1 از روابط (d) تخمین زده می‌شوند دو سیستم روابط (b) و (c) برابر می‌شوند و ما تنها چهار رابطه برای تخمین شش مقادیر ثابت باقیمانده داریم. دو روابط اضافی دیگر با در نظر گرفتن جابجایی بدست می‌آید. عبارت‌های موجود در خط دوم رابطه (۸۱) نماینده تابع تنش برای ترکیبی از توزیع شعاعی ساده و تنش‌های خمشی در میله خمیده می‌باشد (شکل ۴۶). با استفاده از اصل اجتماع آثار روابط کلی برای جابجایی در این دو حالت عبارتند از روابط (g) (صفحه ۹۰) و روابط (g) (صفحه ۷۷) و با جاگذاری $a_1/2$ برای $-P/\pi$ روابط (g)

و b_1' برای D در روابط (q)، ما عبارت‌های چند مقداری در روابط زیر را برای جابجایی‌های به ترتیب u و v پیدا می‌کنیم:

$$\frac{a_1}{2} \frac{1-\nu}{E} \theta \sin \theta + \frac{2b_1'}{E} \theta \sin \theta$$

$$\frac{a_1}{2} \frac{1-\nu}{E} \theta \cos \theta + \frac{2b_1'}{E} \theta \cos \theta$$

این عبارت‌ها باید در حالت یک حلقه کامل از بین روند، بنابراین:

$$\frac{a_1}{2} \frac{1-\nu}{E} + \frac{2b_1'}{E} = 0$$

یا

$$b_1' = -\frac{a_1(1-\nu)}{4} \quad (f)$$

با در نظر گرفتن خط سوم رابطه (۸۱) به همین ترتیب داریم:

$$d_1' = -\frac{c_1(1-\nu)}{4} \quad (g)$$

روابط (f) و (g) به همراه با روابط (b) و (c)، برای تخمین تمام مقادیر ثابت در تابع تنش با خطوط دوم و سوم رابطه (۸۱) نمایش داده شده و کافی می‌باشد.

ما نتیجه می‌گیریم که در این حالت یک حلقه کامل شرایط مرزی (a) برای تخمین توزیع تنش کافی نمی‌باشد، و در نظر گرفتن جابجایی لازم می‌باشد. جابجایی‌ها در حلقه کامل باید با مقدار واحد باشد و این شرط ما باید ایجاد گردد:

$$c_0 = 0, \quad b_1' = -\frac{a_1(1-\nu)}{4}, \quad d_1' = -\frac{c_1(1-\nu)}{4} \quad (82)$$

ما می‌بینیم که مقادیر ثابت b_1' و d_1' وابسته به نسبت پواسون می‌باشند. بدین طریق توزیع تنش در یک حلقه کامل معمولاً وابسته به مشخصات الاستیک مصالح می‌باشد. تنها زمانی مستقل از مقادیر الاستیک می‌شود که a_1 و c_1 از بین روند بطوری که از رابطه (۸۲)، $b_1' = d_1' = 0$ می‌باشد. این حالت ویژه رخ می‌دهد اگر (مراجعه شود به روابط (d)):

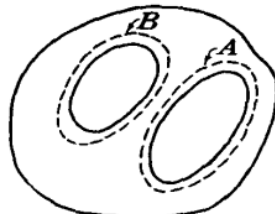
$$A_1 = D_1 \quad \text{and} \quad B_1 = -C_1$$

ما چنین شرطی را وقتی داریم که مجموع نیروها به هر مرز از حلقه اعمالی از بین رود. برای مثال مولفه مجموع در کاهش x نیروهای اعمالی در مرز $r=a$ در نظر گرفته شود. این مولفه، از (a) برابر است با:

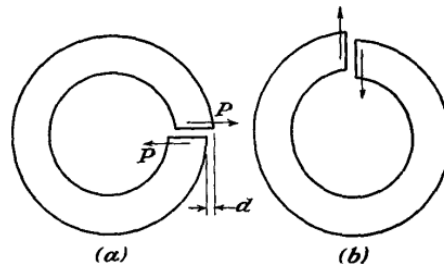
$$\int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) a \, d\theta = a\pi(A_1 - D_1)$$

اگر از بین رود می‌توانیم $A_1=D_1$ را پیدا کنیم. به همین ترتیب، با تجزیه نیروها در جهت y ، ما $B_1=-C_1$ را و تقی که مولفه y صفر باشد بدست آوریم. از این ما ممکن است نتیجه بگیریم که توزیع تنش در حلقه کامل مستقل از مقادیر ثابت الاستیک مصالح است اگر مجموع نیروهای اعمال شده در هر مرز صفر باشد. ممان این نیروها لزومی برای صفر شدن ندارد.

این نتیجه‌گیری‌ها برای حالت حلقه دایروی در اغلب حالت کلی مساله دو بعدی برای بنده چند وصله وجود دارد. از بررسی‌های کلی انجام شده توسط J. H. Michell برای بدنه‌های با چندین اتصال (شکل ۸۱)، روابط قابل قیاس با روابط (۸۲) و بیان شرط که جابجایی‌های تک مقداری باید برای مدار مستقلی همانند A و B در شکل استخراج کند. توزیع تنش در اینگونه بدنه‌ها معمولاً وابسته به مقادیر الاستیک مصالح می‌باشد. آن‌ها مستقل از این مقادیر هستند اگر مجموع نیرو بر هر مرز از بین رود. تاثیر کیفی مدول بر حداکثر تنش معمولاً بسیار کوچک می‌باشد، و در عمل از آن می‌توان صرف نظر کرد. این نتیجه‌گیری در عمل بسیار مهم می‌باشد. ما در ادامه باید حالت مصالح شفاف همانند شیشه را در نظر بگیریم، امکان تخمین تنش با روش بهینه وجود دارد و این نتیجه‌گیری به معنی آن است که نتایج آزمایشگاهی بدست آمده با مصالح شفاف را می‌توان سریعاً به هر مصالح دیگر همانند فولاد اعمال کرد اگر نیروهای خارجی مشابه باشند.



شکل ۸۱.



شکل ۸۲.

در مباحث قبلی بیان شده است (به صفحه ۶۸ مراجعه شود) که معنای فیزیکی راه حل‌های با چند مقدر را می‌توان با در نظر گرفتن تنش‌های اولیه در بدنه چند اتصالی نمایش داد. برای مثال فرض شود که رابطه (f) بالا ارضا نشده است. جابجایی مربوطه در شکل 82a نشان داده شده است. اینگونه جابجایی را می‌توان با برش حلقه و اعمال نیروهای P تولید کرد. اگر هم اکنون انتهای حلقه مجدداً با جوش دادن یا دیگر روش‌ها متصل شوند، یک حلقه با تنش‌های اولیه بدست می‌آید. بزرگاری این تنش‌ها وابسته به جابجایی اولیه دارد.