«هُوَ أَعْلَمُ»

دانشکده مهندسی هوافضا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

به نام آنکه جان را فکرت آموخت　　　چراغ دل به نور جان برافروخت

جزوه

آنالیز برداری

مهدی شاه رجبیان

بهمن ۹۷

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نسبیم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم ، از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند....

«آیا کسانی که می دانند و کسانی که نمی دانند یکسانند؟[1]»

پیشگفتار:

آلبرت انیشتین: "تجاربی که تاکنون داشته ایم به ما این اجازه را می دهند که طبیعت را مصداق ساده ترین اندیشه های ریاضی قابل تصور بدانیم. من قانع شده ام که می توان با استفاده از ابزارهای ریاضی محض ، مفاهیم و قوانین مرتبط کننده آنها را که کلید شناخت طبیعت هستند، بدست آورد.آزمایش ممکن است برای الهام بخشیدن به مفاهیم ریاضی مناسب باشد ، اما به طور قطع نمی توان این مفاهیم را از تجربه استنتاج کرد. البته آزمایش یگانه معیار مفید بودن ساختارهای ریاضی خواهد بود ، اما خلاقیت در جنبه ریاضی مطلب است. بنابراین به یک اعتبار من عقیده دارم همان طور که قُدما تصور می کردند ، فکر محض می تواند به درک واقعیت نائل شود."

آنالیز برداری نوعی تند نویسی ریاضی است و به ما کمک می کند ارتباط پدیده های فیزیکی و روابط ریاضی را بیشتر درک کنیم. با توجه به سخن امام کاظم (ع) زکات علم نشر آن است از این رو برآن شدم تا جزوه ای منسجم در این باب تألیف کنم و آن را به صورت رایگان در اختیار دانشجویان قرار دهم که ضمن بیان روشهای ریاضی در علوم فیزیکی و ارتباط آنها قسمتی از نیاز شما را در دروس ریاضی عمومی۲، فیزیک عمومی۲، جبرخطی ، الکترومغناطیس مهندسی، استاتیک ، مکانیک سیالات، دینامیک ریاضیات مهندسی، ریاضی فیزیک۱(رشته فیزیک) و ...را رفع کند و برای شما مفید واقع شود.

*باتوجه به اینکه در این جزوه سعی شده است آنالیز برداری ، دستگاه های مختصات و المان گیری به طور کامل بررسی گردد دانشجویان می توانند برحسب نیاز خود و ارتباط با درس مورد نظر قسمت مربوطه از جزوه را مطالعه نمایند و یا اینکه برحسب علاقه و به منظور یادگیری تمام مطالب جزوه را فراگیرند!!

همچنین به دلیل پیوستگی مطالب ، برای فهم بهتر ، مباحث را به ترتیب مطالعه کنید.

*به منظور عدم افزایش حجم جزوه و مناسب بودن آن برای مرور و جمع بندی از آوردن اثبات روابط و فرمول ها و مثال های زیاد خودداری شده است. چنانچه مطالب این جزوه را مفید یافتید ، از پیشنهاد آن به دیگران دریغ نکنید.

"در مجموع مطالب این جزوه یک ابزار ریاضی مهم برای شما در مسائل مهندسی خواهد بود..."

با آرزوی موفقیت برای شما در تمامی مراحل زندگی

مهدی شاه رجبیان

دانشجوی مهندسی هوافضای دانشگاه صنعتی امیرکبیر

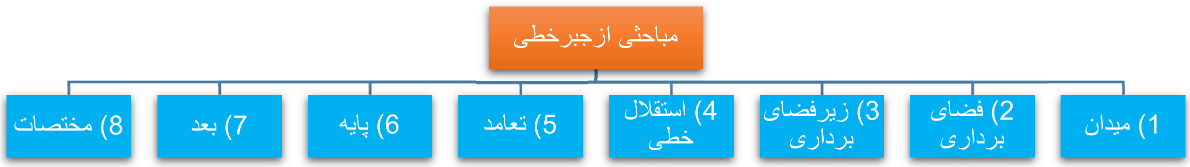
نظرات ، انتقادات و پیشنهاد های خود را می توانید از طرق زیر به اطلاع بنده برسانید:

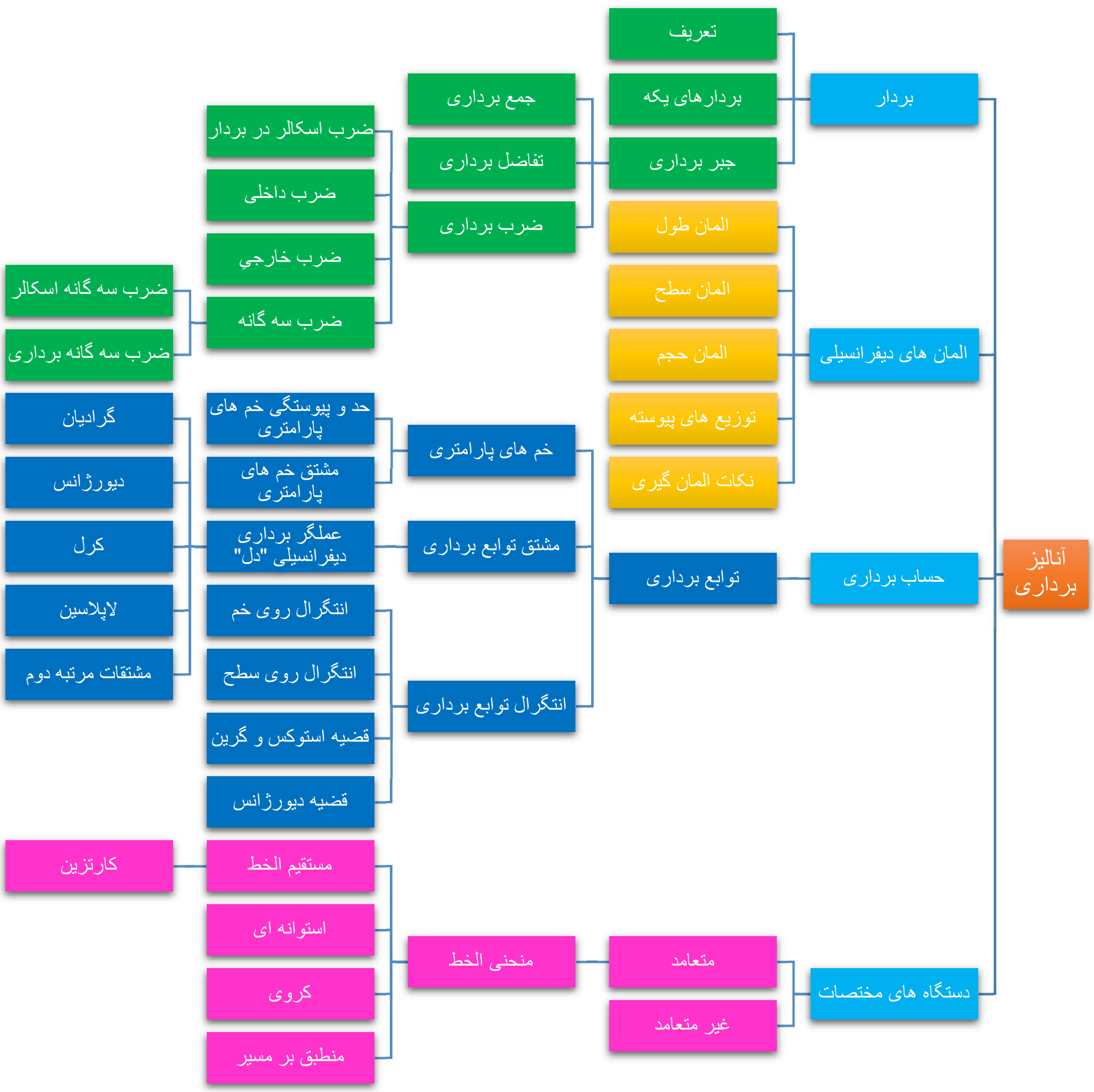
ID Telegram & Bale: @infiltrator1 ID Instagram: master_m.sh

Email : mahdi.sharajabian@gmail.com

۱.سوره مبارکه الزُمَر آیه ۹

چکیده مطالب به صورت نموداری





خلاصه روابط در انتهای جزوه

۱) میدان (Field)

از منظر ریاضی :میدان به هر مجموعه ای ازاشیاء گفته می شود که بین آنها دو عمل موسوم به عمل جمع و ضرب تعریف شده باشد که این دو عمل همان خواص آشنای اعداد را دارا باشند. به طور دقیق میدان به شکل زیر تعریف می شود:

یک دستگاه $\{F,+,\cdot\}$ شامل یک مجموعه F به همراه دو تابع (نگاشت) جمع $+:F\times F\to F$ ، (A+B)

و ضرب $\cdot:F\times F\to F$ ، $(A\cdot B)$ یک میدان نامیده می شود هرگاه خواص زیر برقرار باشد:

۱) اصل وجود عضو خنثی جمع $\exists\ 0\in F\ |\ \forall a\in F\to\ 0+a=a$

۲) اصل وجود عضو قرینه (وارون جمعی) $\forall a\in F\ \exists(-a)\in F\ |\ a+(-a)=0$

۳) اصل وجود عضو خنثی ضرب $\exists\ 1\in F\ |\ \forall a\in F\to\ 1\cdot a=a$

۴) اصل وجود وارون ضربی $\forall\ a\neq 0\in F\ \exists\ (a^{-1})\ |\ a\cdot(a^{-1})=1$

۵)اصل جابجایی $\forall a,b\in F\to a+b=b+a$

۶) اصل توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع $\forall a,b,c\in F\to a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

۷) اصل شرکت پذیری جمع $\forall a,b,c\in F\to a+(b+c)=(a+b)+c$

۸) اصل شرکت پذیری ضرب $\forall a,b,c\in F\to a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

⚠تذکر: در بسیاری از اوقات برای سادگی به جای نماد $a\cdot b$ از نماد ab استفاده می کنیم.

*نکته:مجموعه های اعداد گویا Q اعداد حقیقی R و اعداد مختلط C به همراه جمع و ضرب متعارفی که از آنها می شناسیم مثال های مهمی از میدان هستند.

*نکته: وجود وارون جمعی(a-) برای هر a و وارون ضربی $\left(b^{-1}=\frac{1}{b}\right)$ برای هر b غیر صفر مارا قادر می‌سازد تا مفاهیمی چون تفریق (a-b) و تقسیم $\left(\frac{a}{b}\right)$ را تعریف کنیم.

از منظر فیزیک : در فیزیک، میدان به مواردی گفته می‌شود که در آن‌ها کمیتی فیزیکی را به هر یک از نقاط مکان (یا به طور عمومی تر به هر نقطه از فضا و زمان) نسبت داده باشیم. میدان ، توزیع پیوسته‌ای ازیک کمیت اسکالر، برداری، اسپینور[2] یا در حالت عمومی‌تر تانسوری[3] است که با توابع پیوسته‌ای از مختصات فضا و زمان بیان شود.میدان دما در فضا مثالی از میدان اسکالر و میدان پتانسیل الکتریکی مثالی از میدان برداری می باشد.

2.Spinor
3.Tensor

۲) فضای برداری (Vector space)

مجموعه غیر تهی V را همراه با عمل جمع برداری $(+: V\times V\to V)$ در نظر بگیرید و فرض کنید یک عمل بین V و میدان F به نام ضرب اسکالر به صورت $a\cdot x$ تعریف شود که در آن $a\in F$ و $x\in V$ می باشد $(\cdot: F\times V\to V)$ در این صورت گوییم مجموعه V تحت عمل جمع و ضرب مذکور $(V,+,\cdot)$ یک فضای برداری روی میدان F می باشد هرگاه شرایط زیر همگی برقرار باشند:

1. اصل بسته بودن تحت جمع $\forall x,y\in V \Rightarrow (x+y)\in V$
2. اصل جابجایی $\forall x,y\in V \Rightarrow x+y=y+x$
3. اصل شرکت پذیری جمع $\forall x,y,z\in V \Rightarrow (x+y)+z=x+(y+z)$
4. اصل وجود عضو خنثی جمع $\exists\, 0\in V \mid \forall x\in V \Rightarrow x+0=x$
5. اصل وجود عضو قرینه $\exists\, y\in V \mid \forall x\in V \Rightarrow x+y=0 \to y=-x$
6. اصل بسته بودن تحت ضرب اسکالر $\forall x\in V, a\in F \Rightarrow a\cdot x\in V$
7. اصل توزیع پذیری (پخشی) ضرب نسبت به جمع $\forall x\in V,\ a,b\in F \Rightarrow (a+b)x=ax+bx$
8. اصل توزیع پذیری (پخشی) ضرب نسبت به جمع $\forall x,y\in V,\ a\in F \Rightarrow a(x+y)=ax+ay$
9. اصل شرکت پذیری ضرب اسکالر $\forall x\in V,\ a,b\in F \Rightarrow (a\cdot b)x=a\cdot(b\cdot x)$
10. اصل وجود عضو خنثی ضرب اسکالر $\exists\, 1\in F \mid \forall x\in V \Rightarrow 1\cdot x=x$

در صورت برقراری شرایط فوق اعضای V را **"بردار"** و اعضای F را **"اسکالر"** می نامند و اگر F میدان اعداد حقیقی باشد V را فضای حقیقی و اگر F میدان اعداد مختلط باشد V را فضای مختلط گویند.

مثالی از فضای برداری: فضای اقلیدسی سه بعدی $\leftarrow$ $V=\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

*نکته: این فضا را می توان به n بعد تعمیم داد یعنی $\mathbb{R}^n$ نیز یک فضای برداری است:

فضای اقلیدسی (Euclidean space):

مجموعه تمام n تایی های مرتب از اعداد حقیقی را فضای اعداد حقیقی n بعدی یا فضای اقلیدسی n بعدی می نامند و با $\mathbb{R}^n$ نشان می دهند. $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}$

پس می توان n تایی مرتبی از اعداد حقیقی مانند $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ را به عنوان نقطه ای در فضای n بعدی در نظر گرفت.

همچنین برای این فضای برداری میتوان با فرض $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ و $B=(b_1,b_2,...,b_n)$ و $A,B\in\mathbb{R}^n$ و $c\in\mathbb{R}$

عمل جمع $A+B=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$ ، ضرب اسکالر در بردار $cX=(cx_1,cx_2,...,cx_3)$

ضرب داخلی $A\cdot B=\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$

و نرم یا طول اقلیدسی $\|X\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}=(X\cdot X)^{\frac{1}{2}}$ را تعریف کرد.

*نکته : فضاهای با بعد بالاتر از۳ در زمینه هایی مانند نسبیت و مکانیک آماری و مکانیک کوانتومی مورد استفاده قراردارند.

۳) زیرفضای برداری (Vector subspace)

فضای برداری V روی میدان F مفروض است هرگاه W زیرمجموعه ای غیر تهی ازV باشد $(W\subseteq V)$ که به خودی خود یک فضای برداری روی میدان F باشد آنگاه W را یک زیرفضای برداری از V می نامند.

قضیه: اگر W زیر مجموعه غیر تهی از فضای برداری V روی میدان F باشد ، شرط لازم و کافی برای آنکه W زیرفضایی از V باشد آن است که W نسبت به عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد به عبارت دیگر :

$$\forall r\in\mathbb{R},\ w_1,w_2\in W\ \Rightarrow\ rw_1+w_2\in W$$

*نکته: صفحه های گذرنده از مبدا زیرفضا های $\mathbb{R}^n$ اند.

*نتیجه: مجموعه بردارهایی که ابتدای آنها مبدا مختصات و انتهای آنها در یک صفحه قرار دارد فقط به شرطی زیرفضا هستند که آن صفحه از مبدا مختصات بگذرد.

۴) استقلال خطی (Linear independence)

مستقل خطی: به مجموعه ای از بردارها که هیچ ترکیب خطی از آنها صفر نمی شود مگر اینکه همه ضرایب آن ترکیب خطی صفر باشند "مستقل خطی" گویند به عبارت دیگر:

اگرV یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$باشد مجموعه $\{v_1,v_2,...,v_n\}\subseteq V$رامستقل خطی گوییم هرگاه به ازای هر $c_1,c_2,...,c_n\in\mathbb{R}$ چنانچه داشته باشیم $c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n=0$ بتوان نتیجه گرفت $c_1=c_2=...=c_n=0$

و مفهوم آن این است که هیچ یک از بردارها در راستای دیگری تصویر ندارد.

تذکر: درتساوی اول $0\in V$ (صفر برداری) و در تساوی دوم $0\in\mathbb{R}$(صفر اسکالر) می باشد.

مثال: مجموعه $\{\hat{e}_1=(1,0,\dots,0),\hat{e}_2=(0,1,0,\dots,0),\dots,\hat{e}_n=(0,\dots,0,1)\}$ یک مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ است.

*نکته: هر n برداری که $\mathbb{R}^n$ را تولید کنند مستقل خطی اند.

وابسته خطی:اگر مجموعه $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n\}$ مستقل خطی نباشد می گوییم S وابسته خطی است.

*نکته: هر زیرمجموعه از فضای برداری V روی میدان F که شامل بردار صفر $\vec{O}=(0,\dots,0)$ باشد وابسته خطی است.

*نکته: مجموعه ای از سه بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ تنها وقتی وابسته خطی است که این سه بردار هم صفحه باشند و برای بررسی هم صفحه بودن سه بردار از نظر هندسی باید حجم متوازی السطوح تولید شده توسط این سه بردار صفر باشد پس کافیست دترمینان ماتریس متناظر با این سه بردار یا عبارت معادل آن یعنی ضرب مختلط این سه بردار صفر باشد یعنی:

با فرض $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3),\vec{B}=(b_1,b_2,b_3),\vec{C}=(c_1,c_2,c_3)$ داشته باشیم:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0$$

۵) تعامد (Orthogonality)

در فضای $\mathbb{R}^n$ بردارهای $\vec{A}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ و $\vec{B}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ را "**متعامد**[4]" گویند هرگاه حاصل ضرب داخلی آنها صفر شود یعنی: $\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\dots+a_n\cdot b_n=0$ واین تعامد را به صور $A\perp B$ نشان می دهند.

٦) پایه (Basis)

تعریف: مجموعه $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n\}$ را یک **پایه** برای فضای (یا زیرفضای) V گوییم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند (بپیماید) .

مثال: مجموعه $\{\hat{e}_1=(1,0,\dots,0),\hat{e}_2=(0,1,0,\dots,0),\dots,\hat{e}_n=(0,\dots,0,1)\}$ مجموعه ای است که در آن مؤلفه i ام $\hat{e}_i$ عدد یک و بقیه مؤلفه ها صفر است .این مجموعه یک مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ است و $\mathbb{R}^n$ را تولید می کند زیراعضو دلخواه $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ را می توان به صورت $a=a_1\hat{e}_1+a_2\hat{e}_2+\dots+a_n\hat{e}_n$ نمایش داد بنابراین این مجموعه یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است و به آن پایه **استاندارد** (متعارف) می گویند.

4.orthogonal

قضیه: اگر V فضای برداری تولید شده توسط بردارهای $\{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_k\}$ باشد و $\{w_1,w_2,...,w_\ell\}$ زیرمجموعه ای مستقل خطی از V باشد آنگاه داریم:

۱) $k \geq \ell$

۲) $\{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_k\}$ را می توان با حذف بعضی از اعضایش به یک پایه برای V تقلیل داد.

۳) $\{w_1,w_2,...,w_\ell\}$ را می توان با افزودن بردارهایی به یک پایه گسترش داد.

۴) V دارای پایه است و هر دو پایه برای V دارای تعداد اعضای برابراند.

طبق قضیه بالا زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ که با متناهی بردار تولید می شوند دارای پایه اند.

*نکته: هر مجموعه مستقل خطی n عضوی در $\mathbb{R}^n$ پایه ای برای $\mathbb{R}^n$ است.

*نکته: هر پایه برای فضای برداری V تناظری یک به یک بین مجموعه ی همه بردارهای V ومجموعه ی همه ی n تایی های F^n برقرار می سازد.

قضیه: هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ دارای پایه ای است که تعداد اعضایش از n بیشتر نیست.

***پایه متعامد یکه(Orthonormal basis):** پایه ای که ضرب داخلی هر دو عضو متفاوت آن صفر و ضرب داخلی هرعضو آن در خودش یک باشد به عبارت دیگر اگر پایه $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ را در نظر بگیریم داریم:

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i=j \\ 0 & ; i\neq j \end{cases}$$

که در آن δ_{ij} به "دلتای کرونکر[۵]" موسوم است .

۷) بعد (Dimension)

اگر فضای برداری V مفروض باشد تعداد اعضای هر یک از پایه های فضای V را بعد آن گوییم و با dim (V) نمایش می دهیم. به عبارت دیگر اگر فضای برداری V حاوی مجموعه مستقلی از m بردار باشد ولی شامل هیچ مجموعه مستقلی از m+1 بردار نباشد آنگاه V دارا ی بعد m است و dim (V)=m

*نکته: در فیزیک و ریاضیات ، ابعاد یک فضای ریاضی (یا شیء) به طور غیررسمی به عنوان حداقل تعداد مختصات (یا پارامتر های مستقل) مورد نیاز برای تعیین موقعیت هر نقطه روی شیء تعریف می شود. به عبارت دیگرابعاد یک جسم، تعداد درجه آزادی یک نقطه است که روی این جسم حرکت می کند.

*نکته:در فضای n بعدی تعداد n ودقیقاً n پارامتر برای تعیین مختصات لازم است.

5. kronecker delta

۸) مختصات (Coordinate)

تعریف از منظر ریاضی :

با داشتن یک پایه مرتب مانند $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\}$ برای فضای برداری V ، هر عضو آن کاملا با n تایی مرتب از اعداد $x_1,x_2,\ldots,x_n\in F$ به صورت زیر مشخص می شود: $v=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n$ و $v\in V$

در واقع هر عضو فضای برداری مانند $v\in V$ نمایشی منحصر به فرد به شکل بالا دارد چراکه S مستقل خطی است .به این اعداد $x_1,x_2,\ldots,x_n$ مختصات بردار v نسبت به پایه S گویند. به این ترتیب هر عضو $v\in V$ با یک عضو F^n متناظر می شود که به آن نمایش بردار v درپایه S می گویند وآن رابا $[v]_S$ نمایش میدهند:

$$v=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n \iff [v]_S=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in F^n$$

*نکته: برای هر $v,v'\in V$ و هر $r\in F$ داریم : $[rv+v']_S=r[v]_S+[v']_S$

دستگاه مختصات : دستگاهی برای **تناظر یک به یک**[۶] مجموعه ای از n کمیت اسکالر(عددی) با فضای n بعدی

*نکته مهم : در یک فضای برداری بردار های مستقل خطی در آن فضا (بردار های پایه) تشکیل یک دستگاه مختصات می دهند به طوری که تعداد محور های مختصات برابر بعد آن فضاست.

*نکته :هربردار را می توان برحسب **بردارهای یکه (پایه) هردستگاه مختصات** نوشت با این ویژگی که بردار **تغییری نکند.**

تعریف از منظر فیزیک:

برای مشخص نمودن موقعیت (مکان) یک **ذره**[۷] یا **جسم صلب**[۸] در محیط پیرامونی خود نیاز به **مرجع** داریم و باید با اعلام اعدادی که از روی این مراجع استخراج می شود موقعیت آن ذره را به صورت نقطه ای منحصر به فرد تعیین نمود. همچنین حرکت ذرات را می توان با استفاده از مختصاتی که نسبت به محورهای ثابت سنجیده می شوند، تشریح نمود. درسیستم های فیزیکی تعداد پارامتر های لازم برای تعیین مختصات یک شیء در **فضای فاز**[۹] برابر با درجات آزادی آن شیء در آن سیستم است.

---

۶. **تناظر یک به یک (یا تابع دوسویی):** تابعی میان اعضای دو مجموعه است به شرط این که هر عضو از هر مجموعه با دقیقاً یک عضو از مجموعه دیگر جفت شده باشد ودر هیچ کدام ازمجموعه‌ها هیچ عضو بدون جفتی وجود ندارد به گونه ای که به ازای هر عضو در یک مجوعه یک و تنها یک عضو در مجموعه دیگر وجود دارد.چنان‌چه یک تناظر یک به یک بین دو مجموعه‌ی متناهی برقرار باشد، تعداد اعضای آن دو مجموعه با هم برابرند.

۷.**ذره (particle)** : مقدار بسیار جزئی (تکه) یا بخش گسستهٔ نسبتاً کوچکی از ماده است. در فیزیک، یک ذره جسم کوچکی با جانمایی مشخص است که می‌توان ویژگی‌های فیزیکی و شیمیایی متعددی رامانند حجم یا جرم به آن منتسب کرد. درمکانیک، منظوراز ذره، جسمی است که برای مدل سازی آن بتوان از ابعاد آن صرف نظرکرد وتنها برای آن جرم در نظر گرفت.درنتیجه، دوران برای ذره، بی‌معنی است وهر ذره درفضا، تنها ۳درجهٔ آزادی(امکان جابجایی درسه راستا) دارد.

۸. **جسم صلب (rigid body)**: به سیستمی گفته می‌شود که شامل تعداد زیادی ذرات ثابت هست که فاصلهٔ ذرات حتی در صورتی که به جسم نیرو وارد شود یا حرکت کند از یکدیگر همواره ثابت است. در واقع جسمی که هیچ دو ذره اي از ذرات تشکیل دهنده آن نسبت بهم حرکتي نداشته باشند.

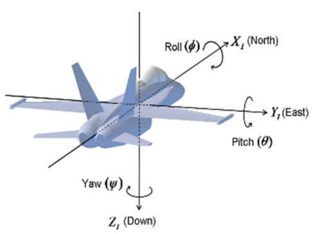
۹.**فضای فاز(Phase Space)** : فضایی است شامل تمام حالات ممکن برای یک سیستم .هر حالت سیستم در فضای فاز با یک نقطه نمایش داده می‌شود. در مکانیک عموماً فضای فاز شامل تمامی مقادیر ممکن مکان و تکانه (مومنتوم) است.در فضای فاز، هر درجه آزادی سیستم با یک محور نمایش داده می‌شود. به عنوان مثال فضای فاز یک تک ذره آزاد در فضای ۳ بعدی، شامل ۳ محور برای مولفه‌های مکان و ۳ محور برای مولفه‌های تکانه است.

درجه آزادی (DOF)(Degrees of freedom) :حداقل تعداد مختصه (پارامتر) های **مستقل** برای بیان موقعیت و وضعیت (انتقالی ، دورانی یا هر دو) یا به عبارتی پیکربندی یک سیستم

*نکته : وجود هر قید روی سیستم درجه آزادی سیستم را یک درجه کاهش می دهد.

مثلا یک ذره در فضا دارای **سه** درجه آزادی (حرکت انتقالی در راستای سه محور مختصات) و در صفحه دارای **دو** درجه آزادی است در حالی یک جسم صلب در فضا دارای **شش** درجه آزادی است. سه درجه برای حرکت در سه راستای فضای سه بعدی (**موقعیت**[10]) و سه درجه برای چرخش (دوران) حول هر یک از محورها (**وضعیت**[11]) که در دستگاه مختصات اینرسی زوایای اویلر نامیده می شوند. زوایای یک شی در یک لحظه مشخص، به عنوان چرخشی که نسبت به یک مرجع فرضی در فضا صورت گرفته، مطرح می‌شود.

بر اساس قضیه چرخش اویلر، چرخش یک جسم صلب (یا یک سیستم مختصات سه بعدی با مرجع ثابت) را می‌توان توسط یک چرخش حول یک محور توصیف کرد. این محور، یک بردار واحد است که در طی چرخش صورت گرفته بی تغییر باقی می ماند. مقدار زاویه نیز به جز علامت آن منحصر به فرد خواهد بود که توسط جهت محور چرخش تعیین می‌شود.چنین چرخشی را می‌توان توسط حداقل سه پارامتر حقیقی به صورت یگانه تعریف کرد که سه درجه آزادی را نمایش می‌دهند.مثلا برای یک هواپیما داریم : با داشتن شتاب هواپیما که از سنسورها بدست می آید و حل معادلات حرکت، مکان و موقعیت هواپیما بدست می آید اما برای دانستن وضعیت دورانی هواپیما نسبت به زمین به سراغ اویلر و زوایای اویلر می رویم :

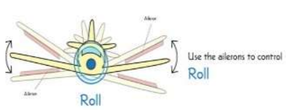


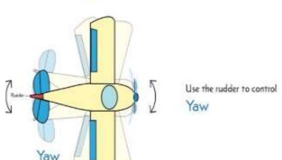
زوایای φ وθ و ψ زوایای اویلراند که به ترتیب بیانگر غلت (roll) ، فراز (pitch) و سمت (yaw) هستند که نسبت به دستگاه مختصات اینرسی[12] سنجیده می شوند.

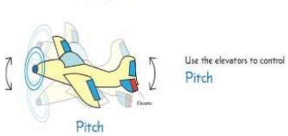
* roll که به آن غلت می گویند چرخش هواپیما حول محورطولی (x) است که توسط شهپر[13]انجام می شود.

*pitch که به آن تاب،گام یا فراز میگویند چرخش حول محور عرضی(y)است که توسط سکان افقی[14]انجام میشود.

*yaw که به آن گردش می گویند حول محورعمودی هواپیما(z)است که توسط سکان عمودی[15] انجام می شود.







*برای بحث زوایای اویلر و جهت گیری جسم صلب در فضا به همین اندازه در این جزوه اکتفا می کنیم برای یادگیری مطالب بیشتر می توانید به کتاب دینامیک و همچنین مکانیک پرواز2 مراجعه کنید .

10.position
11.attitude or orientation
۱۲. (inertial coordinate system) دستگاه مختصاتی که شتاب خطی و چرخش زاویه ای نداشته باشد وطبق قانون اول نیوتون مجموع نیروهای وارد برآن صفر باشد پس یا ساکن است یا باسرعت ثابت ، بدون چرخش به حرکت یکنواخت خود ادامه می دهد .
13.aileron
14. elevator
15. rudder

بردار (Vector)

تعریف بردار: یک پاره خط جهت دارکه ابتدا و انتهای آن مشخص باشد. یک بردار را به صورت $\vec{A}$ یا $\underline{A}$ نشان می دهند.

کلمه بردار به معنای حامل میباشد و از یک کلمه لاتین به همین معنا گرفته شده است. یک بردار به عنوان یک عنصر از فضای برداری تعریف میشود و در فضای n بعدی دارای n مولفه است.

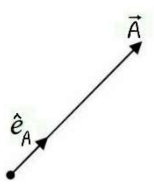
*هر بردار دارای دو مشخصه **اندازه**[16] **(** نُرم[17]، مقدار یا بزرگی **)** و **جهت**[18] (که منظور از جهت مشخص بودن ۱. **راستا** و ۲. **سمت و سوی** بردار روی این راستا) است.

*اندازه هر بردار را به صورت $\|\vec{A}\|$ (بعضا به صورت $|\vec{A}|$ نمایش می دهند اما نمایش قبلی صحیح تر است و تفاوت با قدر مطلق را نشان می دهد) نشان می دهند و اگر بردار $\vec{A}$ در فضای $\mathbb{R}^n$ به صورت $\vec{A}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ باشد آنگاه اندازه بردار $\vec{A}$ به صورت $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$ بدست می آید.

⚠تذکر: یک برداردرهردستگاهی تصویرشود نهایتاً همان بردارخواهد بود به عبارت دیگر برداریک کمیت تغییرناپذیر[19] است.

بردار یکه (Unit vector)

برداری است با اندازه **واحد** که برای مشخص کردن جهت بردار در فضا به کار می رود به همین دلیل به آن **بردارجهت** نیز می گویند. بردار یکه بردار $\vec{A}$ را با $\hat{A}$ (علامت هت[20] " ^ " به معنی یکه بودن بردار است) یا با $\hat{e}_A$ ، $\hat{a}_A$ ویا با $\hat{u}_A$ نشان می دهند و $\hat{e}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ بدست می آید پس می توان نتیجه گرفت بردار $\vec{A}$ را می توان به صورت $\vec{A}=\|\vec{A}\|\hat{e}_A$ نوشت.



بردارهای پایه(Basis vectors) :

بردارهای یکه در جهت محورهای مختصات هستند که مستقل خطی اند و هر بردار را می توان بر حسب این بردار های یکه در دستگاه مختصات مورد نظر نوشت.مثلا در دستگاه کارتزین سه بعدی داریم:

$$\hat{x}=\hat{i}=(1,0,0) \quad و \quad \hat{y}=\hat{j}=(0,1,0) \quad و \quad \hat{z}=\hat{k}=(0,0,1) \quad و \quad \|\hat{i}\|=\|\hat{j}\|=\|\hat{k}\|=1$$

وبردار $\vec{A}$ را می توان به صورت $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ در این دستگاه نوشت.

16.magnitude
17.norm
18.direction
19.invariant
20.hat

در بررسی مسائل فیزیکی با دو نوع کمیت سر و کار داریم :

کمیت اسکالر (Scalar quantity): به کمیت هایی که فقط دارای اندازه هستند کمیت نرده ای (اسکالر) می گویند.

مانند جرم و انرژی

کمیت برداری (Vector quantity):

کمیتی که دارای اندازه و جهت نیز باشد و از قاعده **جمع برداری** پیروی کند. مهم‌ترین کمیت‌های برداری که می‌توان نام برد، عبارت‌اند از:

۱- مکان ۲- سرعت ۳- شتاب ۴- نیرو ۵- میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و...

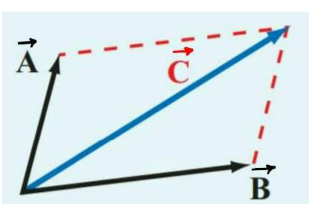
جبر برداری(Vector algebra)

1.برآیند (جمع) برداری(Vector addition) :

بردار برآیند چند بردار ، برداری است که به تنهایی خواص بردارهای اولیه را داشته باشد. دو روش برای جمع بردارها با نمایش هندسی :

1.روش متوازی الاضلاع:

این روش مناسب برای جمع دو بردار است که ابتدا دو بردار $\vec{A},\vec{B}$ را از یک نقطه رسم می کنیم سپس از انتهای هر کدام خطی موازی بردار دیگر رسم می کنیم تا یک متوازی الاضلاع ساخته شود برداری که ابتدای دو بردار را به راس مقابل متصل می کند (قطر بزرگ متوازی الاضلاع) بردار برآیند است و آن را با $\vec{C}$ نشان می دهیم که $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ و اگر اندازه هر بردار را به صورت $\|\vec{A}\|=a,\|\vec{B}\|=b,\|\vec{C}\|=c$ نشان دهیم آنگاه اندازه بردار $\vec{C}$ از رابطه $c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha)}$ بدست می آید که در آن α زاویه بین دو بردار $\vec{A},\vec{B}$ است.



*حالات خاص :

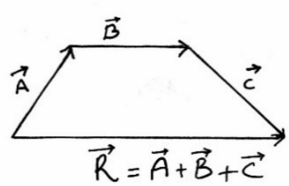
اندازه دو بردار مساوی باشد: $a=b \Rightarrow c=2a\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

دو بردار هم جهت باشند: $\alpha=0 \Rightarrow c=a+b$

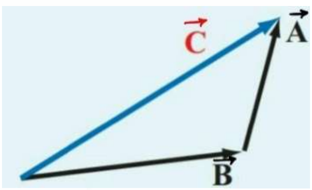
دو بردار خلاف جهت هم باشند: $\alpha=\pi \Rightarrow c=|a-b|$

دو بردار بر هم عمود باشند: $\alpha=\frac{\pi}{2} \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}$

2.روش ابتدا به انتها (چند ضلعی):

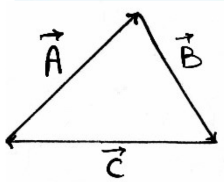


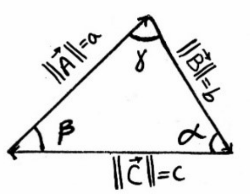
ابتدا یک بردار را رسم کرده از انتهای بردار اول بردار دوم را رسم کرده و هر بردار را به دنبال بردار دیگر در انتهای آن رسم می کنیم.حال برداری که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل کند بردار برآیند است.



حالت خاص این روش روش مثلث است که برای ۲ بردار مناسب است.

*در جمع بردارها خاصیت جابجایی و شرکت پذیری برقرار است.





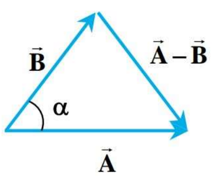
*برآیند سه بردار زمانی صفر است که تشکیل مثلث بدهند $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{O}$. با این شرایط دو قانون معروف سینوس ها و کسینوس ها را با فرض $\|\vec{A}\|=a,\|\vec{B}\|=b,\|\vec{C}\|=c$ برای این مثلث می توان نوشت :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$$

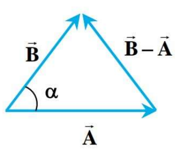
و

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha) \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\beta) \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma) \end{cases}$$

2.تفاضل برداری (Vector subtraction):



برای تفریق دو بردار ، منفی بردار را به صورت برداری با همان اندازه ولی در جهت مخالف تعریف می کنیم آنگاه $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$. برای روش هندسی دو بردار را از یک نقطه رسم می کنیم سپس انتهای بردار دوم(منفی) رابه انتهای بردار اول (مثبت) وصل می کنیم تا بردار تفاضل بدست آید.



$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$ و اگر اندازه هر بردار را به صورت $\|\vec{A}\|=a,\|\vec{B}\|=b,\|\vec{D}\|=d$ نشان دهیم آنگاه اندازه بردار $\vec{D}$ از رابطه $d=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\alpha)}$ بدست می آید که در آن α زاویه بین دو بردار $\vec{A},\vec{B}$ است.

*در حالت خاصی که اندازه دو بردار برابر باشد $a=b$ اندازه بردار تفاضی از رابطه $d=2a\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ بدست می آید.

در حالت کلی از نظر تحلیلی با داشتن مؤلفه های یک بردار (تصویر بردار در جهت هر یک از بردار های پایه دستگاه مختصات) جمع و تفاضل برداری را میتوان به صورت زیر انجام داد:

اگر دو بردار $\vec{A}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ و $\vec{B}=\left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right)$ را در نظر بگیریم که $A,B\in\mathbb{R}^n$ آنگاه با توجه به پایه استاندارد فضای $\mathbb{R}^n$ که مجموعه $\left\{\hat{e}_1=(1,0,\ldots,0),\hat{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,\hat{e}_n=(0,\ldots,0,1)\right\}$ می باشد داریم:

$$\vec{A}\pm\vec{B}=\left(a_1\pm b_1\right)\hat{e}_1+\left(a_2\pm b_2\right)\hat{e}_2+\ldots+\left(a_n\pm b_n\right)\hat{e}_n$$

3.ضرب برداری (vector multiplication)

ضرب عدد(اسکالر) در بردار(Scalar multiplication)

اگر بردار $\vec{A}=(a_1,a_2,...,a_n)$ را در عدد اسکالر $\lambda\in\mathbb{R}$ ضرب کنیم، اندازه بردار λ برابر می شود و جهت بردار $\lambda\vec{A}$ به علامت λ بستگی دارد: اگر علامت عدد λ منفی باشد جهت بردار قرینه می شود و اگر مثبت باشد تغییری نمی کند.

$$\lambda\vec{A}=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n) \quad \text{و} \quad \|\lambda\vec{A}\|=|\lambda|\|\vec{A}\|$$

ضرب داخلی (Inner product):

ضرب داخلی که **ضرب عددی (اسکالر)**[21] و یا **ضرب نقطه ای**[22] نیز نامیده می شود یک عمل دوتایی بین دو بردار در فضای برداری n بعدی اقلیدسی است که نتیجه آن یک **عدد** است.

تعریف: اگر دو بردار $\vec{A}=(a_1,a_2,...,a_n)$ و $\vec{B}=(b_1,b_2,...,b_n)$ را در نظر بگیریم که $A,B\in\mathbb{R}^n$ آنگاه ضرب داخلی دو برداررا به صورت رو به رو تعریف می کنیم:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+...a_nb_n$$

در فضای $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ اگر زاویه بین دو بردار را داشتیم تعریف دومی نیز برای ضرب داخلی به صورت زیر است که درآن θ (کوچکترین) زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است و $\|\vec{A}\|,\|\vec{B}\|$ نرم دو بردار هستند:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\theta) \quad \text{و} \quad 0\le\theta\le\pi$$

در فضای سه بعدی بدست می آید :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\theta)$$

خواص ضرب داخلی : با فرض $A,B,C\in\mathbb{R}^n \; , \; t\in\mathbb{R}$

۱) $\vec{A}\cdot\vec{A}=\|\vec{A}\|^2\ge 0$

۲) خاصیت جابجایی : $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

۳) خاصیت توزیع پذیری : $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

۴) خاصیت شرکت پذیری : $(t\vec{A})\cdot\vec{B}=t(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot(t\vec{B})$

21.scalar product
22.dot product

کاربردهای ضرب داخلی:

زاویه بین دو بردار: با استفاده ازرابطه $\vec{A}\cdot\vec{B}=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\theta)$ می توان فرمولی برای بدست آوردن زاویه بین دو بردار بدست آورد:

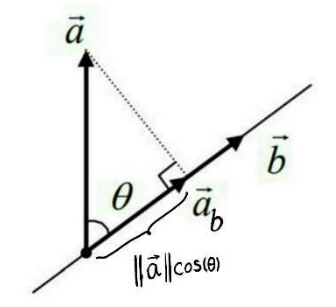
$$\cos(\theta)=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}\quad\Rightarrow\quad\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}\right)\quad \text{و} \quad 0\le\theta\le\pi$$

نامساوی کوشی شوارتز: می دانیم $|\cos(\theta)|\le 1$ آنگاه با توجه به $\cos(\theta)=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$ نتیجه می گیریم که

$$\left|\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}\right|\le 1\quad\Rightarrow\quad\boxed{|\vec{A}\cdot\vec{B}|\le\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$$

تصویر بردار (Vector projection)

برای بدست آوردن تصویر(مؤلفه) بردار $\vec{a}$ در جهت بردار $\vec{b}$ کافیست بردار $\vec{a}$ را در بردار جهت $\vec{b}$ ضرب کنیم. به بیان ریاضی:



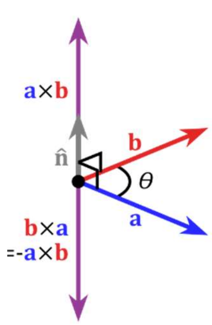
با فرض اینکه زاویه θ زاویه بین دو بردار باشد: $a_b=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}=\vec{a}\cdot\hat{e}_b=\|\vec{a}\|\cos(\theta)$

و بردار آن به صورت زیر بدست می آید: $\text{proj}_{\vec{b}}^{\vec{a}}=\vec{a}_b=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$

از این کاربرد در بدست آوردن مؤلفه های یک بردار در راستای محور های مختصات می توان استفاده کرد : مثلا $A_x=\vec{A}\cdot\hat{i}$ و $A_y=\vec{A}\cdot\hat{j}$ و $A_z=\vec{A}\cdot\hat{k}$

ضرب خارجی (Exterior product)

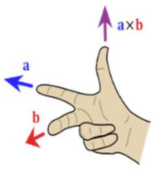
ضرب خارجی که **ضرب برداری**[23] و یا **ضرب ضربدری**[24] نیز نامیده می شود یک عمل دوتایی بین دو بردار در فضای **۳ بعدی اقلیدسی** است که نتیجه آن **برداری** عمود بر دو بردار اولیه است.



با در نظر گرفتن دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ در فضای سه بعدی اقلیدسی بردار حاصل از ضرب خارجی این دو بردار را به صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می دهند که اندازه آن به صورت $\|a\times b\|=\|a\|\|b\|\sin(\theta)$ بدست می آید که در آن θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و جهت آن با استفاده از قانون دست راست تعیین می شود.

23.vector product
24.cross product

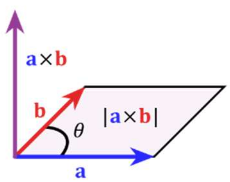
ابتدا انگشت شست و چهار انگشت دست **راست** را در وضعیتی قرار می دهیم که بین انگشت شست و چهار انگشست چسبیده به هم ، زاویه قائمه ایجاد شود حال اگر چهار انگشت (انگشت اشاره) را به گونه ای در جهت بردار اول ($\vec{a}$) قرار دهیم که جهت بسته شدن چهارانگشت(انگشت میانی)در جهت بردار دوم ($\vec{b}$) باشد و بسته شدن انگشتان زاویه θ را جاروب کند، آنگاه انگشت شست جهت بردار ضرب خارجی دوبردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را نشان خواهد داد.



*در صورت نداشتن زاویه بین دو بردار ضرب خارجی دو بردار با داشتن مولفه های دو بردار از رابطه زیر بدست می آید:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\hat{k}=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

*نکته: اندازه ضرب خارجی دو بردار برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که این دو بردار دو ضلع مجاور آن را تشکیل می دهند. $s=\|\vec{a}\times\vec{b}\|$



خواص ضرب خارجی :

۱) $\vec{a}\times\vec{a}=0$ ۲) خاصیت جابجایی ندارد $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

۳) خاصیت توزیع پذیری $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ ۴) $(r\vec{a})\times(s\vec{b})=(rs)(\vec{a}\times\vec{b})$ و $\tan(\theta)=\dfrac{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$

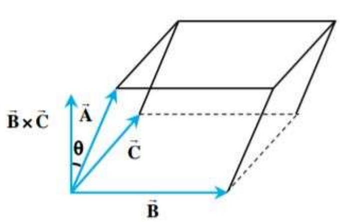
۵) خاصیت شرکت پذیری ندارد $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

*اتحاد لاگرانژ برای دو بردار $\vec{a},\vec{b}$: $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\left(\|\vec{a}\|\right)^2\cdot\left(\|\vec{b}\|\right)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b}\\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{b}\end{vmatrix}$

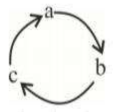
ضرب سه گانه

ضرب سه گانه اسکالر(ضرب مختلط)(Scalar triple product)

با فرض $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ ضرب سه گانه اسکالر به صورت $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ تعریف می شود و بیانگر حجم متوازی السطوح[25] ساخته شده با سه بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ است : $v_p=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$



25.parallelepiped



*تبدیل دوری (جایگشت دورانی) در ضرب مختلط سه بردار $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

*با در نظر گرفتن سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ نکات مهم زیر بدست خواهد آمد :

شرط عمود بودن دو بردار $\vec{a},\vec{b}$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

شرط موازی بودن دو بردار $\vec{a},\vec{b}$: $\vec{a}\times\vec{b}=0$

شرط هم صفحه بودن سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0$

ضرب سه گانه برداری (ضرب مضاعف) (Vector triple product)

با فرض $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ضرب سه گانه برداری به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

* $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}\times\vec{c}$ و موازی صفحه شامل دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ می باشد.

*نکته : $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}$

*ضرب سه گانه برداری خاصیت عدم شرکت پذیری دارد : $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$

*اتحاد ژاکوبی : $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{O}=(0,0,0)$

*اتحاد لاگرانژ در حالت کلی برای چهار بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$$

*تعیین بردار مجهول $\vec{X}$ با معلوم بودن بردار های $\vec{B}$ و $\vec{A}$ و مقدار C به طوری که $\vec{B}=\vec{A}\times\vec{X}\,,\,C=\vec{A}\cdot\vec{X}$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times\left(\vec{A}\times\vec{X}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{X}\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)\vec{X}=C\vec{A}-\left\|\vec{A}\right\|^2\vec{X}\quad\Rightarrow\quad\vec{X}=\frac{C\vec{A}+\vec{B}\times\vec{A}}{\left\|\vec{A}\right\|^2}$$

المان (Element)

در واقع المان ، سیستم یا عنصری دیفرانسیلی از جسم است که به عنوان نماینده ای از کل جسم برای بررسی تغییرات یک کمیت (متغیر) روی جسم انتخاب می شود و جهت تغییرات متغیرها در آن حائز اهمیت است.کاربرد المان این است که پس از بررسی انجام شده می توان با انتگرال گیری نتیجه را به کل جسم تعمیم داد.

المان های دیفرانسیلی:

۱) المان طول (المان خط)(length element)(line element)

یک کمیت برداری است که با $\overrightarrow{d\ell}$ یا $d\vec{r}$ نمایش داده شده و اندازه آن با فاصله بین محل قدیم نقطه مورد نظر تا محل جدید آن پس از نمو یافتن برابر است. بردار یکه نشان دهنده جهت بردار المان طول نیز در راستای خط واصل محل قدیم نقطه مورد نظر تا محل جدید آن پس از نمو یافتن می باشد.برای مثال در مختصات کارتزین داریم:

$$\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{d\ell}_x + \overrightarrow{d\ell}_y + \overrightarrow{d\ell}_z = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

۲) المان سطح(Area element)(Surface element)

یک کمیت برداری است که با $\overrightarrow{dA}$ یا $\overrightarrow{ds}$ نمایش داده شده و از حاصل ضرب خارجی دو مؤلفه المان طول درهر یک از جهات محورهای یک دستگاه مختصات بدست می آید. برای مثال در دستگاه کارتزین داریم :

$$\overrightarrow{ds_z} = \overrightarrow{d\ell_x} \times \overrightarrow{d\ell_y} = \left(dx\hat{i}\right) \times \left(dy\hat{j}\right) = dxdy\hat{k}$$

در واقع بردار المان سطح در مختصات کارتزین عبارت است از مستطیل حاصل از نمو دو پارامتر که اندازه این بردار برابر مساحت مستطیل المان و بردار یکه آن بردار یکه عمود بر سطح خواهد بود که جهت آن رو به خارج سطح است.

*اگر $\hat{n}$ بردار یکه عمود بر سطح باشد رابطه $\overrightarrow{ds} = ds\hat{n}$ همواره برقرار است.

⚠ تذکر : به جز در مبحث خم های پارامتری که ds بیانگر طول قوس است در بقیه مباحث ds نشان دهنده المان سطح است.

۳) المان حجم (Volume element)

یک کمیت اسکالر است که با dv نمایش داده می شود که در هر دستگاه مختصات از رابطه $dv = \overrightarrow{d\ell_1} \cdot (\overrightarrow{d\ell_2} \times \overrightarrow{d\ell_3})$ بدست می آید.در واقع المان حجم عنصر دیفرانسیلی سه بعدی کوچکی است که از کنار هم چیدن آنها می توان حجمی را در فضا به وجود آورد. برای مثال در دستگاه کارتزین داریم: $\overrightarrow{d\ell_1} = dx\hat{i}$ و $\overrightarrow{d\ell_2} = dy\hat{j}$ و $\overrightarrow{d\ell_3} = dz\hat{k}$

در نتیجه :
$$dv = \overrightarrow{d\ell_1} \cdot (\overrightarrow{d\ell_2} \times \overrightarrow{d\ell_3}) = \left(dx\hat{i}\right) \cdot \left(\left(dy\hat{j}\right) \times \left(dz\hat{k}\right)\right) = \left(dx\hat{i}\right) \cdot \left(dydz\hat{i}\right) = dxdydz$$

⚠ تذکر :این المان ها برحسب نوع مسئله هم به صورت بردار هم به صورت اسکالر به کار می روند.

این المان ها را به طور کامل تر در مبحث دستگاه های مختصات منحنی الخط متعامد بررسی خواهیم کرد.

توزیع های پیوسته

اگر در جسمی توزیع جرم به صورت پیوسته باشد (جسم یکنواخت)

مختصات مرکز جرم:

$$x_{c.o.m}=\bar{x}=\frac{\int xdm}{\int dm}=\frac{\int xdm}{M}\quad,\quad y_{c.o.m}=\bar{y}=\frac{\int ydm}{\int dm}=\frac{\int ydm}{M}\quad,\quad z_{c.o.m}=\bar{z}=\frac{\int zdm}{\int dm}=\frac{\int zdm}{M}$$

برای عنصر دیفرانسیلی جرم که با dm نمایش داده می شود داریم :

۱)توزیع پیوسته جرم در امتداد یک منحنی با چگالی خطی λ

چون توزیع به صورت یکنواخت و پیوسته است و چگالی خطی برابر است با جرم در واحد طول ، بدست می آید :

$$\lambda=\frac{M}{L}\quad\Rightarrow\quad\lambda=\frac{dm}{d\ell}\quad\Rightarrow\quad dm=\lambda d\ell$$

جرم یک قطعه منحنی شکل به صورت $M=\int dm=\int\lambda d\ell$ بدست می آید که بعداً بدست می آوریم برای منحنی $y=f(x)$ المان طول به صورت $d\ell=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$ و برای منحنی پارامتری با معادلات $x=x(t)$ و $y=y(t)$ به صورت $d\ell=\sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2+\left(\dot{y}(t)\right)^2}dt$ خواهد بود .

و با توجه به تعریف مرکز جرم می توان مختصات مرکز جرم این منحنی را به صورت زیر بدست آورد :

$$\bar{x}=\frac{\int xdm}{M}=\frac{\int x\lambda d\ell}{M}\quad \text{و}\quad \bar{y}=\frac{\int ydm}{M}=\frac{\int y\lambda d\ell}{M}$$

حال اگر توزیع در امتداد یک خط مستقیم مانند محور x باشد ، $dm=\lambda dx$ می باشد و می توان جرم یک سیم (میله) نازک با چگالی خطی $\lambda=\lambda(x)$ را در بازه $x\in[a,b]$ به صورت $M=\int_a^b dm=\int_a^b\lambda(x)dx$ بدست آورد.

و با توجه به تعریف مرکز جرم ، می توان مرکز جرم این میله را به صورت $\bar{x}=\frac{\int_a^b xdm}{M}=\frac{\int_a^b x\lambda(x)dx}{M}$ بدست آورد.

۲)توزیع پیوسته جرم در صفحه (ناحیه دو بعدی) با چگالی سطحی $\sigma=\sigma(x,y)$

چون توزیع به صورت یکنواخت و پیوسته است و چگالی سطحی برابر است با جرم در واحد سطح ، بدست می آید :

$$\sigma=\frac{M}{A} \quad \Rightarrow \quad \sigma=\frac{dm}{dA} \quad \Rightarrow \quad dm=\sigma dA$$

می توان جرم ناحیه D با چگالی سطحی $\sigma=\sigma(x,y)$ را به صورت $M=\iint_D \sigma dA$ بدست آورد که در مختصات کارتزین $dA=dxdy$ می باشد و با توجه به تعریف مرکز جرم ، می توان مختصات مرکز جرم این ناحیه را به صورت زیر بدست آورد :

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\sigma dA}{M} \quad و \quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\sigma dA}{M}$$

۳)توزیع پیوسته جرم در ناحیه سه بعدی با چگالی حجمی $\rho=\rho(x,y,z)$

چون توزیع به صورت یکنواخت و پیوسته است و چگالی حجمی برابر است با جرم در واحد حجم ، بدست می آید:

$$\rho=\frac{M}{V} \quad \Rightarrow \quad \rho=\frac{dm}{dv} \quad \Rightarrow \quad dm=\rho dv$$

می توان جرم ناحیه سه بعدی R با چگالی حجمی $\rho=\rho(x,y,z)$ را به صورت $M=\iiint_R \rho dv$ بدست آوردکه در مختصات کارتزین $dv=dxdydz$ می باشد و با توجه به تعریف مرکز جرم می توان مختصات مرکز جرم این ناحیه را به صورت زیر بدست آورد:

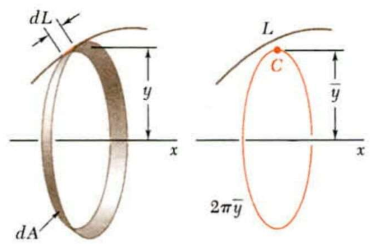
$$\bar{x}=\frac{\iiint_R x\rho dv}{M} \quad و \quad \bar{y}=\frac{\iiint_R y\rho dv}{M} \quad و \quad \bar{z}=\frac{\iiint_R z\rho dv}{M}$$

*در مبحث الکتریسته هم به صورت مشابه برای توزیع پیوسته بار بدست می آید :

اگر بار به صورت یکنواخت توزیع شده باشد:چگالی خطی $\lambda=\frac{Q}{P}$ و چگالی سطحی و $\sigma=\frac{Q}{A}$ و چگالی حجمی $\rho=\frac{Q}{V}$

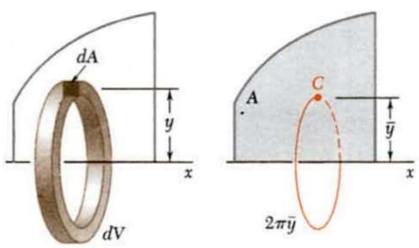
آنگاه برای حل مسائل بدست می آید : $dq=\lambda d\ell \qquad dq=\sigma ds \qquad dq=\rho dv$

قضایای پاپوس (گولدین)(Pappus)(Guldin)



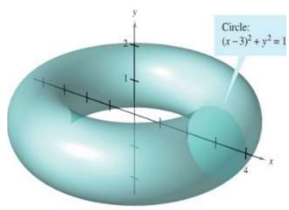
۱.مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی مسطح حول محوری که در صفحه منحنی واقع بوده و آن را قطع نکند ، برابر است با حاصل ضرب در ازای منحنی(طول قوس منحنی) در محیط پیموده شده (محیط دایره ای که مرکز ثقل در دوران می سازد) توسط مرکز ثقل منحنی. به بیان ریاضی : اگر منحنی به طول L حول محور x دوران کند

$$A=\int dA=\int 2\pi y d\ell=2\pi\bar{y}L$$



۲.حجم حاصل از دوران یک ناحیه مسطح حول محوری که ناحیه را قطع نمی کند ، برابر است با حاصل ضرب مساحت ناحیه در محیط پیموده شده (محیط دایره ای که مرکز ثقل در دوران می سازد) توسط مرکز ثقل ناحیه . به بیان ریاضی : اگر ناحیه حول محور x دوران کند : $V=\int dv=\int 2\pi y dA=2\pi\bar{y}A$

*در هر یک از موارد بالا اگر به جای یک دور کامل به اندازه θ دوران کند به جای 2π در فرمول θ قرار می دهیم و اگر حول محور y دوران صورت بگیرد به جای $\bar{y}$ ، $\bar{x}$ قرار می گیرد.

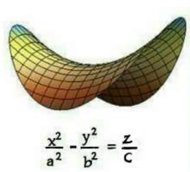


مثال:حجم تورس(Torus)حاصل از دوران دایره $(x-3)^2+y^2=1$ حول محور y را بدست آورید.

در این مثال چون حول محورy دوران داریم پس فرمول حجم طبق قضیه دوم پاپوس به صورت $v=2\pi\bar{x}A$ در می آید که چون شعاع دایره ۱ است $A=\pi$ و مختصه مرکز سطح فاصله محورy تا مرکز دایره است $\bar{x}=2+1=3$ در نتیجه حجم تورس بدست می آید : $v=6\pi^2$

روش دیگر بدست آوردن حجم استفاده از انتگرال (روش واشر) است.

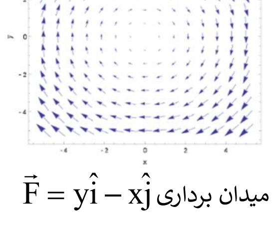
گفتیم که **میدان را می توان یک تابع ریاضی دانست که بیانگر تغییرات یک کمیت فیزیکی در ناحیه ای از فضاست:**



نمایش تابع اسکالر $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ به نام سهمی گون هذلولوی (hyperbolic paraboloid)وکابرد آن در زندگی :)

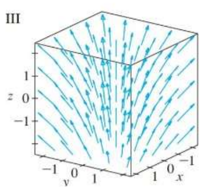
تابع (میدان) اسکالر(Scalar function): هر تابع به صورت $f:u\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ یک تابع اسکالر n متغیره نامیده می شود که به هر نقطه از دامنه خودش یک مقدار اسکالر (مانند یک عدد یا یک کمیت فیزیکی اسکالر مانند دمای تمام نقاط یک جسم را در هر لحظه) را نسبت می دهد.

تابع (میدان) برداری(Vector function): درریاضیات، یک تابع برداری بر $u\subseteq\mathbb{R}^m$ تابعی (نگاشتی) است چون $F:u\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ که به هر نقطه ازدامنه خودش ($u\subseteq\mathbb{R}^m$) یک بردار را نسبت می‌دهد.اگر تابع برداری $\vec{F}$ به صورت $\vec{F}=(f_1,f_2,\dots,f_n)$ باشد آنگاه هر یک از مولفه های $\vec{F}$ یعنی (f_i $(i=1,2,\dots,n$ ها یک تابع اسکالر n متغیره($f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$) است.



نمایش میدان برداری $\vec{F}=y\hat{i}-x\hat{j}$

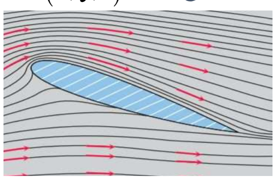
*برای درک بهتر تابع برداری و اسکالر به مثال های زیر توجه کنید:



$\vec{F}=(x,y,3)$ تابع برداری

تابع اسکالر تک متغیره: $f(x)=x^2$ تابع اسکالر چند متغیره : $f(x,y,z)=x^2yz+x\sin(z)$

تابع برداری تک متغیره: $F(t)=(\cos(t),\sin(t))$ تابع برداری چند متغیره : $F(x,y)=(x-y,x+y)$



میدان سرعت جریان اطراف airfoil در تونل باد

اگر $m=1$ باشد تابعی برداری پدید می آید که تنها یک متغیر ورودی دارد و خروجی آن یک n تایی مرتب (بردار) در فضای $\mathbb{R}^n$ است به این متغیر ورودی ، پارامتر می گوییم و به خروجی یک خم پارامتری می گوییم:

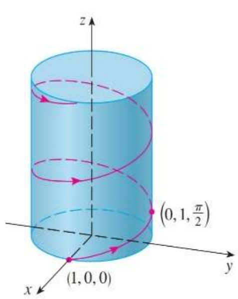
خم (منحنی)[26] های پارامتری

به تابع برداری تک متغیره **خم** میگوییم .خم یک موجود یک بعدی است که زیر مجموعه‌ای از یک فضای ۲ بعدی و یا بیشتر می باشد. در ریاضیات، مفهوم منحنی (خم) برای نشان دادن یک شیء یک بعدی و پیوسته به کار می‌رود. عبارت منحنی (خم) همچنین در حالاتی استفاده می‌شود که آن را تقریباً هم معنی با تابع ریاضی یا نمودار تابع می‌سازد.

تعریف خم پارامتری :

اگر تابع $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ (با فرض $a<b$) با ضابطه $\vec{r}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ تابعی پیوسته روی $[a,b]$ باشد آنگاه c با ضابطه r را یک خم پارامتری در فضای $\mathbb{R}^n$ می گویند. به $x_i(t)$ $(1\le i\le n)$ مؤلفه i ام خم پارامتری c می گویند و $x_i(t):[a,b]\to\mathbb{R}$ ما معمولا با این خم های پارامتری در فضای دو بعدی $\mathbb{R}^2$ و سه بعدی $\mathbb{R}^3$ سر و کار داریم چرا که این خم ها در واقع مسیر حرکت یک ذره را نشان می دهند.

خم $r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ که در حالت کلی به صورت $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ نمایش داده می شود به طوری که $a\le t\le b$ به هر عدد حقیقی t یک بردار را نسبت می دهد و در واقع مسیر حرکت یک ذره را از $\vec{r}(a)$ تا $\vec{r}(b)$ در فضا نشان می دهد.



مثال: نمایش یک مارپیچ دوار[27] در فضا با خم پارامتری $\vec{r}(t)=(\cos(t),\sin(t),t)$

*اگر بخواهیم معادله مسیر (رابطه بین x,y,z مستقل از پارامتر t) را بدست بیاوریم کافیست از دستگاه $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ پارامتر t را حذف کنیم. (به هر یک از معادلات $x=x(t)$ و... معادلات پارامتری می گویند)

*ممکن است معادلات پارامتری مختلفی وجود داشته باشند که همگی معرف یک خم باشند.

26.curve
27.Helix

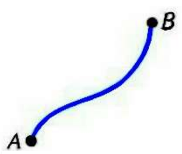
به طور کلی، خم یا منحنی بر دو گونه است :

- منحنی مسطح (plane curve): خمی است که بر روی سطح دوبعدی (صفحه) قابل جایگیری است.
- منحنی انحرافی (skew curve): خمی فضایی است که روی هیچ صفحه‌ای قرار نگیرد.

به طور شهودی، خم مسطح به مجموعه‌ای از نقطه‌ها گفته می‌شود، به شرط آنکه بتوانیم بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ آن را رسم کنیم.

انواع منحنی مسطح

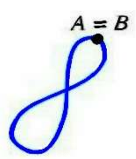
منحنی ساده(simple curve)



منحنی ساده و باز (و هموار)

یک منحنی ساده، یک منحنی مسطح است که هیچ یک از نقطه های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقاط انتهایی به هم می رسند.

منحنی باز است ولی ساده نیست

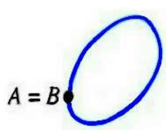


منحنی بسته است اما ساده نیست

منحنی بسته (closed curve)

منحنی بسته، به خمی اطلاق می‌شود که نقطه‌های ابتدا و انتهای آن به هم رسیده و بر همدیگر منطبق باشند.

منحنی سادهٔ بسته (simple closed curve)



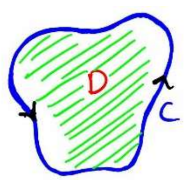
منحنی ساده و بسته

منحنی ای ساده بسته است که نقطه‌های ابتدا و انتهایی آن بر هم منطبق باشند و نقطه های خود را قطع نکند.

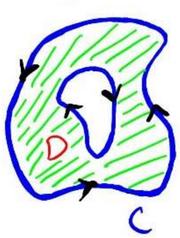
قضیه منحنی جردن (Jordan curve theorem)

هر منحنی ساده بستهC ، صفحه را به سه زیر مجموعه جدا از هم درون، بیرون و روی منحنی تقسیم می‌کند.

جهت گذاری مثبت برای خم روی صفحه



یک خم بسته که ناحیهD را در $\mathbb{R}^2$ احاطه کرده است جهت دار مثبت گوییم هر گاه وقتی در جهت خم حرکت می کنیم ناحیه احاطه شده توسط خم (D) در سمت چپمان قرار گیرد.



حد خم های پارامتری

خم $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ در نقطه $t=t_0$ دارای حد $L=(L_1,L_2,...,L_n)$ است اگر :

$$\lim_{t\to t_0} x_i(t)=L_i \quad ; \quad i=1,2,...,n$$

برای $r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ به صورت زیر خواهد بود :

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\left(\lim_{t\to t_0}x(t)\right)\hat{i}+\left(\lim_{t\to t_0}y(t)\right)\hat{j}+\left(\lim_{t\to t_0}z(t)\right)\hat{k}=L_1\hat{i}+L_2\hat{j}+L_3\hat{k}=\vec{L}$$

پیوستگی خم های پارامتری

خم $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$ در نقطه $t=t_0$ پیوسته است اگر و تنها اگر مؤلفه های آن در $t=t_0$ پیوسته باشند: $\lim\limits_{t\to t_0} x_i(t)=x_i(t_0)\quad;\quad i=1,2,\dots,n$

مشتق خم های پارامتری

خم $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$ در نقطه t مشتق پذیر است هر گاه $\lim\limits_{x\to t}\dfrac{\vec{r}(x)-\vec{r}(t)}{x-t}$ موجود باشد. در صورت وجود آن مشتق خم $\vec{r}(t)$ در t نامیده و آن را با $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ یا $\dot{\vec{r}}$ نشان می دهیم.

*اگر مؤلفه های تابع $\vec{r}(t)$ مشتق پذیر باشند آنگاه $\vec{r}(t)$ مشتق پذیر است.

مشتق خم $r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ به صورت رو به رو خواهد بود: $\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}(t)=\dfrac{dx}{dt}\hat{i}+\dfrac{dy}{dt}\hat{j}+\dfrac{dz}{dt}\hat{k}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$

تذکر: درنمادگذاری نیوتون مشتق با قرار دادن نقطه بالای تابع مورد نظر نمایش می یابد و این نوع نمایش مشتق در اکثر اوقات برای مشتق زمانی به کار می رود :

مشتق دوم x نسبت به زمان $\to$ $\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ و مشتق اول x نسبت به زمان $\to$ $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$

قضیه: هرگاه $\vec{r}(t)$ یک خم برداری با اندازه ثابت باشد آنگاه $\dot{\vec{r}}(t)$ و $\vec{r}(t)$ بر هم عمودند. (عکس قضیه نیز برقرار است)

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)=\|\vec{r}(t)\|^2=cte\ \Rightarrow\ \vec{r}(t)\cdot\dot{\vec{r}}(t)=0\ \Rightarrow\ \vec{r}(t)\perp\dot{\vec{r}}(t)$$

قواعد مشتق گیری از خم های پارامتری

با فرض $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ به عنوان دو خم پارامتری و $\lambda:[a,b]\to\mathbb{R}$ یک تابع اسکالر مشتق پذیر و $a\in\mathbb{R}$ اثبات می شود که :

1) $\dfrac{d}{dt}(a\vec{u}(t))=a\dot{\vec{u}}(t)$

2) $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}(t)\pm\vec{v}(t))=\dot{\vec{u}}(t)\pm\dot{\vec{v}}(t)$

3) $\dfrac{d}{dt}(\lambda(t)\vec{u}(t))=\dot{\lambda}(t)\vec{u}(t)+\lambda(t)\dot{\vec{u}}(t)$

4) $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t))=\dot{\vec{u}}(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\dot{\vec{v}}(t)$

5) $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}(t)\times\vec{v}(t))=\dot{\vec{u}}(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\dot{\vec{v}}(t)$

توجه داشته باشید که در مورد بالا چون ضرب خارجی خاصیت جابجایی ندارد فقط به همین شکل بالا باید نوشته شود.

6) $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}o\lambda(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(\lambda(t))\right)=\dot{\lambda}(t)\cdot\dot{\vec{u}}(\lambda(t))$

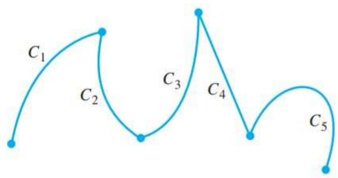
7) $\frac{d}{dt}\left(\|\vec{u}(t)\|\right)=\frac{\vec{u}(t)\cdot\dot{\vec{u}}(t)}{\|\vec{u}(t)\|} \quad , \quad \|\vec{u}(t)\|\neq 0$

خم هموار(smooth curve) :

خم $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ را در بازه $[a,b]$ هموار گوییم هرگاه $\vec{r}(t)$ (به عبارتی مؤلفه های $\vec{r}(t)$) دارای مشتق موجود و پیوسته باشد و مشتق آن در هیچ نقطه ای صفر نباشد (مشتق مؤلفه ها همزمان صفر نباشد). به زبان ریاضی : $\dot{\vec{r}}(t)\neq 0 \quad \forall\, t\in[a,b]$

*نقاط ناهموار در منحنی های پارامتری معمولا به صورت نقاط **زاویه دار** می باشند.

خم قطعه قطعه (تکه ای) هموار(piecewise smooth curve)



خم $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ را در بازه $[a,b]$ قطعه قطعه هموار گوییم هرگاه $\vec{r}(t)$ اگر در همه نقاط به جز تعدادی متناهی نقطه هموار باشد.

انتگرال خم های پارامتری

برای خم **پیوسته** $r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ انتگرال های معین و نامعین به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\int\vec{r}(t)dt=\left(\int x(t)dt\right)\hat{i}+\left(\int y(t)dt\right)\hat{j}+\left(\int z(t)dt\right)\hat{k}$$
$$\int_a^b\vec{r}(t)dt=\left(\int_a^b x(t)dt\right)\hat{i}+\left(\int_a^b y(t)dt\right)\hat{j}+\left(\int_a^b z(t)dt\right)\hat{k}$$

طول منحنی (طول قوس) (Arc lenght)

طول قوس(قوس قسمتی از منحنی است که بین دو نقطه محدود شده باشد) منحنی هموار $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ در بازه $[a,b]$ را با s نشان می دهیم و به صورت زیر بدست می آید:

$$s=\int_a^b\|\dot{\vec{r}}(t)\|dt$$

و در فضای $\mathbb{R}^3$ با توجه به اینکه $\dot{\vec{r}}(t)=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$ بدست می آید : $s=\int_a^b\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2}dt$

اگر منحنی قطعه قطعه هموار باشد با استفاده از روش بالا طول قوس هر قطعه را حساب کرده و با هم جمع می کنیم به عبارتی باقرار دادن $a=t_0 , b=t_{n+1}$ طول قوس منحنی قطعه قطعه هموار به صورت $s=\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\|dt$ بدست می آید.

تابع طول قوس

برای منحنی هموار $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t)=\left(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\right)$ تابع طول قوس را به صورت زیر تعریف می کنیم : $s(t)=\int_a^t\left\|\vec{r}'(u)\right\|du$ می توان دریافت که $\frac{d}{dt}\left(s(t)\right)=\left\|\vec{r}'(t)\right\|>0$ در نتیجه تابع $S(t)$ اکیداً صعودی است پس وارون پذیر است. فرض می کنیم تابع $\alpha(t)$ وارون $s(t)$ باشد بدست می آید:

$$\frac{dt}{ds}=\frac{d\alpha(s)}{ds}=\alpha'(s) \qquad و \qquad s=\alpha^{-1}(t)\Rightarrow t=\alpha(s)$$

آنگاه می توان منحنی (بردار مکان) را بر حسب پارامتر طول قوس پارامتری کرد به بیان ریاضی : $\vec{r}=\vec{r}(s)$

*مفاهیم انحنا و تاب یک منحنی را در قسمت دستگاه مختصات منطبق بر مسیر بررسی می کنیم.

منحنی های پارامتری مهم

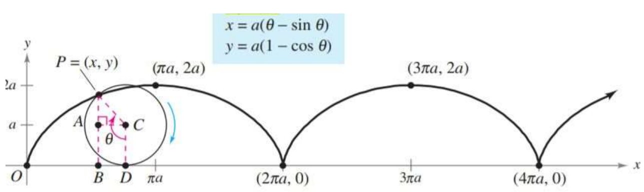
1. خط (line) دکارتی : $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ پارامتری: $\begin{cases}x(t)=at+x_0\\y(t)=bt+y_0\end{cases}$

2. خط واصل بین دو نقطه $A,B\in\mathbb{R}^n$ از A به B : $\vec{r}(t)=t\vec{B}+(1-t)\vec{A} \quad ,0\le t\le 1$

3. دایره(circle) دکارتی: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ پارامتری : $\begin{cases}x(t)=x_0+R\cos(t)\\y(t)=y_0+R\sin(t)\end{cases} ,0\le t\le 2\pi$

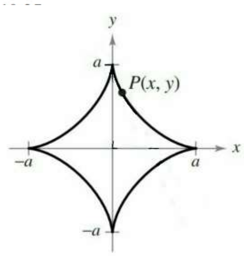
4. بیضی (ellipse) دکارتی : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ پارامتری : $\begin{cases}x(t)=x_0+a\cos(t)\\y(t)=y_0+b\sin(t)\end{cases} ,0\le t\le 2\pi$

5. چرخزاد (cycloid) $\begin{cases}x(\theta)=a\left(\theta-\sin(\theta)\right)\\y(\theta)=a\left(1-\cos(\theta)\right)\end{cases}$



6. ستاره گون (Astroid)

دکارتی : $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ پارامتری: $\begin{cases}x(t)=a\cos^3(t)\\y(t)=a\sin^3(t)\end{cases}$



عملگر های برداری دیفرانسیلی

دل (Del)

این عملگر[28] که روی توابع اسکالر و برداری عمل می کند و توابع اسکالر و برداری جدیدی پدید می آورد (در واقع این توابع جدید از جزء خانواده مشتق به حساب می آیند) را با نماد نابلا[29] ∇ نشان می دهند. توجه شود که این عملگر به تنهایی مفهومی را منتقل نمی‌کند و شیوه اعمال آن بر توابع مختلف باعث ایجاد مفاهیم مختلف می‌شود.

با فرض اینکه مجموعه $\{\hat{e}_1=(1,0,\dots,0),\hat{e}_2=(0,1,0,\dots,0),\dots,\hat{e}_n=(0,\dots,0,1)\}$ در مختصات $\mathbb{R}^n$ پایه باشد آنگاه:

$$\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\hat{e}_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\hat{e}_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}\hat{e}_n=\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

وبرای مثال دردستگاه مختصات کارتزین سه بعدی داریم:

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

*تذکر: منظور از $\frac{\partial}{\partial x_i}$ مشتق جزئی نسبت به مؤلفه x_i است.

عملگر های پدید آمده از اپراتور دل:

گرادیان (شیب)(Gradient)

مشتق برداری (مشتق جهت دار) یک تابع (میدان) **اسکالر** است و حاصل آن **بردار** است (گرادیان اسکالر را به بردار تبدیل می کند).

جهت گرادیان یک تابع اسکالر: جهتی را مشخص می کند که تابع در آن جهت بیشترین تغییرات (افزایش) را دارد.

اندازه گرادیان : نرخ افزایش تابع را درجهت بیشترین افزایش نشان می دهد.

به عبارت دیگر تابع f در جهت بردار گرادیان بیشترین افزایش که مقدار آن $\|\vec{\nabla}f\|$ است را دارد.

با فرض $f:u\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ و $f=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ بردار گرادیان تابع f به صورت زیر بدست می آید:

$$\text{grad } f=\vec{\nabla}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\hat{e}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\hat{e}_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\hat{e}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\hat{e}_i$$

و برای تابع سه متغیره $f=f(x,y,z)$ در فضای سه بعدی:

$$\text{grad } f=\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}=f_x\hat{i}+f_y\hat{j}+f_z\hat{k}$$

28.operator
29.nabla

***ارتباط گرادیان با مشتق جهتی (سویی):** هرگاه f تابعی به صورت $f:u\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ باشد و f در $a\in u$ مشتق پذیر باشد آنگاه برای هر بردار یکه $\hat{v}$ مشتق جهتی f در نقطه a موجود است و داریم :

که در آن θ زاویه بین $\vec{\nabla}f(a)$ و $\hat{v}$ می باشد:

$$D_v f(a)=\vec{\nabla}f(a)\cdot\hat{v}=\left\|\vec{\nabla}f(a)\right\|\left\|\hat{v}\right\|\cos(\theta)=\left\|\vec{\nabla}f(a)\right\|\cos(\theta)$$

خواص گرادیان :

اگر $f\,,\,g$ دو تابع اسکالر و $\vec{F},\vec{G}$ دو تابع برداری باشند و k یک عدد حقیقی باشد آنگاه داریم:

$$\vec{\nabla}(kf)=k\vec{\nabla}f\quad,\quad\vec{\nabla}(f\pm g)=\vec{\nabla}f\pm\vec{\nabla}g\quad,\quad\vec{\nabla}(fg)=f\vec{\nabla}g+g\vec{\nabla}f\quad,\quad\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\vec{\nabla}f-f\vec{\nabla}g}{g^2}$$

*نکته : $\vec{\nabla}f$ بر f عمود است و گرادیان در نقاطی که خطوط هم تراز به هم نزدیک ترند بیشتر است.

دیفرانسیل کامل (کل)

اگر مشتقات جزئی اول تابع n متغیره $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f=f(x_1,x_2,...,x_n)$ در یک نقطه موجود باشد دیفرانسیل کامل این تابع را در این نقطه به صورت زیر نشان می دهیم:

$$df=\vec{\nabla}f\cdot d\vec{r}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\cdot(dx_1,dx_2,...,dx_n)\;\Rightarrow df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

⚠**تذکر :** در مباحث پیشرفته تر گرادیان برای بردار نیز تعریف می شود که حاصل آن یک تانسور مرتبه دوم است و گرادیان در فضای مختلط نیز تعریف می شود که از بحث این جزوه خارج است.

دیورژانس(واگرایی)(Divergence)

تعریف:با فرض اینکه s سطح خارجی ناحیه v (سطح در بر گیرنده حجم v)باشد دیورژانس به صورت زیرتعریف می شود :

$$\operatorname{div}\vec{F}=\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_s \vec{F}\cdot\vec{ds}}{v}$$

این تعریف برگرفته از تعبیر فیزیکی است که در ادامه بیان می کنیم. با المان گیری و استفاده از بسط تیلور تعریف ساده تری برای انجام محاسبات بدست می آید :

$$\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

*اگر میدان برداری $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k}$ که در آن هر یک از F_i ها تابعی سه متغیره از x, y, z باشد را در نظر بگیریم آنگاه دیورژانس این میدان در مختصات کارتزین به صورت زیر است:

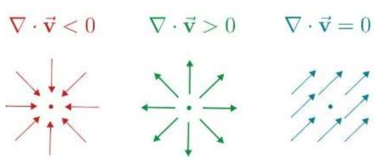
$$\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(F_x,F_y,F_z)=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

مفهوم فیزیکی اپراتور دیورژانس :

*تعبیر اول : وقتی اپراتور دیورژانس روی یک تابع برداری در یک نقطه دلخواه از فضا عمل می‌کند، نتیجه ای که به ما می دهد، قدرت منبع **اسکالر** تولید کننده آن میدان برداری است. اگر دیورژانس یک میدان در نقطه ای صفر باشد در آن نقطه منبع اسکالری نیست و اگر بزرگتر از صفر باشد یک منبع تولیدی (چشمه)[30] و اگر کوچکتر از صفر باشد یک منبع مکنده (چاهک یا حفره)[31] برای شار میدان است.

*دیورژانس نشان دهنده منبع اسکالر یک میدان است در نتیجه اگر دیورژانس یک میدان صفر باشد عامل به وجود آورنده آن ، میدانی برداری است.به عبارت دیگر اگر دیورژانس میدان $\vec{F}$ صفر باشد میدان $\vec{F}$ دارای **پتانسیل برداری** است مانند میدان مغناطیسی

* تعبیر دوم : میزان واگرایی میدان برداری:



یک میدان برداری را می توان به صورت ترسیمی با **خطوط میدان** یا **خطوط شار** نمایش داد که این خطوط منحنی هایی هستند که در هر نقطه مماس بر بردار میدان می باشند. دیورژانس یک میدان برداری بیانگر **چگالی حجمی شار** خروجی (یا ورودی به)از یک حجم بسیار کوچک می‌باشد (سطح بسته بسیار کوچک حول یک نقطه) یا به عبارت دیگر بیانگر شار موضعی میدان در هر نقطه است.دیورژانس یک میدان ، معیاریست برای تعداد خطوط میدان که داخل یا خارج میشوند .اگر دیورژانس مثبت باشد، یعنی اینکه برایند خطوط بُرونرو و دَرونرو به سمت بیرون می باشد واگر دیورژانس منفی باشد، یعنی اینکه به طور کلی، خطوط میدان به سمت داخل هستند. اگر $\vec{F}$ را سرعت یک سیال در نظر بگیریم دیورژانس آن نشان دهنده منابع شارش در نقاط مختلف سیال است.

پخش شدن آب فواره که نشان دهنده دیورژانس مثبت است.

دیورژانس یک میدان برداری در یک نقطه معیاری می باشد از این که آن میدان برداری از آن نقطه به چه میزان به بیرون پخش و واگرا می‌شود. برای مثال سرعت قطرات آب را یک میدان برداری در نظر بگیرید، در این صورت یک فواره در محلی که آب از آن بیرون می‌زند واگرایی و پخش شدگی زیادی دارد پس دیورژانس آن مقدار قابل توجهی دارد. در حالیکه آبی که در یک کانال مستقیم حرکت می‌کند هیچ واگرایی و پخش شدگی ندارد، بنابراین دیورژانس آن صفر است.

تذکر: در نهایت دو تعبیر یک مفهوم را می رسانند.

*نکته: دیورژانس یک اپراتور خطی است

$$\operatorname{div}\left(a\vec{F}+b\vec{G}\right)=a\ \operatorname{div}\vec{F}+b\ \operatorname{div}\vec{G} \quad \text{و} \quad a,b\in\mathbb{R}$$

30.source
31.sink

کرل(چرخش)(تاو)(curl)(rotation)

تعریف: با فرض اینکه s سطحی باشد که منحنی C آن را احاطه کرده است کرل یک میدان برداری به صورت زیر تعریف می شود:

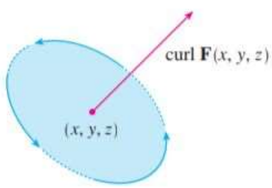
$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\lim_{s\to 0}\frac{\oint_C \vec{F}\cdot\vec{d\ell}}{s}$$

این تعریف برگرفته از تعبیر فیزیکی است و ما از تعریف ساده تری برای انجام محاسبات استفاده می کنیم:

اگر میدان برداری $\vec{F}=\left(F_1,F_2,F_3\right)=F_1\hat{i}+F_2\hat{j}+F_3\hat{k}$ که در آن هر یک از F_iها تابعی سه متغیره از x, y, z باشد را در نظر بگیریم آنگاه کرل این میدان در مختصات کارتزین به صورت زیر است:

$$\text{curl }\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

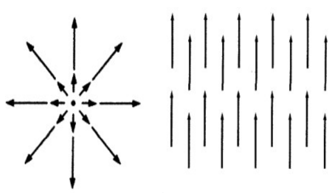
⚠ تذکر: توجه داشته باشید که F_1,F_2,F_3 مؤلفه های میدان برداری هستند نه مشتقات جزئی یا گرادیان چنانکه گرادیان برای تابع اسکالر تعریف می شود .



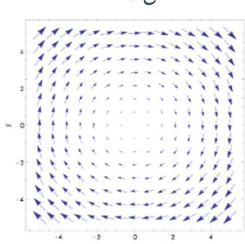
*عملگر کرل روی یک تابع برداری عمل می کند و حاصل آن بردار است. جهت کرل بیانگر جهت مثبت محور چرخش است و از آنجایی که ضرب خارجی است جهت آن از قانون دست راست تعیین می شود به علاوه مقدار کرل میزان چرخش میدان را نشان می دهد.

مفهوم فیزیکی کرل: **میزان چرخش میدان برداری حول یک نقطه**

مؤلفه کرل هر بردار در هر جهت معیاری از چرخش خطوط میدان برداری در صفحه عمود بر آن جهت است.



شکل ۱



برای مثال : کرل میدان های برداری نشان داده شده در شکل ۱ صفر است و کرل میدان برداری شکل ۲ $\vec{F}\left(x,y,z\right)=y\hat{i}-x\hat{j}$ مخالف صفر می باشد چرا که $\vec{\nabla}\times\vec{F}=-2\hat{k}$

این میدان برداری درحال چرخش حول محور z است وجهت بردارکرل درخلاف جهت محور z می باشد.

شکل ۲

*اگرمیدان برداری نشان دهنده سرعت جریان یک سیال درحال حرکت باشدکرل ، چگالی گردش سیال است.

*آبی که از طریق یک حفره به صورت صورت چرخشی پیچ می می خورد وتخلیه می شود نشان دهنده وجود یک چاله گردابی (چرخاننده) است واگرمیدان سرعت آب در این گرداب را رسم کنیم به وضوح چرخش میدان نمایان میشود.(علت این حرکت مارپیچی وجود شتاب کریولیس می باشد)

* کرل نشان دهنده منبع برداری یک برداراست :اگر کرل یک میدان صفر باشد عامل به وجودآورنده آن میدان اسکالراست.

مانند میدان الکتریکی

*با فرض همبند ساده بودن ناحیه

- اگر کرل میدان برداری صفر باشد عامل به وجود آورنده میدان، اسکالر است.(دارای پتانسیل اسکالر)
- اگر دیورژانس میدان برداری صفر باشد عامل به وجودآورنده میدان ، برداری است.(پتانسیل برداری)

*دیورژانس یک میدان برداری سنجشی از قدرت منبع جریان (فورانی)[۳۲] و کرل آن سنجشی از قدرت منبع گردابی[۳۳] است.

قضیه هلمهولتز (Helmholtz's theorem)

یک میدان برداری را می توان با داشتن کرل و دیورژانس آن در هر نقطه (با شرط اینکه دیورژانس و کرل در بینهایت صفر شوند) بدست آورد چرا که همانطور که گفته شد دیورژانس یک میدان برداری سنجشی از قدرت منبع جریان (فورانی) و کرل آن سنجشی از قدرت منبع گردابی است پس با داشتن منابع به وجود آورنده یک میدان می توان آن را به طور کامل بدست آورد.

یک میدان برداری را می توان به صورت مجموع گرادیان یک تابع اسکالر و کرل یک تابع برداری نوشت $\vec{F}=\vec{\nabla}f+\vec{\nabla}\times\vec{G}$

اتحاد های دیفرانسیل های برداری

اگر f و ψ میدان اسکالر و $\vec{F},\vec{G}$ میدان برداری باشند به طوری که مؤلفه های آن دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند داریم:

$$\vec{\nabla}(F\cdot G)=F\times(\vec{\nabla}\times G)+G\times(\vec{\nabla}\times F)+(F\cdot\vec{\nabla})G+(G\cdot\vec{\nabla})F$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\times\vec{G})=(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{G}-\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{G})$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{F})=\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\psi+\psi(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})$$

$$\nabla\times(F\times G)=(\nabla\cdot G)F+(G\cdot\nabla)F-(\nabla\cdot F)G-(F\cdot\nabla)G$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{F}+\vec{G})=\vec{\nabla}\times\vec{F}+\vec{\nabla}\times\vec{G}$$

$$\vec{\nabla}\times(\psi\vec{F})=(\vec{\nabla}\psi)\times\vec{F}+\psi(\vec{\nabla}\times\vec{F})$$

32.Flow source
33.Vortex source

عملگرهای دیفرانسیلی برداری مرتبه دوم

*کرل گرادیان یک تابع اسکالر مساوی صفر است: $\text{curl}(\text{grad}\, f) = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right)=0$

*دیورژانس کرل یک تابع برداری مساوی صفر است : $\text{div}(\text{curl}\,\vec{F}) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)=0$

*کرل کرل یک تابع برداری برابر است با : $\text{curl}\left(\text{curl}\,\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{F}$

* دیورژانس گرادیان یک تابع اسکالر با لاپلاسین آن برابر است: $\text{div}(\text{grad}\, f) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)=\nabla^2 f=\Delta f$

لاپلاسین (Laplacian)

عملگر لاپلاس (Laplace operator)

جزء مشتقات مرتبه دوم محسوب می شود و در واقع دیورژانس گرادیان یک تابع اسکالر است .این عملگر روی یک میدان اسکالر عمل می کند.با فرض $f:u\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ و $f=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ عملگر لاپلاس یا لاپلاسین به صورت زیر تعریف می شود :

$$\Delta f=\vec{\nabla}^2 f=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

در فضای سه بعدی و دستگاه کارتزین برای $f=f\left(x,y,z\right)$ داریم :

$$\Delta f=\vec{\nabla}^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

لاپلاسین برداری نیز به صورت زیر تعریف می شود که روی یک میدان برداری عمل می کند :

$$\text{vector laplacian}:\vec{\nabla}^2\vec{F}=\text{grad}\left(\text{div}\,\vec{F}\right)-\text{curl}\left(\text{curl}\,\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)-\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$$

انتگرال توابع برداری

انتگرال روی خم

انتگرال توابع اسکالر روی خم

مثال ساده و آشنایی از انتگرال توابع اسکالر روی خم $\int f\left(x\right)dx$ است که در واقع انتگرال گیری از تابع اسکالر تک متغیره $f\left(x\right)$ روی منحنی $y=0$ می باشد. حال این مفهوم را تعمیم داده و انتگرال توابع اسکالر را روی یک خم پارامتری تعریف می کنیم : با فرض اینکه c یک خم هموار به صورت $r:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}\left(t\right)=\left(x_1\left(t\right),x_2\left(t\right),\ldots,x_n\left(t\right)\right)$ باشد و تابع اسکالر n متغیره $f:u\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ روی منحنی c کران دار باشد آنگاه انتگرال تابع f روی منحنی c به صورت زیر تعریف می شود :

$$\int_c f d\ell=\int_a^b f\left(\vec{r}\left(t\right)\right)\left\|\dot{\vec{r}}\left(t\right)\right\|dt=\int_a^b f\left(x_1\left(t\right),x_2\left(t\right),\ldots,x_n\left(t\right)\right)\sqrt{\left(\dot{x}_1\right)^2+\left(\dot{x}_2\right)^2+\ldots+\left(\dot{x}_n\right)^2}\,dt$$

*اگر خم به صورت قطعه قطعه هموار باشد می توان روی هر خم جداگانه انتگرال گرفت و سپس با هم جمع کرد.

به عبارتی اگر $c = c_1 \cup c_2 \cup \ldots \cup c_k$ آنگاه $\int_c f d\ell = \int_{c_1} f d\ell + \int_{c_2} f d\ell + \ldots + \int_{c_k} f d\ell$

کاربرد:

محاسبه جرم : سیمی با چگالی $\delta(x, y, z)$ در نقطه (x, y, z) در امتداد خم c در فضا قرار دارد آنگاه جرم از رابطه $M = \int_c \delta(x, y, z) d\ell$ بدست می آید.

انتگرال توابع برداری روی خم

بیانگر کار انجام شده روی خم هموار c توسط میدان $\vec{F}$ می باشد. $w = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$

جهت پیمایش خم نیز مهم است چراکه اگر جهت قرینه شود حاصل انتگرال نیز قرینه می شود.

در حالت کلی اگر میدان $\vec{F}$ روی منحنی هموار c به صورت $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ پیوسته باشدآنگاه با توجه به $\boxed{d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t) dt}$ حاصل انتگرال به صورت $\boxed{\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt}$ قابل محاسبه میباشد.

*با توجه به تعریف $\hat{T} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\left\| \dot{\vec{r}}(t) \right\|} = \dot{\vec{r}}(t) \frac{dt}{ds}$ و $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t) dt$ می توان بدست آورد $d\vec{r} = \hat{T} ds$ و انتگرال بالا را به فرم $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c \vec{F} \cdot \hat{T} ds$ نمایش داد.

*انتگرال خم نسبت به متغیرهای مختصات : با فرض $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ و $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ بدست می آید :

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

* تغییر جهت انتگرال گیری علامت انتگرال را قرینه می کند. $\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

مثال : اگر $\vec{F} = (x^2 + y, xy)$ مطلوبست محاسبه کار انجام شده توسط میدان $\vec{F}$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(1,1)$

در قسمت منحنی های پارامتری مهم خم پارامتری خط واصل بین دو نقطه بیان شد پس بدست می آید :

$0 \le t \le 1$, $\vec{r}(t) = t(1,1) + (1-t)(0,0) = (t, t)$ حال با مشتق گیری از خم نسبت به زمان بدست می آید $\dot{\vec{r}}(t) = (1,1)$

و $\vec{F}(\vec{r}(t)) = (t^2 + t, t^2)$ در نتیجه $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = (t^2 + t, t^2) \cdot (1,1) = t^2 + t + t^2 = 2t^2 + t$

پس حاصل انتگرال بدست خواهد آمد: $w=\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt=\int_0^1(2t^2+t)dt=\left(\frac{2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

*حالت خاصی برای محاسبه انتگرال کار وجود دارد که محاسبه انتگرال را راحت می کند:

قضیه استقلال از مسیر(قضیه اساسی گرادیان)

میدان برداری گرادیانی(پایستار یا ابقایی)(conservative):

اگر میدان برداری $F:u\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ یک میدان پایستار باشد یعنی تابع اسکالر ϕ، $\phi:u\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که $\vec{F}=\vec{\nabla}\phi$ در این صورت ϕ را یک تابع **"پتانسیل"** $\vec{F}$ می گوییم .مفهوم پایستار بودن میدان این است که کار انجام شده به مسیر حرکت بستگی ندارد و فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته می باشد :

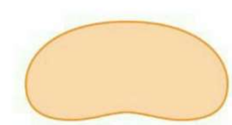
به عبارتی هر خم هموار $c:\vec{r}(t)$ به صورت $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ را که در نظر بگیریم کار میدان پایستار بین نقاط ابتدا و انتها برابر است: $w=\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_c \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r}=\int_A^B d\phi=\phi(B)-\phi(A)=\phi(\vec{r}(b))-\phi(\vec{r}(a))$

*نتیجه : کار میدان پایستار $\vec{F}$ روی هر خم هموار **بسته** c صفر می باشد : $w=\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$

تشخیص پایستار (ابقایی) بودن میدان $\vec{F}$

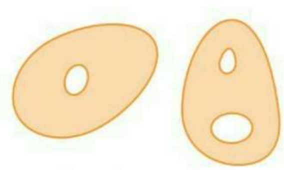
شرط **لازم** برای پایستار بودن میدان $\vec{F}=(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ با فرض پیوسته و موجود بودن مشتقات جزئی $F_i\,(1\le i\le n)$ ها به صورت زیر می باشد : $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\ ;\quad 1\le i,j\le n$

*حالت خاص آن در فضای $\mathbb{R}^3$ برای میدان $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ برقراری سه شرط $\frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$ می باشد که معادل آن این است که **کرل میدان صفر باشد** و در صورتی که دامنه تعریف میدان ناحیه ای **همبند و ساده** (ناحیه بدون حفره) باشد این شرط **لازم وکافی** می شود.

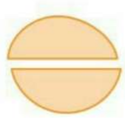


ناحیه همبند ساده

*ناحیه **همبند** به ناحیه ای گفته می شودکه دارای این خاصیت باشد که هر جفت از نقاطش را بتوان با یک خم پیوسته که همه نقاطش به ناحیه تعلق داشته باشد به هم متصل کرد. و ناحیه **همبند ساده** به ناحیه ای گفته می شود که اگر هر خم ساده بسته در آن در نظر بگیریم همه نقاط داخل منحنی عضو ناحیه باشند.



ناحیه های همبند غیر ساده



ناحیه ناهمبند

*حالت خاص آن برای میدان دو بعدی $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}$ برقراری شرط $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ می باشد.

بدست آوردن تابع پتانسیل ϕ

اگر میدان برداری $\vec{F}=\left(F_1,F_2,F_3\right)=F_1\hat{i}+F_2\hat{j}+F_3\hat{k}$ که در آن هر یک از F_i ها تابعی سه متغیره از x, y, z باشد را در نظر بگیریم طبق تعریف $\vec{F}=\vec{\nabla}\phi$ در نتیجه $F_1=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\ ,\ F_2=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\ ,\ F_3=\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$

برای فهم بهتر ادامه روش را با یک مثال توضیح می دهیم .

کار میدان $\vec{F}=\left(2xe^{x^2+y^2},2ye^{x^2+y^2},\cos(z)e^{\sin(z)}\right)$ را روی خم c که نقطه $A\left(0,0,1\right)$ را به $B\left(0,0,-1\right)$ متصل می کند بدست آورید.

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} & \cos(z)e^{\sin(z)}\end{vmatrix}=\left(0,0,4xye^{x^2+y^2}-4xye^{x^2+y^2}\right)=\left(0,0,0\right)$$

با توجه به اینکه کرل میدان صفر شد در میابیم که میدان $\vec{F}$ پایستار است پس باید تابع پتانسیل آن را بدست بیاوریم . فرض می کنیم تابع ϕ تابع پتانسیل $\vec{F}$ باشد در نتیجه $\vec{F}=\vec{\nabla}\phi$ و $F_1=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\ ,\ F_2=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\ ,\ F_3=\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$

کار را با یکی از رابطه های بالا شروع می کنیم مثلا در اینجا $F_1=2xe^{x^2+y^2}=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ را در نظر می گیریم با نوشتن رابطه به صورت $\partial\phi=2xe^{x^2+y^2}\partial x$ و انتگرال گیری نسبت به x با ثابت در نظر گرفتن y بدست می آید: $\phi=e^{x^2+y^2}+h\left(y,z\right)$
نکته قابل توجه این است که در این نوع انتگرال گیری ثابت انتگرال گیری تابعی از y و z است.

سپس رابطه دیگر $F_2=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$ را در نظر می گیریم نتیجه می گیریم با مشتق گیری از ϕ بدست آمده نسبت به y باید به مؤلفه دوم $\vec{F}$ یعنی $F_2=2ye^{x^2+y^2}$ برسیم.

$$F_2=2ye^{x^2+y^2}=\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2+y^2}+h\left(y,z\right)\right)=2ye^{x^2+y^2}+\frac{\partial h}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial h}{\partial y}=0\quad\Rightarrow\ h=h\left(z\right)$$

حال از رابطه سوم استفاده می کنیم :

$$F_3=\cos(z)e^{\sin(z)}=\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{x^2+y^2}+h\left(z\right)\right)=\frac{dh}{dz}\quad\Rightarrow\quad\frac{dh}{dz}=\cos(z)e^{\sin(z)}\xrightarrow{\int}h\left(z\right)=e^{\sin(z)}+c$$

پس در نهایت داریم $\phi=e^{x^2+y^2}+e^{\sin(z)}+c$ حال طبق قضیه گرادیان برای محاسبه کار کافیست $\phi\left(B\right)-\phi\left(A\right)$ را محاسبه کنیم.

*روش دیگری نیز برای محاسبه تابع پتانسیل وجود دارد:

میدان برداری $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)=F_1\hat{i}+F_2\hat{j}+F_3\hat{k}$ که در آن هر یک از F_i ها تابعی سه متغیره از x, y, z باشد را در نظر می گیریم طبق تعریف $\vec{F}=\vec{\nabla}\phi$ در نتیجه $F_1=\frac{\partial \phi}{\partial x}\ ,\ F_2=\frac{\partial \phi}{\partial y}\ ,\ F_3=\frac{\partial \phi}{\partial z}$ آنگاه $\phi=\int F_1 dx+\int F_2^{*} dy+\int F_3^{**} dz$

که در آن F_2^{*} جملاتی از F_2 که فاقد x اند و F_3^{**} جملاتی از F_3 که فاقد x,y اند.

مثال قبل را با این روش محاسبه می کنیم : $\phi=\int 2xe^{x^2+y^2}dx+\int 0\,dy+\int \cos(z)e^{\sin(z)}dz=e^{x^2+y^2}+e^{\sin(z)}+c$

کاربرد در دینامیک

*قضیه کار انرژی

$$W_{A\to B}=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\Delta(K.E)=\Delta T=\frac{1}{2}m\left(v_B^2-v_A^2\right)$$

اگر قسمتی از میدان نیرو پایستار باشد (نیروی پتانسیل) یعنی $\operatorname{curl}\vec{F}_p=\vec{\nabla}\times\vec{F}_p=0\ \Rightarrow \vec{F}_p=\vec{\nabla}\varphi$ آنگاه با توجه به $d\varphi=\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{r}$ بدست می آید: $\int_A^B \vec{F}_p\cdot d\vec{r}=\int_A^B d\varphi=\varphi(B)-\varphi(A)$ یعنی کار مستقل از مسیر است و فقط به ابتدا و انتها بستگی دارد.

تعریف پتانسیل :

$$\int_A^B \vec{F}_p\cdot d\vec{r}=\int_A^B d\varphi=\varphi(B)-\varphi(A)=U_A-U_B=-\Delta U$$

$$W_{A\to B}=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\Delta T=\int_A^B \vec{F}_p\cdot d\vec{r}+\int_A^B \vec{F}_{n.p}\cdot d\vec{r}=-\Delta U+\int_A^B \vec{F}_{n.p}\cdot d\vec{r}\ \Rightarrow\ \boxed{\int_A^B \vec{F}_{n.p}\cdot d\vec{r}=\Delta T+\Delta U=\Delta(K.E+P.E)}$$

اگر کار میدان نیروهای ناپایستار(غیر پتانسیل) صفر باشد آنگاه پایستگی انرژی مکانیکی را خواهیم داشت :

$$\Delta(K.E+P.E)=0\ \Rightarrow\ (K.E)_1+(P.E)_1=(K.E)_2+(P.E)_2 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}mv_1^2+U_1=\frac{1}{2}mv_2^2+U_2$$

پتانسیل برداری

در قسمت دیورژانس بیان کردیم که اگر دیورژانس یک میدان صفر باشد آنگاه میدان دارای پتانسیل برداری است و عامل به وجود آورنده آن برداری است یعنی اگر پتانسیل برداری را با $\vec{G}$ نشان دهیم آنگاه $\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{G}$ می باشد چراکه دیورژانس کرل صفر می باشد $\operatorname{div}\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)=0$ به این میدان ها میدان های سلونوئیدی[۳۴] می گویند.

*یکی از روش های بدست آوردن این پتانسیل روش تساوی مؤلفه ای مانند روش ۱ پتانسیل اسکالر می باشد و روش دیگر استفاده از فرمول $\vec{G}(x,y,z)=\int_0^1 t\vec{F}(tx,ty,tz)\times(x,y,z)\,dt$ می باشد.

34.solenoidal fields

رویه (سطح) (Surface)

مکان هندسی نقاطی مانند (x,y,z) که در $g(x,y,z)=0$ صدق می کنند را سطح یا رویه گویند.

بردار یکه عمود بر سطح S از رابطه $\hat{n}=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{\|\vec{\nabla}g\|}$ و المان سطح از رابطه $ds=\frac{\|\vec{\nabla}g\|}{|\vec{\nabla}g\cdot\vec{P}|}dA_u$ بدست می آید که در آن

بردار $\vec{P}$ یکی از سه بردار $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ است که عمود بر ناحیه تصویر است و u یکی از سه مختصه x,y,z متناظر با $\vec{P}$ است که المان سطح آنها در قسمت دستگاه مختصات کارتزین آورده شده است.مثلا اگر ناحیه S را روی صفحه xy تصویر کنیم

عمود بر این ناحیه بردار $\hat{k}$ است در نتیجه المان سطح به صورت $ds=\frac{\|\vec{\nabla}g\|}{|g_z|}dxdy$ بدست می آید.

در حالت خاص برای رویه $z=g(x,y)$ بدست می آید: $ds=\sqrt{1+(g_x)^2+(g_y)^2}dxdy$ و $\hat{n}=\pm\frac{(-g_x,-g_y,1)}{\sqrt{1+(g_x)^2+(g_y)^2}}$

رویه (سطح) پارامتری (Parametric Surface)

تابع برداری $r:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ را با ضابطه $\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ را با فرض پیوستگی مشتقات جزئی اول x,y,z یک رویه پارامتری گویند که سطح یا رویه ای مانند S را به فرم پارامتری نمایش می دهد. مثلا سطح کره با شعاع a و مرکز (x_0,y_0,z_0) به صورت زیر برحسب دو پارامتر θ,φ پارامتری می شود.

$$\vec{r}(\theta,\varphi)=(x_0+a\sin\varphi\cos\theta,y_0+a\sin\varphi\sin\theta,z_0+a\cos\varphi)\quad,\quad 0\le\varphi\le\pi\quad,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

*با در نظر گرفتن $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\vec{r}_v=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$ ، $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\vec{r}_u=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ بردار نرمال(عمود) یکه بر رویه به صورت زیر بدست می آید:

$$\forall(u,v)\in D\ \text{if}\ \vec{r}_u\times\vec{r}_v=0\quad\Rightarrow\quad\hat{n}=\pm\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|}$$

همچنین المان سطح این رویه به صورت $\boxed{ds=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|dudv}$ می باشد.

انتگرال روی سطح

انتگرال توابع اسکالر روی سطح

۱) انتگرال تابع اسکالر $f=f(x,y,z)$ روی سطح S به معادله $g(x,y,z)=0$ به صورت زیر تعریف می شود که در آن D تصویر ناحیه S روی یکی از صفحات مختصات است.

$$\iint_S f\cdot ds=\iint_D f\cdot\frac{\|\vec{\nabla}g\|}{|\vec{\nabla}g\cdot\vec{P}|}dA_u$$

که در آن بردار $\vec{P}$ یکی از سه بردار $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ است که عمود بر ناحیه تصویر است و u یکی از سه مختصه x,y,z متناظر با $\vec{P}$ است که المان سطح آنها در قسمت دستگاه مختصات کارتزین آورده شده است.مثلا اگر ناحیه S را روی صفحه xy تصویر کنیم عمود بر این ناحیه بردار $\hat{k}$ است که در نهایت فرمول انتگرال به صورت $\iint_S f\cdot ds=\iint_D f\cdot\frac{\|\vec{\nabla}g\|}{|g_z|}dxdy$ در می آید.

۲) برای رویه $z=g(x,y)$:

$$\iint_S f\cdot ds=\iint_D f\left(x,y,g(x,y)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

۳) اگر سطح به صورت $\vec{r}(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)$ پارامتری شده باشد :

$$\iint_S f\cdot ds=\iint_D f\left(r(u,v)\right)\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|dudv$$

*برای محاسبه مساحت سطح S کافیست قرار دهیم $f(x,y,z)=1$ پس در دو حالت کارتزین و پارامتری داریم:

$$A=\iint_S ds=\iint_D\frac{\|\vec{\nabla}g\|}{|g_z|}dxdy$$ و $$A=\iint_S ds=\iint_D\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|dudv$$

انتگرال توابع برداری روی سطح (انتگرال شار)

۱) انتگرال میدان برداری را روی سطح S به معادله $g(x,y,z)=0$ به صورت زیر تعریف می کنیم که در آن $\hat{n}$ بردار یکه عمود بر سطح S و D تصویر ناحیه S روی یکی از صفحات مختصات است.

با توجه به $\hat{n}=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{\|\vec{\nabla}g\|}$ و $ds=\frac{\|\vec{\nabla}g\|}{|\vec{\nabla}g\cdot\vec{P}|}dA_u$ بدست می آید $\overrightarrow{ds}=\hat{n}ds=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g\cdot\vec{P}|}dA_u$ در نتیجه :

$$flux=\iint_S\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\iint_S\vec{F}\cdot\hat{n}ds=\iint_D\vec{F}\cdot\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g\cdot\vec{P}|}dA_u$$

اگر ناحیه S را روی صفحه xy تصویر کنیم عمود بر این ناحیه بردار $\hat{k}$ است که در نهایت فرمول انتگرال به صورت

$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds = \iint_D \vec{F}\cdot\frac{\vec{\nabla}g}{|g_z|}dxdy$ در می آید.

۲) اگر سطح به صورت $z=g(x,y)$ باشد با توجه به $ds=\sqrt{1+(g_x)^2+(g_y)^2}dxdy$ و $\hat{n}=\frac{(-g_x,-g_y,1)}{\sqrt{1+(g_x)^2+(g_y)^2}}$

بدست می آید $\hat{n}ds=(-g_x,-g_y,1)dxdy$ در نتیجه :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds=\iint_D \vec{F}(x,y,g(x,y))\cdot(-g_x,-g_y,1)dxdy$$

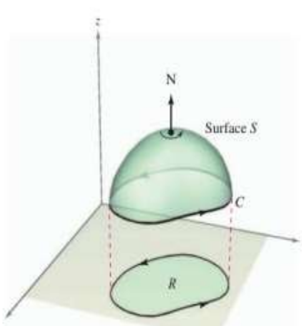
۳) اگر سطح به صورت $\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ پارامتری شده باشد

با توجه به $\hat{n}=\pm\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|}$ و $ds=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|dudv$ بدست می آید $\overrightarrow{ds}=\hat{n}ds=\pm(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)dudv$ در نتیجه :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds=\iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)dudv$$

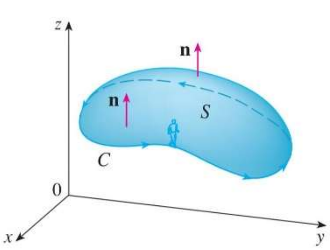
قضیه استوکس (Stokes's Theorem)

این قضیه انتگرال روی خم را به انتگرال دوگانه روی ناحیه محصور به خم مرتبط می کند. اگر سطح S توسط خم **بسته** قطعه قطعه هموار c محصور باشد و $\hat{n}$ بردار یکه قائم و روبه خارج سطح باشد و مؤلفه های میدان برداری $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ ($F_i=F_i(x,y,z)$) دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد آنگاه



$$\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\hat{n}ds=\iint_S(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n}ds$$

*جهت درست در قضیه استوکس از قانون دست راست تعیین می شود به این صورت که اگر چهار انگشت در جهت خم c بچرخند آنگاه انگشت شست جهت $\hat{n}$ را نشان می دهد.

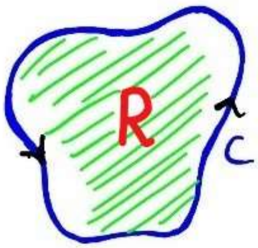


*نتیجه مهم قضیه استوکس: اگر دو سطح S و S' دارای مرز مشترک باشند با دوبار نوشتن قضیه استوکس نتیجه زیر حاصل می شود : $\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\hat{n}ds=\iint_{S'}\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\hat{n}ds$

مثلا اگر یک نیم کره داشتیم که قسمت باز آن با دایره ای بسته شده باشد می توان به جای محاسبه انتگرال روی سطح کره ، انتگرال روی سطح دایره که ساده تر است را محاسبه کرد.

اگر در قضیه استوکس قرار دهیم $\vec{F}=\left(F_1(x,y),F_2(x,y),0\right)$ و سطح را در صفحه $\mathbb{R}^2$ فرض کنیم حالت خاصی از قضیه استوکس بدست می آید که به قضیه گرین معروف است :

قضیه گرین (Green's Theorem)



این قضیه انتگرال در امتداد منحنی **بسته** c در صفحه $\mathbb{R}^2$ را به انتگرال دوگانه روی ناحیه محصور به c را به هم مرتبط میکند.با فرض اینکه c یک خم ساده **بسته** قطعه قطعه هموار باشد که ناحیه R را در بر می گیرد و نسبت به این ناحیه دارای جهت گذاری مثبت باشد و تابع برداری $\vec{F}=F_1(x,y)\hat{i}+F_2(x,y)\hat{j}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد:

$$\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_c F_1(x,y)\,dx+F_1(x,y)\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy$$

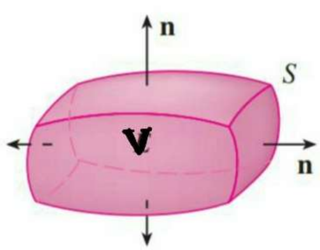
*محاسبه مساحت ناحیه ای مانند R محصور در خم c در $\mathbb{R}^2$ به کمک قضیه گرین

اگر میدان برداری را طوری انتخاب کنیم که $\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=1$ باشد آنگاه با توجه به قضیه گرین مساحت این ناحیه را می توان با محاسبه انتگرال میدان روی خم c بدست آورد :

$$A=\iint_R dA=\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_c F_1dx+F_2dy$$

ساده ترین مثال ها از این میدان برداری $\vec{F}=(0,x)$ و $\vec{F}=(-y,0)$ می باشد.

قضیه دیورژانس گاوس (Gauss's Theorem)



این قضیه انتگرال دوگانه روی سطح را به انتگرال سه گانه روی حجم تبدیل می کند. اگر S سطحی **بسته** در $\mathbb{R}^3$ باشد که حجم $V\subseteq\mathbb{R}^3$ را محصور کرده و $\hat{n}$ بردار یکه قائم و روبه خارج سطح باشد و میدان برداری $\vec{F}$ داراری مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد آنگاه

$$\text{flux}=\oint_S \vec{F}\cdot\vec{ds}=\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dv$$

اگر بردار $\hat{n}$ بر حسب کسینوس های هادیش نمایش داده شود $\hat{n}=\cos(\alpha)\hat{i}+\cos(\beta)\hat{j}+\cos(\gamma)\hat{k}$ آنگاه قضیه دیورژانس با فرض $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ به فرم زیر در می آید که به فرمول استروگرادسکی[۳۵] معروف است.

$$\iiint_V\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_S F_1dydz+F_2dxdz+F_3dxdy$$

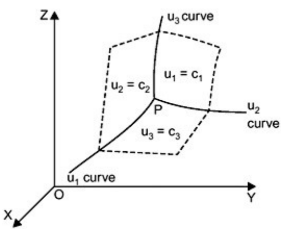
35.Ostrogradsky

*اگر در سوالی سطح داده شده S بسته نبود می توان سطح S'را به سطح S اضافه کرد و یک سطح بسته ایجاد کرد سپس از قضیه دیورژانس استفاده کنیم.در نهایت باید برای بدست آوردن مقدار انتگرال روی سطح Sمقدار انتگرال روی سطح S' را از مقدار انتگرالی را که از قضیه دیورژانس بدست آوردیم کم کنیم .به بیان ریاضی :

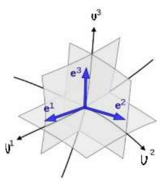
$$\oiint_{S\cup S'} \vec{F}\cdot\hat{n}ds = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv \quad \Rightarrow \quad \oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv - \oiint_{S'} \vec{F}\cdot\hat{n}ds$$

*نکته : $\text{if } \operatorname{div}\vec{F}=0 \Rightarrow \text{flux}=0$

دستگاه مختصات منحنی الخط (خمیده خط) (Curvilinear coordinate)



در دستگاه مستقیم الخط[36] کارتزین سطوح به صورت صفحه های صاف هستند و اجزاء مربوط به حرکت در دستگاهی تعریف می گردند که جهت آن ثابت است این در حالیست که دستگاه مختصات منحنی الخط خصوصیات مسیری که ذره می پیماید را نیز در بر می گیرد به عبارتی این دستگاه ها به مسیری که توسط ذره پیموده می شود وابسته هستند.



خمیده خط بدین معناست که حداقل یکی از سطوح که مختصه ای از دستگاه مختصات در آن ثابت است، صفحه صاف نیست و انحنا دارد. مثلاً در دستگاه مختصات استوانه ای که استوانه های دوار قائم حول محوری مشترک، بیانگر فاصله r از محور هستند یا در دستگاه مختصات کروی که کره های هم مرکز حول مبدأ، بیانگر فاصله (شعاع) از مرکز هستند و مخروط های دوار قائم حول محور قطبی z با راس واقع در مبدا بیانگر زاویه θ هستند.

هر نقطه در فضای سه بعدی را می توانیم به صورت محل برخورد سه سطحی که مختصات خمیده خط را می سازند توصیف کنیم . سطوح ثابت $u_i = cte \quad i=1,2,3$ که هر یک از این سطح ها به صورت تابعی از x,y,x بیان می شوند یعنی $u_i = u_i(x,y,z) \;;\; i=1,2,3$ حال اگر $J=\dfrac{\partial(u_1,u_2,u_3)}{\partial(x,y,z)}\neq 0$ باشد طبق قضیه تابع ضمنی می توان نوشتن $x=x(u_1,u_2,u_3)$ و $y=y(u_1,u_2,u_3)$ و $z=z(u_1,u_2,u_3)$.به هریک از این سطح های ثابت $u_i = cte$ می توان بردار یکه $\hat{u}_i$ عمود بر سطح ثابت $u_i = cte$ و در جهت افزایش u_i نسبت داد. هر بردار را می توان بر حسب این بردارهای یکه در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد نوشت : $\vec{A}=A_{u_1}\hat{e}_{u_1}+A_{u_2}\hat{e}_{u_2}+A_{u_3}\hat{e}_{u_3}$

دستگاه متعامد:اگر سطوح تشکیل دهنده دستگاه مختصات دو به دو بر هم عمود باشند به طوری که $\hat{u}_1\cdot\hat{u}_2=0$ و $\hat{u}_1\cdot\hat{u}_3=0$ و $\hat{u}_2\cdot\hat{u}_3=0$ آنگاه یک دستگاه متعامد داریم.به عبارت دیگر در هر نقطه برمنحنی های مختصات سه مماس می توان رسم کرد، هرگاه این مماس ها دو به دو متعامد باشند دستگاه را متعامد گویند. دستگاه های مختصات غیر متعامد در برخی از مباحث خاص فیزیک کاربرد دارند اما در مسائل مهندسی که ما تحلیل می کنیم مسئله را پیچیده خواهند کرد پس در این جا فقط به بررسی دستگاه های متعامد می پردازیم.

36.Rectilinear coordinate

دستگاه راست گرد (راست گوشه): اگر بین بردار های یکه نظم راست گردی برقرار باشد، یعنی با گردش از سمت راست، حاصل ضرب خارجی دو بردار یکه برابر با بردار یکه سوم باشد، دستگاه مختصات راست‌گرد خواهیم داشت.

$$\hat{u}_1 \times \hat{u}_2 = \hat{u}_3 \quad \text{و} \quad \hat{u}_2 \times \hat{u}_3 = \hat{u}_1 \quad \text{و} \quad \hat{u}_3 \times \hat{u}_1 = \hat{u}_2$$

ضرایب متریک (مقیاس)(metric coefficients)(scale factors)

نقطه A به مختصات (u_1, u_2, u_3) و B به مختصات $(u_1+du_1, u_2+du_2, u_3+du_3)$ را در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد در نظر می گیریم اگر $d\ell_i$ المان طولی باشد که از تغییر u_i به u_i+du_i حاصل می شود وقتی که دو المان دیگر ثابت نگه داشته بشوند آنگاه du_i و $d\ell_i$ به ازای $i=1,2,3$ الزاماً با هم برابر نخواهند بود و در حالت کلی توسط رابطه زیر به یکدیگر مربوط می شوند:

$$d\ell_{u_i} = d\ell_i = h_i du_i \quad ; \quad i=1,2,3 \qquad \text{و} \qquad \overrightarrow{d\ell}_{u_i} = \overrightarrow{d\ell}_i = d\ell_i \hat{u}_i$$

باید توجه داشت که $d\ell_i$ همیشه با du_i برابر نیست بلکه ضریب تبدیلی نیاز است که تغییر دیفرانسیلی du_i را به $d\ell_i$ تبدیل کند.این ضرایب مقادیر مثبت و غیر صفری هستند که تابعی از موقعیت برای یک دستگاه مختصات منحنی الخط می باشند.

در واقع در دستگاه های مختصاتی که دارای پارامترهایی هستند که این پارامترها از جنس طول نیستند این ضرایب کمک میکنند تا مؤلفه های المان طول که بر حسب این پارامترها نوشته می شود به فرمی درآید که از جنس طول باشند.

به طور کلی در دستگاه مختصات منحنی الخط (u_1, u_2, u_3) ، h_i ها $(i=1,2,3)$ تابعی از پارامترهای (مختصه های) دستگاه اند به عبارتی :

$$h_i = h_i(u_1, u_2, u_3) \; ; \; i=1,2,3$$

اگر بردار $\vec{r}$ بردار مکان باشد آنگاه $d\vec{r} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3$

بردار $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ بر خم مختصه u_i مماس است با داشتن بردار مکان $\vec{r}$ در مختصات با پارامترهای (u_1, u_2, u_3) بردار های پایه از رابطه $\hat{u}_i = \dfrac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right\|} \; ; i=1,2,3$ بدست می آید که $\left\| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right\|$ همان ضریب مقیاس است پس

$$\boxed{h_{u_i} = h_i = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right\|} \; ; \; i=1,2,3 \quad \text{و} \quad \hat{u}_i = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right\|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{h_i} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \hat{u}_i$$

المان طول در حالت کلی در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد از روابط زیر بدست می آید :

$$d\vec{r} = \overrightarrow{d\ell} = d\ell_1\hat{u}_1 + d\ell_2\hat{u}_2 + d\ell_3\hat{u}_3 = h_1du_1\hat{u}_1 + h_2du_2\hat{u}_2 + h_3du_3\hat{u}_3$$

$$(d\ell)^2 = h_1^2(du_1)^2 + h_2^2(du_2)^2 + h_3^2(du_3)^2$$

المان سطح در حالت کلی در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد از روابط زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} ds_{u_1} = ds_1 = d\ell_2 d\ell_3 = h_2h_3du_2du_3 \\ ds_{u_2} = ds_2 = d\ell_1 d\ell_3 = h_1h_3du_1du_3 \\ ds_{u_3} = ds_3 = d\ell_1 d\ell_2 = h_1h_2du_1du_2 \end{cases} , \quad \begin{cases} \overrightarrow{ds}_{u_1} = \overrightarrow{ds}_1 = \overrightarrow{d\ell}_2 \times \overrightarrow{d\ell}_3 = h_2h_3du_2du_3\hat{u}_1 \\ \overrightarrow{ds}_{u_2} = \overrightarrow{ds}_2 = \overrightarrow{d\ell}_1 \times \overrightarrow{d\ell}_3 = h_1h_3du_1du_3\hat{u}_2 \\ \overrightarrow{ds}_{u_3} = \overrightarrow{ds}_3 = \overrightarrow{d\ell}_1 \times \overrightarrow{d\ell}_2 = h_1h_2du_1du_2\hat{u}_3 \end{cases}$$

المان حجم در حالت کلی در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد از رابطه زیر بدست می آید:

$$dv = \left|\overrightarrow{d\ell}_1 \cdot \left(\overrightarrow{d\ell}_2 \times \overrightarrow{d\ell}_3\right)\right| = \left|\left(h_1du_1\hat{u}_1\right)\cdot\left(\left(h_2du_2\hat{u}_2\right)\times\left(h_3du_3\hat{u}_3\right)\right)\right| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right| du_1du_2du_3 = Jdu_1du_2du_3$$

ژاکوبین درمختصات منحنی الخط متعامد به صورت روبه رو تعریف می شود:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

در مختصات متعامد ژاکوبی ها با حاصل ضرب ضرایب مقیاس برابراند مثلا $J = h_1h_2h_3$ و $dxdydz = Jdu_1du_2du_3$

یا در مختصات دو بعدی با مختصه های u_1, u_2 ژاکوبین به صورت $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u_1,u_2)} = h_1h_2$ می باشد.

بدست آوردن ضرایب مقیاس مختصات استوانه ای با توجه به بردار مکان $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ و تبدیل های زیر

$$u_1 = r \quad u_2 = \theta \quad u_3 = z \quad x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta) \quad z = z$$

$$h_r = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right\| = \left\|\left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + 0} = 1$$

$$h_\theta = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right\| = \left\|\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}, \frac{\partial y}{\partial\theta}, \frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2} = \sqrt{\left(-r\sin(\theta)\right)^2 + \left(r\cos(\theta)\right)^2 + 0} = r$$

$$h_z = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right\| = \left\|\left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1$$

عملگرهای دیفرانسیلی برداری در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد

با در نظر گرفتن میدان اسکالر $f=f\left(u_1,u_2,u_3\right)$ و میدان برداری $\vec{F}=F_1\hat{u}_1+F_2\hat{u}_2+F_3\hat{u}_3$

گرادیان:

$$\vec{\nabla}f=\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\hat{u}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\hat{u}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\hat{u}_3$$

دیورژانس:

$$\operatorname{div}\ \vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(F_1h_2h_3\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(F_2h_1h_3\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(F_3h_1h_2\right)\right]$$

کرل:

$$\operatorname{curl}\ \vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\dfrac{\hat{u}_1}{h_2h_3} & \dfrac{\hat{u}_2}{h_1h_3} & \dfrac{\hat{u}_3}{h_1h_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{u}_2 & h_3\hat{u}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix}$$

لاپلاسین:

$$\vec{\nabla}^2 f=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]$$

*دستگاه های مختصات متعامد زیادی وجود دارند اما ما در این جزوه سه دستگاه های کارتزین ، استوانه ای و کروی که کاربرد و عمومیت بیشتری دارند را با توجه به کمیت ها و تعاریف بیان شده مورد بررسی قرار می دهیم و نحوه المان گیری را روی هر یک ازاین دستگاه ها تشریح خواهیم کرد. با جایگذاری مختصه ها و ضرایب هر دستگاه که در جدول زیر آمده در روابط مطرح شده برای دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد روابط برای هر دستگاه بدست خواهد آمد.

دستگاه کروی	دستگاه استوانه ای	دستگاه کارتزین	
$u_1=\rho\ ,u_2=\varphi\ ,\ u_3=\theta$	$u_1=r\ ,u_2=\theta\ ,\ u_3=z$	$u_1=x\ ,\ u_2=y\ ,\ u_3=z$	مختصه ها (پارامترها)
$\hat{u}_1=\hat{\rho}\ ,\ \hat{u}_2=\hat{\varphi}\ ,\ \hat{u}_3=\hat{\theta}$	$\hat{u}_1=\hat{r}\ ,\ \hat{u}_2=\hat{\theta}\ ,\hat{u}_3=\hat{z}$	$\hat{u}_1=\hat{x}=\hat{i}\ ,\ \hat{u}_2=\hat{y}=\hat{j}\ ,\ \hat{u}_3=\hat{z}=\hat{k}$	بردارهای پایه
$h_2=\rho\ \ h_1=1\ \ h_3=\rho\sin\left(\varphi\right)$	$h_1=1\ \ \ h_2=r\ \ \ h_3=1$	$h_1=h_x=1\ ,h_2=h_y=1\ ,h_3=h_z=1$	ضرایب مقیاس

اهمیت یادگیری و کاربرد انواع دستگاه های مختصات

اولین کاربرد تمامی سیستم های مختصات تعیین کردن یک نقطه در فضاست. پس از یک تک نقطه نوبت به تعیین یک مسیر و یا یک شکل در صفحه یا فضا می رسد. در حل مسائل عملی همیشه با نواحی یا اشیاء سر و کار داریم و لازم است فرمول های عمومی را در دستگاه مختصات مناسب هندسه مسئله مفروض بیان نماییم. مثلا بیان یک دایره که مرکز مختصات ، همان مرکز دایره باشد دردستگاه قطبی بسیار ساده تر از دستگاه دکارتی است در حالی که بیان معادله خط در مختصات دکارتی آسان تر از قطبی است.بیضی و مقاطع مخروطی را در هر دو مختصات دکارتی و قطبی می توان بیان کرد. بیان آنها در دکارتی راحت تر است دارای صورت و زیبایی است ولی در عمل از آنها نمی توان استفاده کرد به این دلیل که مختصات دکارتی وابسته به مبدأ است در حالی که مختصات قطبی وابسته به نقطه مورد بیان است. مثلا در بیان مدار یک سیاره حول خورشید می توان از آسمان راستای معیاری انتخاب کرد و با محاسبه زاویه شعاع حامل سیاره تا آن مرجع،فاصله سیاره از خورشید را محاسبه کرد یعنی می توان θرا رؤیت کرد و از فرمول مدار، rرا استخراج کرد.

برای مدل سازی سیستم های مورد بررسی در صنعت و توصیف کارکرد های آن نیاز است که تجهیزاتی مانند لوله های انتقال سیالات ، برج های تقطیر ، تانکرها و همچنین کمپرسور موتور هواپیما که به صورت استوانه هستند ، مخازن ذخیره سازی که به صورت کروی یا استوانه ای طراحی می شوند و کاتالیست های مورد استفاده در صنعت نیزکه عموماً به صورت کروی اند و بسیاری از سامانه های دیگر در مختصات مناسب و متناظر با شکل آنها بررسی و مطالعه می شوند.

یکی از رایجترین مثال های سیستم استوانه ای بیان مکان هواپیما از فرودگاه است. بدین شکل که فاصله مستقیم فرودگاه و هواپیما و همچنین راستای این شعاع حامل با شمال و ارتفاع هواپیما از سطح زمین را برحسب طول بیان می کنند اما در هواپیماهای قاره پیما از سیستم مختصات کروی استفاده می شود.

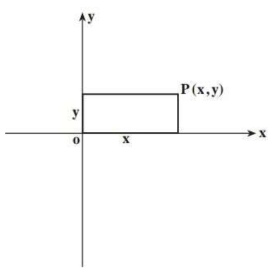
در دروسی مثل فیزیک عمومی ۲ و ریاضی عمومی ۲ نیازمند انتگرال گیری چندگانه هستیم که عمدتاً به دلیل محاسبات طولانی و طاقت فرسا در دستگاه کارتزین با تبدیل دستگاه کارتزین به دستگاه های استوانه ای و کروی المان خود را تغییر داده و به عبارت ساده تری برای حل انتگرال می رسیم.همچنین در دروس مهندسی باتوجه به هندسه مسئله نیازمند حل معادله با مشتقات جزئی (PDE) در دستگاه های دکارتی ، استوانه ای و یا کروی هستیم. مثلا زمانی که در مکانیک سیالات معادله مومنتم برای بدست آوردن توزیع سرعت در یک لوله نوشته مـی شـود،با توجه به هندسه سیستم، مختصات استوانه‌ای برای انجام محاسبات انتخاب می‌شود.

دستگاه مختصات دو بعدی (صفحه ای)

درصفحه نیازمند سیستم های مختصاتی هستیم که تنها با ارائه دو پارامتر یا مختصه نقطه مورد نظر را به صورت منحصربه فرد ارائه دهد.برای این امربه معرفی مختصات دکارتی دوبعدی،مختصات قطبی و پردازیم. $\mathbb{R}^2=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$

دستگاه مختصات کارتزین (دکارتی) دو بعدی (2D Cartesian coordinate system)

به این دستگاه مستطیلی[۳۷] یا قائم[۳۸] هم می گویند .



اساس کار در مختصات دکارتی بر انتخاب دو راستای متمایز هست اما تنها یک شرط برای انتخاب این دو راستا تعیین شده و آن عمود بودن دو راستای مورد نظر است. به همین دلیل به مختصات دکارتی، دستگاه مختصات متعامد نیز می گویند.

در شکل می توانید نمایی کلی از این دستگاه مختصات ببینید. ترتیب ارائه مختص ها در دستگاه مختصات به نام گذاری مختصات بستگی دارد.محور متناظر با مؤلفه اول در این دستگاه مختصات با حرف x مشخص می گردد و همینطور محور متناظر با مؤلفه دوم با y تعیین می شود که به x طول نقطه و به y عرض نقطه می گویند.این محور ها ناحیه را به چهار قسمت تقسیم می کنند که هر کدام از آنها را یک **"ربع"** می نامند تمامی خطوط عمودی ، متناظر با ثابت بودن پارامتر اول و خطوط افقی ، متناظر با ثابت بودن مختص دوم هستند. برای تعیین مختص های یک نقطه در این صفحه می توان یک بار از خطوط افقی و یکبار از خطوط عمودی استفاده کرد و در نهایت مجموعه فواصل طی شده روی خطوط افقی را به عنوان مؤلفه اول و مجموعه فواصل طی شده روی خطوط عمودی را به عنوان مؤلفه دوم ارائه کنیم. یعنی مختصات ارائه شده به شکل یک زوج مرتب (x,y) خواهد بود.

بردارهای پایه

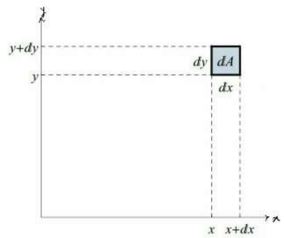
بردارهای یکه در راستای محورهای مختصات به صورت $\hat{x}=\hat{i}=(1,0)$ و $\hat{y}=\hat{j}=(0,1)$ می باشند.

که برای این بردارها داریم : $\hat{i}\cdot\hat{j}=0$ و $\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=1$

*نمایش هر بردار در این دستگاه به صورت $\overrightarrow{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}$ می باشد.

*فاصله دو نقطه $A=(x_1,y_1)$ و $B=(x_2,y_2)$ به صورت $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ می باشد.

37.rectangular
38.orthogonal



*المان دیفرانسیلی طول در مختصات کارتزین : $\begin{cases} d\ell_x = dx \\ d\ell_y = dy \end{cases}$, $\begin{cases} \overrightarrow{d\ell}_x = dx\hat{i} \\ \overrightarrow{d\ell}_y = dy\hat{j} \end{cases}$, $\overrightarrow{d\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$

*توجه: با توجه به المان بالا داریم:

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt = \|\vec{V}\| dt$$

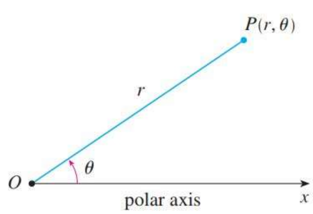
پس می توان گفت اگر $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j}$ معادله پارامتری منحنی مفروضی بر حسب t باشد آنگاه طول قوس منحنی در بازه $[t_0, t_1]$ از رابطه $\ell = \int_{t_0}^{t_1} d\ell = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{V}\| dt$ بدست می آید.

همچنین اگر طول قوس تابع $y = f(x)$ را در بازه $[a, b]$ بخواهیم می توان نوشت:

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \quad \text{و} \quad \ell = \int_a^b d\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

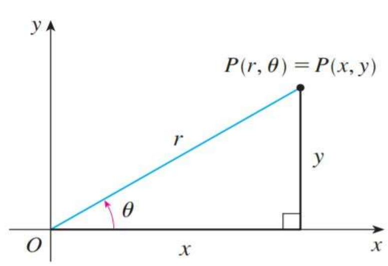
*المان دیفرانسیلی سطح در مختصات کارتزین: $ds = dA = dxdy$, $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{dA} = (dx\hat{i}) \times (dy\hat{j}) = dxdy\hat{k}$

دستگاه مختصات قطبی (Polar coordinate system)



راهی دیگر برای تعیین مکان یک نقطه بر روی صفحه انتخاب یک راستای مرجع و یک راستای دوار است که هر دو راستا در نقطه مبدأ مشترک خواهند بود. در این دستگاه که باز هم دو راستای مرجع داریم (اما راستای دوم بنابر موقعیت نقطه مورد نظر متغیر است) ابتدا نقطه ای را به عنوان مبدأ انتخاب میکنیم و سپس خطی از مبدأ به سمت نقطه مورد نظر رسم میکنیم و آن را دومین راستای مرجع میگیریم. قطب یا مبدا o و خط ox که آن را محور قطبی[39] گوییم در نظر میگیریم.مختصات هر نقطه در این دستگاه زوج مرتب (r, θ) است که در آن r فاصله نقطه از مبدا است (op) و θ زاویه بین ox و op که جهت مثبت اندازه گیری آن جهت مثلثاتی (پادساعتگرد)[40](c.c.w) می باشد.

باید دانست که در یک صفحه هرگاه مکان نقطه ای را معین کنیم، مکان نقطه مورد نظر صرف نظر از نوع دستگاه مختصات انتخابی ، یک نقطه در صفحه بیش نیست و باید توانست هر یک از مختص های یک دستگاه را از مختص های دستگاه دیگر بدست آورد؛ برای این امر میتونید به شکل زیر توجه کنید که طبق روابط مثلثاتی و فیثاغورث در مثلث قائم الزاویه می توان نوشت:



$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \overset{r \geq 0}{\Rightarrow} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

39.polar axis
40.counterclockwise

توجه داشته باشید که :

$$\begin{cases}\theta=0 \quad ; \quad x=0\,,y=0\\ \theta=\arctan(\frac{y}{x}) \ ; \ x>0,y\ge 0\\ \theta=\arctan(\frac{y}{x})+2\pi\,; x>0,y<0\\ \theta=\arctan(\frac{y}{x})+\pi \quad ; \quad x<0\end{cases}$$ و $$\begin{cases}\text{if } x=0,y>0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}\\ \text{if } x=0,y<0\Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$ و $$\begin{cases}\text{if } y=0,x>0\Rightarrow \theta=0\\ \text{if } y=0,x<0\Rightarrow \theta=\pi\end{cases}$$

*موقعیت نقاط در دستگاه قطبی پس از طی کردن هر 2π روی دایره تغییر نمی کند یعنی :

$p(r,\theta)=p(r,\theta+2k\pi)$ و $k\in\mathbb{Z}$

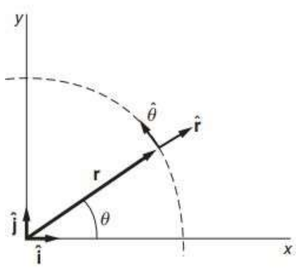
*ممکن است $r<0$ داده شود که طبق تعریف قابل قبول نیست.به صورت قراردادی به جای $r<0$ قرینه آن را درنظر می گیریم ومحور شعاعی آن را π رادیان دوران می دهیم یعنی موقعیت این نقطه را به صورت $p(-r,\theta+\pi)$ نمایش می دهیم.

بردارهای پایه

بردار یکه در جهت افزایش r (شعاعی) : $\hat{r}=\hat{e}_r$, بردار یکه در جهت افزایش θ (مماسی) : $\hat{\theta}=\hat{e}_\theta$

که برای این بردارها داریم : $\hat{e}_r\cdot\hat{e}_r=\hat{e}_\theta\cdot\hat{e}_\theta=1$ و $\hat{e}_r\cdot\hat{e}_\theta=0$

*امتداد r درامتداد بردارمکان بوده وامتداد θ عمود است برامتداد r وجهت آن به گونه ای است که باعث افزایش θ شود .



تبدیل بردارهای پایه مختصات قطبی به دکارتی :

$\hat{r}=\hat{e}_r=\cos(\theta)\hat{i}+\sin(\theta)\hat{j}$ و $\hat{\theta}=\hat{e}_\theta=-\sin(\theta)\hat{i}+\cos(\theta)\hat{j}$

*بردارهای یکه $\hat{e}_r,\hat{e}_\theta$ تابعی پارامتری از پارامتر θ هستند به عبارتی $\hat{e}_r=\hat{e}_r(\theta)$ و $\hat{e}_\theta=\hat{e}_\theta(\theta)$

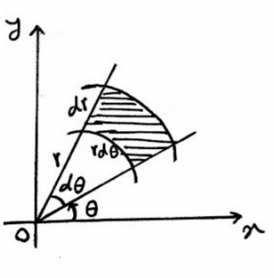
*فاصله دو نقطه $A(r_1,\theta_1)$ و $B(r_2,\theta_2)$ در مختصات قطبی به صورت $d=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$ می باشد.

* مشتق بردارهای پایه مختصات قطبی :

۱) بردارهای پایه تابعی از پارامتر θ اند و با مشتق گیری ازآنها نسبت به این پارامترداریم: $\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}=\hat{e}_\theta$ و $\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}=-\hat{e}_r$

۲) از آنجایی که بردارهای یکه با تغییر زمان تغییر می کنند (چراکه تابع θ هستند و θ نیز با گذشت زمان تغییر می کند) با مشتق گیری از این بردارها نسبت به زمان داریم : $\dot{\hat{e}}_r=\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ و $\dot{\hat{e}}_\theta=-\dot{\theta}\hat{e}_r$

*المان دیفرانسیلی طول در مختصات قطبی : $\begin{cases} d\ell_r = dr \\ d\ell_\theta = rd\theta \end{cases}$, $\begin{cases} \overrightarrow{d\ell_r} = dr\hat{r} \\ \overrightarrow{d\ell_\theta} = rd\theta\hat{\theta} \end{cases}$, $\overrightarrow{d\ell} = dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta$



*با توجه به شکل می توان دریافت که اگر زاویه $d\theta$ باشد آنگاه طول کمان مقابل آن $rd\theta$ می باشد.

مثلا اگر یک توزیع خطی روی محیط دایره (یک حلقه) داشته باشیم به دلیل اینکه در راستای شعاعی تغییر نداریم و فقط در راستای θ طول تغییر می کند داریم : $d\ell = rd\theta$

*المان دیفرانسیلی سطح در مختصات قطبی: $ds = rdrd\theta$ و $\overrightarrow{ds} = (dr\hat{e}_r)\times(rd\theta\hat{e}_\theta) = rdrd\theta\hat{k}$

*با توجه به شکل هم می توان مقدار اسکالر المان سطح را با ضرب dr و $rd\theta$ بدست آورد.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$$

پس برای انتگرال گیری دوگانه پس از تغییر متغیر طبق قضیه فوبینی خواهیم داشت: $dA = dxdy = Jdrd\theta = rdrd\theta$

*دانستیم که در مختصات قطبی داریم: $u_1 = r, u_2 = \theta$ و $\hat{u}_1 = \hat{e}_r, \hat{u}_2 = \hat{e}_\theta$ وبردار مکان $\vec{r} = r\hat{e}_r = r(\cos(\theta),\sin(\theta))$

آنگاه با توجه به این مطالب ضرایب متریک را برای دستگاه قطبی بدست می آوریم (در قسمت معرفی ضرایب متریک با بردار مکان در مختصات کارتزین و روابط تبدیل مختصات کارتزین به قطبی این ضرایب را بدست آوردیم)

$$h_r = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right\| = \left\|(\cos(\theta),\sin(\theta))\right\| = \sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = 1$$
$$h_\theta = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right\| = \left\|(-r\sin(\theta), r\cos(\theta))\right\| = \sqrt{(-r\sin(\theta))^2 + (r\cos(\theta))^2} = r$$

عملگرهای دیفرانسیلی برداری در مختصات قطبی

با فرض $f = f(r,\theta)$ به عنوان میدانی اسکالر و میدان برداری $\vec{F} = F_r(r,\theta)\hat{r} + F_\theta(r,\theta)\hat{\theta}$ که در آن F_r و F_θ که مؤلفه های میدان برداری می باشند تابعی دو متغیره از r,θ باشد داریم :

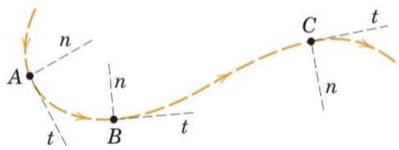
گرادیان : $\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta}$

لاپلاسین : $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$

دیورژانس: $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}$

دستگاه مختصات منطبق بر مسیر دو بعدی (مسیری)(مماسی-عمودی)(n-t)

(Normal and tangential coordinate system)(Path variables coordinate system)



یکی از روش های توصیف حرکت منحنی الخط ذرات ،استفاده از متغیرهای مسیر می باشد که اندازه گیری آن در طول مماس t و عمود n بر مسیر صورت می گیرد. این دستگاه در واقع دستگاه مختصات مکانی نیست بلکه برای توصیف حرکت ذره نسبت به مرجع متحرکی که روی آن در نظر گرفته می شود به کمک بردار های سرعت و شتاب قابل استفاده است . دستگاه n-t با حرکت ذره در طول مسیر مطابق شکل حرکت می کند به طوری که جهت بردار یکه $\hat{e}_t$ ($\hat{t}$ یا $\hat{T}$) به گونه ای تعریف می شود که راستایش موازی با مماس بر منحنی در هر لحظه باشد و سویش به سمت جهت حرکت ذره روی این منحنی باشد به عبارت دیگر بردار $\hat{e}_t$ در هر لحظه مماس بر مسیر حرکت ذره است و (با فرض پارامتری شدن خم بر حسب s)جهت آن در جهت مثبت محور s می باشد . راستای بردار یکه $\hat{e}_n$ ($\hat{n}$ یا $\hat{N}$) در هر لحظه عمود بر $\hat{e}_t$(در واقع بر منحنی) می باشد و جهت مثبت آن به سمت **مرکز انحنای**[41] هر نقطه از مسیر یا به عبارتی **تقعر منحنی** است.

*اگر خم **هموار** c با معادله پارامتری $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$ بیانگر یک منحنی مسطح باشد که حرکت ذره ای را درصفحه نشان می دهد آنگاه بردار سرعت[42] و شتاب[43] این ذره در مختصات کارتزین از روابط زیر بدست می آید:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}(t)=\dot{x}(t)\hat{i}+\dot{y}(t)\hat{j} \qquad \text{و} \qquad \vec{a}(t)=\ddot{\vec{r}}(t)=\dot{\vec{v}}(t)=\ddot{x}(t)\hat{i}+\ddot{y}(t)\hat{j}$$

وتندی[44]حرکت از رابطه $v=v(t)=\|\vec{v}\|=\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}$ ومقدار شتاب از رابطه $a=\|\vec{a}\|=\sqrt{(\ddot{x})^2+(\ddot{y})^2}$ بدست می آید.

اگر خم بر حسب طول قوس(s) پارامتری شده باشد $\vec{r}=\vec{r}(s)$ با توجه به تعریف پارامتر طول قوس (s پارامتری است که نشان دهنده طول مسیر پیموده شده روی منحنی از مبدأ (مسافت) می باشد) $s(t)=\int_a^t\|\vec{r}'(u)\|du$ و تعریف بردار سرعت $\|\vec{r}'(t)\|=\|\vec{v}(t)\|$ بدست می آید : $s(t)=\int_a^t\|\vec{v}(u)\|du$

حال با مشتق گیری از این پارامتر داریم : $\boxed{\frac{ds}{dt}=\dot{s}=\|\vec{v}\|=v}$

همچنین بردار های یکه $\hat{e}_t$ و $\hat{e}_n$ را با توجه به تعاریف بالا می توان بدست آورد.

41.center of curvature
42.Velocity vector
43.Acceleration vector
44.Speed

بردارهای پایه

بردار یکه مماس بر منحنی (Unit tangent vector) :

بردار یکه هم جهت با بردار $\vec{v}$
$$\hat{e}_t(t)=\hat{T}=\frac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{\vec{v}}{v}$$

اگر خم بر حسب طول قوس(s) پارامتری شده باشد با توجه به قاعده زنجیره ای داریم:
$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}$$

آنگاه بردار یکه مماس بر منحنی از رابطه $\hat{e}_t(s)=\frac{\vec{v}}{v}=\frac{v\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}}{v}=\frac{d\vec{r}}{ds}$ بدست می آید.
$$\boxed{\hat{e}_t(s)=\frac{d\vec{r}}{ds}}\qquad\boxed{\left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\|=\|\vec{r}'(s)\|=1}$$

بردار یکه عمود بر منحنی (Unit normal vector):

بردار یکه عمود بر $\vec{v}$
$$\hat{e}_n(t)=\hat{N}(t)=\frac{\frac{d\hat{e}_t}{dt}}{\left\|\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right\|}=\frac{\dot{\hat{e}}_t}{\|\dot{\hat{e}}_t\|}$$

برای خم پارامتری شده بر حسب طول قوس(s) به صورت مشابه است با این تفاوت که مشتق نسبت به s می باشد.

انحنا (خمیدگی) منحنی(curvature)

خمیدگی یک منحنی آهنگ چرخش بردار یکه مماس بر منحنی است یه به عبارت دیگر بیانگر میزان انحراف خم در یک نقطه از خط مماس بر منحنی یا بردار یکه مماس بر آن می باشدکه به صورت زیر تعریف می شود وآن را با kappa نشان می دهیم :
$$\kappa(t)=\frac{\|\dot{\hat{e}}_t\|}{\|\dot{\vec{r}}\|}=\frac{\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\|}{\|\dot{\vec{r}}\|^3}=\frac{\|\vec{v}\times\vec{a}\|}{\|\vec{v}\|^3}=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{\left((\dot{x})^2+(\dot{y})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

اگر منحنی بر حسب طول قوس پارامتری شده باشد :
$$\kappa(s)=\left\|\frac{d\hat{e}_t}{ds}\right\|=\left\|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right\|$$

*انحنای منحنی $y=f(x)$:
$$\kappa(x)=\frac{|f''(x)|}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

*انحنای منحنی قطبی $r=f(\theta)$:
$$\kappa(\theta)=\frac{\left|f^2+2(f')^2-f\cdot f''\right|}{\left(f^2+(f')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

*انحنای خط راست صفر است و انحنای دایره با شعاع r ، $\frac{1}{r}$ می باشد که از آن نتیجه می گیریم با افزایش شعاع دایره از انحنای آن کاسته می شود.

شعاع انحنای منحنی (Radius of curvature)

با شرط $\kappa \neq 0$ شعاع انحنای منحنی را به صورت $\rho = \frac{1}{\kappa}$ تعریف می کنیم.

*شعاع انحنای دایره با شعاع آن برابر است.

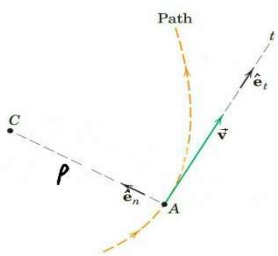
*روابط بین بردارهای یکه :

$$\hat{e}_n = \rho \frac{d\hat{e}_t}{ds} = \rho(s)\vec{r}''(s) \quad \text{و} \quad \|\hat{e}_t\| = \|\hat{e}_n\| = 1 \quad \text{و} \quad \hat{e}_t \cdot \hat{e}_n = 0$$

* مشتق بردار های یکه : $\frac{d\hat{e}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{e}_n$ و $\dot{\hat{e}}_t = \frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\hat{e}_t}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}\hat{e}_n = \frac{\dot{s}}{\rho}\hat{e}_n$ و $\dot{\hat{e}}_n = -\frac{\dot{s}}{\rho}\hat{e}_t$

*هر بردار را به صورت $\vec{A} = A_t\hat{e}_t + A_n\hat{e}_n$ در این دستگاه روی منحنی در صفحه می توان بیان نمود.

معادلات سرعت و شتاب در دستگاه منطبق بر مسیر



سرعت: $\|\vec{v}\| = v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ و $\vec{v} = v\hat{e}_t = \frac{ds}{dt}\hat{e}_t = \dot{s}\hat{e}_t$

شتاب: $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ و $\underbrace{a_n = \frac{v^2}{\rho} = kv^2 = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}}_{\text{centripetal acceleration}}$ و $\underbrace{a_t = \dot{v} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}}_{\text{tangential acceleration}}$ و $\vec{a} = a_t\hat{e}_t + a_n\hat{e}_n$

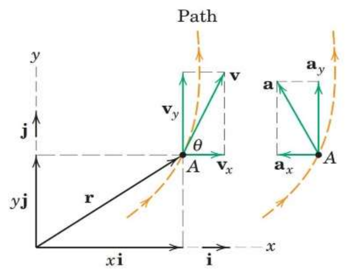
*وقتی ذره با مقدار تندی ثابت منحنی را طی می کندصرفا شتاب عمودی $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n$ دارد.

*در نقاط عطف مسیر چون شعاع انحنا نداریم پس $a_n = 0$

حرکت منحنی الخط در صفحه (Plane Curvilinear Motion)

این معادلات حرکت نسبت به دستگاه اینرسی بیان می شوند.

معادلات حرکت درمختصات دکارتی:

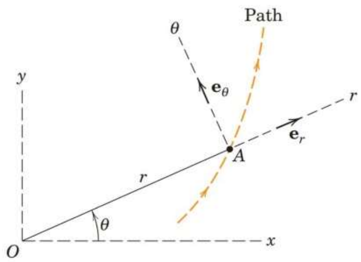


بردار مکان : $\vec{r}(t)=r_x\hat{i}+r_y\hat{j}=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$

بردار سرعت : $\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}$

بردار شتاب : $\vec{a}(t)=\ddot{\vec{r}}=\dot{\vec{v}}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}$

و همچنین داریم : $\|\vec{v}\|=v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ و $\|\vec{a}\|=a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$

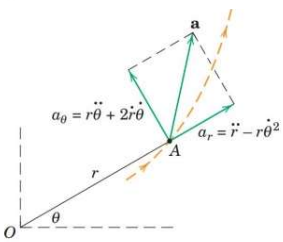


معادلات حرکت در مختصات قطبی :

بردار مکان : $\vec{r}(t)=r\hat{e}_r$

بردار سرعت : $\vec{v}(t)=v_r\hat{e}_r+v_\theta\hat{e}_\theta=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

بردار شتاب : $\vec{a}(t)=a_r\hat{e}_r+a_\theta\hat{e}_\theta=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$



و همچنین داریم : $\|\vec{v}\|=v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}$ و $\|\vec{a}\|=a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}$

تذکر: توجه داشته باشید که بردار مکان را با $\vec{r}$ نشان می دهیم و با r مختصات قطبی متفاوت است.

*توجه : شاید این سوال پیش بیاید که چرا بردار مکان در مختصات قطبی تنها بر حسب بردار یکه $\hat{e}_r$ بیان می شود علت آن است بر خلاف دستگاه کارتزین بردارهای یکه در فضا ثابت نیستند و با تغییر نقطه تغییر می کنند این مطلب از اینکه بردار $\hat{e}_r$ تابعی بر حسب θ هست نیز برداشت می شود.(روش اثبات دیگر، تساوی بردارهای مکان در دستگاه کارتزین و قطبی می باشد)

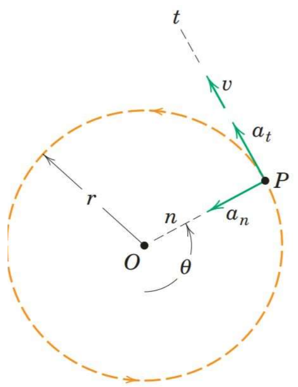
*جمله $2\dot{r}\dot{\theta}$ در فرمول شتاب در مختصات قطبی به مشتق دوم هیچ یک از مختصه های r,θ بستگی ندارد در واقع این جمله از مجموع دو جمله $\dot{r}\dot{\theta}$ بدست آمده که هر کدام منشأ جداگانه دارد یکی به خاطر تغییر جهت $\dot{r}\hat{e}_r$ و دیگری به خاطر تغییر اندازه $r\dot{\theta}$ می باشد. این عامل جالبی است که نقش مهمی در برخی پدیده های فیزیکی مانند حرکت مارپیچی آب هنگام فرو رفتن در یک سوراخ روی زمین و همچنین در هدایت موشک ها این شتاب حتما لحاظ می شود وگرنه موشک به هدف برخورد نمی کند. به این شتاب شتاب کریولیس[۴۵] گفته می شود . شتاب کریولیس بیانگر اختلاف شتاب بین دستگاه مختصات مرجع و دستگاه مختصات کمکی است و در حالت کلی به صورت $2\vec{\omega}_{b/a}\times\vec{v}_r$ نمایش داده می شود که در آن $\vec{\omega}_{b/a}$ سرعت زاویه ای دستگاه کمکی b نسبت به دستگاه مرجع a می باشد و $\vec{v}_r$ سرعت ذره نسبت به دستگاه کمکی می باشد به عبارتی اگر $\vec{\rho}$ بردار مکان ذره نسبت به دستگاه کمکی b باشد آنگاه $\vec{v}_r=\left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_b$

45.coriolis acceleration

*معادلات حرکت در مختصات منطبق بر مسیر در قسمت معرفی این مختصات بیان شد.

*حرکت دایره ای:

معادلات حرکت آن حالت خاصی از حرکت در مختصات قطبی می باشد به طوری که چون دایره است پس r ثابت است در نتیجه $\dot{r}=\ddot{r}=0$ و معادلات حرکت آن به صورت زیر خواهد بود:



$$\vec{r}(t)=r\hat{e}_r$$

$$\vec{v}(t)=r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a}(t)=-r\dot{\theta}^2\hat{e}_r+r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta$$

*توجه داشته باشید که در حرکت دایره ای دستگاه قطبی و منطبق بر مسیر مشابه یکدیگرند و فقط در این حالت است که مؤلفه های شتاب در دستگاه منطبق بر مسیر مماسی و شعاعی می توان گفت و داریم : $\hat{e}_t=\hat{e}_\theta$ و $\hat{e}_r=-\hat{e}_n$

$$\underbrace{\|\vec{v}\|=v=r\dot{\theta}=r\omega}_{\text{linear velocity}} \quad \text{و} \quad \underbrace{a_t=\dot{v}=r\ddot{\theta}=r\alpha}_{\text{tangential acceleration}} \quad \text{و} \quad \underbrace{a_n=\frac{v^2}{r}=v\dot{\theta}=v\omega=r\dot{\theta}^2=r\omega^2}_{\text{radial acceleration or centripetal acceleration}}$$

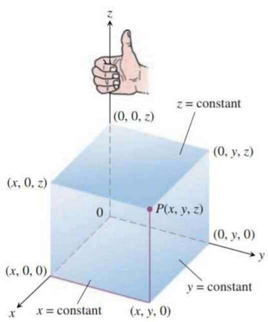
$$\vec{a}=r\alpha\hat{e}_t+r\omega^2\hat{e}_n$$

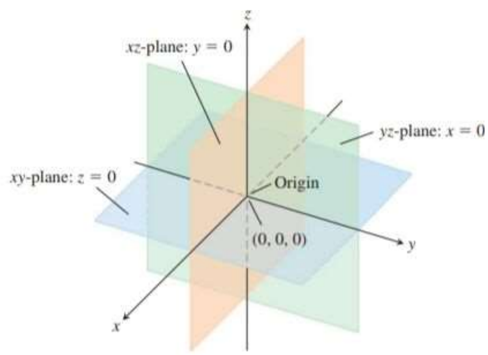
دستگاه مختصات سه بعدی (فضایی)

درفضا نیازمند سیستم های مختصاتی هستیم که تنها با ارائه سه پارامتر یا مختصه نقطه مورد نظر را به صورت منحصربه فرد ارائه دهد. $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)|x,y,z\in\mathbb{R}\}$

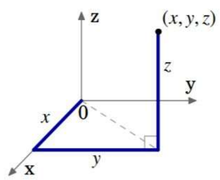
موقعیت ذره p در فضا را در هر لحظه t می توان توسط مختصات قائم (کارتزین) یا مختصات استوانه ای یا مختصات کروی و یا متغیر های مسیر در فضا توصیف نمود.

دستگاه مختصات کارتزین (دکارتی) سه بعدی (3D Cartesian coordinate system)



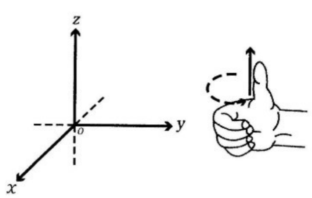


در مختصات کارتزین، سه صفحه دو به دو عمود بر هم انتخاب می‌شوند که در یک نقطه به نام مبدأ متقاطع اند.این سه صفحه فضا را به هشت قسمت تقسیم می کنند که به هر یک از آنها یک **"یک هشتم"** می گوییم و مختصات هر نقطه در فضا با فواصل آن از هر یک از این صفحات برابر خواهد بود که آن را با سه تایی مرتب $P(x,y,z)$ نشان می دهیم که این نقطه محل تقاطع سه صفحه $x=\text{constant}\ , y=\text{constant}\ , z=\text{constant}$ است به عبارت دیگر در این سیستم مختصات از سه راستا و یا خط دوبه دو عمود بر هم استفاده می شود. برای رسیدن از نقطه مرجع به نقطه مورد نظر تنها مقیدیم در موازات هر یک از این سه راستا حرکت کنیم و مقدار مسیر پیموده شده روی خطوط موازی این راستاها را به عنوان یک مختصه اعلام میکنیم. به دلیل اینکه با تشکیل یک مکعب مستطیل می‌توان این دستگاه را برپا کرده و موقعیت نقطه یا مکانی را مشخص نمود، مختصات مستطیلی به آن اطلاق می شود.



* هر دو راستای در نظر گرفته شده در این سیستم یک صفحه را می سازند و تصویر یک نقطه در آن صفحه متناظر صفر بودن مختصه ای است که راستای آن عمود بر این صفحه است.

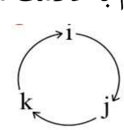
*دستگاه مختصات کارتزین راست گرد است یعنی شیوه بیان این سه مختصه به شکلی است که از قانون دست راست پیروی نماید. بدین صورت که شما مختصه اول را به دلخواه انتخاب کرده و با x نامگذاری میکنید اما نامگذاری برای تعیین مختصه دوم و سوم باید به گونه ای باشد که هرگاه دست راست خود را در راستای x قرار دادید و به سمت راستای دوم y خم کردید، انگشت شست شما نشان دهنده جهت مثبت راستای سوم z باشد.همچنین همانطور که خواهیم دید از **سمت راست** حاصل ضرب خارجی بردار یکه دو محور برابر با بردار یکه محور سوم خواهد بود.



بردار های پایه : بردار های یکه در جهت محورهای x وy وz به صورت $\hat{x}=\hat{i}=(1,0,0)$ و $\hat{y}=\hat{j}=(0,1,0)$ و $\hat{z}=\hat{k}=(0,0,1)$ می باشد. <u>این بردارها هم از نظر اندازه و هم از نظر جهت ثابت هستند.</u>

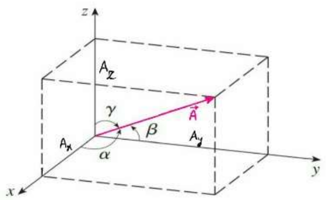
و برای این بردارها داریم : $\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$ و $\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{i}\cdot\hat{k}=\hat{j}\cdot\hat{k}=0$

و برای به خاطر سپردن ضرب خارجی این بردار ها باید به این نکته توجه داشت که ضرب خارجی این بردار ها به صورت **دوری** است یعنی در ضرب خارجی هر دو تای آنها با توجه به ترتیب ،اگر حرکت ما از بردار اول به دوم در جهت فلش باشد (ساعتگرد) حاصل ، بردار سوم با علامت مثبت و اگر خلاف جهت فلش باشد با علامت منفی است. برای مثال:



$\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$ و $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$ و $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ و $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$

*هربردار را می توان روی محورهای مختصات تصویر کرد(به مؤلفه هایش تجزیه کرد). مثلا اگر بردار $\vec{A}$ را در نظر بگیریم که $\|\vec{A}\| = A$ و این بردار با جهت مثبت محورx زاویه α و با جهت مثبت محورy زاویه β وبا جهت مثبت محورz زاویه γ بسازد آنگاه به $\cos(\alpha)$ و $\cos(\beta)$ و $\cos(\gamma)$ **کسینوس های هادی** می گوییم و می توان مؤلفه های بردار $\vec{A}$ را برحسب این کسینوس ها بدست آورد : $A_x = A\cos(\alpha), A_y = A\cos(\beta), A_z = A\cos(\gamma)$

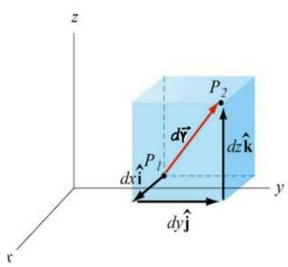


به طوری که $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = A$ همچنین رابطه $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$ برای این کسینوس های هادی برقرار است و داریم : $\cos(\alpha) = \frac{A_x}{A}, \cos(\beta) = \frac{A_y}{A}, \cos(\gamma) = \frac{A_z}{A}$

پس می توان به جای بردار یکه بردار $\vec{A}$، $\hat{e}_A = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$ را قرار داد.

*نمایش هر بردار در این دستگاه به صورت $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ و $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ و نمایش بردار مکان در این دستگاه به صورت $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ می باشد .

*فاصله دو نقطه $A = (x_1, y_1, z_1)$ و $B = (x_2, y_2, z_1)$ دراین دستگاه به صورت $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ می باشد.



*المان دیفرانسیلی طول در این دستگاه : $\begin{cases} d\ell_x = dx \\ d\ell_y = dy \\ d\ell_z = dz \end{cases}$ و $\begin{cases} \overrightarrow{d\ell_x} = dx\hat{i} \\ \overrightarrow{d\ell_y} = dy\hat{j} \\ \overrightarrow{d\ell_z} = dz\hat{k} \end{cases}$ و $\overrightarrow{d\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

*توجه: با توجه به المان بالا داریم:

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\,dt = \|\vec{V}\|dt$$

پس می توان گفت اگر $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ معادله پارامتری منحنی مفروضی بر حسب t باشد آنگاه طول قوس منحنی در بازه $[t_0, t_1]$ از رابطه $\ell = \int_{t_0}^{t_1} d\ell = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{V}\|dt$ بدست می آید.

*المان دیفرانسیلی سطح در این دستگاه :

$$\begin{cases} ds_x = dydz \\ ds_y = dxdz \\ ds_z = dxdy \end{cases} , \begin{cases} \overrightarrow{ds_x} = dydz\hat{i} \\ \overrightarrow{ds_y} = dxdz\hat{j} \\ \overrightarrow{ds_z} = dxdy\hat{k} \end{cases} , \overrightarrow{ds} = dydz\hat{i} + dxdz\hat{j} + dxdy\hat{k}$$

*المان دیفرانسیلی حجم در این دستگاه : $dv = dxdydz$

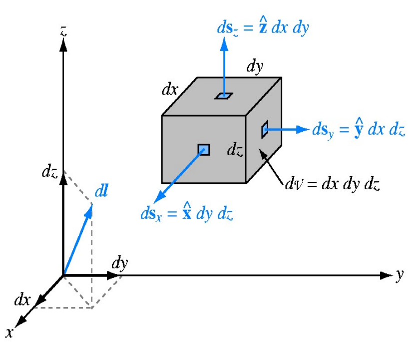


Figure 3-8

عملگرهای دیفرانسیلی برداری در دستگاه کارتزین

با فرض $f=f(x,y,z)$ به عنوان میدانی اسکالر و میدان برداری $\vec{F}=F_x(x,y,z)\hat{i}+F_y(x,y,z)\hat{j}+F_z(x,y,z)\hat{k}$ درمختصات کارتزین که در آن F_x و F_y و F_z که مؤلفه های میدان برداری می باشند،تابعی سه متغیره از (x,y,z)باشند داریم:

گرادیان : $$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

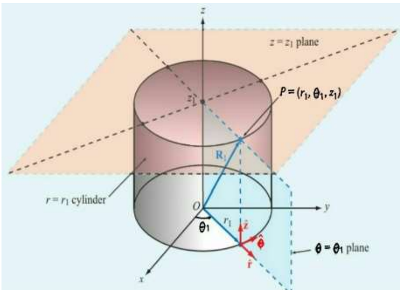
لاپلاسین: $$\Delta f=\vec{\nabla}^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

دیورژانس : $$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

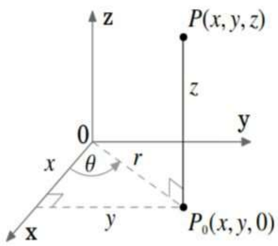
کرل : $$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

⚠ **تذکر مهم** :از آنجایی که این جزوه مبنای ریاضی دارد در مبحث مختصات استوانه ای پارامترهای r,θ,z و در مختصات کروی پارامترهای ρ,φ,θ معرفی شده اند در برخی از کتب مانند فیزیک و الکترومغناطیس به جای r در مختصات استوانه ای از ρ وبه جای θ از φ استفاده می شود از طرفی ممکن است در اکثر اوقات به جای پارامتر ρ در مختصات کروی از پارامتر R یا r استفاده شود یا در مختصات کروی θ و φ به جای هم تعریف شده باشند این پارامترها را نباید با هم اشتباه گرفت چراکه تمامی روابط و نکات در این جزوه بر حسب پارامتر معرفی شده (روی شکل) بیان می شوند و مقایسه آنها با روابط کتاب دیگر بدون دقت به تعریف پارامتر امکان اشتباه را در پی دارد پس کافیست به تعریف پارامتر ها دقت کنید تا در تشخیص آن دچار مشکل نشوید.

دستگاه مختصات استوانه ای (cylindrical coordinate system)



دستگاه مختصات استوانه ای تعمیمی از دستگاه مختصات قطبی دو بعدی در فضای سه بعدی است .در این دستگاه هر نقطه با یک سه تایی مرتب (r,θ,z) مشخص می شود.مختصات استوانه‌ای نوعی مختصات متعامد است که در آن یک نقطه، در فضا بر روی قاعده یک استوانه در نظر گرفته می‌شود. مکان آن نقطه بر اساس فاصله از محور z ،شعاع (r)، و ارتفاع استوانه (z) و زاویه‌ای که شعاع قاعده گذرنده از آن نقطه با محور x می‌سازد(θ) ، بیان می‌شود. صفحه ای مرجع که شامل نقطه مبدأ هست در نظر میگیریم و در آن برای تعیین هر نقطه در همان صفحه از دستگاه مختصات قطبی استفاده میکنیم .همچنین برای تعیین نقاط خارج از این صفحه راستایی عمود بر این صفحه انتخاب میکنیم و حرکت در راستای این راستا را نیز به عنوان مختصه سوم اعلام میکنیم. در واقع نقطه ای مانند $P=(r_1,\theta_1,z_1)$ نقطه تلاقی یک استوانه به شعاع $r=r_1$ و یک نیم صفحه بازاویه $\theta=\theta_1$ نسبت به محورxو یک صفحه موازی صفحهxy و گذرنده از $(0,0,z_1)$ می باشد. برای پوشش کامل فضای سه بعدی حدود این پارامترها عبارتند از



$$0\le r<\infty \quad \text{و} \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad \text{و} \quad -\infty<z<+\infty$$

در فیزیک و به ویژه در مباحث الکترومغناطیس و مخابرات به جای r و θ و z به ترتیب از حروف ρ ، φ ، z استفاده می‌شود . مختصات استوانه ای در ارتباط با اشیاء و پدیده هایی است که دارای تقارن چرخشی در محور طولی هستند، مانند جریان آب در یک لوله مستقیم با مقطع عرضی، توزیع گرما در سیلندر فلزی، میدان های الکترومغناطیسی تولید شده توسط یک جریان الکتریکی در یک سیم مستقیم طولانی و...ممکن است معادله یک رویه در یکی از دستگاه‌های ساده‌تر از معادله آن در دستگاه دکارتی باشد. در چنین مواردی استفاده از دستگاه مناسب باعث صرفه جویی در وقت می‌شود. این موضوع در حل انتگرالهای چندگانه اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. همان طور که می‌دانید حل برخی انتگرالهای سه گانه در دستگاه دکارتی گاهی غیر ممکن می‌باشد، ولی با یک تغییر مختصات ساده به راحتی می‌توانیم به جواب مورد نظر برسیم. در دستگاه مختصات استوانه‌ای، استوانه‌هایی که محورشان در امتداد محور z هستند معادلات بسیار ساده‌ای دارند. ($r=a$)

روابط تبدیل پارامترهای دستگاه استوانه ای به دکارتی:

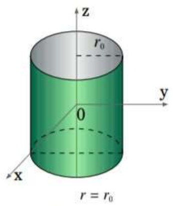
$$\begin{cases} x=r\cos(\theta) \\ y=r\sin(\theta) \\ z=z \end{cases}$$

روابط تبدیل پارامترهای دستگاه دکارتی به استوانه ای:

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z=z \end{cases}$$

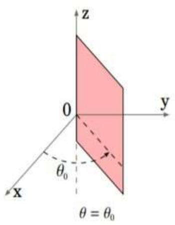
بقیه نکات مانند دستگاه قطبی است.

رویه های مهم در مختصات استوانه ای:

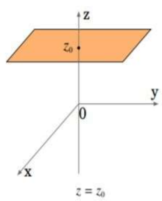


۱) معادله $r = r_0$ فقط دایره ای در صفحه xy را مشخص نمی‌کند بلکه استوانه‌ای کامل به شعاع r_0 حول محور z را توصیف میکند.

*اگر $r = 0$ باشد مختصه θ روی محورz بی معنی می شود و خود محور z با معادله r=0 معین می‌شود.



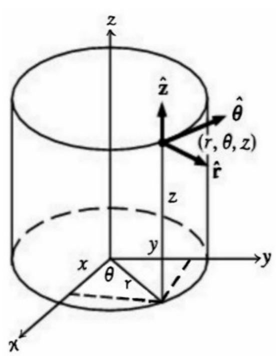
۲) معادله $\theta = \theta_0$ توصیف کننده صفحه‌ای(نیم صفحه ای)است عمود بر صفحه xy که شامل محور z و گذرنده از مبدأ است و زاویه‌ای به اندازه θ_0 رادیان با قسمت مثبت محور x می‌سازد .



۳) معادله $z = z_0$ صفحه ای موازی صفحه xy را توصیف می کند که به ار تفاع $|z_0|$ از مبدأ واقع شده است.

بردارهای پایه

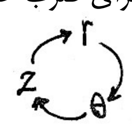
بردار یکه درجهت r(شعاعی): $\hat{r} = \hat{e}_r$ وبردار یکه درجهت θ(مماسی): $\hat{\theta} = \hat{e}_\theta$ و بردار یکه در جهت z: $\hat{z} = \hat{e}_z = \hat{k}$



*برای این بردارهای پایه داریم: $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1$ و $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_r = 0$

برای تعیین جهت مثبت راستای سوم از قانون دست راست تبعیت میکنیم یعنی اگر دست راست خود را در مرکز صفحه قرار دهید و چهار انگشت دست راست را که در راستای $\hat{r}$ قرار دارد را در جهت افزایش مختصه دوم $\hat{\theta}$ بگردانید شست شما جهت مثبت مؤلفه سوم $\hat{z}$ را نشان می دهد.

همچنین برای ضرب خارجی آنها مانند دستگاه کارتزین داریم:



$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_z \quad \text{و} \quad \hat{e}_\theta \times \hat{e}_z = \hat{e}_r \quad \text{و} \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta$$

تبدیل بردارهای پایه مختصات استوانه ای به کارتزین :

$$\hat{r} = \hat{e}_r = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j} \quad \text{و} \quad \hat{\theta} = \hat{e}_\theta = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j} \quad \text{و} \quad \hat{z} = \hat{e}_z = \hat{k}$$

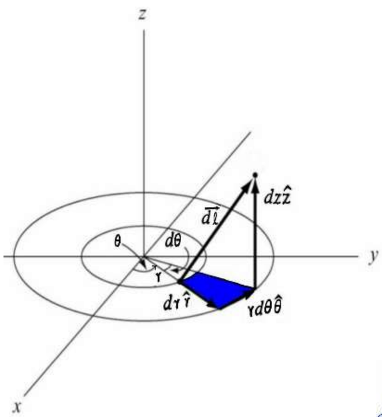
از آنجایی که بردارهای یکه با تغییر زمان تغییر می کنند با مشتق گیری از این بردارها نسبت به زمان داریم :

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad \text{و} \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r \quad \text{و} \quad \dot{\hat{e}}_z = 0$$

* نمایش هر بردار $\vec{A}$ در مختصات استوانه ای به صورت $\vec{A}=A_r\hat{r}+A_\theta\hat{\theta}+A_z\hat{z}$ و نمایش بردار مکان به صورت $\vec{r}=r\hat{e}_r+z\hat{e}_z$ می باشد.

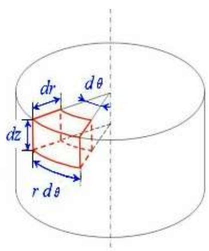
*فاصله دو نقطه $A(r_1,\theta_1,z_1)$ و $B(r_2,\theta_2,z_2)$ در مختصات استوانه ای

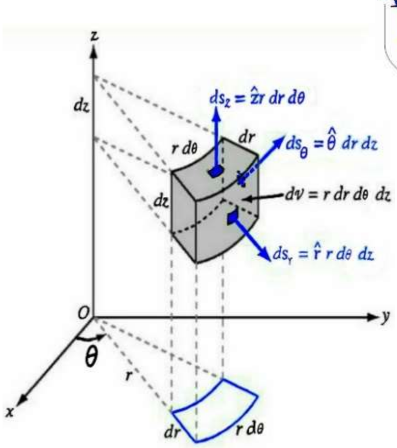
به صورت $d=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)+(z_2-z_1)^2}$ بدست می آید.



*المان دیفرانسیلی طول در مختصات استوانه ای:

$$\begin{cases} d\ell_r=dr \\ d\ell_\theta=rd\theta \\ d\ell_z=dz \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \vec{d\ell_r}=dr\hat{r} \\ \vec{d\ell_\theta}=rd\theta\hat{\theta} \\ \vec{d\ell_z}=dz\hat{z} \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{d\ell}=dr\hat{r}+rd\theta\hat{\theta}+dz\hat{z}$$





*المان دیفرانسیلی سطح در مختصات استوانه ای:

۱) المان سطح قاعده استوانه(دایره)(سطح عمود بر جهتz):

$ds_z=rdrd\theta$ و $\vec{ds_z}=rd\theta dr\hat{k}$

۲) المان سطح جانبی استوانه (سطح عمود بر جهتr):

$ds_r=rd\theta dz$ و $\vec{ds_r}=rd\theta dz\hat{r}$

۳) المان سطح مقطعی از استوانه(سطح عمود بر جهتθ) : $ds_\theta=drdz$ و $\vec{ds_\theta}=drdz\hat{\theta}$

*المان دیفرانسیلی حجم در مختصات استوانه ای: $dv=rdrd\theta dz$

ژاکوبین در مختصات استوانه ای:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=r$$

پس برای انتگرال گیری سه گانه پس از تغییر متغیر طبق قضیه فوبینی خواهیم داشت:

$$dv = dxdydz = |J| drd\theta dz = rdrd\theta dz$$

ضرایب مقیاس:

$$h_r = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right\| = 1 \quad \text{و} \quad h_\theta = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right\| = r \quad \text{و} \quad h_z = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right\| = 1$$

عملگرهای دیفرانسیلی برداری در مختصات استوانه ای:

با فرض $f = f(r,\theta,z)$ به عنوان میدانی اسکالر و میدان برداری $\vec{F} = F_r(r,\theta,z)\hat{r} + F_\theta(r,\theta,z)\hat{\theta} + F_z(r,\theta,z)\hat{z}$ درمختصات استوانه ای که در آن F_r و F_θ و F_z که مؤلفه های میدان برداری می باشند،تابعی سه متغیره از r,θ,z باشد داریم:

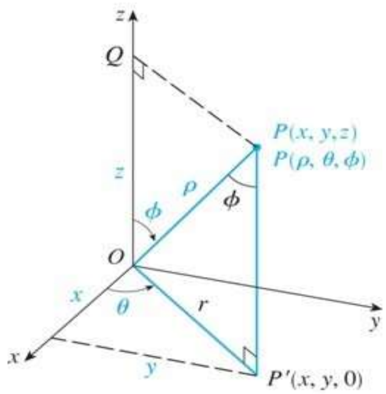
گرادیان : $$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

لاپلاسین : $$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

دیورژانس: $$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

کرل: $$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$$

دستگاه مختصات کروی (Spherical coordinate system)



این دستگاه به وسیله یک کره به مرکز مبدأ و شعاع ρ از نقطه ای که میخواهیم مختصات آن را نمایش دهیم تعریف می شود. (ρ,φ,θ)

ρ : فاصله نقطه p تا مبدأ (مرکز) (شعاع)

φ: زاویه op (بردار مکان) با جهت مثبت محور z

θ: زاویه تصویرop (op' یا r) در صفحه xy با جهت مثبت محورx

برای نشان دادن مکان یک نقطه در این مختصات مستقیما نقطه مبدأ را به آن نقطه مورد نظر متصل میکنیم و مقدار مسافت طی شده در آن راستا برای رسیدن به نقطه مورد نظر را به عنوان مختص اول اعلام میکنیم. با اینکار یک کره را با شعاعی برابر مختص به مرکز مبدأ مشخص کرده ایم که نقطه مورد نظر بر روی آن قرار دارد. برای بیان مختص دوم زاویه راستای شعاعی ای که در مرحله پیش طی کردیم را با جهت مثبت راستای عمود بر صفحه مرجع را اعلام میکنیم این باعث می شود که ما یک مخروط را با این کره تماس دهیم که به ما میگوید نقطه مورد نظر بر روی این دایره خواهد بود. برای تعیین نقطه دقیقا روی این دایره، راستای شعاعی را بر روی صفحه مرجع دوران می دهیم و بدین شکل خطی در صفحه مرجع خواهیم داشت که میتوانیم زاویه آن با راستای مرجع در صفحه تعیین کنیم. به عبارت دیگر مختصات یک نقطه در این مختصات از تلاقی یک کره و یک مخروط و یک نیم صفحه که در ادامه به طور کامل بررسی می کنیم بدست می آید. البته در تمام این موارد توجه کنید که هم قانون دست راست برقرار است و هم باید زوایا را از خطوط مرجع درجهت پادساعتگرد سنجید.

برای پوشش کامل فضای سع بعدی حدود این پارامترها عبارتند از: $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le\varphi\le\pi$ و $0\le\rho<\infty$

روابط تبدیل پارامترهای دستگاه کروی به دکارتی :

$$\begin{cases} x=\rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y=\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z=\rho\cos(\varphi) \end{cases}$$

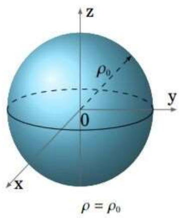
*برخی روابط مهم در تبدیلات بین دستگاه های کارتزین ،استوانه ای و کروی:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{r^2+z^2} \quad \text{و} \quad r=\sqrt{x^2+y^2}=\rho\sin(\varphi)$$

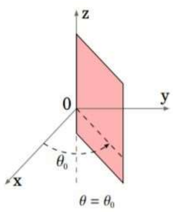
$$\tan(\theta)=\frac{y}{x} \quad \text{و} \quad \tan(\varphi)=\frac{r}{z} \quad \text{و} \quad \cos(\varphi)=\frac{z}{\rho}$$

رویه های مهم در مختصات کروی:

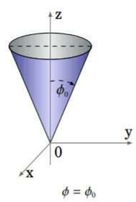
۱) معادله $\rho=\rho_0$ کره ای به مرکز مبدأ و شعاع ρ_0 را نشان می دهد.



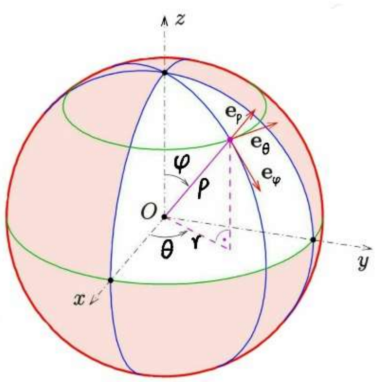
۲) معادله $\theta=\theta_0$ توصیف کننده صفحه‌ای(نیم صفحه ای)است عمود بر صفحه xy که شامل محور z و گذرنده از مبدأ است و زاویه‌ای به اندازه θ_0 رادیان با قسمت مثبت محور x می‌سازد .

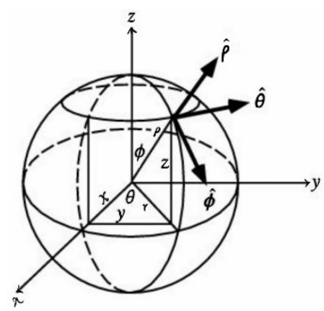


۳) معادله $\varphi=\varphi_0$ یک نیم مخروط با محور تقارن محورz و رأس مبدأ را نشان می دهد.



ب**بردارهای پایه**





بردار یکه در جهت افزایش ρ : $\hat{\rho}=\hat{e}_\rho$

بردار یکه درجهت افزایش φ : $\hat{\varphi}=\hat{e}_\varphi$

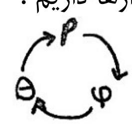
بردار یکه درجهت افزایش θ : $\hat{\theta}=\hat{e}_\theta$

برای این بردارهای یکه داریم :

$$\hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\rho=\hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_\varphi=\hat{e}_\theta\cdot\hat{e}_\theta=1 \quad \text{و} \quad \hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\varphi=\hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_\theta=\hat{e}_\theta\cdot\hat{e}_\rho=0$$

برای تعیین جهت مثبت راستای سوم از قانون دست راست تبعیت میکنیم یعنی اگر دست راست خود را در مرکز قرار دهید و چهار انگشت دست راست را که در راستای $\hat{\rho}$ قرار دارد را در جهت افزایش مختصه دوم $\hat{\varphi}$ بگردانید شست شما جهت مثبت مؤلفه سوم $\hat{\theta}$را نشان می دهد.

همچنین برای ضرب خارجی این بردارها داریم :



$$\hat{e}_\theta\times\hat{e}_\rho=\hat{e}_\varphi \quad \text{و} \quad \hat{e}_\varphi\times\hat{e}_\theta=\hat{e}_\rho \quad \text{و} \quad \hat{e}_\rho\times\hat{e}_\varphi=\hat{e}_\theta$$

*تبدیل بردارهای پایه مختصات کروی به کارتزین:

$$\hat{\rho}=\hat{e}_\rho=\sin(\varphi)\cos(\theta)\hat{i}+\sin(\varphi)\sin(\theta)\hat{j}+\cos(\varphi)\hat{k}$$
$$\hat{\varphi}=\hat{e}_\varphi=\cos(\varphi)\cos(\theta)\hat{i}+\cos(\varphi)\sin(\theta)-\sin(\varphi)\hat{k}$$
$$\hat{\theta}=\hat{e}_\theta=-\sin(\theta)\hat{i}+\cos(\theta)\hat{j}$$

همچنین برای این بردارها روابط زیر برقرار است :

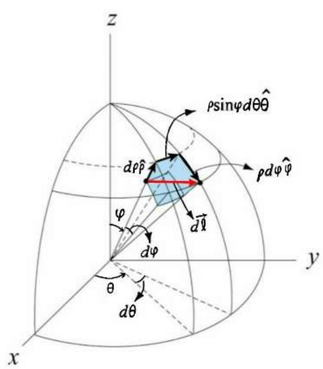
$$\hat{e}_\rho=\hat{e}_\rho(\varphi,\theta)\quad \text{و} \quad \hat{e}_\varphi=\hat{e}_\varphi(\varphi,\theta) \quad \text{و} \quad \hat{e}_\theta=\hat{e}_\theta(\theta) \qquad\qquad \frac{d\hat{e}_\rho}{d\varphi}=\hat{e}_\varphi \quad \text{و} \quad \frac{d\hat{e}_\varphi}{d\varphi}=-\hat{e}_\rho$$

از آنجایی که بردارهای یکه با تغییر زمان تغییر می کنند با مشتق گیری از این بردارها نسبت به زمان داریم :

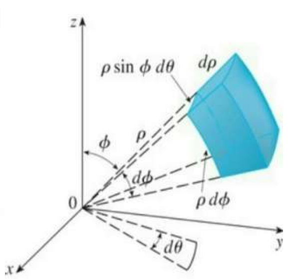
$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt}=\dot{\hat{e}}_\rho=\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi+\dot{\theta}\sin(\varphi)\hat{e}_\theta \;\text{و}\; \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt}=\dot{\hat{e}}_\varphi=\dot{\theta}\cos(\varphi)\hat{e}_\theta-\dot{\varphi}\hat{e}_\rho \;\text{و}\; \frac{d\hat{e}_\theta}{dt}=\dot{\hat{e}}_\theta=-\dot{\theta}\sin(\varphi)\hat{e}_\rho-\dot{\theta}\cos(\varphi)\hat{e}_\varphi$$

* نمایش هر بردار $\vec{A}$ در مختصات استوانه ای به صورت $\vec{A}=A_\rho\hat{\rho}+A_\varphi\hat{\varphi}+A_\theta\hat{\theta}$ و نمایش بردار مکان به صورت $\vec{r}=\rho\hat{e}_\rho$ می باشد.

*المان دیفرانسیلی طول در مختصات کروی:



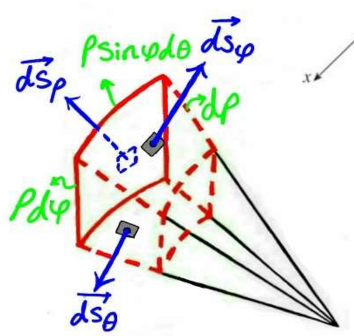
$$\begin{cases} d\ell_\rho=d\rho \\ d\ell_\varphi=\rho d\varphi \\ d\ell_\theta=\rho\sin(\varphi)d\theta \end{cases} \;\text{و}\; \begin{cases} \overrightarrow{d\ell_\rho}=d\rho\hat{\rho} \\ \overrightarrow{d\ell_\varphi}=\rho d\varphi\hat{\varphi} \\ \overrightarrow{d\ell_\theta}=\rho\sin(\varphi)d\theta\hat{\theta} \end{cases} \;\text{و}\; \overrightarrow{d\ell}=d\rho\hat{\rho}+\rho\sin(\varphi)d\theta\hat{\theta}+\rho d\varphi\hat{\varphi}$$



*المان دیفرانسیلی سطح در مختصات کروی:

۱) المان سطح عمود بر جهت ρ (سطح خارجی (جانبی)کره):

$$\overrightarrow{ds_\rho}=\rho^2\sin(\varphi)d\varphi d\theta\hat{\rho} \quad \text{و} \quad ds_\rho=\rho^2\sin(\varphi)d\varphi d\theta$$



۲) المان سطح عمود بر جهت φ (سطح جانبی مخروط):

$$\overrightarrow{ds_\varphi}=\rho\sin(\varphi)d\theta d\rho\hat{\varphi} \quad \text{و} \quad ds_\varphi=\rho\sin(\varphi)d\theta d\rho$$

۳) المان سطح عمود بر جهت θ : $ds_\theta=\rho d\varphi d\rho$ و $\overrightarrow{ds_\theta}=\rho d\varphi d\rho\hat{\theta}$

**المان دیفرانسیلی حجم در مختصات کروی : $dv=\rho^2\sin(\varphi)d\varphi d\theta d\rho$

*زاویه فضایی: در هندسه دو بعدی زاویه را می توان قوسی از یک دایره در نظر گرفت. در هندسه فضایی زاویه فضایی را می توان قوسی از یک کره در نظر گرفت که آن را با Ω نشان می دهند و واحد آن استرادیان است.زاویه فضایی جسم متناسب است با مساحت بخشی از کره که جسم پوشانده است تقسیم بر شعاع کره به توان دو $\Omega=\frac{S}{R^2}$

در مختصات کروی جزء دیفرانسیلی زاویه فضایی برابر است با $d\Omega=\sin(\varphi)d\theta d\varphi$

ژاکوبین در مختصات کروی :

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin(\varphi)\cos(\theta) & \rho\cos(\varphi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta)\\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \rho\cos(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)\\ \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) & 0\end{vmatrix}=-\rho^2\sin(\varphi)$$

پس برای انتگرال گیری سه گانه پس از تغییر متغیر طبق قضیه فوبینی خواهیم داشت:

$$dv=dxdydz=|J|d\rho d\theta d\varphi=\rho^2\sin(\varphi)d\rho d\theta d\varphi$$

ضرایب مقیاس:

$$h_\rho=\left\|\frac{\partial\vec r}{\partial\rho}\right\|=\left\|\left(\frac{\partial x}{\partial\rho},\frac{\partial y}{\partial\rho},\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2}=\sqrt{\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta)+\sin^2(\varphi)\sin^2(\theta)+\cos^2(\varphi)}=1$$

$$h_\theta=\left\|\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}\right\|=\left\|\left(\frac{\partial x}{\partial\theta},\frac{\partial y}{\partial\theta},\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2}=\sqrt{\rho^2\sin^2(\varphi)\sin^2(\theta)+\rho^2\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta)+0}=|\rho\sin(\varphi)|=\rho\sin(\varphi)$$

$$h_\varphi=\left\|\frac{\partial\vec r}{\partial\varphi}\right\|=\left\|\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi},\frac{\partial y}{\partial\varphi},\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}=\sqrt{\rho^2\cos^2(\varphi)\cos^2(\theta)+\rho^2\cos^2(\varphi)\sin^2(\theta)+\rho^2\sin^2(\varphi)}=\rho$$

عملگرهای دیفرانسیلی در مختصات کروی :

با فرض $f=f(\rho,\varphi,\theta)$ به عنوان میدانی اسکالر و میدان برداری $\vec F=F_\rho(\rho,\varphi,\theta)\hat\rho+F_\varphi(\rho,\varphi,\theta)\hat\varphi+F_\theta(\rho,\varphi,\theta)\hat\theta$ درمختصات کروی که در آن F_ρ و F_φ و F_θ که مؤلفه های میدان برداری می باشند،تابعی سه متغیره از ρ,φ,θ باشند داریم:

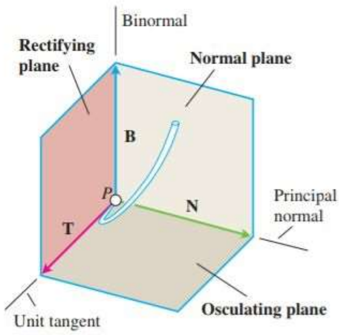
گرادیان :
$$\vec\nabla f=\frac{\partial f}{\partial\rho}\hat\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat\varphi+\frac{1}{\rho\sin(\varphi)}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat\theta$$

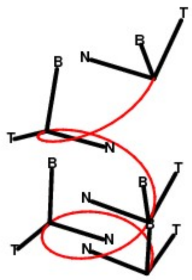
لاپلاسین :
$$\vec\nabla^2 f=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin(\varphi)\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin^2(\varphi)}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

دیورژانس :
$$\vec\nabla\cdot\vec F=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2F_\rho\right)+\frac{1}{\rho\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin(\varphi)F_\varphi\right)+\frac{1}{\rho\sin(\varphi)}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}$$

کرل :
$$\vec\nabla\times\vec F=\frac{1}{\rho^2\sin(\varphi)}\begin{vmatrix}\hat\rho & \rho\hat\varphi & \rho\sin(\varphi)\hat\theta\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\theta}\\ F_\rho & \rho F_\varphi & \rho\sin(\varphi)F_\theta\end{vmatrix}$$

دستگاه مختصات منطبق بر مسیر سه بعدی (TNB)





دستگاه مختصات منطبق بر مسیر در فضای سه بعدی تعمیمی از همان دستگاه مختصات در فضای دو بعدی است که در واقع با اضافه کردن بردار یکه سومی که با $\hat{B}$ نشان می دهیم سه تایی مرتب $(\hat{T},\hat{N},\hat{B})$ یا $(\hat{e}_t,\hat{e}_n,\hat{e}_b)$ یک پایه راستگرد متعامد تشکیل می دهد که به آن **کنج فرنه** یا **قاب فرنه**[۴۶] می گویند.همان طور که قبلا گفته شد این دستگاه مختصات منطبق بر مسیر(متحرک) بوده و برای توصیف معادلات حرکت یک ذره در فضا به کار می رود.تمامی مطالبی که برای مختصات منطبق بر مسیر دو بعدی گفته شد در این مختصات برقرار است پس از تکرار آن خودداری میکنیم.

بردار های پایه

بردار یکه مماس (Unit tangent vector) : $\hat{e}_t=\hat{t}=\hat{T}$

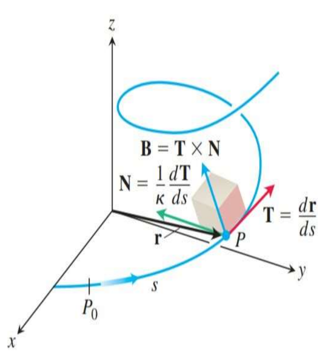
در این دستگاه چون دو بردار عمود داریم به بردار $\hat{N}$ بردار یکه قائم اصلی (اول) و به بردار $\hat{B}$ که در ادامه معرفی خواهیم کرد بردار یکه قائم فرعی (دوم) می گوییم.

بردار یکه قائم اصلی (Unit principal vector) : $\hat{e}_n=\hat{n}=\hat{N}$

بردار یکه قائم فرعی (Unit Binormal vector)

بردار یکه ای است $\|\hat{B}\|=1$ که همواره بر دو بردار $\hat{T}$ و $\hat{N}$ عمود است: $\hat{e}_b=\hat{b}=\hat{B}=\hat{T}\times\hat{N}$

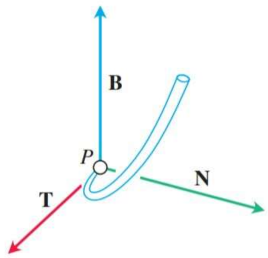
در حالتی که خم c بر حسب پارامتر t با ضابطه $\vec{r}(t)$ پارامتری شده باشد این بردار را می توان به طور مستقیم و بدون محاسبه $\hat{T}\times\hat{N}$ به صورت $\hat{e}_b(t)=\hat{B}(t)=\dfrac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\|}=\dfrac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{\kappa\|\dot{\vec{r}}\|^3}$ بدست آورد.



برای تعیین جهت مثبت راستای $\hat{B}$ از قانون دست راست تبعیت میکنیم یعنی اگر دست راست خود را در نقطه P قرار دهید و چهار انگشت دست راست را که در راستای $\hat{T}$ قرار دارد را در جهت افزایش مختصه دوم $\hat{N}$ بگردانید شست شما جهت مثبت مؤلفه سوم $\hat{B}$ را نشان می دهد.

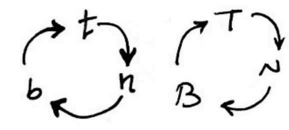
46.Frenet’s frame

سه بردار $(\hat{e}_t, \hat{e}_n, \hat{e}_b)$ که کنج فرنه را پدید می آورند متعامد و یکه اند و برای ضرب خارجی مانند دستگاه های دیگر دارای جایگشت دورانی اند و می توان روابط زیر را برای آنها در نظر گرفت:

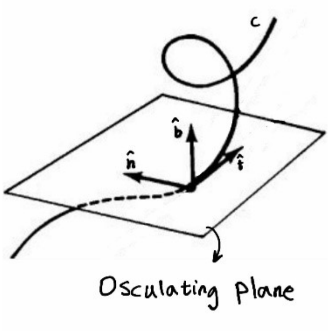


$$\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = \hat{e}_n \cdot \hat{e}_n = \hat{e}_b \cdot \hat{e}_b = 1 \quad , \quad \hat{e}_t \cdot \hat{e}_n = \hat{e}_t \cdot \hat{e}_b = \hat{e}_n \cdot \hat{e}_b = 0$$

$$\hat{e}_t \times \hat{e}_n = \hat{e}_b \;\; , \;\; \hat{e}_n \times \hat{e}_b = \hat{e}_t \;\; , \;\; \hat{e}_b \times \hat{e}_t = \hat{e}_n$$



سه بردار یاد شده در فضا سه صفحه عمود بر هم را پدید می آورند:

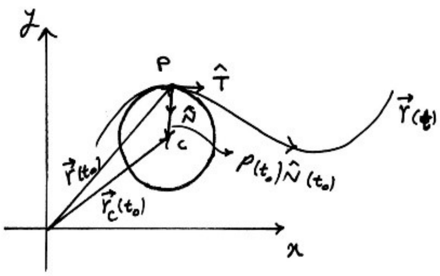


۱. صفحه بوسان(Osculating plane): این صفحه توسط بردارهای $\hat{T}$ و $\hat{N}$ پدید می آید و نرمال آن بردار $\hat{B}$ است.

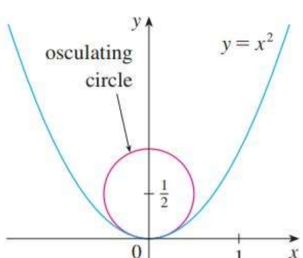
۲. صفحه قائم(Normal plane): این صفحه توسط بردارهای $\hat{N}$ و $\hat{B}$ پدید می آید و نرمال آن بردار $\hat{T}$ است.

۳. صفحه راستگرد(اصلاحی)(Rectifying palne): این صفحه توسط بردارهای $\hat{T}$ و $\hat{B}$ پدید می آید و نرمال آن بردار $\hat{N}$ است.

دایره بوسان(Osculating circle)



دایره ای است در صفحه بوسان که از نقطه $\vec{r}(t_0)$ روی منحنی می گذرد و بر منحنی مماس است. شعاع دایره بوسان در این نقطه برابر $\rho(t_0)$ و مرکز این دایره همان مرکز انحنای منحنی در این نقطه است که در طرف تقعر منحنی و روی خط عمود بر منحنی قرار دارد و از رابطه $\vec{r}_c(t_0) = \vec{r}(t_0) + \rho(t_0)\hat{N}(t_0)$ بدست می آید. انحنای دایره بوسان در این نقطه با انحنای منحنی برابر است. این دایره بیش از هر منحنی دیگری به منحنی نزدیک است و بهترین توصیف را از رفتار منحنی در نقطه مورد نظر دارد .



*اگر منحنی به صورت $y = f(x)$ بیان گردد آنگاه مرکز دایره بوسان در نقطه p به صورت زیر بدست می آید:

$$x_c = x(p) - \frac{y'(p)\left(1+\left(y'(p)\right)^2\right)}{y''(p)} \quad , \quad y_c = y(p) + \frac{1+\left(y'(p)\right)^2}{y''(p)}$$

تاب (Torsion)

تاب معیاری از پیچش خم است به عبارت دیگر تاب میزان انحراف خم از صفحه بوسان است.پس تاب را می توان آهنگ چرخش بردار نسبت بیان نمود و آن را با تاو τ نشان می دهیم : $|\tau(s)| = \left\|\frac{d\hat{B}}{ds}\right\|$ و $\frac{d\hat{B}(s)}{ds} = -\tau(s)\hat{N}(s)$

در حالتی که خم c بر حسب پارامتر t با ضابطه $\vec{r}(t)$ پارامتری شده باشد تاب را می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\tau(t) = \frac{\dot{\vec{r}}\cdot\left(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}\right)}{\left\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right\|^2} = \frac{\vec{v}\cdot\left(\vec{a}\times\dot{\vec{a}}\right)}{\left\|\vec{v}\times\vec{a}\right\|^2}$$

*اگر $\tau > 0$ باشد جهت حرکت خم از صفحه بوسان به سمت (در جهت) بردار $\hat{B}$ است یا به عبارت دیگر **راستگرد** است.

*برای منحنی های مسطح همواره $\tau = 0$ است.پس می توان نتیجه گرفت سه بردار $\dot{\vec{r}}\,,\,\ddot{\vec{r}}\,,\,\dddot{\vec{r}}$ هم صفحه خواهند بود اگر $\dot{\vec{r}}\cdot\left(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}\right) = 0$ که قبلا در حالت کلی در قسمت ضرب مختلط بیان شده بود.

*اگر واحد طول m باشد واحد تاب و انحنا $\frac{1}{m}$ است.

قضیه اساسی منحنی های فضایی

اگر c_1 و c_2 دو منحنی مفروض باشند که هر دو دارای انحنای $\kappa(s)$ و تاب $\tau(s)$ باشند و همواره $\kappa(s) \neq 0$ در این صورت این منحنی ها همنهشت اند یعنی یکی را می توان با حرکات جسم صلب (انتقال و دوران) طوری تغییر داد که بر دیگری منطبق شود.

*اگر خمیدگی هرگز صفر نشود شکل خم به وسیله توابع انحنا و تاب $(\kappa(s)\,,\,\tau(s))$ تعیین می شود.

دو نتیجه مهم: با فرض $\kappa(s) \neq 0$:

۱.اگر $\tau = 0$ و κ عدد ثابت باشد آنگاه منحنی مورد نظر دایره است.

۲. اگر $\tau \neq 0$ و عدد ثابت باشد آنگاه منحنی مورد نظر یک مارپیچ دوار است.

در واقع مارپیچ $\vec{r}(t) = \left(a\cos(t), a\sin(t), bt\right)\,,\, a, b > 0$ را می توان مثال نقضی برای گزاره "اگر انحنا ثابت باشد منحنی دایره است" بیان کرد.

فرمول های فرنه-سره (Frenet-serret)

سه رابطه بین بردار های یکه $\hat{T},\hat{N},\hat{B}$ و κ و τ :

اگر خم بر حسب طول قوس s پارامتری شده باشد:

$$\frac{d\hat{T}}{ds}=\kappa\hat{N}\quad,\quad\frac{d\hat{N}}{ds}=\tau\hat{B}-\kappa\hat{T}\quad,\quad\frac{d\hat{B}}{ds}=-\tau\hat{N}$$

فرمول های بالا را به صورت ماتریسی هم می توان نمایش داد:

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\hat{T}\\\hat{N}\\\hat{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{T}\\\hat{N}\\\hat{B}\end{bmatrix}$$

و اگر خم بر حسب پارامتر t پارامتری شده باشد:

$$\frac{d\hat{T}}{dt}=\kappa v\hat{N}\quad,\quad\frac{d\hat{N}}{ds}=\left(\tau\hat{B}-\kappa\hat{T}\right)v\quad,\quad\frac{d\hat{B}}{ds}=-\tau v\hat{N}\quad,\quad v=\|\vec{v}\|$$

حرکت منحنی الخط در فضا (Space Curvilinear Motion)

معادلات حرکت درمختصات دکارتی:

بردار مکان : $\vec{r}(t)=r_x\hat{i}+r_y\hat{j}+r_z\hat{k}=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$

بردار سرعت : $\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$

بردار شتاب : $\vec{a}(t)=\ddot{\vec{r}}=\dot{\vec{v}}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k}$

همچنین اندازه سرعت و شتاب از روابط مقابل بدست می آید: $\|\vec{v}\|=v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ و $\|\vec{a}\|=a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

معادلات حرکت در مختصات استوانه ای :

بردار مکان : $\vec{r}(t)=r\hat{e}_r+z\hat{e}_z$

بردار سرعت : $\vec{v}(t)=v_r\hat{e}_r+v_\theta\hat{e}_\theta+v_z\hat{e}_z=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta+\dot{z}\hat{e}_z$

بردار شتاب : $\vec{a}(t)=a_r\hat{e}_r+a_\theta\hat{e}_\theta+a_z\hat{e}_z=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta+\ddot{z}\hat{e}_z$

همچنین اندازه سرعت و شتاب از روابط مقابل بدست می آید: $\|\vec{v}\|=v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2+v_z^2}$ و $\|\vec{a}\|=a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2+a_z^2}$

معادلات حرکت در مختصات کروی :

بردار مکان : $\vec{r}(t)=\rho\hat{e}_\rho$

بردار سرعت : $\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}=v_\rho\hat{e}_\rho+v_\varphi\hat{e}_\varphi+v_\theta\hat{e}_\theta=\dot{\rho}\hat{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi+\rho\dot{\theta}\sin(\varphi)\hat{e}_\theta$

بردار شتاب : $\vec{a}(t)=\ddot{\vec{r}}=\dot{\vec{v}}=a_\rho\hat{e}_\rho+a_\varphi\hat{e}_\varphi+a_\theta\hat{e}_\theta$

$$\vec{a}(t)=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2-\rho\dot{\theta}^2\sin^2(\varphi)\right)\hat{e}_\rho+\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}-\rho\dot{\theta}^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right)\hat{e}_\varphi+\left(2\dot{\rho}\dot{\theta}\sin(\varphi)+2\rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi)+\rho\ddot{\theta}\sin(\varphi)\right)\hat{e}_\theta$$

همچنین اندازه سرعت و شتاب از روابط مقابل بدست می آید: $\|\vec{v}\|=\sqrt{v_\rho^2+v_\varphi^2+v_\theta^2}$ و $\|\vec{a}\|=\sqrt{a_\rho^2+a_\varphi^2+a_\theta^2}$

بردار سرعت زاویه ای دستگاه های مختصات استوانه ای ، کروی و مسیری نسبت به دستگاه اینرسی

با توجه به قضیه اویلر ثابت می شود که دوران های کوچک بردارند در نتیجه سرعت زاویه ای ω یک بردار است پس در دستگاه اینرسی قابل بیان است. اگر دستگاه اینرسی xyz را در نظر بگیریم که بردار های یکه $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ پایه ثابت در این دستگاه باشند آنگاه بردار سرعت زاویه ای دستگاه a با بردار های پایه $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{a}_3$ که نسبت به دستگاه اینرسی xyz می چرخد از رابطه زیر بدست می آید:

$$\vec{\omega}=\left(\dot{\hat{a}}_2\cdot\hat{a}_3\right)\hat{a}_1+\left(\dot{\hat{a}}_3\cdot\hat{a}_1\right)\hat{a}_2+\left(\dot{\hat{a}}_1\cdot\hat{a}_2\right)\hat{a}_3$$

برای مثال بردار سرعت زاویه ای دستگاه مختصات استوانه ای به صورت زیر بدست می آید :

$$\hat{a}_1=\hat{r}=\cos(\theta)\hat{i}+\sin(\theta)\hat{j} \quad \text{و} \quad \hat{a}_2=\hat{\theta}=-\sin(\theta)\hat{i}+\cos(\theta)\hat{j} \quad \text{و} \quad \hat{a}_3=\hat{z}=\hat{k}$$

$$\dot{\hat{a}}_1=\dot{\hat{r}}=\dot{\theta}\hat{\theta} \quad \text{و} \quad \dot{\hat{a}}_2=\dot{\hat{\theta}}=-\dot{\theta}\hat{r} \quad \text{و} \quad \dot{\hat{a}}_3=\dot{z}=0$$

$$\vec{\omega}=\left(\left(-\dot{\theta}\hat{r}\right)\cdot\hat{k}\right)\hat{r}+0+\left(\left(\dot{\theta}\hat{\theta}\right)\cdot\hat{\theta}\right)\hat{k}=\dot{\theta}\hat{k}$$

به صورت مشابه بردار سرعت زاویه ای در دستگاه کروی به صورت زیر می باشد:

$$\vec{\omega}=\dot{\theta}\cos(\varphi)\hat{e}_\rho-\dot{\theta}\sin(\varphi)\hat{e}_\varphi+\dot{\varphi}\hat{e}_\theta$$

و بردار سرعت زاویه ای در دستگاه منطبق بر مسیر به صورت $\vec{\omega}=\frac{\dot{s}}{\rho}\hat{e}_b=\frac{\|\vec{v}\|}{\rho}\hat{e}_b$ می باشد.

*بردار $\vec{\omega}$ عمود بر صفحه دوران بوده و جهتش از قاعده دست راست پیروی می کند.

تبدیل مشتق اول:

اگر دستگاه مرجع XYZ را با a و دستگاه مرجع xyz را با b نشان دهیم آنگاه مشتق اول هر برداری مانند $\vec{A}$ در a و b به واسطه رابطه رو به رو به هم ربط دارند:

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_b + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{A}$$

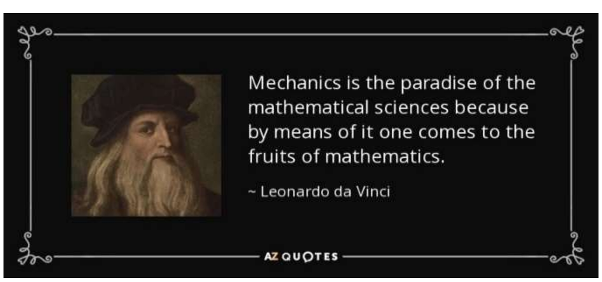
که در آن $\vec{\omega}_{b/a}$ سرعت زاویه ای دستگاه b نسبت به a است.

یکی از کاربردهای رابطه بالا محاسبه مشتق بردارهای یکه دستگاه های مختصات استوانه ای و کروی نسبت به دستگاه اینرسی کارتزین است و با استفاده از آن می توان فرمول های سرعت و شتاب را در این دستگاه ها بدست آورد. برای مثال بردار مکان در دستگاه استوانه ای به صورت $\vec{r} = r\hat{e}_r + z\hat{k}$ می باشد برای محاسبه بردار سرعت باید از این بردار نسبت به زمان (از منظر دستگاه اینرسی) مشتق بگیریم:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\hat{e}_r\right) + \frac{d}{dt}\left(z\hat{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r + \dot{z}\hat{k}$$

حال باید مشتق $\hat{e}_r$ را نسبت به دستگاه اینرسی بدست بیاوریم . با توجه به اینکه $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$ بدست می آید:

$$\dot{\hat{e}}_r = 0 + \vec{\omega} \times \hat{e}_r = \left(\dot{\theta}\hat{k}\right) \times \hat{e}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{k}$$

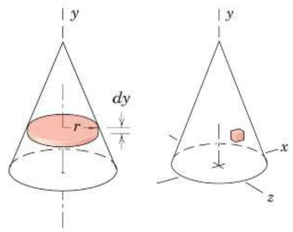


مکانیک بهشت ریاضیات است چرا که در اینجاست که ما به ثمرات و کاربردهای ریاضیات پی می بریم

"لئوناردو داوینچی"

نکات المان گیری

1.مرتبه جزء (المان):

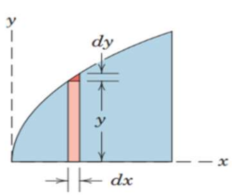


تا حد امکان جزء دیفرانسیلی با مرتبه پایین تر را باید انتخاب کرد چراکه انتگرال گیری آن راحت تر باشد.مثلا برای شکل مخروطی به جای $dv = dxdydz$ از $dv = \pi r^2 dy$ استفاده شود چراکه با فرض المان اول نیازمند انتگرال گیری سه گانه هستیم و با فرض المان دوم انتگرال یگانه.

2.پیوستگی:

در صورت امکان جزء را طوری انتخاب میکنیم که بتوان از آن طی یک مرحله پیوسته انتگرال گرفت و این انتگرال کل شکل را پوشش دهد. (یعنی مجبور نشویم دو یا چند انتگرال بگیریم)

3.صرف نظر از جمله های مرتبه بالا که مقادیر بسیار کوچک دارند:



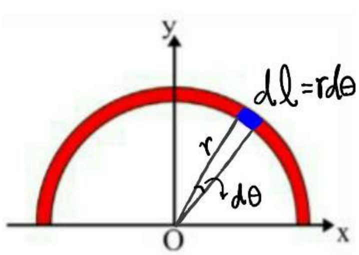
مثلا در المان رو به رو صرف نظر از $\frac{1}{2}dxdy$ ونوشتن المان سطح به صورت صرفاً $dA = ydx$

4.انتخاب دستگاه مختصات مناسب

از دستگاه مختصاتی استفاده می کنیم که به بهترین صورت با مرزهای شکل سازگار است.مثلا برای شکل های دایروی دستگاه قطبی مناسب تر است.

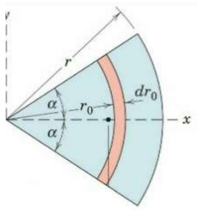
برخی از المان گیری های پرکاربرد

۱.المان طول حلقه نازک دایروی



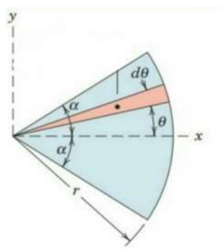
همان طور که در شکل نشان داده شده است المان طول برای یک حلقه نازک دایروی به صورت $d\ell = rd\theta$ می باشد که برای اثبات می توان آن را معادل با طول کمان مقابل به زاویه $d\theta$ در نظر گرفت.

۲.المان سطح قطاع دایروی



به غیر از المان سطح در مختصات قطبی $dA = rdrd\theta$ که در مسائل منجر به انتگرال دوگانه می شود داریم:

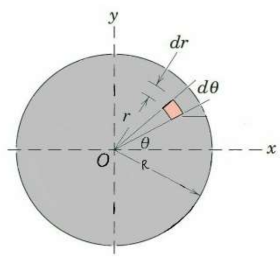
الف)مطابق شکل المان به صورت $dA = 2\alpha r_0 dr_0$ می باشد.



ب)مطابق شکل المان همان قطاع به فرم دیگر $dA = \frac{r^2}{2}d\theta$ می باشد.

روش اول اثبات : می دانیم که مساحت قطاع از رابطه $A = \frac{r^2}{2}\theta$ بدست می آید در نتیجه $dA = \frac{r^2}{2}d\theta$

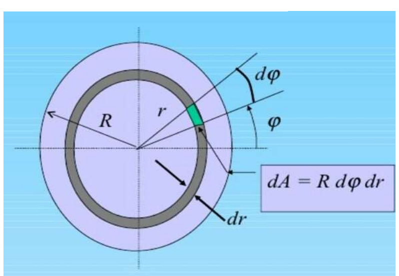
روش دوم : اگر المان رو به رو را یک مثلث فرض کنیم مساحت آن به صورت $dA = \frac{1}{2}(r)(rd\theta)$ بدست می آید.



۳.المان سطح یک سطح دایروی (دیسک)

از مختصات قطبی داشتیم که در حالت کلی : $dA = rdrd\theta$

یک المان از مرتبه ۲ که در انتگرال گیری منجر به انتگرال دوگانه می شود.



حال چون با دایره سرو کار داریم پس θ (یا φ تفاوتی ندارد) از 0 تا 2π تغییر می کند در نتیجه خواهیم داشت : $dA = 2\pi rdr$

روش دوم برای بدست آوردن این المان: $A = \pi r^2 \Rightarrow dA = 2\pi rdr$

روش سوم برای بدست آوردن المان سطح باید طول المان (محیط نوار دایروی) را در قطر آن ضرب کنیم : $dA = (2\pi r)dr = 2\pi rdr$

٤.المان های استوانه و مخروط

المانی برای سطح جانبی استوانه :

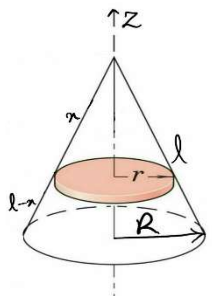
با توجه به المان های دیفرانسیلی مطرح شده در مختصات استوانه ای داریم : $ds_{lateral} = rd\theta dz$

حال چون استوانه کامل را بررسی میکنیم پس r ثابت و تغییرات θ از 0 تا 2π است در نتیجه : $ds_{lateral} = 2\pi rdz$

*با انتگرال گیری می توان فرمول مساحت جانبی استوانه را بدست آورد: $s = \int_0^h 2\pi rdz = 2\pi rh$

تعبیر دیگری نیز برای مساحت جانبی استوانه می توان قائل شد که مساحت جانبی برابر است با محیط قاعده المان استوانه ای ضرب در ارتفاع استوانه یعنی : $s = 2\pi r \times h$

المانی برای سطح جانبی مخروط :



اگر مخروط مقابل را در نظر بگیریم ، طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{x}{\ell}=\frac{r}{R} \quad\Rightarrow\quad Rx=\ell r \quad\Rightarrow\quad Rdx=\ell dr \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{\ell}{R}dr$$

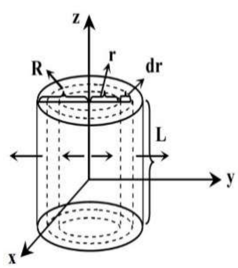
حال داریم : $ds_{lateral}=2\pi r dx$

*با انتگرال گیری می توانیم فرمولی برای مساحت سطح جانبی مخروط بدست آوریم :

$$s_{lateral}=\int 2\pi r dx=\int_0^R 2\pi r\frac{\ell}{R}dr=\frac{2\pi\ell}{R}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^R=\pi R\ell$$

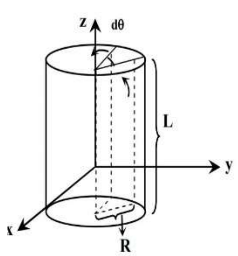
المان حجم استوانه:

المان حجم در حالت کلی در درستگاه استوانه ای $dv=rdrd\theta dz$ بود .



الف)حالت خاصی از المان حجم در مختصات استوانه ای:اگر انتقال فقط در جهت r حائز اهمیت باشد

برای بدست آوردن المان حجم استوانه یک المان به فرم مقابل در نظر می گیریم. می دانیم مساحت جانبی استوانه (سطح عمود بر جهت r) از رابطه $A_r=2\pi rL$ بدست می آید حال با توجه به شکل المان حجم به صورت مقابل بدست می آید: $dv=A_r dr=2\pi L r dr$



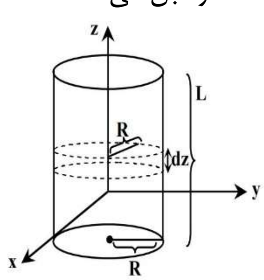
ب) حالت خاصی از المان حجم در مختصات استوانه ای:اگر انتقال فقط در جهت θ حائز اهمیت باشد

برای بدست آوردن المان حجم استوانه یک المان به فرم مقابل در نظر می گیریم.مساحت سطح عمود بر جهت θ از رابطه $A_\theta=R\cdot L$ بدست می آید . آنگاه المان حجم به صورت زیر خواهد بود

$$dv=A_\theta d\theta=R\cdot Ld\theta$$

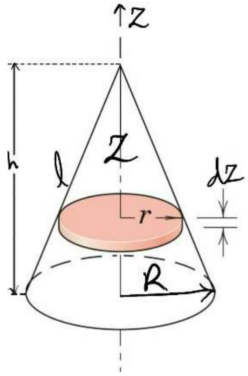
ج) حالت خاصی از المان حجم در مختصات استوانه ای: اگر انتقال تنها در جهت z حائز اهمیت باشد

برای بدست آوردن المان حجم استوانه یک المان به فرم دیسک در نظر می گیریم که شعاع آن ثابت است . از قبل می دانیم که مساحت سطح مقطع آن(سطح عمود بر جهت z) از رابطه $A_z=\pi R^2$ بدست می آید حال برای بدست آوردن المان حجم کافیست المان ارتفاع را در این مساحت دیسک ضرب کنیم و اگر ارتفاع را با محور z نشان دهیم خواهیم داشت: $dv=A_z dz=\pi R^2 dz$



*با انتگرال گیری به راحتی می توان فرمول حجم استوانه را بدست آورد: $v=\int dv=\int_0^h \pi R^2 dz=\pi R^2 h$

حال همین تفسیر را برای مخروط نیز می توانیم بیان کنیم :



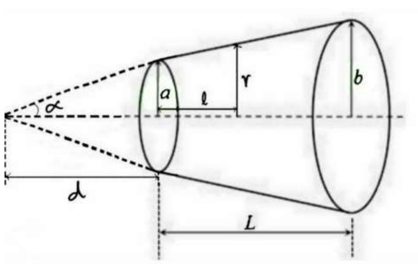
در شکل ارتفاع در جهت محور Z است پس داریم : $dv=\pi r^2 dz$

*به طور مشابه می توان فرمول حجم مخروط را نیز بدست آورد :

با استفاده از قضیه تالس داریم: $\frac{z}{h}=\frac{r}{R} \Rightarrow Rz=hr \Rightarrow Rdz=hdr \Rightarrow dz=\frac{h}{R}dr$

پس با توجه به المان حجم داریم: $v=\int dv=\int \pi r^2 dz=\int_0^R \pi r^2 \frac{h}{R}dr=\frac{\pi h}{R}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{1}{3}\pi R^2 h$

۵. مخروط ناقص



المان طول مخروط ناقص:

با توجه به شکل داریم: $\tan(\alpha)=\frac{a}{d}=\frac{r}{d+\ell}$

$$a(d+\ell)=r(d) \Rightarrow ad\ell=(d)dr \Rightarrow d\ell=\frac{d}{a}dr$$

*محاسبه حجم مخروط ناقص:

با توجه به شکل داریم : $\tan(\alpha)=\frac{a}{d}=\frac{b}{d+L} \Rightarrow ad+aL=bd \Rightarrow d(b-a)=aL \Rightarrow d=\frac{aL}{b-a}$

در نتیجه با توجه به المان بدست آمده در قسمت قبل داریم: $d\ell=\frac{L}{b-a}dr$ حال با در نظر گرفتن المان حجم $dv=\pi r^2 d\ell$ و انتگرال گیری حجم مخروط ناقص بدست می آید :

$$v=\int dv=\int \pi r^2 d\ell=\int_a^b \pi r^2 \frac{L}{b-a}dr=\frac{\pi L}{b-a}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_a^b=\frac{1}{3}\pi L\frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{\pi L}{3}\left(b^2+ab+a^2\right)$$

معادله لاپلاس و توابع هارمونیک

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی **"بیضوی"** است که در مدل سازی کمیت های مختلف مانند توزیع دمای حالت پایدار، شارش سیال ها و میدان های پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی کاربرد دارد.

فرم کلی این معادله به صورت $\nabla^2 f = 0$ است که در آن $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ یک تابع n متغیره اسکالر است.

معادله لاپلاس در مختصات کارتزین:

با فرض $f = f(x,y)$ در حالت ۲ بعدی داریم: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ یا $f_{xx} + f_{yy} = 0$

و با فرض $f = f(x,y,z)$ در حالت سه بعدی : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ یا $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$

با فرض $u = u(r,\theta)$ معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت رو به روست: $\nabla^2 u = u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r + \dfrac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$

با فرض $u = u(r,\theta,z)$ معادله لاپلاس در مختصات استوانه ای : $\nabla^2 u = u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r + \dfrac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0$

با فرض $u = u(\rho,\varphi,\theta)$ معادله لاپلاس در مختصات کروی:

$$\nabla^2 u = u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{\cot(\varphi)}{\rho^2} u_\varphi + \frac{1}{(\rho \sin(\varphi))^2} u_{\theta\theta} = 0$$

به تابعی که دارای مشتقات جزئی پیوسته مرتبه دوم باشد و در معادله لاپلاس صدق کند (لاپلاسین آن صفر باشد) تابع **همساز** ، **هارمونیک**[۴۷] یا **توافقی** می گویند. این توابع از هر مرتبه مشتق دارند و تحلیلی اند و فقط روی مرز دامنه خود دارای ماکسیمم و مینیمم اند.

47.harmonic

پیوست

خلاصه تبدیلات پارمترهای دستگاه های مختصات

از / به	کارتزین	استوانه ای	کروی
کارتزین	-	$x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$ $z = z$	$x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$ $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$ $z = \rho\cos(\varphi)$
استوانه ای	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ $z = z$	-	$r = \rho\sin(\varphi)$ $z = \rho\cos(\varphi)$ $\theta = \theta$
کروی	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$	$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{r}{z}\right)$ $\theta = \theta$	-

خلاصه تبدیلات بردارهای پایه دستگاه های مختصات

کارتزین / استوانه ای	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{r}$	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	0
$\hat{\theta}$	$-\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	0
$\hat{z}$	0	0	1

کروی / استوانه ای	$\hat{\rho}$	$\hat{\varphi}$	$\hat{\theta}$
$\hat{r}$	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	0
$\hat{\theta}$	0	0	1
$\hat{z}$	$\cos(\varphi)$	$-\sin(\varphi)$	0

کارتزین / کروی	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{\rho}$	$\sin(\varphi)\cos(\theta)$	$\sin(\varphi)\sin(\theta)$	$\cos(\varphi)$
$\hat{\varphi}$	$\cos(\varphi)\cos(\theta)$	$\cos(\varphi)\sin(\theta)$	$-\sin(\varphi)$
$\hat{\theta}$	$-\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	0

برای مثال بردار $\hat{i}$ بر حسب بردار های پایه مختصات کروی به صورت زیر خواهد بود :

$$\hat{i} = \sin(\varphi)\cos(\theta)\hat{\rho} + \cos(\varphi)\cos(\theta)\hat{\varphi} - \sin(\theta)\hat{\theta}$$

ماتریس های تبدیل یک بردار در دستگاه های مختصات

در واقع ماتریس تبدیل همان تبدیل بردار های یکه است که در جدول بالا آمده است.

ماتریس تبدیل مختصات کارتزین به استوانه ای و برعکس:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل مختصات کارتزین به کروی و برعکس:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_\theta \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل مختصات کروی به استوانه ای و برعکس:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_\theta \end{bmatrix}$$

خلاصه فرمول های خم

	پارامتری بر حسب طول قوس S	پارامتری بر حسب پارامتر t
بردار یکه مماس	$\hat{T}(s)=\dfrac{d\vec{r}}{ds}$	$\hat{T}(t)=\dfrac{\dot{\vec{r}}}{\Vert\dot{\vec{r}}\Vert}=\dfrac{\vec{v}}{\Vert\vec{v}\Vert}$
انحنا	$\kappa(s)=\left\Vert\dfrac{d\hat{T}}{ds}\right\Vert=\left\Vert\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right\Vert$	$\kappa(t)=\dfrac{\Vert\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\Vert}{\Vert\dot{\vec{r}}\Vert^3}=\dfrac{\Vert\vec{v}\times\vec{a}\Vert}{\Vert\vec{v}\Vert^3}$
بردار یکه قائم اول (اصلی)	$\hat{N}(s)=\dfrac{1}{\kappa(s)}\cdot\dfrac{d\hat{T}}{ds}=\rho(s)\vec{r}''(s)$	$\hat{N}(t)=\dfrac{\dot{\hat{T}}}{\Vert\dot{\hat{T}}\Vert}=\dfrac{\dot{\hat{T}}}{\kappa\Vert\dot{\vec{r}}\Vert}$
بردار یکه قائم دوم (فرعی)	$\hat{B}(s)=\hat{T}(s)\times\hat{N}(s)$	$\hat{B}(t)=\dfrac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{\Vert\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\Vert}=\dfrac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{\kappa\Vert\dot{\vec{r}}\Vert^3}$
تاب	$\dfrac{d\hat{B}(s)}{ds}=-\tau(s)\hat{N}(s)$	$\tau(t)=\dfrac{\dot{\vec{r}}\cdot\left(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}\right)}{\Vert\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\Vert^2}$

****

آنکس که بداند و بخواهد که بداند		خود را به بلندای سعادت برساند

آنکس که بداند و بداند که بداند		اسب شرف از گنبد گردون بجهاند

آنکس که بداند و نداند که بداند		با کوزه ی آب است ولی تشنه بماند!

آنکس که نداند و بداند که نداند		لنگان خرک خویش به مقصد برساند!!

آنکس که نداند و بخواهد که بداند		جان و تن خود را ز جهالت برهاند!

آنکس که نداند و نداند که نداند		در جهل مرکب ابدالدهر بماند!!

آنکس که نداند و نخواهد که بداند		حیف است چنین جانوری زنده بماند!!![۴۸]

۴۸.این شعر ازکتاب **معراج السعادة** "ملّا احمد نراقی" اقتباس شده است اما برخی شاعر آن را "ابن یمین" یا "مولانا" دانسته اند.