بسمه تعالی

جزوه محاسبات عددی

استاد رستمی اردستانی

ترم پاییز ۱۳۸۹

رشته مهندسی برق – مخابرات

مقطع کارشناسی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر ری

تهیه کننده : mehdireis

ص۱

آنالیز عددی I : پیام نور دکتر اسماعیل بابلیان

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۷)

محاسبات عددی : جلسه اول

سرفصل ها:

۱) خطاها
۲) حل عددی معادلات غیرخطی
۳) درونیابی
۴) مشتق گیری و انتگرالگیری عددی
۵) حل معادلات دیفرانسیل

۶ نمره فعالیت کلاسی { میان ترم، حل تمرین، حضور و غیاب، کوئیز

۱۴ نمره پایان ترم

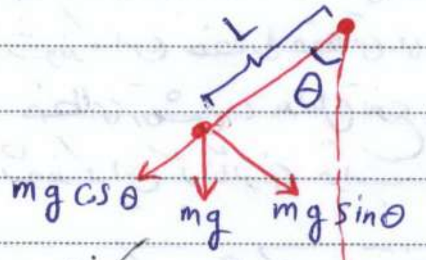
تعریف محاسبات عددی:

محاسبات عددی علمی است که به توصیف، تجزیه و تحلیل و ایجاد روش‌هایی می‌پردازد که جواب‌های عددی یک مسأله را بدست می‌آید. پیدایش این علم را به بابل (عراق) و مصر قدیم به هزاران سال دوری نسبت داد، اما عمده پیشرفت آن را باید نشان دهیم.

امروزه برای حل هر مسأله ریاضی، ابتدا مسأله را مدل کرده و سپس با روش‌های ریاضی مسأله را حل می‌کنیم. خطا: اوقات جواب‌هایی که از حل یک مسأله بدست می‌آوریم جواب واقعی نیست و با مقدار دقیق شباهت ندارد. علت آن خطاهایی باشد که منبع آنها را جستجو می‌کنیم:

منابع خطا:
- ۱- خطای مدل } ← علم فیزیک
- ۲- ″ داده
- ۳- خطای نمایش اعداد } ← ریاضی (آنالیز عددی)
- ۴- ″ محاسبات
- ۵- ″ روش

۱- خطای مدل:



$\sin\theta \simeq \theta$

$\theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$T = mg\cos\theta$ نیروی کشش

$F = mg\sin\theta \rightarrow \cancel{m}a = \cancel{m}g\sin\theta$

$a = g\sin\theta \rightarrow a = g\theta$

$L\theta'' = g\theta \rightarrow \theta'' = \frac{g}{L}\theta$

$\theta = A\sin wt + B\cos wt$

$w = \sqrt{\frac{L}{g}}$ 　 زمان نوسان $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

حل

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۷)

۱- نیروی اصطکاک
۲- نیروی مقاومت هوا
۳- $\sin\theta \simeq \theta$

تعریف خطای مدل: خطای است که در اثر نادیده گرفتن بعضی نیروها و پارامترها (مانند ۳ پارامتر بالا) در مدل یک مسأله رخ می دهد را خطای مدل می نامند.

تعریف خطای داده ها:

خطای است که در اثر نادقیق بودن وسایل اندازه گیری یا خطای انسانی در اندازه گیری ها رخ می دهد را خطای داده ها می گویند.

خطای نمایش اعداد:

اعداد اصم و اعشاری تعداد نامحدودی رقم دارند. در محاسبات ریاضی معمولاً از تعداد رقم های محدودی استفاده می کنند. لذا در محاسبات دچار خطایی می شویم که به این خطا، خطای نمایش اعداد می گویند.

مثال/

$\sqrt{2} \cong 1.41421356...$ $\quad e \cong 2.7182...$

$\sqrt{2} \cong 1.4$

$\sqrt{2} \cong 1.41$ $\quad \pi \cong 3.1415...$

$\sqrt{2} \cong 1.41$ $\quad g \cong 10\ m/s^2 = 9.8$

خطای محاسبات: وسایل محاسباتی نظیر ماشین حساب، کامپیوتر در محاسبات ۴ عمل اصلی دچار خطا می شوند که این خطاها را خطای محاسبات می نامیم.

خطای روش: به دلیل تنوع روش ها در محاسبه ی یک عبارت، به طبع جواب ها نیز متنوع می شوند که این گوناگونی جواب ها، خطایی به نام خطای روش را ایجاد می کند.

مثال/ $\sqrt{2}$
دبیرستان
فیثاغورث
نیوتن
تیلور
دیگری

نکته: خطای که در اثر افت ولتاژ یا تغییر نوسان برق در محاسبات رخ می دهد، خطایی باشد؛ یا مثلاً اگر به جای عدد ۲۳۲ عدد ۲۲۳ درج شود، دچار اشتباه شده ایم نه خطا!

حل آنالیز عددی دکتر بابلیان

SUBJECT:
Year ۸۹ Month ۷ Date ۱۴

محاسبات عددی: ملیس سوم:

اشتباهات تایپی نور

منابع خطا:
۱- خطای مدل
۲- " داده ها
۳- " نمایش اعداد
۴- " محاسبات
۵- " روش

بسط اعشاری یک عدد:

منظور از بسط اعشاری عدد مفروض A در مبنای ۱۰ به صورت زیر است:

$A = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$

مثال) $۲۴۹۷ = ۲ \times ۱۰^۳ + ۴ \times ۱۰^۲ + ۹ \times ۱۰ + ۷$

") $۲۱/۹۶ = ۲ \times ۱۰ + ۱ \times ۱۰^۰ + ۹ \times ۱۰^{-۱} + ۶ \times ۱۰^{-۲}$

انواع اعداد اعشاری:

۱- مختوم: ۲۵۳ , $۰/۲$, $\frac{۱}{۱۰۰}$

۲- نامختوم و متناوب: $\frac{۱}{۳} = ۰/\overline{۳} = ۰/۳۳۳\dots$

$۱۵/۲\overline{۳۷} = ۱۵/۲۳۷۳۷۳۷\dots$

۳- نامختوم و نامتناوب (اصم): $\pi = ۳/۱۴۵\dots$, $e = ۲/۷۱۷۲\dots$, $\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱۳۶\dots$

۲
ج

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۱٤)

نحوه تبدیل یک عدد اعشاری نامختوم متناوب به کسر

$A = a_1 a_2 a_3 \cdots a_m / b_1 b_2 \cdots b_n \underbrace{\overline{c_1 c_2 \cdots c_k}}_{\text{ارقام تکرار}}$

$A = a_1 a_2 \cdots a_m + \dfrac{\overbrace{b_1 b_2 \cdots b_n c_1 c_2 \cdots c_k}^{\text{رقم های تکرار و غیر تکرار}} - \overbrace{b_1 b_2 \cdots b_n}^{\text{رقم های غیر تکرار}}}{\underbrace{99\cdots9}_{k\ \text{تا}}\ \underbrace{00\cdots0}_{n\ \text{تا}}}$

۱) $۲۱/\overline{۱٤} = ۲۱ + \dfrac{۱٤ - ۰}{۹۹} = ۲۱ + \dfrac{۱٤}{۹۹}$

۲) $۰/۱۲\overline{٤۶} = \dfrac{۱۲٤۶ - ۱۲}{۹۹۰۰} = \dfrac{۱۲۳٤}{۹۹۰۰}$

۳) $۰/\overline{۳} = \dfrac{۳ - ۰}{۹} = \dfrac{۱}{۳}$

نمایش علمی یک عدد

فرض کنید A یک عدد اعشاری باشد. نمایش علمی عدد A به صورت زیر است:

$A = \overset{\text{مانتیس}}{a} \times 10^{b}$ ← نما

$۰ \leq |a| \leq ۹$

مثال) $A = ۲/۳٤ \times ۱۰^{۳۸}$, $B = ۰/۹۱ \times ۱۰^{-۲۳۵}$, $C = ۲۱۵/۷ \times ۱۰^{۱۲}$

C باید مانتیس کمتر از (۱۰) شود پس داریم:

$C = ۲/۱۵۷ \times ۱۰^{+۱٤}$

بدلیل اینکه اعداد اعشاری تعداد رقم های نامحدودی دارند و وسایل محاسباتی ما برای ذخیره اعداد دچار محدودیت هستند لذا برای ذخیره ی اعداد تعداد رقم های محدودی را انتخاب می کنیم.

این کار به ۲ صورت انجام می شود:

۱- روش قطع کردن (chopping)

۲- روش گرد کردن (rounding)

STAEDTLER

ص ۳

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۱۴)

۱- روش قطع کردن: فرض کنید

$A = a_1a_2\dots a_m / b_1b_2\dots b_n b_{n+1}\dots$

برای قطع کردن تا n رقم اعشار، عدد از b_n به بعد صرف نظر می‌شود.
یعنی تا ۲ رقم اعشار قطع شود.

مثال) $۵۲/۳۴۸۳ \xrightarrow{2D} ۵۲/۳۴$

۲- روش گرد کردن: فرض کنید

$A = a_1a_2\dots a_m / b_1b_2\dots b_n b_{n+1}$

۱- اگر $b_{n+1} > 5$، یک واحد به b_n اضافه و سپس عدد را از b_n قطع می‌کنیم.

۲- اگر $b_{n+1} < 5$، عدد را از b_n قطع می‌کنیم.

۳- اگر $b_{n+1} = 5$ و بعد از b_{n+1} رقم غیر صفر داشته باشیم، یک واحد به b_n اضافه و عدد را از b_n قطع می‌کنیم.

۴- اگر $b_{n+1} = 5$ و رقم غیر صفر بعد از b_{n+1} نداشته باشیم، اگر b_n فرد بود مانند ① و اگر b_n زوج بود مانند ② عمل می‌کنیم.

اعداد زیر را تا رقم خواسته شده گرد کنید.

مثال)

$۰/۳۵۷۶ \xrightarrow{3D} ۰/۳۵۸$ حالت ①

$۱/۲۶۴ \xrightarrow{2D} ۱/۲۶$ حالت ②

$۳۲/۱۹۶۵ \xrightarrow{3D} ۳۲/۱۹۷$ حالت ③

$۰/۱۷۵ \xrightarrow{2D} ۰/۱۸$ فرد حالت ④

$۰/۱۸۵ \xrightarrow{2D} ۰/۱۸$ " ④ زوج

مثال) $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷۳۲۰۵۰۸ \xrightarrow{6D} ۱/۷۳۲۰۵۱ \xrightarrow{5D} ۱/۷۳۲۰۵ \xrightarrow{4D} ۱/۷۳۲۰ \xrightarrow{3D} ۱/۷۳۲ \xrightarrow{2D} ۱/۷۳ \xrightarrow{1D} ۱/۷ \longrightarrow ۲$

ص ۴

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۱۴)

مثال) $e^2 \simeq 7/389056 \xrightarrow{5D} 7/38906 \xrightarrow{4D} 7/3891 \xrightarrow{3D}$

$7/389 \xrightarrow{2D} 7/39 \xrightarrow{1D} 7/4 \xrightarrow{0D} 7$

* خطای قطع کردن تا ۲ برابر خطای گرد کردن است.

* اگر a گرد شده‌ی عدد اعشاری A باشد ~~|A − a| اختلاف~~ در این صورت

$$|A-a| \le 5 \times 10^{-(n+1)}$$

حداکثر خطا ۰٫۵٪ ⟵ از یک رقم اعشار گرد کنیم

" " ۰٫۰۵٪ ⟵ ۲ رقم " "

" " $\underbrace{۰۰...۰}_{\text{۸ تا صفر}}$۵٪ ⟵ ۸ رقم " "

با ماشین حساب

انواع دقت:
۱- دقت معمول ۸ تا ۷ رقم اعشار
۲- دقت مضاعف ۱۷ تا ۱۸ رقم اعشار

حل

محاسبات عددی : جلسه ی سوم :

SUBJECT:
Year ۸۹ Month ۷ Date ۲۱

انواع خطا
۱- خطای مطلق
۲- " نسبی

خطای مطلق : فرض کنید A یک عدد اعشاری باشد و a تقریب آن باشد. خطای مطلق a را با e(a) تعریف کرده و بصورت زیر است :

$e(a) = |A - a|$

خطای نسبی : فرض کنید A عدد اعشاری و a تقریب آن باشد. خطای نسبی را با $\delta(a)$ نمایش داده و تعریف می کنیم :

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{A} = \frac{e(a)}{A}$$

$$\delta(a) \simeq \frac{e(a)}{a}$$

مثال) فرض کنید $A = \sqrt{2}$ ، خطای مطلق و نسبی آن را تا ۳ رقم اعشاری بدست آورید.

$\sqrt{2} = 1/4142136$

$a = 1/414$

$e(a) = |1/4142136 - 1/414|$

$e(a) = |0/0002136| = 0/0002136$

$$\delta(a) = \frac{0/0002136}{1/414} = 1/51 \times 10^{-4}$$

مثال) فرض کنید $A = \pi$ ، تا ۲ رقم اعشار خطای مطلق و نسبی را بدست آورید.

$\pi = 3/1415927$

$a = 3/14$

$e(a) = |3/1415927 - 3/14| = 0/0015927$

$$\delta(a) = \frac{0/0015927}{3/14} = 5/072 \times 10^{-4}$$

حساب ممیز شناور : حسابی را که در آن هر عدد به صورت $a \times 10^{b}$ باشد را حساب ممیز شناور می گوییم.

تفاوت های حساب معمولی و حساب ممیز شناور :

۱- عضو خنثی
۲- شرکت پذیری

STAEDTLER®

ص ۲

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۲۱)

۱- جمع ممیز شناور، عضو خنثی منحصر بفرد ندارد.

معمولی $a + 0 = a$

$$2.75 + 4\times10^{-3} = 2.754 \cong 2.75$$

$$2.75 + 3\times10^{-3} = 2.753 \cong 2.75$$

۲- جمع ممیز شناور، عمل شرکت پذیری ندارد

معمولی $(a+b)+c = a+(b+c)$

$$(2.75 + 4\times10^{-3}) + 3\times10^{-3} = 2.75$$

$$2.75 + (4\times10^{-3} + 3\times10^{-3}) = 2.750 + 7\times10^{-3}$$

$$= 2.757 = 2.76$$

نکته: در جمع ممیز شناور بهتر است اعداد از کوچکتر به بزرگتر جمع شوند. به عنوان مثال:

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} = \frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1$$

جمع و تفریق:

برای جمع و تفریق دو عدد در جمع ممیز شناور، ابتدا نماها را یکسان کرده و پس مانتیس ها را با هم جمع می کنیم و در نهایت عدد را بصورت علمی نمایش می دهیم.

مثال) $3.12\times10^{1} + 8.34\times10^{1}$

$$= 11.46\times10^{1} = 1.146\times10^{2} = 1.15\times10^{2}$$

مثال) $6.48\times10 + 1.45\times10^{-1}$

$$= 6.48\times10^{1} + 0.0145\times10^{1}$$

$$= 6.4945\times10^{1}$$

ضرب: در این حالت ابتدا نماها را با هم جمع کرده، پس مانتیس ها را در هم ضرب می کنیم و عدد را بصورت علمی و گرد شده نشان می دهیم.

$$7.48\times10^{3} \times 3.37\times10^{-2}$$

$$= 25.2076\times10^{1} = 2.52076\times10^{2}$$

$$= 2.52\times10^{2}$$

STAEDTLER

مث

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۲۱)

تقسیم: در حالت تقسیم ابتدا نماها از هم کم شده و بین مانتیس ها بر هم تقسیم می شوند.
و عدد به صورت علمی و گرد شده نمایش داده می شود.

$$\frac{۵/۳۴ \times 10^{۱}}{۴/۵۵ \times 10^{۲}} = ۱/۱۷۳۶ \times 10^{-۱} = ۱/۱۷ \times 10^{-۱}$$

خطای اعمال محاسباتی:

$$A \xrightarrow{\text{تقریب}} a \qquad \otimes \longrightarrow \otimes^*$$

$$B \longrightarrow b$$

عمل

$$|A\otimes B - a\otimes^* b| = |\underbrace{A\otimes B - a\otimes b} + \underbrace{a\otimes b - a\otimes^* b}|$$

$$\leq |A\otimes B - a\otimes b| + |a\otimes b - a\otimes^* b|$$

* یعنی اینکه خطا دارد.

خطای تولید شده. چون تقریب خطای منتشر شده

به خاطر عمل دقیقا انجام می دهیم. خطای داده تقریب بشوند

نکته: معمولا در عمل به خطای تولید شده توجه زیادی نمی شود (ناچیز است) ولی گاهی اوقات باعث ایجاد جواب های نامطلوب می شود.

خطای جمع:

$$A \longrightarrow a \qquad e(a) = |A - a|$$

$$B \longrightarrow b \qquad e(b) = |B - b|$$

۱) $e(a+b) \leq e(a) + e(b)$

۲) $\delta(a+b) \leq \max\{\delta(a), \delta(b)\}$

مثال) $\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ تا ۳ رقم اعشار

$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱۳۶ \longrightarrow ۱/۴۱۴$$

$$\sqrt{۳} = ۱/۷۳۲۰۵۰۸ \longrightarrow ۱/۷۳۲$$

$$\sqrt{۲}: \begin{cases} e(a) = |A - a| = ۰/۰۰۰۲۱۳۶ \\ \delta(a) = \dfrac{۰/۰۰۰۲۱۳۶}{۱/۴۱۴} = ۱/۵۱ \times 10^{-۴} \end{cases}$$

$$\sqrt{۳}: \begin{cases} e(b) = |B - b| = ۰/۰۰۰۰۵۰۸ \\ \delta(b) = \dfrac{۰/۰۰۰۰۵۰۸}{۱/۷۳۲} = ۲/۹۳ \times 10^{-۵} \end{cases}$$

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۲۱)

$e(1.414 + 1.732) \leq \underbrace{0.0002136 + 0.0000508}_{\text{حداکثر خطای مطلق}}$

$\delta(1.414 + 1.732) \leq \underbrace{1.51 \times 10^{-4}}_{\text{حداکثر خطای نسبی}}$

خطای تفریق:

1) $e(a-b) \leq e(a) + e(b)$

2) $\delta(a-b) = \dfrac{e(a-b)}{a-b}$

* با توجه به فرمول های بالا، حتی الامکان از تفریق اعداد نزدیک به هم باید خودداری کرد و در صورت امکان از دقت مضاعف استفاده می کنیم.

حل

محاسبات عددی ؛ جلسه ی چهارم :

SUBJECT:
Year ۸۹ Month ۷ Date ۲۸

خطای ضرب :

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

مطلق $e(ab) \leq a\,e(b) + b\,e(a)$

نسبی $\delta(a.b) \leq \delta(a) + \delta(b)$

نکته : با توجه به فرمول داده شده می بایست از ضرب اعداد بزرگ خودداری کرد و در صورت اجبار از دقت مضاعف استفاده کرد.

خطای تقسیم :

$e\left(\frac{a}{b}\right) = e\left(a \times \frac{1}{b}\right) \leq a\,e\left(\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{b} e(a)$

$\delta\left(\frac{a}{b}\right) \leq \delta(a) + \delta(b)$

مثال/ $\sqrt{۳} - \sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}} = \frac{۳-۲}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$

$= \frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۳}}$

* در مخرج ضرب می کنیم تا تفریق به جمع تبدیل شود.

چون ۲ و ۳ نزدیک به هم اند تفریق آنها خطا را زیاد می کند.

مثال/ $ax^۲+bx+c=۰$

$\Delta = b^۲ - ۴ac > ۰ \qquad b^۲ >> ۴ac$

$x_۱ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \qquad \sqrt{\Delta} \cong \sqrt{b^۲ - \cancel{۴ac}} = \tilde{b}$ → خوانده می شود b تقریب یعنی خیلی نزدیک به b ولی b نیست

$x_۲ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-b-\tilde{b}}{۲a} \cong -\frac{b}{۲a}$

اگر معادله به فرم درجه دو بود و $b^۲$ خیلی خیلی بزرگتر از ۴ac باشد، به این صورت عمل می کنیم.

$\cancel{x_۱ = \frac{-b+\tilde{b}}{۲a}} = \frac{\tilde{b}-b}{۲a}$ → چون دو عدد نزدیک به هم جمع می شوند قابل قبول نیست.

$x_۱ x_۲ = \frac{c}{a}$

$x_۱ \times \left(-\frac{b}{\cancel{a}}\right) = \frac{c}{\cancel{a}} \rightarrow \boxed{x_۱ = -\frac{c}{b}}$

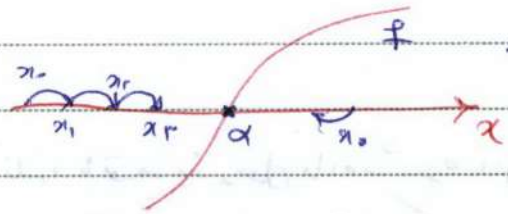
حل ۲

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۲۸)

حل عددی معادلات غیرخطی $(f(x)=0)$

حل بسیاری از معادلات و ریشه‌ها، مهندسی، اقتصادی و ... منجر به حل معادله‌ای به شکل $f(x)=0$ می‌شود که منظور یافتن اعدادی مانند α است که در آن $f(\alpha)=0$ می‌باشد.

* خود α پیدا نمی‌شود، بلکه تقریب به آن پیدا می‌شود.



روش برای یافتن ریشه‌های تابع وجود دارد:
۱- رسم تابع ۲- جدول بندی مقادیر

مثال ① $f(x) = x^2 - 2$

$$x^2 - 2 = 0 \longrightarrow x^2 = 2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

* اگر تابع به صورت $f(x)=k$ بود داریم

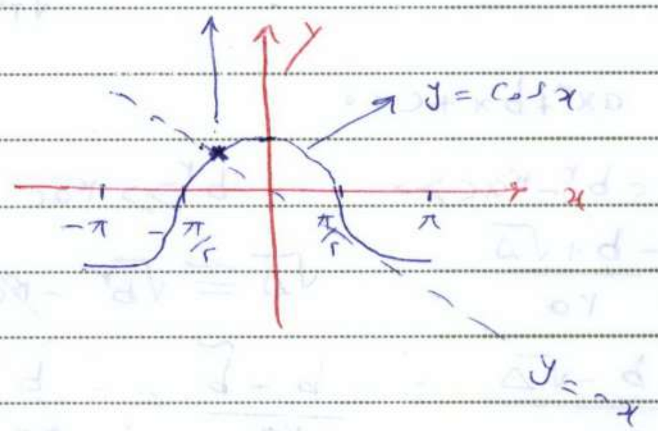
$$f(x) = k$$

$$h(x) = f(x) - k = 0$$. محل تقاطع دو نمودار $f(x)=0$ است.

مثال ② $f(x) = x + \cos x = 0$

$$\cos x = -x$$

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = -x \end{cases}$$

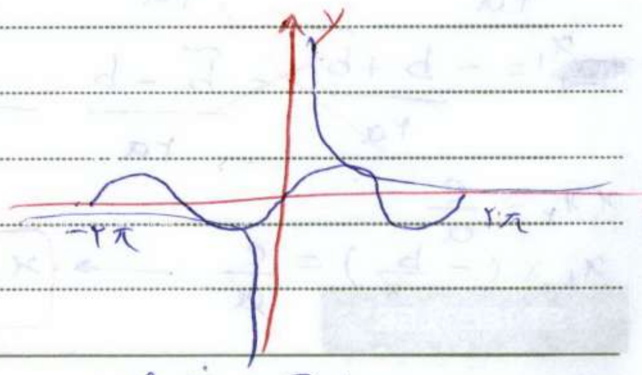


مثال ③ $f(x) = x\sin x - 1$

$$x\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{x} \\ y_2 = \sin x \end{cases}$$



بی‌نهایت ریشه دارد.

ص ۳

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۲۸)

ممکن است توابعی موجود نباشد که $f(\alpha)=0$.

مثال) $f(x)=e^{x}+1=0 \rightarrow e^{x}=-1$ ×

$f(x)=x^{2}+1=0 \longrightarrow x^{2}=-1$ ×

تعریف: دنباله‌ی $\{x_n\}$ را به α همگرا گوییم و می‌نویسیم $x_n \longrightarrow \alpha$ هرگاه

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \ n>N \ ; \ |x_n-\alpha| < \varepsilon$$

مثال)

① $\varepsilon = 0.1$ $\quad N=10 \quad \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$ $\quad \left(\frac{1}{n} < \frac{1}{N}\right)$

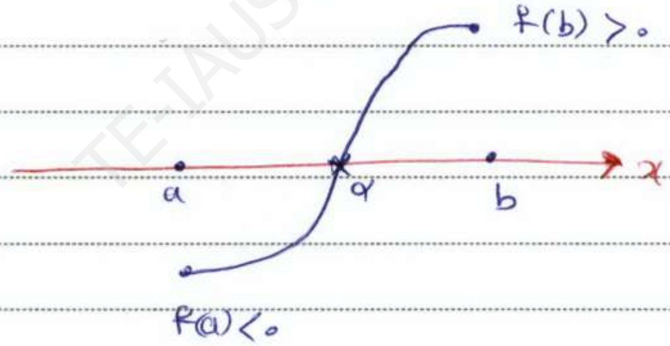
② $\varepsilon = 0.01$ $\quad N=100 \quad \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$ $\quad \left(\frac{1}{n} < \frac{1}{N}\right)$

قضیه وایراشتراس (بولزانو): فرض کنید f تابعی پیوسته در فاصله‌ی $[a,b]$ باشد.

$$f(a) \times f(b) < 0$$

آنگاه وجود دارد $\alpha \in [a,b]$ بطوریکه

$$f(\alpha)=0$$



مثال) بکمک قضیه‌ی بولزانو وجود یا عدم وجود ریشه را در توابع زیر بررسی کنید.

$f(x)=x+\cos x \qquad [-\pi/2, 0]$

$x \leftarrow$ پیوسته
$\cos x \leftarrow$ پیوسته
پس جمع آن نیز پیوسته است.

$f(-\pi/2) = -\pi/2 + \underbrace{\cos(-\pi/2)}_{0} = -\pi/2 < 0$

$f(0) = 0+\cos 0 = 1 > 0$

$\exists\, \alpha \in [-\pi/2, 0] \quad f(\alpha)=0 \longrightarrow \alpha+\cos\alpha=0$

$f(x)=x^{2}-1 \qquad [-2,0]$

$f(-2)=(-2)^{2}-1=3 \qquad f(-2)>0$

$f(0)=0-1=-1 \qquad f(-1)<0$

$\exists\, \alpha \in [-2, 0] \quad f(\alpha)=0 \longrightarrow \alpha^{2}-1=0$

محاسبات عددی: جلسه‌ی پنجم:

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۸) Date (۵)

روش دونصفی (تنصیف)

فرض کنید f در فاصله‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$

۱- $c=\frac{a+b}{2}$

۲- اگر $f(a)f(c)<0$ ریشه در $[a,c]$ قرار دارد و قرار می‌دهیم $b=c$ و به ۱ برمی‌گردیم.

۳- اگر $f(a)f(c)>0$ ریشه در $[c,b]$ قرار دارد و قرار می‌دهیم $a=c$ و به ۱ برمی‌گردیم

٤- اگر $f(a)f(c)=0$، c همان ریشه است.

همگرایی روش دونصفی:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{cases} |x_1-\alpha| < \frac{b-a}{2} \\ |x_2-\alpha| < \frac{\frac{b-a}{2}}{2} = \frac{b-a}{4} \\ \vdots \\ |x_n-\alpha| < \frac{b-a}{2^n} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n-\alpha| < \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

ص۲

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۸) Date (۵)

مثال) به کمک روش دو بخشی تقریبی از ریشه ی $f(x)=x^2-2$ را چنان بیابید که

$$|x_n-\alpha|<10^{-2} \to \varepsilon$$

$$f(x)=x^2-2=0 \longrightarrow x^2=2 \longrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$$[1,2] \longrightarrow \begin{cases} f(1)=-1<0 \\ f(2)=2>0 \end{cases}$$

بازه را خودمان پیدا می‌کنیم، طوری که نزدیک هم در دو رابطه بتوان دو عبارت مختلف العلامه پیدا کرد.

$$x_1=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1/5 \longrightarrow \text{اولین تقریب ریشه}$$

$$f(x_1)=f(3/2)=(3/2)^2-2=9/4-2=1/4>0$$

$$[1,3/2] \longrightarrow \begin{cases} f(1)=-1<0 \\ f(3/2)=1/4>0 \end{cases}$$

$$x_2=\frac{1+3/2}{2}=5/4=1/25$$

$$f(x_2)=f(5/4)^2-2=\frac{25}{16}-2=\frac{25-32}{16}=\frac{-7}{16}<0$$

$$[5/4,3/2] \longrightarrow \begin{cases} f(5/4)<0 \\ f(3/2)>0 \end{cases}$$

$$x_3=\frac{5/4+3/2}{2}=\frac{\frac{5+6}{4}}{2}=\frac{11}{8}=1/4$$

$$\frac{b-a}{2^n}<10^{-2} \qquad \begin{cases} a= \\ b= \end{cases}$$

این برای زمانی است که بدانیم باید تا چه مرحله پیش رویم. (بدست آوردن n)

$$\longrightarrow \frac{1}{2^n}<\frac{1}{100}$$

$$\longrightarrow 2^n>100$$

$$\longrightarrow \boxed{n=7}$$

n=۷ بر طبق از ... است

شرط توقف:

1- $|x_n-\alpha|<\varepsilon$

2- $|f(x_n)|<\varepsilon$

3- $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$ ✓

4- n دلخواه

با ۱ و ۳ بیشتر سروکار داریم.

STAEDTLER

۳ ص

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۸) Date (۵)

مثال) به کمک روش دو بخشی تقریبی از ریشه $f(x)=x+\cos x$ را تا دو مرحله انجام دهید.

$[\overbrace{-\pi/2}^{a}, \overbrace{0}^{b}]$

$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{-\pi/2 - 0}{2} = -\frac{\pi}{4}$

$f(-\pi/4) = -\pi/4 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\pi + 2\sqrt{2}}{4} < 0$

$\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$

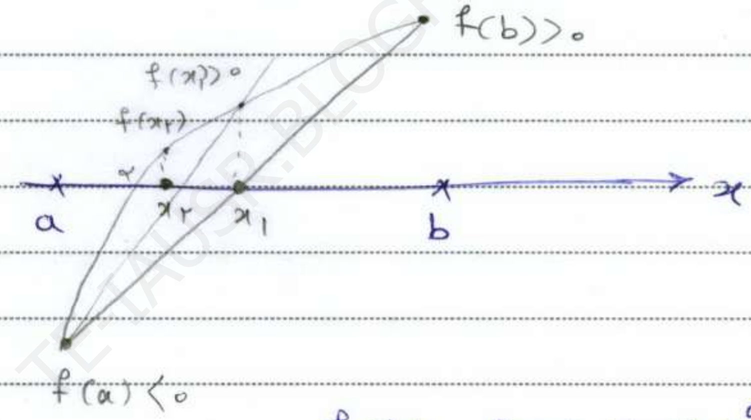
$[x_1, b] = [-\pi/4, 0]$

$\cos \pi/8 = \sqrt{\frac{1+\cos \pi/4}{2}}$

$x_2 = \frac{-\pi/4 + 0}{2} = -\frac{\pi}{8}$

$f(x_2) = -\pi/8 + \cos(-\pi/8) = -\frac{\pi}{8} + \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$

روش نابجایی :



معادله‌ی خط گذرنده از f(a) , f(b)

$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_1 - a)$

چون x_1 در معادله صدق می کند ، $y=0$ می شود.

$\rightarrow x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$ ۱-

۲- اگر $f(a)f(x_1)<0$ ، ریشه در $[a, x_1]$ قرار دارد و قرار می دهیم $b = x_1$ و به ۱ برمی گردیم.

۳- اگر $f(a)f(x_1)>0$ ، ریشه در $[x_1, b]$ قرار دارد و قرار می دهیم $a = x_1$ و به ۱ برمی گردیم.

۴- $f(a)f(x_1)=0$ ، x_1 خود ریشه است.

ص ٤

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۱) Date (۵)

مثال / به کمک روش نابجایی و تا ۲ مرحله تقریبی از ریشه ی $f(x) = x^2 - 2$ بیابید.

ط

SUBJECT:
Year ۸۹ Month ۸ Date ۱۲

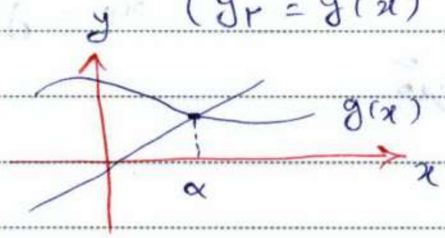
محاسبات عددی جلسه ی ششم

روش نقطه ثابت (fixed point)

$$f(x)=0 \longrightarrow x-g(x)=f(x)=0$$

$$x-g(x)=0 \longrightarrow x=g(x)$$

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = g(x) \end{cases}$$



$$\alpha = g(\alpha)$$
$$\alpha - g(\alpha) = 0$$
$$f(\alpha) = 0$$

* در آنالیز عددی این روش اصلا همگرا نمی شود.

$$x - g(x) = f(x)$$
$$x - g(x) = 0$$
$$x = g(x)$$

نقطه ی شروع $\longleftarrow x_0$

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$x_3 = g(x_2)$$
$$x_{n+1} = g(x_n)$$
$$\begin{cases} x_{100} = g(x_{99}) \\ \alpha = g(\alpha) \end{cases}$$

مثال) معادله ی $f(x)=x^2+x-1$ را بصورت روش نقطه ی ثابت بنویسید.

(۱) $x^2+x-1=0 \longrightarrow x_{n+1} = 1-x_n^2 = g(x)$ همگرا نیست

(۲) $x^2 = 1-x \longrightarrow x_{n+1} = \sqrt{1-x_n} = g(x)$ همگرا (۳۴) ریشه

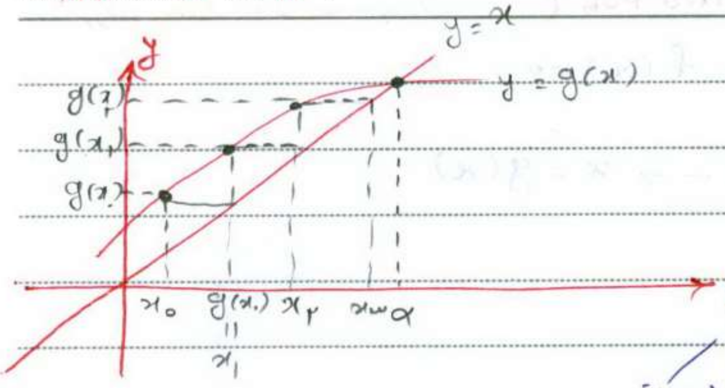
STAEDTLER®

(۳) $x(x+1)=1 \longrightarrow x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n} = g(x)$ همگرا (۸)

(۴) $x+1=\dfrac{1}{x} \longrightarrow x_{n+1} = \dfrac{1}{x}-1 = \dfrac{1-x_n}{x_n} = g(x)$

ج ۳

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۸) Date (۱۲)



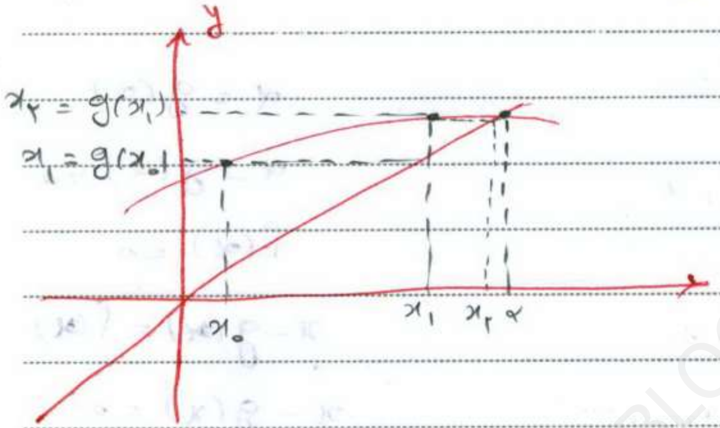
$x_{n+1} = g(x_n)$

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$x_3 = g(x_2)$

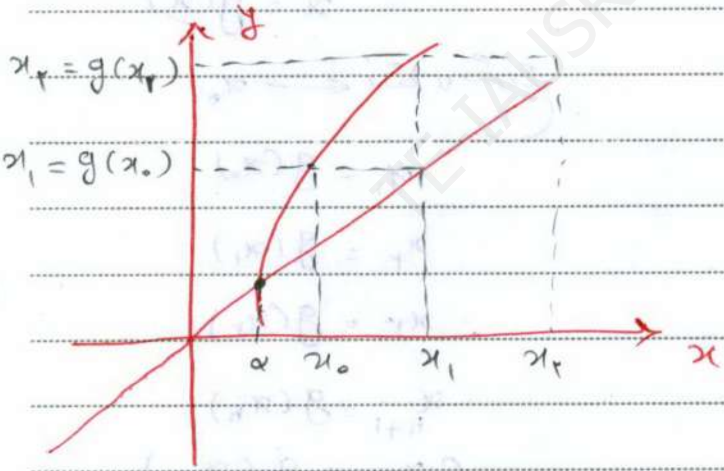
همگرای کند



$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

همگرای تند



$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

واگرایی

قضیه: اگر در معادله‌ی $x = g(x)$، تابع $g(x)$ از بازه‌ی $[a,b]$ بتوی $[a,b]$ تعریف شود و $|g'(x)| \leq L < 1$، آنگاه معادله‌ی $x = g(x)$ یک و تنها یک ریشه در فاصله‌ی $[a,b]$ دارد و $x_{n+1} = g(x_n)$ به $\alpha = g(\alpha)$ همگراست.

① $g : [a,b] \longrightarrow [a,b] \longrightarrow \forall x \in [a,b] \quad a \leq g(x) \leq b$

② $|g'(x)| < 1$

مشتق

۳
ج

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۸) Date (۱۲)

نکته ۲: میزان همگرایی روش نقطه ثابت به λ خیلی بستگی دارد. هرچقدر λ به صفر نزدیکتر باشد همگرایی تندتر و هرچقدر به یک نزدیکتر باشد همگرایی کندتر است.

مثال) تقریبی از ریشه‌ی $3xe^{x}=1$ را با یک روش نقطه‌ی ثابت بدست آورید.

* تا باید دو شرط قضیه‌ی قبل را دارا باشد

$$f(x)=3xe^{x}-1=0$$

$$f(x)=x-g(x)$$

$$[0,1] \longrightarrow \begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f(1)=3e-1>0 \end{cases}$$

بازه‌ای که خودمان می‌دهیم بنابر معادله

$$3xe^{x}-1=0 \longrightarrow 3xe^{x}=1 \longrightarrow x=\frac{1}{3e^{x}}$$

$$g(x)=\frac{1}{3e^{x}} \qquad [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$g(x)=\frac{1}{3}e^{-x} \longrightarrow g'(x)=-\frac{1}{3}e^{-x}=-\frac{1}{3e^{x}}$$

$$0\le x\le 1 \longrightarrow e^{0}\le e^{x}\le e^{1}$$

$$\longrightarrow 1\le e^{x}\le e$$

$$\longrightarrow \frac{1}{e}\le \frac{1}{e^{x}}\le 1$$

$$\longrightarrow 0<\frac{1}{3e}\le \underbrace{\frac{1}{3e^{x}}}_{g(x)}\le \frac{1}{3}<1$$

شرط ۱ بتو بودن $\quad 0<g(x)<1$

شرط ۲ $\quad g'(x)=-\frac{1}{3e^{x}}$

$$|g'(x)|=\left|-\frac{1}{3e^{x}}\right|<1$$

STAEDTLER®

ص ۴

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۸) Date (۱۲)

$x = g(x)$ $\qquad x_0 = /۵$

$x = \frac{1}{۳e^{x}}$

$x_{n+1} = \frac{1}{۳e^{x_n}}$

$x_1 = \frac{1}{۳e^{x_0}} = \frac{1}{۳e^{/۵}}$

$x_1 = ۰/۲۰۲۲$

$x_۲ = \frac{1}{۳e^{x_1}} = \frac{1}{۳e^{/۲۰۲۲}} = /۲۷۲۳$

$\vdots$

$x_۸ = ۰/۲۵۷۶$

مثال) یک $g(x)$ مناسب برای $f(x) = x^۲ + x - 1$ پیدا کنید.

شرط ① $\qquad x(x+1) = 1$

$x = \frac{1}{x+1}$

$۰ < x < 1$

$1 < x+1 < ۲$

$۰ < \frac{1}{۲} < \frac{1}{x+1} < 1$

$۰ < g(x) < 1$

$[۰, 1] \longrightarrow f(۰) = -1, \; f(1) = 1 \longrightarrow f(۰)f(1)$

شرط ② $\qquad |g'(x)| = \frac{-1}{(x+1)^۲}$

$۰ < x < 1$

$1 < x+1 < ۲$

$1 < (x+1)^۲ < ۴$

$\frac{1}{۴} < \frac{1}{(x+1)^۲} < 1$

شرط ② $\longrightarrow \left| \frac{1}{(x+1)^۲} \right| < 1$

ص۱

محاسبات عددی ۱

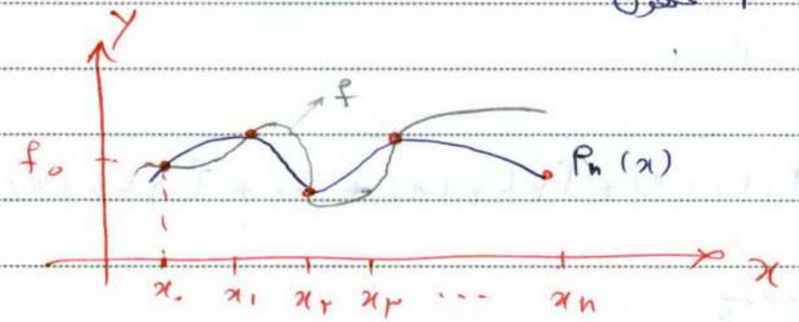
SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۹) Date (۱۷)

درونیابی:

x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
f_i	f_0	f_1	f_2	...	f_n

$f_0 = f(x_0) \qquad f_1 = f(x_1) \quad \dots \qquad f_n = f(x_n)$

f مجهول



$P_n(x_i) = f_i$ درجه چندجمله‌ای $P_n(x)$ حداکثر n است.

هدف از درونیابی، یافتن چندجمله‌ای $P_n(x)$ است.

$x \in [x_0, x_n]$ درونیابی

$x \notin [x_0, x_n]$ برونیابی

به نقاط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ نقاط پشتیبان می‌گویند.

انواع درونیابی:
- ۱- چندجمله‌ای
  - ۱- لاگرانژ ✓
  - ۲- نیوتن ✓
  - ۳- هرمیت
- ۲- نمایی
- ۳- مثلثاتی (برق)
- ۴- کسری
- ۵- اسپلاین * (پرکاربرد)

ما در این درس با ۱ و ۲ و سروکار داریم.

مزایای چندجمله‌ای:
- ۱- محاسبه‌ی آسان مشتق
- ۲- محاسبه‌ی انتگرال، مشتق آن
- ۳- منحصر به فرد بودن

$P(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 1$
$f(x) = \log(x-1)$
$P(x)$ آسانتر

ص ۲

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۹) Date (۱۷)

درون‌یابی لاگرانژ:

$$\begin{cases} P_n(x_i) = f_i & \text{۱ـ شرط اول} \\ \text{درجه } P_n \text{ حداکثر } n \text{ است.} & \text{۲ـ شرط دوم} \end{cases}$$

تابع جدولی زیر موجود است:

x_i	x_0	x_1	$x_2 \cdots x_{n-1}$	x_n
f_i	f_0	f_1	$f_2 \cdots f_{n-1}$	f_n

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + \cdots + f_n L_n(x)$$

$L_i(x) \longrightarrow$ چند جمله‌ای لاگرانژ

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$\prod$ به جای
یعنی ضرب چند عبارت

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0}^{n}(x_i-x_j)} \quad (j \neq i)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

مثال) به کمک تابع جدولی زیر، چند جمله‌ای درونیاب لاگرانژ تابع f را بیابید.

	x_0	x_1	x_2
x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3
	f_0	f_1	f_2

* حداکثر درجه چندجمله‌ای درونیاب برابر است با تعداد نقاط منهای یک.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

STAEDTLER

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

ص ۳

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۹) Date (۱۷)

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} = \frac{x^2-1}{-1} = 1-x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)x}{(1+1)\times 1} = \frac{x^2+x}{2}$$

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

$$= \frac{x^2-x}{2} + (1-x^2) + 3\left(\frac{x^2+x}{2}\right)$$

$$P_2(x) = x^2+x+1$$

تست: درست بودن چندجمله‌ای: نقاط x_0 تا x_2 را در $P_2(x)$ می‌گذاریم باید f_0 تا f_2 را به ما بدهد.

مثال ۲) جدول زیر، میزان تولید محصولات کشاورزی را در سال‌های مختلف، در یک منطقه‌ی خاص نشان می‌دهد. میزان محصول را در سال چهارم پیش‌بینی کنید.

	x_0	x_1	x_2	x_3
سال	۱	۲	۳	٤
میزان تولید (تن)	۱۵	۲۰	۳۰	? → ٤۵

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{x^2-5x+6}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -x^2+4x-3$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

$$= 15\left(\frac{x^2-5x+6}{2}\right) + 20(-x^2+4x-3) + 30\left(\frac{x^2-3x+2}{2}\right)$$

ص ٤

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۹) Date (۱۷)

$$P_n(4) = 15\left(\frac{16-20+6}{2}\right) + 20(-16+16-3) + 30\left(\frac{16-12+2}{2}\right)$$

$$= 15 - 60 + 90 = 45$$

معایب روش لاگرانژ:

۱- محاسبات طولانی است.

۲- درجه‌ی چندجمله‌ای بعد از اتمام محاسبات تعیین می‌شود.

$x_{n-1}, x_n\}$ ۳- با اضافه شدن یک نقطه به جدول محاسبات از نو از سر گرفته می‌شود.

STAEDTLER®

ص ۱

محاسبات عددی

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۱۰) Date (۱)

درونیابی { لاگرانژ / نیوتن ← تفاضلات تقسیم شده

x_0, x_1

$$f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$

تفاضلات تقسیم شده دو نقطه‌ای

$$f[x_1,x_2]=\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}$$

$$f[x_2,x_3]=\frac{f_3-f_2}{x_3-x_2}$$

$$\vdots$$

$$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f_{i+1}-f_i}{f_{i+1}-x_i}$$

x_i	f_i			
x_0	f_0	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,\dots$
x_1	f_1	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3,\dots$
x_2	f_2	$f[x_2,x_3]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$\vdots$
x_3	f_3	$f[x_3,x_4]$	$\vdots$	$f[x_{n-3},x_{n-\dots}$
x_4	f_4	$\vdots$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	
$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-1},x_n]$		
x_{n-1}	f_{n-1}			
x_n	f_n			

تفاضلات تقسیم شده سه نقطه‌ای:

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

$$\vdots$$

$$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$$

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{f[x_1,\dots,x_n]-f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

* جابجایی نقاط هیچ تأثیری در مقدار تفاضلات تقسیم شده ندارد.

چندجمله‌ای درونیاب نیوتن:

$$P_n(x)=f_0+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\dots+f[x_0,x_1,\dots,x_n]$$
$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

ص ۲

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۱۰) Date (۱)

مثال) چند جمله‌ای درونیاب نیوتن تابع جدولی زیر را محاسبه کنید.

x_i	f_i
۱	۲
۲	۵
۳	۱۰
۴	۱۷
۵	۲۶

$\frac{5-2}{2-1} = 3$, $\frac{10-5}{3-2} = 5$, $\frac{17-10}{4-3} = 7$, $\frac{26-17}{5-4} = 9$

$\frac{5-3}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$, $\frac{7-5}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$, $\frac{9-7}{5-3} = 1$

$\frac{1-1}{4-1} = 0$

$$P_n(x) = 2 + 3(x-1) + 1(x-1)(x-2) = 2 + 3x - 3 + x^2 - 3x + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(x) = x^2 + 1}$$

* در روش درونیابی نیوتن ، درجه‌ی چند جمله‌ای بعداز جا سیوی تفاضلات تقسیم شده تعیین می شود.

مثال) نمودار زیر میزان تولید محصول یک کارخانه‌ی صنعتی را نشان می دهد. میزان تولید محصول این کارخانه را در سال چهارم پیش بینی کنید.

سال	۱	۲	۳	۴
میزان تولید (تن)	۱۵۰۰	۱۶۰۰	۲۱۰۰	? = ۳۰۰۰

سال	محصول
۱	۱۵۰۰
۲	۱۶۰۰
۳	۲۱۰۰

$\frac{1600-1500}{2-1} = 100$, $\frac{2100-1600}{3-2} = 500$

$\frac{500-100}{3-1} = 200$

$$P_2(x) = 1500 + 100(x-1) + 200(x-1)(x-2) =$$

$$= 1500 + 100x - 100 + 200x^2 - 600x + 400$$

$$P_2(x) = 200x^2 - 500x + 1800$$

$$P_2(4) = 200(16) - 500(4) + 1800 = 3200 - 2000 + 1800 \Rightarrow$$

$$= 3000$$

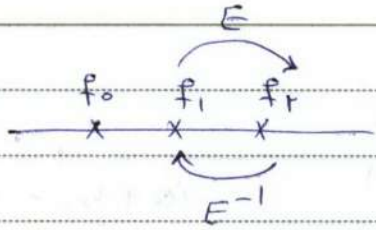
STAEDTLER

ص ۳

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۱۰) Date (۱)

عملگر Δ

$$\Delta = (E-1)$$



$$E f_i = f_{i+1}$$

$$E f_3 = f_4$$

$$E^2 f_i = E(E f_i) = E(f_{i+1}) = f_{i+2}$$

$$E^K f_i = f_{i+K}$$

$$E^6 f_3 = f_9$$

$$\Delta = E - 1$$

$$\Delta f_i = (E-1) f_i = E f_i - f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\begin{cases} \Delta f_1 = f_2 - f_1 \\ \Delta f_5 = f_6 - f_5 \end{cases}$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - f_{i+1} - (f_{i+1} - f_i)$$

$$\boxed{\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2 f_{i+1} + f_i}$$

مثال) $\Delta^3 f_2 - \Delta^2 f_2$

حل) $\Delta^2 f_2 = \Delta(\Delta f_2) = \Delta(f_3 - f_2) = \Delta f_3 - \Delta f_2 = f_4 - f_3 - (f_3 - f_2)$

$$= f_4 - 2 f_3 + f_2$$

$$\Delta^3 f_2 = (E-1)^3 f_2 = (E^3 - 3E^2 + 3E - 1) f_2 = f_5 - 3 f_4 + 3 f_3 - f_2$$

$$\Delta^3 f_2 - \Delta^2 f_2 = f_5 - 3 f_4 + 3 f_3 - f_2 - (f_4 - 2 f_3 + f_2) =$$

$$= f_5 - 4 f_4 + 5 f_3 - 2 f_2$$

ی

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۱۰) Date (۱)

$\Delta^k f_0 = (E-1)^k f_0$

$(a+b)^k \longrightarrow \begin{cases} a = E \\ b = -1 \end{cases}$

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = ?$

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

مثلث خیام پاسکال

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

STAEDTLER