Subject: ①
Date

بارم بندی:

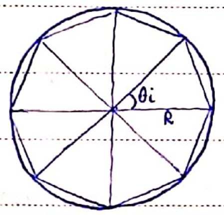
حضور و غیاب 1 نمره ← هر غیبت -0.25

تمارین و برنامه نویسی (A4) 5 نمره ← ۱

پروژه نهایی 2 نمره

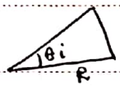
میان ترم ورقه ← 4-5 نمره

پایان ترم ← 8-9 نمره



مثال: محاسبه مساحت دایره به کمک مثلث ها

$$A_i = \frac{1}{2} R^2 \sin\theta_i \qquad A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{1}{2} R^2 \sum_{i=1}^{n} \sin\theta_i = \frac{1}{2} R^2 \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{2\pi}{n} = \pi R^2$$



اگر زاویه θ ها برابر باشند $\Rightarrow \theta_i = \frac{2\pi}{n}$

نرم افزارها:

ANSYS → General — pre / post / solver

MSC: NASTRAN → سازه ای، حرارتی، ارتعاشی — solver

ABAQUS → ضربه، انفجار، " ، " ، " ، " — pre / post / solver

LS DYNA → ضربه، انفجار، شبیه سازی زلزله، [illegible] — solver

MSC: DYTRAN → " " " " " — solver

MSC: PATRAN → مدلسازی، خواندن نتایج — pre / post

Hayper Mesh → pre process — pre / post

مراجع:

✓ A first course infinite element method, logan

✓ Introduction to finite element Analysis using MATLAB and Abaqus, Amar khennane

انواع روش های حل مسئله :

۱- روش تست (هزینه بر) ۲- روش Final element (خوب) ۳-

اهداف درس :

۱- مقدمه ای بر المان محدود ۲- آشنایی با المان های مختلف (المان فنر، Bar، Beam) ۳- نحوه بدست آوردن ماتریس سختی المان های مورد نیاز ۴- نحوه اسمبل کردن ماتریس سختی و حل مسئله ۵- آشنایی با کدنویسی برای المان Bar ۶- آشنایی با نرم افزار Abaqus (در حد تحلیل سازه ای، المان های Bar، Beam، plan (تنش صفحه ای، کرنش صفحه ای، تقارن محوری))

مقدمه ای بر جبر ماتریسی :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \longrightarrow A\hat{x} = b$$

سیستم معادلات خطی : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \Rightarrow$ مجهولات

(درایه های ماتریس)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} = [a_{ij}]$$

(درایه های بردار)

$$\hat{x} = [x_i] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad \hat{b} = [b_i] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

تعریف : بردار سطری : $v = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$

تعریف : بردار ستونی : $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$

جمع ماتریس ها : درصورتی ۲ بردار با یکدیگر جمع می شوند که اندازه یا سایز برابری داشته باشند.

A و B ۲ ماتریس با سایز برابر :

$A_{\underset{\text{سطر}}{m}\times\underset{\text{ستون}}{n}}$, $B_{m\times n}$

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n} \quad * \; C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \; *$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C = A+B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad D = A-B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_{m\times n} = A_{m\times n} - B_{m\times n} \qquad D_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$$

ضرب اسکالر :

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}] \qquad \text{if } \lambda = 3 \qquad \lambda A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریسی :

$$A_{l\times m} \qquad B_{m\times n} \qquad C_{l\times n} = A_{l\times m} B_{m\times n} \neq BA$$

نداره قانون جابجایی :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \qquad (AB)C = A(BC)$$

$$\text{if } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad C = AB = ?$$

$$\underset{3\times 2}{C} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 9 & 3 \\ 26 & 17 \end{bmatrix} \qquad c_{11} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} b_{k1} \Rightarrow c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1\times 3 + 2\times 4 = 11$$

ترانهاده :

Transpose of Matrix

جای سطر و ستون ؟ عوض می‌شود .

$$A = [a_{ij}] \qquad A^T = [a_{ji}]$$

A ← مثال بالا

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ نکته $$* \; (AB)^T = B^T A^T \; *$$

نکته : A یک ماتریس متقارن :

$$A = A^T \qquad [a_{ij}] = [a_{ji}]$$

Subject:
Date

ماتریس واحد: اعداد روی قطر اصلی 1 و بقیه درایه‌ها صفر اند.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \Rightarrow AI = A \quad IX = X$$

ماتریس (A) — بردار (X)

دترمینان ماتریس: برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود.

$\det A = |A|$

if $n \times n = 2 \times 2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ad - bc$

if $n \times n = 3 \times 3 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

singular matrix

$\rightsquigarrow$ A: ماتریس مربعی $n \times n$ if $\det A = 0$, $|A| = 0 \rightarrow$ A is singular matrix

معکوس یک ماتریس:

$\det A = |A| \neq 0$

$A^{-1} \Rightarrow$ معکوس ماتریس

نکته: * $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ *

C = Cofactor Matrix $C_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{(ij)}|$

* M_{ij}: ماتریسی که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A بدست می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_{12} = (-1)^3 \det M_{12} = 6$

$C_{11} = -3$

$$* \; A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, C^T \; *$$

if $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = -10$

$M_{11} = 2 \qquad C_{11} = (-1)^2 * 2 = 2 \qquad C_{22} = 1 \qquad C_{12} = -4 \qquad C_{21} = -3$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$* \; A A^{-1} = I \; *$$

$$A A^{-1} = \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = I$$

برای سیستم‌های خطی :

$$AX = b \Rightarrow * \; x = A^{-1} b \; *$$

قضیه مشتق و انتگرال از ماتریس :

$$A(t) = \left[a_{ij}(t) \right] \qquad \frac{d}{dt} A(t) = \left[\frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right]$$

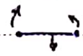
از هر درایه مشتق / انتگرال نسبت به t می‌گیریم.

$$\int A(t)\, dt = \left[\int a_{ij}(t)\, dt \right]$$

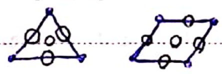
$$A(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ t+1 & \sin t \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt} A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 1 & \cos t \end{bmatrix} \qquad \int A(t)\, dt = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} + C_1 & \frac{t^3}{3} + C_2 \\ \frac{t^2}{2} + t + C_3 & -\cos t + C_4 \end{bmatrix}$$

(new انواع المان‌های اجزاء محدود :

برای پیاده‌سازی :

a) المان‌های یک بعدی (1D) ← node  element (2nodes)

spring , trass , bar , beam , pipe

b) المان‌های دو بعدی (2D) 4nodes  3nodes

(plane element)

تنش صفحه‌ای، برش صفحه‌ای، تقارن محوری

shell پوسته , plate صفحه , غشاء ← برای شبیه‌سازی

c) المان‌های سه بعدی (3D)

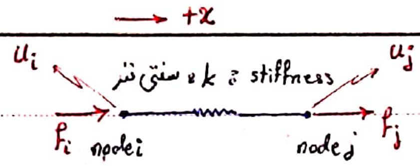
(solid element)

هرم مثلث قاعده  4nodes

 المان مکعبی

8 nodes → minimum

Subject:
Date



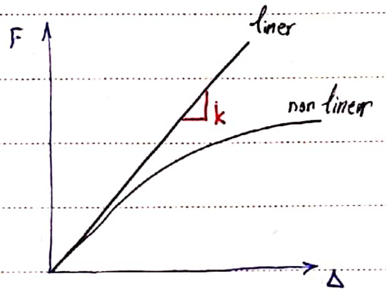
spring element : $[k] = N/m$

i, j : nodes → two nodes u_i, u_j Nodal displacement (m, mm, in) جابجایی گرهی

f_i, f_j : Nodal force (N, Lb) نیروی گرهی خارجی k : spring constant (stiffness) ($\frac{N}{m}, \frac{N}{mm}, \frac{lb}{in}$)

ثابت فنر / سفتی فنر

$$F = \overset{\text{ثابت فنر}}{k}\Delta \qquad \Delta = u_j - u_i$$



تعریف k : مقدار نیروی لازم جهت جابجایی فنر به اندازهٔ واحد.

* معادلات برای زمانی است که فنر تحت کشش است.

At node i : → ۱ درجه آزادی

عکس العمل

f_i → i • → F F ← ~~~ → F نیروی داخلی فنر

$$f_i + F = 0 \qquad f_i = -F = -k(u_j - u_i)$$

At node j : → ۱ درجه آزادی

F ← • j → f_j $\qquad f_j = F = k(u_j - u_i)$

⇒ مجهولات : $\begin{cases} f_i = -k(u_j - u_i) \\ f_j = k(u_j - u_i) \end{cases}$

نکته : این فنر دارای ۲ درجه آزادی است.

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix} \qquad ku = f$$

ماتریس سفتی فنر یک المان فنر — بردار جابجایی — بردار نیروی خارجی

ترتیب : ماتریس سفتی (۲×۲)

اگر n درجه آزادی باشد ماتریس سفتی nxn stiffness matrix ⇐ (متقارن است همیشه) حواست باشم

بردار جابجایی n×1 Displacement vector

بردار نیرو خارجی n×1 force vector

PAPCO

خواص ماتریس سختی : ۱- متقارن است ۲- singular است (برای یک فنر ← $f_i=f_j$ به همین دلیل است)

(به تعداد معادلات شبیه هم هستند) ← ماتریس singular است .

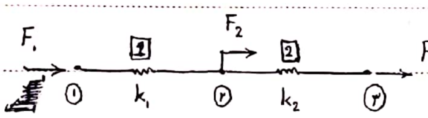
مثال :

$$1\times10^{+3}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ u_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\ 10\end{bmatrix}$$

$$-u_j\times10^3=f_1$$

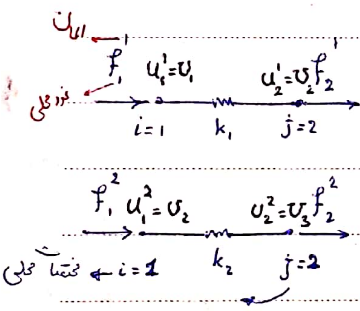
$$u_j\times10^{+3}=10 \Rightarrow f_i=-10$$

مثال : یک سیستم متشکل از ۲ فنر : ماتریس سختی سیستم :



f_i^m نیروی اعمالی به نود محلی i از المان m $i=1,2$

مختصات کلی	مختصات محلی (global)
شماره نودگذاری المان فنر از 2 محاسبه شد .	



$$\begin{bmatrix}k_1 & -k_1\\ -k_1 & k_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1^1\\ f_2^1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_2\\ U_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1^2\\ f_2^2\end{bmatrix}$$

برای فنر ① :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}k_1 & -k_1 & 0\\ -k_1 & k_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{3\times3}\end{array}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1^1\\ f_2^1\\ 0\end{bmatrix}$$

برای فنر ② :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc}\text{node }1 & \text{node }2 & \text{node }3\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & k_2 & -k_2\\ 0 & -k_2 & k_2\end{bmatrix}_{3\times3}\end{array}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ f_1^2\\ f_2^2\end{bmatrix}$$

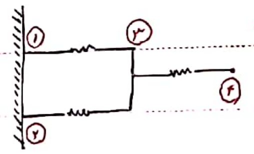
مشترک است ← node 2

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}k_1 & -k_1 & 0\\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2\\ 0 & -k_2 & k_2\end{bmatrix}_{3\times3}}_{}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}f_1^1\\ f_1^2+f_2^1\\ f_2^2\end{bmatrix}_{3\times1}$$

(stiffness matrix sys.)

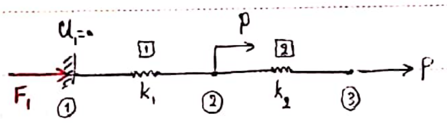
Subject
Date

مثال ۳:



* یکی بینه یا موازی با ۴ یا موازی با دوتا موازی دیده ؟

مثال:



راه حل ۱:

صفرگذاری

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cancel{u_1}^{\,0} \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ P \\ P \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow -k_1 U_2 = F_1 \\ \Rightarrow (k_1+k_2)U_2 - k_2 U_3 = P \\ \Rightarrow -k_2 U_2 + k_2 U_3 = P \end{array}$$

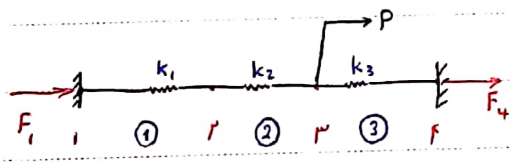
راه حل ۲:

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P \\ P \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} P \\ P \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2P}{k_1} \\ \frac{2P}{k_1}+\frac{P}{k_2} \end{bmatrix}_{2\times1}$$

(new)

مثال ۲:



$k_1 = 100 \ N/mm$ $\quad k_2 = 200 \ N/mm$ $\quad k_3 = 100 \ N/mm$ $\quad P = 500 \ N$

از شرایط مرزی: $u_1 = u_2 = 0$

a) ماتریس سختی کلی (k_{global})

$$k_1 = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 100 & -100 \\ 2 & -100 & 100 \end{array} \ N/mm \qquad k_2 = \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 200 & -200 \\ 3 & -200 & 200 \end{array} \ N/mm$$

b) $u_2 = ?,\ u_3 = ?$

$$k_3 = \begin{array}{c|cc} & 3 & 4 \\ \hline 3 & 100 & -100 \\ 4 & -100 & 100 \end{array} \ N/mm$$

c) $F_1 = ?$ ، $F_4 = ?$

d) نیرو در فنر ۲

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$k_{global}=\begin{array}{c|c} & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix} ۱۰۰ & -۱۰۰ & ۰ & ۰ \\ -۱۰۰ & (۱۰۰+۲۰۰) & -۲۰۰ & ۰ \\ ۰ & -۲۰۰ & (۲۰۰+۱۰۰) & -۱۰۰ \\ ۰ & ۰ & -۱۰۰ & ۱۰۰ \end{bmatrix}_{4\times4}\end{array}$$

$$k_g=\begin{bmatrix} ۱۰۰ & -۱۰۰ & ۰ & ۰ \\ -۱۰۰ & ۳۰۰ & -۲۰۰ & ۰ \\ ۰ & -۲۰۰ & ۳۰۰ & -۱۰۰ \\ ۰ & ۰ & -۱۰۰ & ۱۰۰ \end{bmatrix} N/mm$$

$$KU=f \qquad U=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix}_{4\times1} \qquad f=\begin{Bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\end{Bmatrix}_{4\times1}$$

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & \boxed{300} & \boxed{-200} & 0 \\ 0 & \boxed{-200} & \boxed{300} & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cancel{u_1}\\u_2\\u_3\\\cancel{u_4}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\\cancel{F_2}\\F_3\\F_4\end{Bmatrix}$$

خارجی نداریم $\to 0$ $\quad F_3 \to 500$

$$\overbrace{\begin{bmatrix}300 & -200\\-200 & 300\end{bmatrix}}^{A}\begin{bmatrix}u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\500\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{90000-40000}\begin{bmatrix}300 & 200\\200 & 300\end{bmatrix}=\frac{1}{50000}\begin{bmatrix}300 & 200\\200 & 300\end{bmatrix}$$

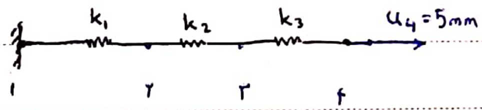
$$\begin{bmatrix}u_2\\u_3\end{bmatrix}=\frac{1}{500}\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\500\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}u_2=2 \ mm\\u_3=3 \ mm\end{array} \longrightarrow \begin{array}{l}F_1=-200 \ N\\F_4=-300 \ N\end{array} \begin{cases}-100u_2=F_1\\-100u_3=F_4\end{cases}$$

نیرو در فنر ۲ :

فنر ۲ — نیروی داخلی (2)

$$f_2 = k(u_j-u_i) = 200(3-2) = 200 \ N$$

مثال:



$k_1=100 \ N/mm \qquad k_2=200 \ N/mm \qquad k_3=100 \ N/mm$

$u_1=0 \qquad u_4=5mm$

تفاوت این مثال با مثال قبل در شرط مرزی است ← حل مثل قبل تا اعمال شرایط مرزی

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cancel{u_1}\\u_2\\u_3\\\cancel{u_4}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1\\\cancel{f_2}\\\cancel{f_3}\\f_4\end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$u_1 \to 0$, $u_4 \to 5$, $f_2 \to 0$, $f_3 \to 0$

$$-100u_2=f_1$$

$$\begin{bmatrix}300 & -200 & 0\\-200 & 300 & -100\\0 & -100 & 100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\u_3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\f_4\end{bmatrix}$$

صفر

Subject @ finite element 6

Date

این ۲ ردیف تغییر نمیکنند

تبدیل به این $\Rightarrow$ میشه کرد

$$\begin{bmatrix} \cancel{300} & \cancel{200} & \cancel{0} \\ \cancel{-200} & \cancel{300} & \cancel{100} \\ 0 & -100 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ -f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -500 \end{bmatrix}$$

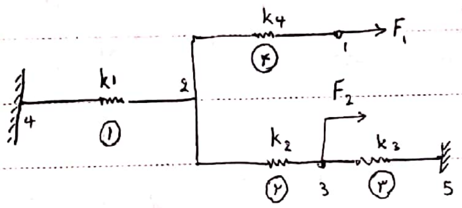
$-100\,u_3 + 500 = f_4$

$-f_4 - 100\,u_3 = -500$ (بعداً استفاده ازش میده)

$$\left.\begin{aligned} 300\,u_2 - 200\,u_3 &= 0 \\ -200\,u_2 + 300\,u_3 &= 500 \\ -100\,u_3 + 500 &= f_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u_3 = 3\ (mm)\ ,\ u_2 = 2\ (mm)$$

$$\Rightarrow f_4 = 500 - 100 * 3 = 200\ N$$

مثال:



Element	node i (1)	node j (2)
1	4	2
2	2	3
3	3	5
4	2	1

شماره نود (گره) در مختصات کلی ← global

$$k_1 = \begin{array}{c|cc} & 4 & 2 \\ \hline 4 & k_1 & -k_1 \\ 2 & -k_1 & k_1 \end{array} \qquad k_2 = \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & k_2 & -k_2 \\ 3 & -k_2 & k_2 \end{array}$$

شماره نود (گره) در مختصات محلی (local) $\left\{ \begin{matrix} 1,2 \\ i,j \end{matrix} \right.$

$$k_3 = \begin{array}{c|cc} & 3 & 5 \\ \hline 3 & k_3 & -k_3 \\ 5 & -k_3 & k_3 \end{array} \qquad k_4 = \begin{array}{c|cc} & 2 & 1 \\ \hline 2 & k_4 & -k_4 \\ 1 & -k_4 & k_4 \end{array}$$

$k_{global} \Rightarrow 5\times5$

$$k_{global} = \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & (k_1+k_2+k_4) & -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & (k_3+k_2) & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix}_{5\times5}$$

باند است ← bounded

هر چه باند تر باشد بهتر است

باند یعنی پارامترهای صفر دور

تر از قطر اصلی باشد و پارامترهای

غیر صفر نزدیک به قطر اصلی باشد.

Subject .... Date ......(new)

Bar element

۱. المان بار :

فرضیات :

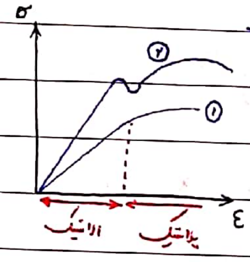
1) small deformation

۱) تغییر شکل های کوچک

2) Elastic Material

۲) مواد نقطه در ناحیه خطی اند ← الاستیک اند ← قانون هوک

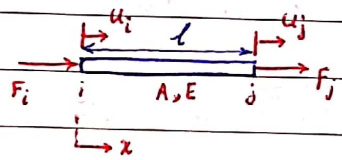
قانون هوک $\sigma = E\varepsilon$



3) static load

۳) بار استاتیکی

Bar element :



A : مساحت مقطع میله (m^2, mm^2)

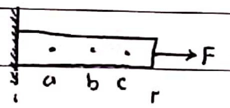
E : مدول یانگ $(N/m^2, N/mm^2)$

l : طول المان

$u_{(x)}$: جابجایی در طول المان

$\varepsilon = \varepsilon_{(x)}$: کرنش strain

$\sigma = \sigma_{(x)}$: تنش stress



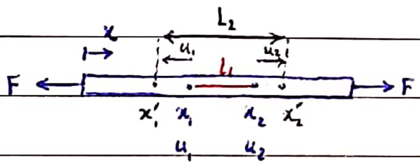
$u_1 = 0$

$u_2 = 5$ مثلا

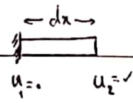
$u_a \lessgtr u_b \lessgtr u_c \rightarrow$ بین صفر و 5 اگر خطی فرض شود

$\varepsilon = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$ روابط کرنش جابجایی :

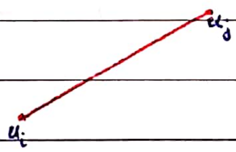
$\sigma = E\varepsilon$ روابط تنش ـ کرنش :



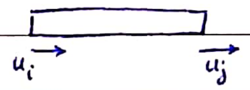
$\rightarrow du = u_2 - (-u_1) = u_2 + u_1 = L_2 - L_1 \qquad \varepsilon = \frac{u_2 + u_1}{L_1}$



$\Rightarrow \varepsilon = \frac{u_2}{dx}$



ماتریس سختی المان میله :



فرض می‌کنیم جابجایی بین نود های ندل بصورت خطی باشد :

Subject .... Date ....

x_0	x_1
y_0	y_1

معادله خط : $y-y_0 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$

پس برای المان داریم :

0	ℓ
u_i	u_j

$$u_{(x)} - u_i = \frac{u_j-u_i}{\ell-0}(x-0)$$

جابه‌جایی در طول المان : $\Rightarrow u_{(x)} = (u_j-u_i)\frac{x}{\ell} + u_i$

$$= \left(1-\frac{x}{\ell}\right)u_i + \frac{x}{\ell}u_j \quad : (\text{memories})$$

کرنش در المان $\Rightarrow \varepsilon = \frac{u_j-u_i}{\ell} = \frac{\Delta}{\ell} \rightarrow (\Delta : \text{elongation})$

تنش در المان $\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta}{\ell}$ برای المانی که تحت نیروی F قرار گرفته است : $\sigma = \frac{F}{A}$

$\Rightarrow F = \frac{EA}{L}\Delta$

برای المان فنر $\leftarrow F = k\,.\,\Delta$

$k = \frac{EA}{L} \Rightarrow$ k: سفتی المان بار (میله)

نتیجه : المان بار (میله) مثل یک فنر عمل می‌کند.

برای فنر $k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \Rightarrow k_{Bar} = \underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سفتی المان Bar}} \rightarrow ku = f$

$$\Rightarrow \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix}$$

$x=0 \quad N_1 = 1, \; N_2 = 0$

$u_{(x)} = \left(1-\frac{x}{\ell}\right)u_i + \frac{x}{\ell}u_j \quad \left(X = \frac{x}{L}\right) \Rightarrow \left.\begin{aligned} N_i(x) &= 1-X \\ N_j(x) &= X \end{aligned}\right\}$ linear shape function : $N_{j(x)}$, $N_{i(x)}$

تابع شکل خطی

$x=L \quad N_1 = 0, \; N_2 = 1$

$X = \frac{x}{\ell} \rightarrow 0 \leq X \leq 1$

$$\Rightarrow u_{(x)} = U_{(X)} = N_{i(x)}U_i + N_{j(x)}U_j = \boxed{N_iU_i + N_jU_j}$$

clips

(۱۳)

Subject .... Date ....

بردار جابه‌جایی

$$u_{(x)} = [\,N_i \quad N_j\,] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = N\hat{u}$$

$u_{(x)}$: جابه‌جایی یک نقطه از المان

$$\varepsilon = \frac{du_{(x)}}{dx} = \frac{d(N\hat{u})}{dx} = \left[\frac{dN}{dx}\right]\hat{u} \qquad \text{if} \quad B = \frac{dN}{dx}$$

(element strain_displacement matrix)

B : (ماتریس جابه‌جایی ـ کرنش المان)

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = B\hat{u}} \rightarrow$$ همیشه همینه

هدف: محاسبهٔ B :

$$B = \frac{dN}{dx} = \frac{d}{dx}[\,N_i(x) \quad N_j(x)\,] = \underbrace{\frac{d}{dX}[\,N_i(x)}_{-1} \quad \underbrace{N_j(x)}_{1}\,] \cdot \underbrace{\frac{dX}{dx}}_{\frac{1}{L}} \quad \frac{1}{L} : \left(\frac{1}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \left[\,-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\,\right]} \rightarrow$$ برای المان خطی است ؛ یعنی اگر خطی درنظر نگیریم مرتبه ۲ باشه .... با شیب B عوض می‌شود .

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow$$ رابطهٔ تنش ـ کرنش $$\Rightarrow \boxed{\sigma = E\varepsilon = EB\hat{u}} \rightarrow$$ همیشه همینه

(انتگرال روی حجم)

انرژی کرنشی (strain energy) :

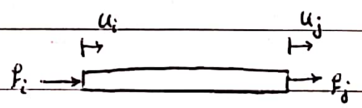
$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma^T \varepsilon \, dV$$

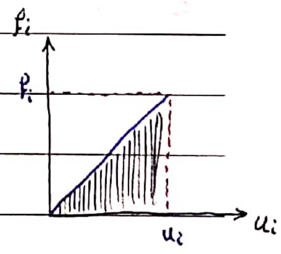
$$\Rightarrow \sigma^T = (EB\hat{u})^T = \hat{u}^T E B^T = \hat{u}^T B^T E$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V (\underbrace{\hat{u}^T B^T E}_{\text{تنش}}\underbrace{B\hat{u}}_{\text{کرنش}})\, dV = \frac{1}{2}\int_V \hat{u}^T (B^T E B)\hat{u}\, dV$$

($\hat{u}^T , \hat{u}$ تابعی از x نیستند)

$$= \frac{1}{2}\hat{u}^T \boxed{\left[\int_V B^T E B \, dV\right]\hat{u}}$$





نیروها از صفر بصورت خطی تا f_i زیاد می‌شود

" " f_j " " "

$$W = \frac{1}{2}f_i u_i + \frac{1}{2}f_j u_j = \frac{1}{2}[\,u_i \quad u_j\,]\begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\hat{u}^T \hat{f}}$$

← W : کار انجام شده توسط نیروهای بیرونی :

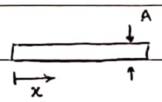
زمانی می‌گوییم سیستم پایدار یا conservative است که:

$U = W$ → سیستم پایدار است.

$$\frac{1}{2}\hat{u}^T\left[\int_V B^T E B\, dv\right]\hat{u} = \frac{1}{2}\hat{u}^T\hat{f} \quad \text{so} \Rightarrow \quad \hat{f} = \left[\int_V B^T E B\, dv\right]\hat{u} \;\overset{\text{در سیستم}}{\Rightarrow}\; f = ku$$

(تیشه ملاق)

$$k = \int_V B^T E B\, dv$$



$dv = A\,dx$

if $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ $\quad B^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ $\quad dv = A\,dx$

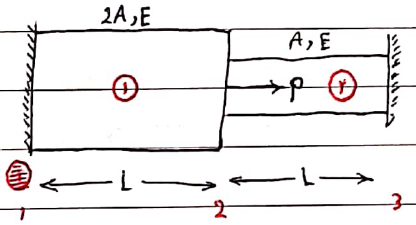
$$k = A\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}_{2\times1} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}_{1\times2} dx = AE\int_0^L \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell^2} & -\frac{1}{\ell^2} \\ -\frac{1}{\ell^2} & \frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix}_{2\times2} dx = \frac{AE}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$k = \frac{AE}{\ell^2}\begin{bmatrix} \ell & -\ell \\ -\ell & \ell \end{bmatrix} \Rightarrow k = \frac{AE}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

خلاصه:

$\varepsilon = B\hat{u}$ $\quad \sigma = EB\hat{u}$ $\quad k = \int_V B^T E B\, dv$ $\quad N$ $\quad B = \frac{dN}{dx}$

مثال) تنش را در ۲ میله محاسبه کنید.



اهداف:

۱- محاسبهٔ تنش در هر ۲ میله

۲- محاسبهٔ نیروهای عکس العمل

$$k_1=\frac{2AE}{L}\begin{array}{c|cc} & u_1 & u_2\\ \hline u_1 & 1 & -1\\ u_2 & -1 & 1\end{array} \qquad k_2=\frac{AE}{L}\begin{array}{c|cc} & u_2 & u_3\\ \hline u_2 & 1 & -1\\ u_3 & -1 & 1\end{array}$$

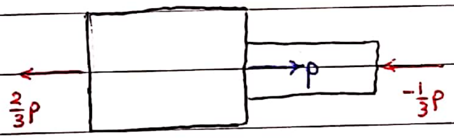
$$k_{3\times3}=\begin{array}{c|ccc} & u_1 & u_2 & u_3\\ \hline u_1 & 2 & -2 & 0\\ u_2 & -2 & (2+1) & -1\\ u_3 & 0 & -1 & 1\end{array} * \frac{AE}{L}$$

$$k_{3\times3}=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow ku=f \Rightarrow \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cancel{u_1}\ 0\\ u_2\\ \cancel{u_3}\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\ \cancel{f_2}\ P\\ f_3\end{bmatrix}$$

شرایط مرزی : $u_1=u_3=0$, $f_2=P$

$$\Rightarrow \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ u_2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\ P\\ f_3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2AE}{L}u_2=f_1 & \Rightarrow f_1=-\frac{2}{3}P\\ \frac{3AE}{L}u_2=P \Rightarrow u_2=\frac{PL}{3AE} & \\ -\frac{AE}{L}u_2=f_3 & \Rightarrow f_3=-\frac{1}{3}P\end{cases}$$



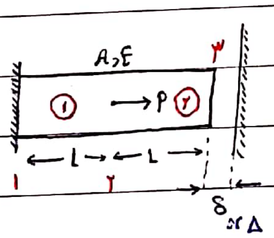
شماره نود / Node No	x	y	z
1	0	0	0
2	L	0	0
3	2L	0	0

برای مثال بالا

E|E NO.	N_1	N_2	E	A
1	1	2	E	2A
2	2	3	E	A

$$L_{E_1}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

* ای بنویسیم به فایلی حاوی شماره نود و ... آن ها را بگیرید و ماتریس سختی را بدست آورد.



مثال: هدف: محاسبه نیروهای عکس العمل

$P=6\times10^4\ N$ $\quad E=2\times10^4\ \frac{N}{mm^2}=Mpa$

$A=250\ mm^2$ $\quad L=150\ mm$ $\quad \delta=1.2\ mm$

نکته: برای میله (Rod) اگر خطی باشد ← ماتریس سختی هر کدام از المان ها $k_i = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ می باشد.

Subject .... Date ....

گام ① چک می کنیم میله به دیوار می رسد یا خیر.

$$\delta = \Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{6\times10^4 \times 150}{250\times 2\times10^4} = 1.8\ mm \rightarrow 1.8 > 1.2\ mm \rightarrow$$ به دیوار می رسد.

$$k_1 = \frac{AE}{L}\begin{array}{c|cc} & 1 & 2\\ \hline 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{array} \qquad k_2 = \frac{AE}{L}\begin{array}{c|cc} & 2 & 3\\ \hline 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{array} \qquad k_{3\times3} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1+1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

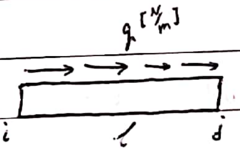
$$k_{tot} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad ku = f \Rightarrow \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1 \to 0\\ u_2\\ u_3 \to \delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_1\\ f_2 \to P\\ f_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1)\ -\frac{AE}{L}u_2 = f_1\\ 2)\ \frac{AE}{L}(2u_2 - \delta) = P\\ 3)\ \frac{AE}{L}(-u_2 + \delta) = f_3 \end{cases}$$

$$2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{AE} + \delta\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6\times10^4 \times 150}{250\times2\times10^4} + 1.2\right) = 1.5\ mm$$

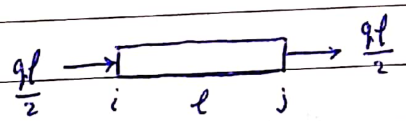
$$1 \rightarrow f_1 = \frac{-AE}{L}\times u_2 = -5\times10^4\ N \quad , \quad 3 \rightarrow f_3 = -1\times10^4\ N$$

(new) بارگسترده:



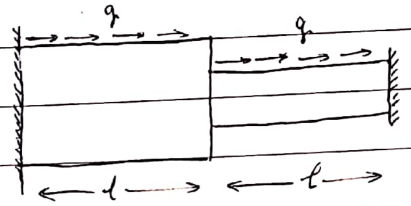
$$ku = f \qquad \begin{bmatrix} k \end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\ u_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_i\\ f_j\end{bmatrix}$$

معادل با ss

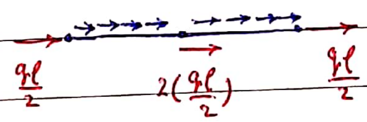


$$\begin{bmatrix} k \end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\ u_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_i + \frac{ql}{2}\\ f_j + \frac{ql}{2}\end{bmatrix}$$

رشتی

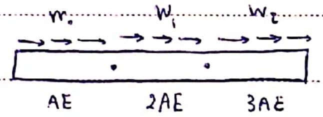


معادل

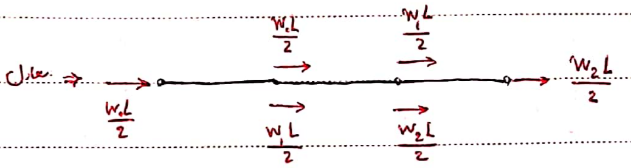


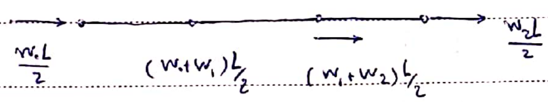
Subject: ۱۷
Date

مثال:



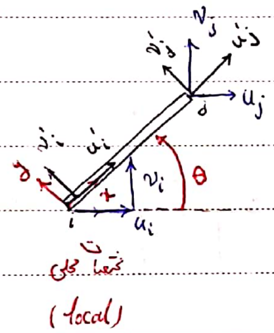
معادل →



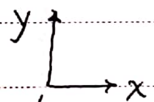


* حتی اگر مدول همه ۳ پارت برابر باشد باید به ۳ المان تقسیم کنیم یعنی هر سه قسمت AE باشد.

Bar element 2D :

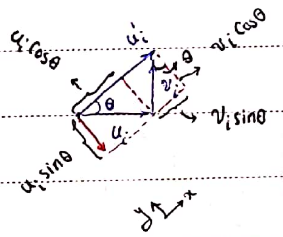


	local	global
	x, y	X, Y
تغییر مکان‌ها در مختصات محلی	$\begin{pmatrix} u_i', v_i' \\ u_j', v_j' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_i, v_i \\ u_j, v_j \end{pmatrix}$ ← تغییر مکان‌ها در مختصات کلی
درجه آزادی هر نود ←	1	2 درجه آزادی هر نود



مختصات کلی
(global) Cordinate

در مختصات محلی هر نود یک درجه آزادی دارد یعنی قبلاً فقط یک تغییر طول در راستای خودش داشت.
v_i', v_j' ← صفر اند بعداً استفاده می‌شود برای همین نوشتیم.



$$\begin{cases} u_i' = u_i \cos\theta + v_i \sin\theta \\ v_i' = -u_i \sin\theta + v_i \cos\theta \end{cases} \quad \text{if} \begin{cases} l = \cos\theta \\ m = \sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} u_i' = l u_i + m v_i \\ v_i' = -m u_i + l v_i \end{cases}$$

$$* \rightarrow u_i' = \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad \triangle \qquad * \rightarrow v_i' = \begin{bmatrix} -m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad \triangle$$

$$\begin{bmatrix} u_i' \\ v_i' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}}_{\tilde{T}} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

← T : ماتریس انتقال : Transformation matrix

بردار جابجایی در local

بردار جابجایی در global

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}$$

نکته: $* \; \tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^{t} \; *$

PAPCO

ماتریس انتقال یک ماتریس اورتوگونال است (متعامد) orthogonal

Subject:
Date

$$\tilde{T}^{t} = \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix} = \tilde{T}^{-1}$$ چرا ← $$\begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{4\times1}{\begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{bmatrix}} = \underset{4\times4}{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \end{bmatrix}} \underset{4\times1}{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}} \qquad T = \begin{bmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & \tilde{T} \end{bmatrix}$$

$u' = T\,u$ → $u' = \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{bmatrix}$ ← بردار جابجایی در مختصات محلی $\qquad u = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$ ← بردار جابجایی در مختصات کلی

T: ماتریس انتقال کلی

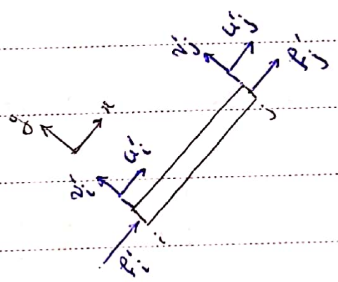
$f' = T\,f$ $\qquad f'$: بردار نیروها در مختصات محلی $\qquad f$: بردار نیروها در مختصات کلی

* ماتریس سختی در مختصات دو بعدی:

k?

$u'_i \qquad \begin{bmatrix} f'_i \\ f'_j \end{bmatrix}$

u'_j



در مختصات محلی:

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_i \\ f'_j \end{bmatrix}$$

$$\frac{AE}{l}\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_i \\ 0 \\ f'_j \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{Tu}{k'u'} = \underset{Tf}{f'} \qquad so \Rightarrow k'Tu = Tf$$

k' ← در مختصات محلی

طرفین را در T^t پیش ضرب می‌کنیم

Subject: 19
Date

$$T^t k' T u = T^t T f \rightarrow [T^t k' T] u = f \rightsquigarrow (ku=f)$$

global ماتریس سختی در مختصات $k = T^t k' T$ global stiffness matrix

$$k = \frac{AE}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_i & v_i & u_j & v_j \end{array} \\ \begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m \\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m \\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 \end{bmatrix}_{4\times4} \end{array}$$

$$\ell = \cos\theta = \frac{x_j - x_i}{L}$$

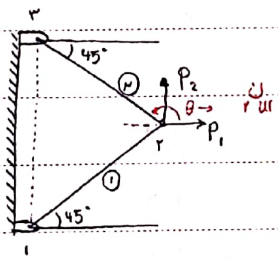
$$m = \sin\theta = \frac{y_j - y_i}{L}$$

$j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$, $i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, θ

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

(new)

مثال) طول، سطح مقطع، مدول: E, A, ℓ



$u_2 = ?$ $v_2 = ?$ $\sigma_1 = ?$ $\sigma_2 = ?$

element	node i	node j	θ_i	$\ell = \cos\theta$	$m = \sin\theta$
1	1	2	$\Rightarrow \theta_1 = 45^\circ \longrightarrow$	$\ell_1 = \sqrt{2}/2$	$m_1 = \sqrt{2}/2$
2	2	3	$\Rightarrow \theta_2 = 135^\circ \longrightarrow$	$\ell_2 = -\sqrt{2}/2$	$m_2 = \sqrt{2}/2$

$$k_1 = \frac{AE}{2L}\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$k_2 = \frac{AE}{2L}\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$k_{g\,6\times6}$ ← ۲×۳ ← درجه

$$k_g = \frac{EA}{2L}\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1+1 & 1-1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1-1 & 1+1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow ku=f \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{u_1} \rightarrow 0 \\ \cancel{v_1} \rightarrow 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \cancel{u_3} \rightarrow 0 \\ \cancel{v_3} \rightarrow 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ \cancel{f_{2x}} \rightarrow P_1 \\ \cancel{f_{2y}} \rightarrow P_2 \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{bmatrix}$$

Subject:
Date

شرایط مرزی $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$ بارگذاری $f_{2x} = P_1$ $f_{2y} = P_2$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{L}{AE} P_1 \\ v_2 = \frac{L}{AE} P_2 \end{cases}$$

$$\frac{AE}{2L}(-u_2 - v_2) = f_{1x}$$

$$\frac{AE}{2L}(-u_2 - v_2) = f_{1y}$$

$$\frac{AE}{2L}(v_2 - u_2) = f_{3x}$$

$$\frac{AE}{2L}(u_2 - v_2) = f_{3y}$$

$$f_{1y} = f_{1x} = -\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$$

$$f_{3x} = \frac{1}{2}(P_2 - P_1)$$

$$f_{3y} = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)$$

$$\sigma = E\varepsilon = EB\hat{u}' \qquad B = \frac{dN}{dx} = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right] \qquad N = \left[(1-X) \quad X\right] \qquad X = \frac{x}{L}$$

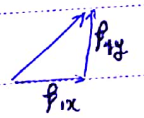
$$u' = \underset{2\times1}{\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix}} = \underset{2\times4}{\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}} \underset{4\times1}{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}} \Leftarrow \begin{bmatrix} u'_1 \\ \cancel{v'_1} \\ u'_2 \\ \cancel{v'_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ \cancel{-m} & \cancel{l} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & l & m \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-m} & \cancel{l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$\cos\theta \leftarrow l$ با اشتباه نگیری

$$\sigma = EBu' = E\left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right]\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \frac{EL}{A\sqrt{2}EL}\left[-\frac{1}{L} \quad +\frac{1}{L}\right]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}A}\left[-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1\right]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}A}(P_1 + P_2)$$

$$f_{1x} = f_{1y} = -\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$$

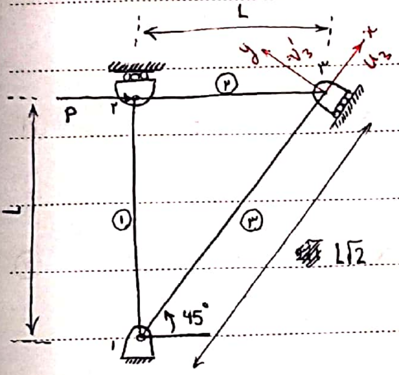


$$\rightarrow f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(P_1 + P_2) \qquad \sigma_1 = \frac{f_1}{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}(P_1 + P_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{E}{L}\left[-1 \quad 1\right]\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \cancel{u_3} \to 0 \\ \cancel{v_3} \to 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A}\left[-1 \quad 1\right]\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Subject: ۲۱
Date

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2A}\,[+1 \quad -1 \quad -1 \quad +1]\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2A}(P_1 - P_2)$$



مثال

$P = 1000\ kN \qquad E = 210\ GPa \qquad L = 1m$

سطح مقطع $A_1 = A_2 = 6 \times 10^{-4}\ m^2 \qquad A_3 = 6\sqrt{2} \times 10^{-4}\ m^2$

* displacements?
* Reactions?

element	node i	node j	θ_i	$l = \cos\theta$	$m = \sin\theta$
1	1	2	90°	0	1
2	2	3	0°	1	0
3	1	3	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$k_1 = \frac{A_1 E_1}{L_1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} (N/m) \qquad k_2 = \frac{A_2 E_2}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (N/m)$$

$$k_3 = \frac{A_3 E_3}{2L_3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} (N/m)$$

$$k_{g_{6\times6}} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & \text{(sym)} & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1.5 & 0.5 \\ & & & & & 0.5 \end{bmatrix}$$

متقارن

معادله در مختصات Global است

$$k_g * \begin{bmatrix} \cancel{u_1} \\ \cancel{v_1} \\ u_2 \\ \cancel{v_2} \\ u_3 \\ \cancel{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \cancel{F_{2x}} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ \cancel{F_{3y}} \end{bmatrix}$$

$0,\ 0,\ 0,\ u_3,\ P,\ -F_{3x}$

B.C → ① $u_1 = v_1 = v_2 = 0$ ② $F_{2x} = P$ $\quad v_3'' = 0 \rightarrow v_3' = -u_3 \cos 45 + v_3 \sin 45 = 0$

③ $\Rightarrow u_3 = v_3$

$F_{3x'} = 0 \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} F_{3x} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{3y} = 0 \longrightarrow$ ④ $\Rightarrow F_{3x} + F_{3y} = 0$

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ F_{3x} \\ -F_{3x} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$F_{3x} = -1260 \times 10^5\, u_3 = -F_{3y}$

$u_2 = 0.01191\ m$

$u_3 = 0.003968\ m = v_3$

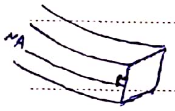
Subject:
Date

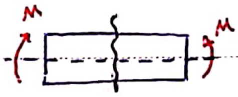
(new)

Beam element — المان بیم : تیر :

۲ فرضیه برای تیر ها داریم :

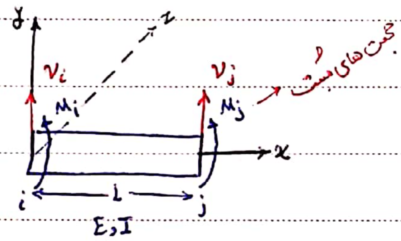
① تیر تیموشنکو : ① هر صفحه بعد از تغییر شکل صفحه باقی می ماند





② تیر اویلر - برنولی : علاوه بر حرف بالا ← صفحه عمود بر تار خنثی باقی می ماند .

هرچه طول نسبت به سطح مقطع باشد حداقل ۱۰ برابر ← فرضیهٔ اویلر برنولی صادق است .



✓ هر نود ۲ درجه آزادی

E : مدول الاستیسیته — I : ممان اینرسی سطح — L : Length

انحنای تیر ← $* \ \theta = \frac{dv}{dx}$ — $v = v(x)$ جابجایی عرضی

ممان خمشی حول z : $M = M(x)$ — $F = F(x)$ نیروی برشی

روابط از مقاومت مصالح :

① $EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$ ② $\sigma = \frac{-My}{I}$ ③ $k = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2}$

انحنای تیر — شعاع انحنا

$$k = \int_V (B^T E B)\, dV = \int_L \int_A B^T E B \, dA\, dx \Rightarrow * \ k = \int_0^L (B^T EI B)\, dx \ *$$

shape functions : توابع شکل ← توی خودش باید ۱ بشه ، توی انتها باید ۰ بشه

مربوط به v ← $N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$

مربوط به θ ← $N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$

مربوط به v ← $N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}$

مربوط به θ ← $N_4 = \frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$

Bar element

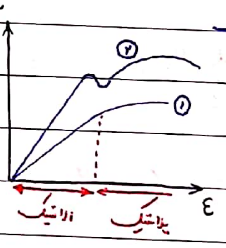
۲) المان بار :

فرضیات :

1) small deformation — ۱) تغییر شکل های کوچک

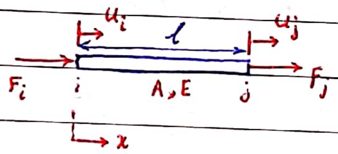
2) Elastic Material — ۲) مواد نقطه در ناحیه خطی اند ← الاستیک اند ← قانون هوک

قانون هوک $\sigma = E\varepsilon$



3) static load — ۳) بار استاتیکی

Bar element :



A : سطح مقطع میله (m^2, mm^2)

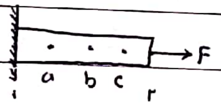
E : مدول یانگ $(N/m^2, N/mm^2)$

l : طول المان

$u_{(x)}$: جابجایی در طول المان

$\varepsilon = \varepsilon_{(x)}$: کرنش strain

$\sigma = \sigma_{(x)}$: تنش stress



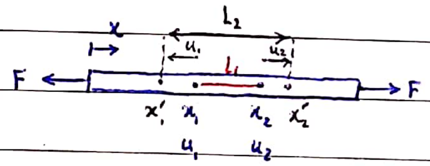
$u_1 = 0$

$u_2 = 5$ مثلا

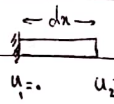
$u_a \neq u_b \neq u_c \rightarrow$ 5 بین صفر و — اگر خطی فرض شود

$\varepsilon = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$ روابط کرنش جابجایی :

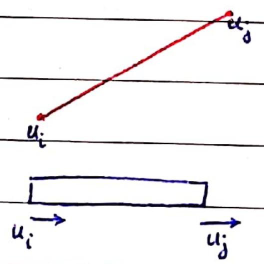
$\sigma = E\varepsilon$ روابط تنش ـ کرنش :



$\rightarrow du = u_2 - (-u_1) = u_2 + u_1 = L_2 - L_1$ $\quad \varepsilon = \frac{u_2+u_1}{L_1}$



$\Rightarrow \varepsilon = \frac{u_2}{dx}$



ماتریس سختی المان میله :

فرض می کنیم جابجایی بین نود های آن بصورت خطی باشد :

Subject .... Date ....

$$\begin{array}{c|c} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{array}$$ معادله خط : $y-y_0 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$

پس برای المان داریم :

$$\begin{array}{c|c} 0 & \ell \\ u_i & u_j \end{array}$$ $u_{(x)} - u_i = \frac{u_j-u_i}{\ell-0}(x-0)$

جابه‌جایی در طول المان : $\Rightarrow u_{(x)} = (u_j-u_i)\frac{x}{\ell} + u_i$

$= (1-\frac{x}{\ell})u_i + \frac{x}{\ell}u_j$: (memories)

کرنش در المان $\Rightarrow \varepsilon = \frac{u_j-u_i}{\ell} = \frac{\Delta}{\ell} \rightarrow$ (Δ : elongation)

تنش در المان $\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta}{\ell}$; برای المانی که تحت نیروی F قرار گرفته است : $\sigma = \frac{F}{A}$

$\Rightarrow F = \frac{EA}{L}\Delta$

برای المان فنر $\leftarrow F = k.\Delta$

$k = \frac{EA}{L} \Rightarrow$ k: سختی المان بار (میله)

نتیجه : المان بار (میله) مشابه یک فنر عمل می‌کند .

برای فنر $k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \Rightarrow k_{Bar} = \underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی المان Bar}} \rightarrow ku = f$

$$\Rightarrow \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix}$$

$x=0$ $N_1 = 1$, $N_2 = 0$

$u_{(x)} = (1-\frac{x}{\ell})u_i + \frac{x}{\ell}u_j$ $(X = \frac{x}{L}) \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} N_i(x) = 1-X \\ N_j(x) = X \end{array}\right\}$ linear shape function : $N_{j(x)}, N_{i(x)}$

تابع شکل خطی

$x=L$ $N_1 = 0$, $N_2 = 1$

$X = \frac{x}{\ell} \rightarrow 0 \leq X \leq 1$

$$\Rightarrow u_{(x)} = u_{(X)} = N_{i(x)}u_i + N_{j(x)}u_j = \boxed{N_iu_i + N_ju_j}$$

(۱۳)

Subject .... Date ....

بردار جابجایی

$$u_{(x)} = [N_i \quad N_j] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = N\hat{u}$$

$u_{(x)}$: جابجایی یک نقطه از المان

$$\varepsilon = \frac{du_{(x)}}{dx} = \frac{d(N\hat{u})}{dx} = \left[\frac{dN}{dx}\right]\hat{u} \qquad \text{if } B = \frac{dN}{dx} \quad (\text{element strain\_displacement matrix})$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = B\hat{u}} \rightarrow$$ همیشه همینه

B_e

(ماتریس جابجایی - کرنش المان)

هدف : محاسبه B :

$$B = \frac{dN}{dx} = \frac{d}{dx}[N_i(x) \quad N_j(x)] = \underbrace{\frac{d}{dX}[N_i(x)}_{-1} \quad \underbrace{N_j(x)]}_{1} \cdot \underbrace{\frac{dX}{dx}}_{\frac{1}{l} :\ (\frac{1}{L})}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right]} \rightarrow$$ برای المان خطی است ؛ یعنی اگر خطی درنظر نگیریم مرتبه ۲ یا ۳ و ... باشد B عوض می شود .

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow$$ رابطه تنش - کرنش $$\Rightarrow \boxed{\sigma = E\varepsilon = EB\hat{u}} \rightarrow$$ همیشه همینه

انرژی کرنشی (strain energy) :

(انتگرال روی حجم)

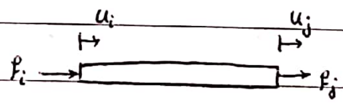
$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma^T \varepsilon \, dV$$

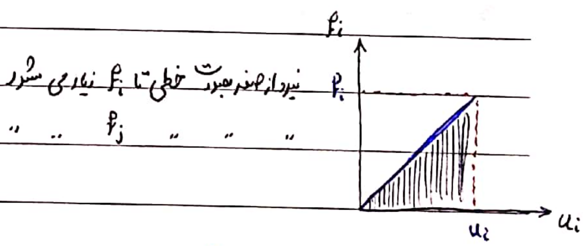
$$\Rightarrow \sigma^T = (EB\hat{u})^T = \hat{u}^T E B^T = \hat{u}^T B^T E$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V (\underbrace{\hat{u}^T B^T E}_{\text{تنش}} \underbrace{B\hat{u}}_{\text{کرنش}}) \, dV = \frac{1}{2}\int_V \hat{u}^T (B^T E B)\hat{u} \, dV$$

($\hat{u}^T$ ، $\hat{u}$ تابعی از x نیستند)

$$= \frac{1}{2}\hat{u}^T \boxed{\left[\int_V B^T E B \, dV\right]\hat{u}}$$





$$W = \frac{1}{2}f_i u_i + \frac{1}{2}f_j u_j = \frac{1}{2}[u_i \quad u_j]\begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\hat{u}^T \hat{f}}$$

⇐ W : کار انجام شده توسط نیروهای خارجی :

clips

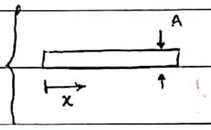
زمانی که سیستم پایدار یا conservative است داریم:

$U = W \Rightarrow$ سیستم پایدار است.

$$\frac{1}{2}\hat{u}^T\left[\int_v B^T E B\,dv\right]\hat{u} = \frac{1}{2}\hat{u}^T\hat{f} \quad \text{so} \Rightarrow \hat{f} = \left[\int_v B^T E B\,dv\right]\hat{u} \xrightarrow{\text{داریم}} f = ku$$

(پیشم صادق)

$$k = \int_v B^T E B\,dv$$



$dv = A\,dx$

if $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ $\quad B^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ $\quad dv = A\,dx$

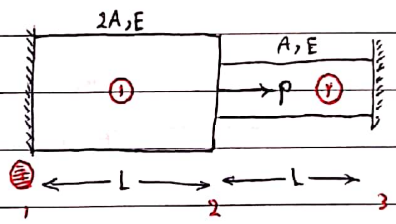
$$k = A\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}_{2\times1} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}_{1\times2} dx = AE\int_0^L \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell^2} & -\frac{1}{\ell^2} \\ -\frac{1}{\ell^2} & \frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix}_{2\times2} dx = \frac{AE}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$k = \frac{AE}{\ell^2}\begin{bmatrix} \ell & -\ell \\ -\ell & \ell \end{bmatrix} \Rightarrow k = \frac{AE}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

خلاصه:

$\varepsilon = B\hat{u}$ $\quad \sigma = EB\hat{u}$ $\quad k = \int_v B^T E B\,dv$ $\quad N$ $\quad B = \frac{dN}{dx}$

مثال: تنش را در ۲ میله محاسبه کنید.



اهداف:

۱- محاسبه تنش در هر ۲ میله

۲- محاسبه نیروهای عکس العمل

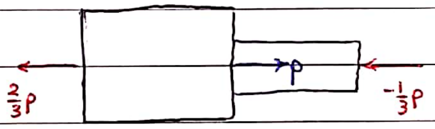
$$k_1=\frac{2AE}{L}\begin{array}{c|cc} & u_1 & u_2\\ \hline u_1 & 1 & -1\\ u_2 & -1 & 1\end{array} \qquad k_2=\frac{AE}{L}\begin{array}{c|cc} & u_2 & u_3\\ \hline u_2 & 1 & -1\\ u_3 & -1 & 1\end{array} \qquad k_{3\times3}=\begin{array}{c|ccc} & u_1 & u_2 & u_3\\ \hline u_1 & 2 & -2 & 0\\ u_2 & -2 & (2+1) & -1\\ u_3 & 0 & -1 & 1\end{array} * \frac{AE}{L}$$

$$k_{3\times3}=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&1\end{bmatrix} \Rightarrow ku=f \Rightarrow \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cancel{u_1}\\u_2\\\cancel{u_3}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی : $u_1=u_3=0$, $f_2=P$

$$\Rightarrow \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\u_2\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1\\P\\f_3\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2AE}{L}u_2=f_1 & \Rightarrow f_1=-\frac{2}{3}P \\ \frac{3AE}{L}u_2=P & \Rightarrow u_2=\frac{PL}{3AE} \\ -\frac{AE}{L}u_2=f_3 & \Rightarrow f_3=-\frac{1}{3}P \end{cases}$$



کدنویسی مثال بالا :

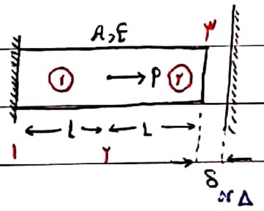
شماره نود Node No	x	y	z
1	0	0	0
2	L	0	0
3	2L	0	0

ELE NO.	N_1	N_2	E	A
1	1	2	E	2A
2	2	3	E	A

$$L_{E_1}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

* اگر بنویسیم یک فایلی حاوی شماره نود و ... المان‌ها را بگیرد و ماتریس سختی را بدست آورد.

مثال ۵) هدف : محاسبه‌ی نیروهای عکس العمل



$P=6\times10^4\ N$ $\quad E=2\times10^4\ \frac{N}{mm^2}$ & Mpa

$A=250\ mm^2$ $\quad L=150\ mm$ $\quad \delta=1.2\ mm$

نکته : برای میله (Rod) اگر خطی باشد ← ماتریس سختی هر کدام از المان ها $k_i = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ می باشد .

Subject .... Date ....

گام ① چک می کنیم میله به دیوار می رسد یا خیر .

$$\delta = \Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{6\times10^4 \times 150}{250 \times 2\times10^4} = 1.8\ mm \rightarrow 1.8 > 1.2\ mm \rightarrow$$ به دیوار می رسد

$$k_1 = \frac{AE}{L}\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \qquad k_2 = \frac{AE}{L}\begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{array} \qquad k_{3\times3} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

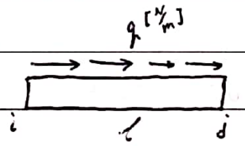
$$k_{tot} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad ku = f \Rightarrow \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \\ u_3 \rightarrow \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \rightarrow P \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1: & -\frac{AE}{L}u_2 = f_1 \\ 2: & \frac{AE}{L}(2u_2 - \delta) = P \\ 3: & \frac{AE}{L}(-u_2 + \delta) = f_3 \end{cases}$$

$$2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{AE} + \delta\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6\times10^4 \times 150}{250\times2\times10^4} + 1.2\right) = 1.5\ mm$$

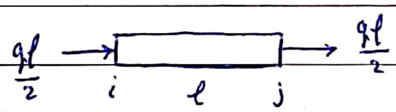
$$1 \rightarrow f_1 = \frac{-AE}{L} \times u_2 = -5\times10^4\ N \quad , \quad 3 \rightarrow f_3 = -1\times10^4\ N$$

(new) بار گسترده :

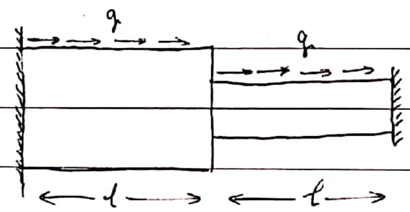


$$ku = f \qquad \begin{bmatrix} k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix}$$

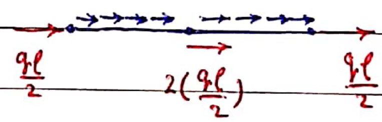
SS معادل با



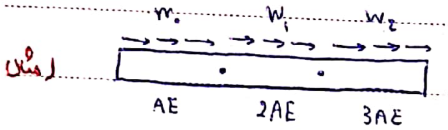
$$\begin{bmatrix} k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i + \frac{ql}{2} \\ f_j + \frac{ql}{2} \end{bmatrix}$$



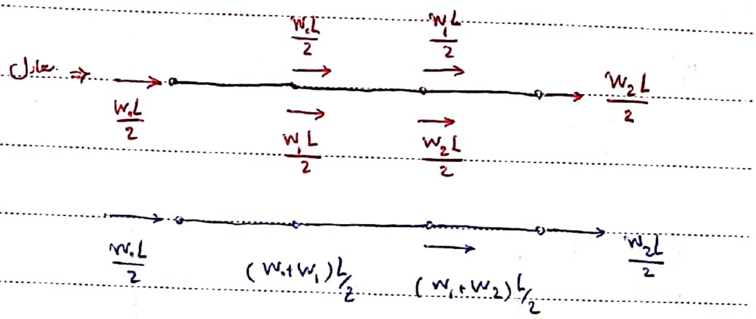
معادل



مثال

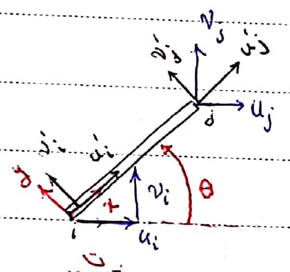


معادل

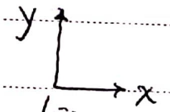


* حتی اگر w در همه ۳ پارت برابر باشد باید به ۳ المان تقسیم کنیم _ یعنی هر سه قسمت AE باشد.

Bar element 2D :



مختصات محلی (local)

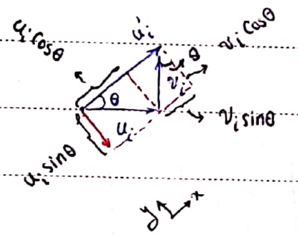


مختصات کلی (global) Cordinate

	local	global	
	x, y	X, Y	
تغییر مکان‌ها در مختصات محلی ←	$\begin{pmatrix} u'_i, v'_i \\ u'_j, v'_j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_i, v_i \\ u_j, v_j \end{pmatrix}$	→ تغییر مکان‌ها در مختصات کلی
درجه آزادی هر نود ←	1	2	درجه آزادی هر نود

در مختصات محلی هر نود یک درجه آزادی دارد یعنی فقط یک تغییر طول در راستای خودش دارد.

v'_i, v'_j ← صفر اند بعداً استفاده می‌شود برای همین نوشتیم.



$$\begin{cases} u'_i = u_i\cos\theta + v_i\sin\theta \\ v'_i = -u_i\sin\theta + v_i\cos\theta \end{cases} \quad \text{if} \begin{cases} l = \cos\theta \\ m = \sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} u'_i = l u_i + m v_i \\ v'_i = -m u_i + l v_i \end{cases}$$

$$* \rightarrow u'_i = [\,l \quad m\,]\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \qquad * \rightarrow v'_i = [\,-m \quad l\,]\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

$$\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}}_{\tilde{T}} \underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}}$$

بردار جابجایی در local   بردار جابجایی در global

Transformation matrix : ماتریس انتقال : T ←

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}$$

نکته: $\underbrace{*\ \tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^{t}\ *}_{\downarrow}$

ماتریس انتقال یک ماتریس ارتوگنال است (متعامد) orthogonal

Subject:
Date

$$\tilde{T}^t = \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix} = \tilde{T}^{-1}$$ چک کنیم $$\begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{bmatrix}_{4\times1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{4\times4} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}_{4\times1} \qquad T = \begin{bmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & \tilde{T} \end{bmatrix}$$

$u' = T\,u$ → $u' = \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{bmatrix}$ → بردار جابجایی در مختصات محلی $u = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$ → بردار جابجایی در مختصات کلی

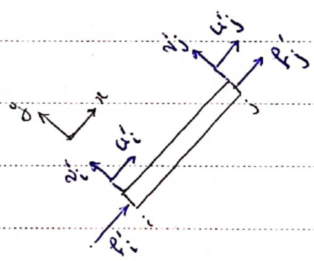
T: ماتریس انتقال کلی

$f' = T\,f$ f': بردار نیروها در مختصات محلی f: بردار نیروها در مختصات کلی

* ماتریس سختی در مختصات دو بعدی :

k ?

$\begin{matrix} u'_i \\ u'_j \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} f'_i \\ f'_j \end{bmatrix}$



۱ در مختصات محلی :

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_i \\ f'_j \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{AE}{L}\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}_{k'} \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_i \\ 0 \\ f'_j \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k'\underbrace{u'}_{Tu} = \underbrace{f'}_{Tf} \quad \text{so} \Rightarrow k'Tu = Tf$$

۲ در مختصات محلی

طرفین را در T^t پیش ضرب می‌کنیم

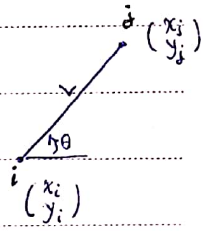
Subject: 19
Date

$$T^t k' T u = T^t T f \Rightarrow [T^t k' T] u = f \rightsquigarrow (ku = f)$$

global ماتریس سختی در مختصات $k = T^t k' T$ global stiffness matrix

$$k = \frac{AE}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_i & v_i & u_j & v_j \end{array} \\ \begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m \\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m \\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 \end{bmatrix}_{4\times4} \end{array}$$

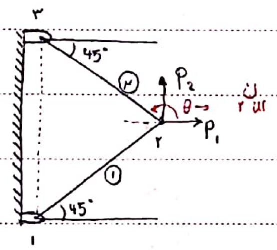
$$\ell = \cos\theta = \frac{x_j - x_i}{L} \qquad m = \sin\theta = \frac{y_j - y_i}{L}$$



$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

(new)

مثال



«E, A, ℓ» «طول ، سطح مقطع ، مدول»

$u_2 = ?$ $v_2 = ?$ $\sigma_1 = ?$ $\sigma_2 = ?$

element	nodei	nodej	θ_i	$\ell = \cos\theta$	$m = \sin\theta$
1	1	2	⇒ $\theta_1 = 45°$ ⟶	$\ell_1 = \sqrt{2}/2$	$m_1 = \sqrt{2}/2$
2	2	3	⇒ $\theta_2 = 135°$ ⟶	$\ell_2 = -\sqrt{2}/2$	$m_2 = \sqrt{2}/2$

$$k_1 = \frac{AE}{2L}\begin{array}{c|cccc} & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ \hline u_1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ v_1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ u_2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ v_2 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \qquad k_2 = \frac{AE}{2L}\begin{array}{c|cccc} & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \hline u_2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ v_2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ u_3 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ v_3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

$k_{g\,6\times6}$ ← ۲×۳ ← ۳ نود

$$k_g = \frac{EA}{2L}\begin{array}{c|cccccc} & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \hline u_1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ u_2 & -1 & -1 & 1+1 & 1-1 & -1 & 1 \\ v_2 & -1 & -1 & 1-1 & 1+1 & 1 & -1 \\ u_3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \rightarrow ku = f \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cancel{u_1} \to 0 \\ \cancel{v_1} \to 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \cancel{u_3} \to 0 \\ \cancel{v_3} \to 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ \cancel{f_{2x}} \to P_1 \\ \cancel{f_{2y}} \to P_2 \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{bmatrix}$$

Subject:
Date

شرایط مرزی: $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$ بارگذاری: $f_{2x} = P_1$ $f_{2y} = P_2$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\end{bmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} u_2 = \frac{L}{AE}P_1 \\ v_2 = \frac{L}{AE}P_2 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \frac{AE}{2L}(-u_2 - v_2) = f_{1x} \\ \frac{AE}{2L}(-u_2 - v_2) = f_{1y} \\ \frac{AE}{2L}(v_2 - u_2) = f_{3x} \\ \frac{AE}{2L}(u_2 - v_2) = f_{3y} \end{matrix}\right.$$

$$f_{1y} = f_{1x} = -\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$$

$$f_{3x} = \frac{1}{2}(P_2 - P_1)$$

$$f_{3y} = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)$$

$$\sigma = E\varepsilon = EB\hat{u}' \qquad B = \frac{dN}{dx} = \left[-\frac{1}{\ell}\quad \frac{1}{\ell}\right] \qquad N = [\,(1-X)\quad X\,] \qquad X = \frac{x}{L}$$

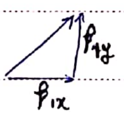
$$u' = \underset{2\times1}{\begin{bmatrix}u'_1\\ u'_2\end{bmatrix}} = \underset{2\times4}{\begin{bmatrix}\ell & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ell & m\end{bmatrix}}\underset{4\times1}{\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\end{bmatrix}} \Leftarrow \begin{bmatrix}u'_1\\ \cancel{v'_1}\\ u'_2\\ \cancel{v'_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\ell & m & 0 & 0\\ \cancel{-m} & \cancel{\ell} & \cancel{0} & \cancel{0}\\ 0 & 0 & \ell & m\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-m} & \cancel{\ell}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\end{bmatrix}$$

$\cos\theta \leftarrow$ با L اشتباه نگیری

$$\sigma = EBu' = E\left[-\frac{1}{L}\quad \frac{1}{L}\right]\begin{bmatrix}\ell & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ell & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \frac{El}{A\sqrt{2}E}\left[-\frac{1}{L}\quad +\frac{1}{L}\right]\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ P_1\\ P_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}A}[-1\quad -1\quad 1\quad 1]\begin{bmatrix}0\\ 0\\ P_1\\ P_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}A}(P_1 + P_2)$$

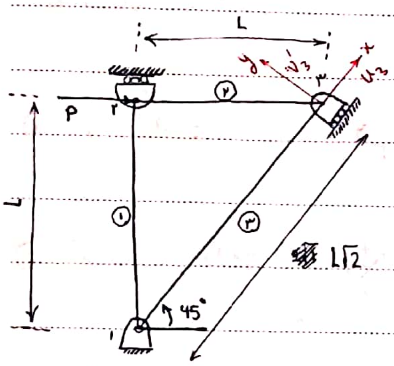
$$f_{1x} = f_{1y} = -\frac{1}{2}(P_1 + P_2) \longrightarrow f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(P_1 + P_2) \qquad \sigma_1 = \frac{f_1}{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}(P_1 + P_2)$$



$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{E}{L}[-1\quad 1]\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ v_2\\ u_3 \to 0\\ v_3 \to 0\end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A}[-1\quad 1]\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Subject: ۲۱
Date

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2A}\begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2A}(P_1 - P_2)$$



مثال. $P = 1000\ kN$ $E = 210\ GPa$ $L = 1m$

سطح مقطع $A_1 = A_2 = 6\times10^{-4}\ m^2$ $A_3 = 6\sqrt{2}\times10^{-4}\ m^2$ * displacements? * Reactions?

element	node i	node j	θ_i	$l=\cos\theta$	$m=\sin\theta$
1	1	2	90°	0	1
2	2	3	0°	1	0
3	1	3	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$k_1 = \frac{A_1E_1}{L_1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} (N/m) \qquad k_2 = \frac{A_2E_2}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (N/m)$$

$$k_3 = \frac{A_3E_3}{2L_3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} (N/m)$$

$$k_{g_{6\times6}} = 1260\times10^5\begin{bmatrix} \cancel{0.5} & \cancel{0.5} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-0.5} & \cancel{-0.5} \\ & \cancel{1.5} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-0.5} & \cancel{-0.5} \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ & \text{متقارن} & & & 1.5 & 0.5 \\ & & & & & 0.5 \end{bmatrix}$$

معادله در مختصات Global است

$$k_g * \begin{bmatrix} \cancel{u_1} \to 0 \\ \cancel{v_1} \to 0 \\ u_2 \\ \cancel{v_2} \to 0 \\ u_3 \\ \cancel{v_3} \to u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \cancel{F_{2x}} \to P \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ \cancel{F_{3y}} \to -F_{3x} \end{bmatrix}$$

B.C → ① $u_1 = v_1 = v_2 = 0$ ② $F_{2x} = P$ $v'_3 = 0 \to v'_3 = -u_3\cos45 + v_3\sin45 = 0$

→ ③ $u_3 = v_3$

$F_{3x'} = 0 \to \frac{\sqrt{2}}{2}F_{3x} + \frac{\sqrt{2}}{2}F_{3y} = 0 \to$ ④ $F_{3x} + F_{3y} = 0$

$$1260\times10^5\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ F_{3x} \\ -F_{3x} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$F_{3x} = -1260\times10^5\, u_3 = -F_{3y}$

$u_2 = 0.01191\ m$

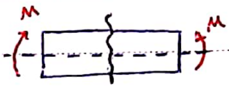
$u_3 = 0.003968\ m = v_3$

PAPCO

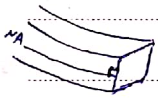
Subject :
Date (new)

Beam element — المان بیم : تیر :

۲ فرضیه برای تیرها داریم :

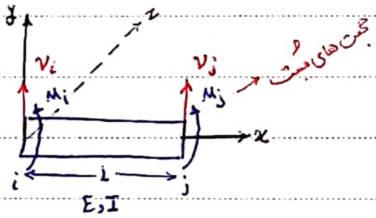


① تیر تیموشنکو : ① هر صفحه بعد از تغییر شکل صفحه باقی می ماند



② تیر اویلر - برنولی : علاوه بر حرف بالا ← صفحات عمود بر تار خنثی باقی می مانند .

هرچه طول نسبت به سطح مقطع بالا باشد حداقل ۱۰ برابر ← فرضیه اویلر برنولی صادق است .



هر نود ۲ درجه آزادی

L : Length — I = ممان اینرسی سطح — E : مدول الاستیسیته

$v = v(x)$ جابجایی عرضی — * $\varphi = \frac{dv}{dx}$ ← انحنای تیر

$F = F(x)$ نیروی برشی — $M = M(x)$ ممان خمشی حول z

روابط از مقاومت مصالح :

① $EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$ ② $\sigma = \frac{-My}{I}$ ③ $k = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2}$ انحنای تیر — ρ شعاع انحنا

$$k = \int_V (B^T E B)\, dV = \int_L \int_A B^T E B \, dA\, dx \Rightarrow * \; k = \int_0^L (B^T E I B)\, dx \; *$$

shape functions : توابع شکل ← توی خودش باید ۱ بشه ، توی انتها باید ۰ بشه .

مربوط به v ← $N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$

مربوط به φ ← $N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$

مربوط به v ← $N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}$

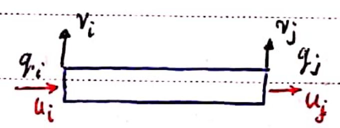
مربوط به φ ← $N_4 = \frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} N\hat{u} = B\hat{u} \qquad \leftarrow (v = Nu)$$

$$B = \frac{d^2}{dx^2} N = \begin{bmatrix} N_1''(x) & N_2''(x) & N_3''(x) & N_4''(x) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{4\times4} * \begin{bmatrix} u_i \\ q_i \\ u_j \\ q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{bmatrix}$$

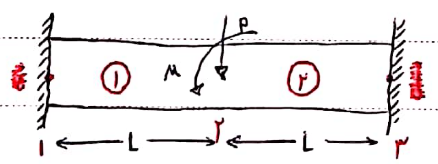


اگر u_i و u_j اضافه شود بصورت زیر می شود.
(هر نود ۳ درجه آزادی)

$$\begin{array}{cccccc} u_i & v_i & q_i & u_j & v_j & q_j \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^3} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & +\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^3} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}_{6\times6} * \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ q_i \\ u_j \\ v_j \\ q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^x \\ F_i^y \\ M_i \\ F_j^x \\ F_j^y \\ M_j \end{bmatrix}$$

مثال: نیروهای عکس العملی در تکیه گاه و شیب و خیز در وسط تیر.



E, I

Subject:
Date

$$k_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \\ v_1 \\ q_1 \\ v_2 \\ q_2 \end{array}\!\!\begin{array}{cccc} v_1 & q_1 & v_2 & q_2 \\ \hline \end{array}$$

$$k_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c|cccc|} & v_1 & q_1 & v_2 & q_2 \\ \hline v_1 & 12 & 6L & -12 & 6L \\ q_1 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ v_2 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ q_2 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{array}$$

داخلش عین k_1

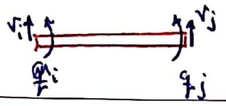
$$\Rightarrow k_2 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{cccc} v_2 & q_2 & v_3 & q_3 \end{array}\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$k_{tot} \Rightarrow \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c|cccccc|} & v_1 & q_1 & v_2 & q_2 & v_3 & q_3 \\ \hline v_1 & 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ q_1 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ v_2 & -12 & -6L & \boxed{24} & \boxed{0} & -12 & 6L \\ q_2 & 6L & 2L^2 & \boxed{0} & \boxed{8L^2} & -6L & 2L^2 \\ v_3 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ q_3 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{array}\begin{Bmatrix} \cancel{v_1} \to 0 \\ \cancel{q_1} \to 0 \\ v_2 \\ q_2 \\ \cancel{v_3} \to 0 \\ \cancel{q_3} \to 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ \cancel{F_2} \to -P \\ \cancel{M_2} \to M \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

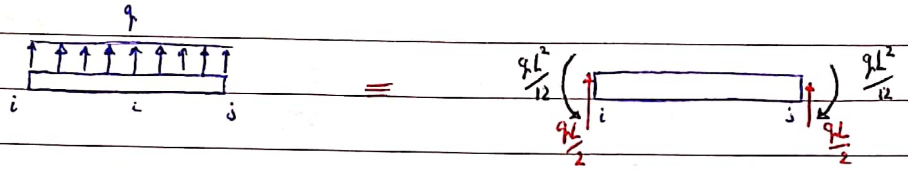
$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ M \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{-PL^3}{24EI} \qquad q_2 = \frac{ML}{72EI}$$

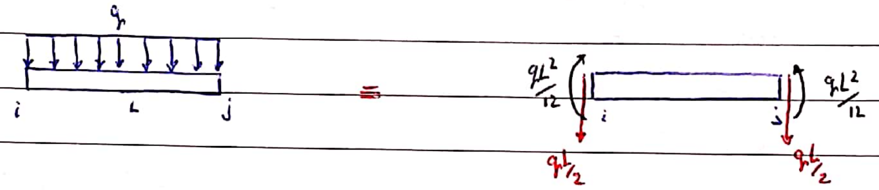
$$\underset{4\times1}{\begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_3 \\ M_3 \end{bmatrix}} = \frac{EI}{L^3}\underset{4\times2}{\begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{bmatrix} v_2 \\ q_2 \end{bmatrix}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2P + \frac{3M}{L} \\ PL + M \\ 2P - \frac{3M}{L} \\ -PL + M \end{bmatrix}$$

جهت قرارداد:

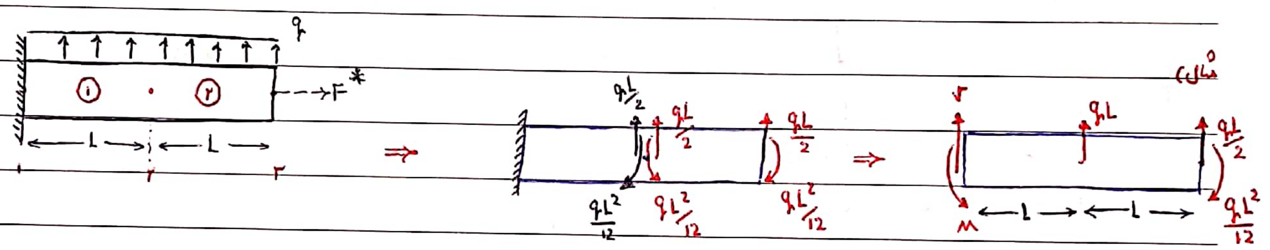


بار گسترده:





مثال:

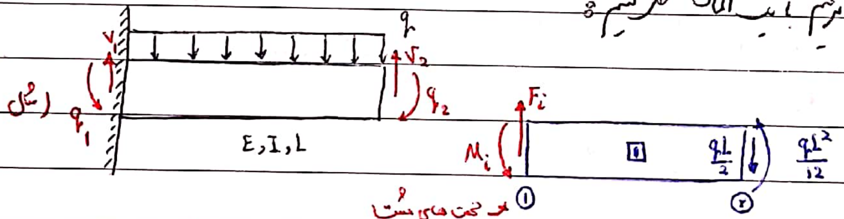


* توجه: اگر نیرویی مانند F به سر تیر وارد شود ← نیازی نیست دخیل نمی‌شود چون این دو را ندارد.

⇐ ۳ نود داریم ← نود ۲ درجه آزادی در این سؤال دارد.

✓ می‌توان سؤال بالا را هم ۲ المان در نظر گرفت هم با یک المان حل کنیم:

مثال



جهت های مثبت

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ q_1 \\ v_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{bmatrix}$$

$v_1 \to 0$, $q_1 \to 0$, $F_{2y} \to -\frac{qL}{2}$, $M_2 \to \frac{qL^2}{12}$

B.C: $v_1 = 0 \quad q_1 = 0$

$F_{2y} = -\frac{qL}{2} \qquad M_2 = \frac{qL^2}{12}$

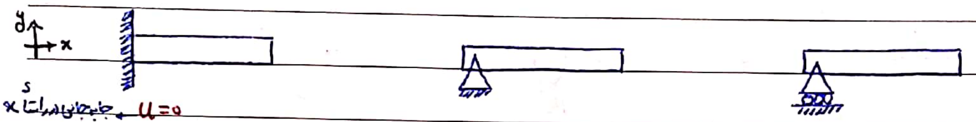
$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qL/2 \\ qL^2/12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL^4}{8EI} \\ -\frac{qL^3}{6EI} \end{bmatrix}$$

$F_{1y} = \frac{-qL}{2} \qquad M_1 = \frac{-qL^2}{12}$

(یک المان تقریبی جواب می‌دهد و باید تعداد المان‌ها را بالا ببریم تا جواب درست بدهد)

Subject .... Date ....

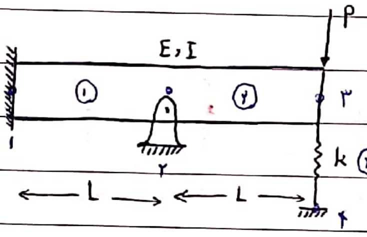
شرایط مرزی:



x جابجایی در راستای ← $u=0$ | $u=0$ | $v=0$

y جابجایی در راستای ← $v=0$ | $q=0$

شیب ← $q=0$



$P = 50\ kN$

$k = 200\ \frac{kN}{m}$

$L = 3\ m$

$E = 210\ GPa$

$I = 2\times10^{-4}\ m^4$

شکل: Deflection?

Reaction force?

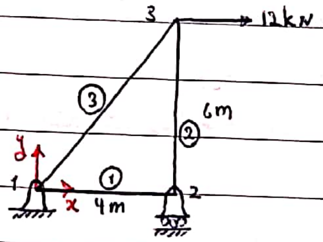
$$k_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c|cccc} & v_1\,(v_2) & q_1\,(q_2) & v_2\,(v_3) & q_2\,(q_3) \\ \hline v_1\,(v_2) & 12 & 6L & -12 & 6L \\ q_1\,(q_2) & & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ v_2\,(v_3) & & sym & 12 & -6L \\ q_2\,(q_3) & & & & 4L^2 \end{array} = k_2$$

$$k_3 = \begin{array}{c|cc} & v_3 & v_4 \\ \hline v_3 & k & -k \\ v_4 & -k & k \end{array} \qquad k' = \frac{L^3}{EI}k$$

$$k_{tot} = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{ccccccc} v_1 & q_1 & v_2 & q_2 & v_3 & q_3 & v_4 \\ \hline 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & sym & & & 12+k' & -6L & -k' \\ & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & k' \end{array} * \begin{Bmatrix} \cancel{v_1}\to 0 \\ \cancel{q_1}\to 0 \\ \cancel{v_2}\to 0 \\ q_2 \\ v_3 \\ q_3 \\ \cancel{v_4}\to 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ \cancel{M_2}\to 0 \\ \cancel{F_{3y}}\to P \\ \cancel{M_3}\to 0 \\ F_{4y} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12+k' & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_2 \\ v_3 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} q_2 \\ v_3 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{-PL^2}{EI(12+7k')}\begin{bmatrix} 3 \\ 7L \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0025\ rad \\ -0.017\ m \\ -0.0075\ rad \end{bmatrix}$$

✓ $F_{1y} = -69.78\ kN$ ✓ $M_1 = -69.78\ kN.m$ ✓ $F_{2y} = 116.2\ kN$ ✓ $F_{4y} = 3.48\ kN$



$E = 200$ Gpa $\quad A = 2300 \ mm^2$ مثال) کدنویسی :

$\nu = 0.3$

مرحله ۱) تعریف و آماده سازی داده های اولیه :

Nnd : Number of node 3

Nel : Number of element 3

Nne : Number of nodes per element 2

nodof : Number of degrees of freedom per node 2

مختصات نودها ← ماتریس ← geom (nnd (سطر), nodof (ستون)) $(3,2)$ nodes cordinate

$$\text{geom} = \begin{array}{c|cc} & x & y \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4000 & 0 \\ 3 & 4000 & 6000 \end{array}_{3\times2} \Rightarrow \quad \text{txt} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4000 & 0 \\ 3 & 4000 & 6000 \end{bmatrix}$$

اگه فایل دارد تکست، میشود یا خودمان بنویسیم.

Connec (nel (3), Nne (2)) = element connectivity

$$\text{Connec} = \begin{array}{cc} N_1 & N_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

فراخوانی ⇒ connec = Read("C:/Ali.text")

کامل نیست

prop (nel (3), 3) material and Geometrical property = خواص مادی , هندسی المان

اگر خواصی که داده شد بیشتر شد از ۳ که خودم نداشتم بیشتر می‌شم.

$$\text{prop} = \begin{array}{c|ccc} & E & A & \nu \\ \text{المان ۱} & 200\times10^{3} & 2300 & 0.3 \\ \text{المان ۲} & '' & '' & '' \\ \text{المان ۳} & '' & '' & '' \end{array}$$

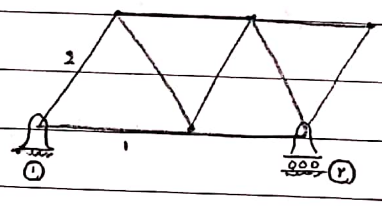
هدف : شرایط مرزی و بارگذاری را تعریف کنیم :

nf (Nnd (3), nodof (2)) = 1

$$nf = \begin{array}{c|cc} & \text{درجه آزادی ۱ } (x) & \text{درجه آزادی ۲ } (y) \\ \text{نود اول} & 0 & 0 \\ \text{نود دوم} & 1 & 0 \\ \text{نود سوم} & 1 & 1 \end{array}_{3\times2}$$

به درجات آزادی مقید صفر و به درجات آزادی آزاد یک می‌دهیم.

مثال دیگر :



$nf(6,2) = 1$

$nf(1,1) = 0$

$nf(1,2) = 0$

$nf(2,2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

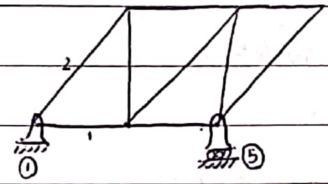
$$Nfp = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

این ماتریس ← از Nf ← صفرهای خودش باقی می‌ماند

اگر از Nf استفاده کنیم ← مجموع تمام اعداد قبلی‌اش می‌شود.

اگر از Nfp استفاده کنیم ← جمع با عدد قبلیش.

علی   مثال دیگر



اولین عدد آخری ⑨ درجه آزادی کل سیستم است.

اگر صفر نباشد بزرگترین آن است.

$n = \max\ Nfp(:,:) = 3$ ← درجه آزادی

$kk(n,n) = 0$ % global stiffness matrix → $kk = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$F(n) = 0$ % force vector → $F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$load(\overset{3}{nnd}, \overset{2}{nodof}) = 0$ % loading matrix $load = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1200 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

مرحله ۲: محاسبه ماتریس سختی المان‌ها در مختصات کلی (global)

for i=1, nel   حلقه‌ای است که برای تمام المان‌ها کار می‌کند.

node 1 = connec (i,1)

node 2 = connec (i,2)

$x_1 = geom(node1, 1)$

$x_2 = geom(node2, 1)$

x_1, x_2, y_1, y_2 → مختصات نقاط ابتدایی و انتهایی المان را لازم داریم → geom

Subject: ۳۹
Date

$$Y_1 = geom(node1, 2)$$

$$Y_2 = geom(node2, 2)$$

طول المان $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2} = Length$

زاویه المان $\theta = tg^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$

$$l = \cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{Length}$$

$$m = \sin\theta = \frac{y_2 - y_1}{Length}$$

$$E = prop(i, 1)$$

$$A = prop(i, 2)$$

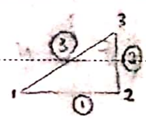
$$\nu = prop(i, 3)$$

$$k_g = \frac{EA}{Length}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -ml \\ lm & m^2 & -ml & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & ml \\ -ml & -m^2 & ml & m^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی المان در مختصات کلی

اسمبل کردن ماتریس سختی کل و بردار نیروها

$$g = \begin{bmatrix} nfp(node1, 1) \\ nfp(node1, 2) \\ nfp(node2, 1) \\ nfp(node2, 2) \end{bmatrix} \quad for\ i = ۲ \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



چون $k_g \leftarrow 4\times4$ است

for j = 1:4; if g(j) ≠ 0

for k = 1:4 if g(k) ≠ 0

این حلقه داخل حلقه قبلی است.

kk [g(j), g(k)] = kk [g(j), g(k)] + kg(j, k)

```
end k
end j
*
F(nfp(j,k)) = load(j,k)
**
```

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} \rightarrow$$ این

توی لوپ نیست برای توضیح

$$load \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1200 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$ این

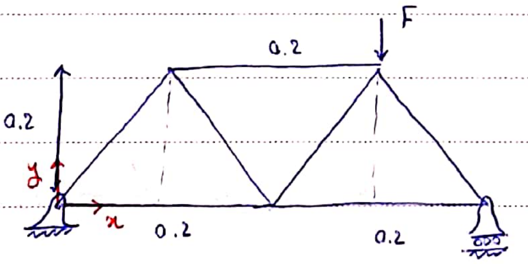
```
* for j = 1:3
    for k = 1:2
      if load(j,k) ≠ 0
** end k
   end j
```

$$\rightarrow F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1200 \\ 0 \end{bmatrix}$$ بعد این حلقه

```
end i

delta = kk^-1 x F
```

مثال جلسهٔ اول آباکوس :



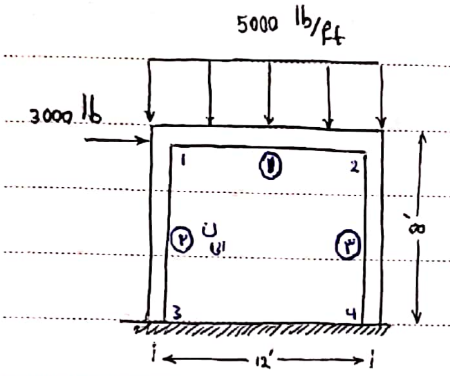
wire → خرپا

Type → Deformable → ✓

$F \rightarrow N$ $\quad \sigma \rightarrow pa \left(\frac{N}{mm^2}\right)$

(new)

آنالیز و تحلیل ماتریسی فریم‌ها و قاب‌ها :



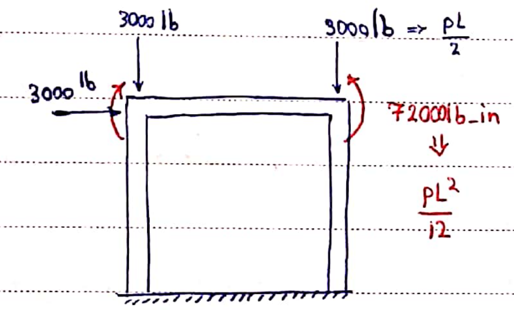
$E = 30 \times 10^6$ psi

$I = 65$ in^4

$A = 6.8$ in^2

۹) جابجایی و چرخش :

در نود ۱ و ۲



$$k' = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{array}$$

$$k' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

(local) ماتریس سختی (ز)

شماره المان	Node i	Node j	θ_i
1	1	2	0
2	3	1	90
3	4	2	90

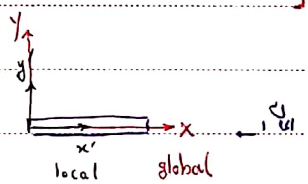
* L ها باید به in تبدیل شوند *

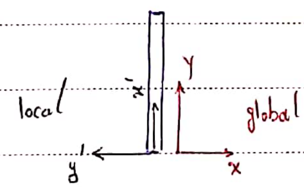
$k'_3 = k'_2 =$ در مختصات local

$$\begin{array}{c|cccccc} & u_3 & v_3 & \theta_3 & u_1 & v_1 & \theta_1 \\ \hline u_3 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 & 0 \\ v_3 & & 2.65 & 127 & 0 & -2.65 & 127 \\ \theta_3 & & & 8125 & 0 & -127 & 4063 \\ u_1 & & Sym & & 212.5 & 0 & 0 \\ v_1 & & & & & 2.65 & -127 \\ \theta_1 & & & & & & 8125 \end{array} \times 10^4$$

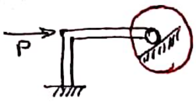
$k^*_1 = k'_1 = 10^4 \times$ (global / local)

$$\begin{array}{c|cccccc} & u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ \hline u_1 & 141.7 & 0 & 0 & -141.7 & 0 & 0 \\ v_1 & & 0.784 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 \\ \theta_1 & & & 5417 & 0 & -56.4 & 2708 \\ u_2 & & Sym & & 141.7 & 0 & 0 \\ v_2 & & & & & 0.784 & -56.4 \\ \theta_2 & & & & & & 5417 \end{array}$$





Subject:
Date

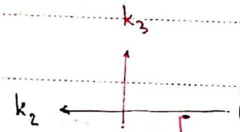


شرایط نیرویی؟

$$k = T^t k' T$$

المان ۲ و ۳ ← $\theta = 90$ ← $m = 1 \ , \ \ell = 0$

$$T = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$k_2 = k_3 = 10^4 \times \begin{array}{c|cccccc} & u_4\,u_3 & v_4\,v_3 & q_4\,q_3 & u_2\,u_1 & v_2\,v_1 & q_2\,q_1 \\ \hline u_4\,u_3 & 2.65 & 0 & -127 & -2.65 & 0 & 0 \\ v_4\,v_3 & & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\ q_4\,q_3 & & & 8125 & 127 & 0 & 4063 \\ u_2\,u_1 & & Sym & & 2.65 & 0 & 127 \\ v_2\,v_1 & & & & & 212.5 & 0 \\ q_2\,q_1 & & & & & & 8125 \end{array}$$

۴ نود ← هر نود ۳ درجه آزادی
$u \ v \ \theta$

پس k_{tot} ← 12×12 است.

B.C:

شرایط مرزی

$$u_3 = v_3 = q_3 = u_4 = v_4 = q_4 = 0$$

شرایط نیرویی:

$F_{1x} = 3000\ lb \qquad F_{2x} = 0$

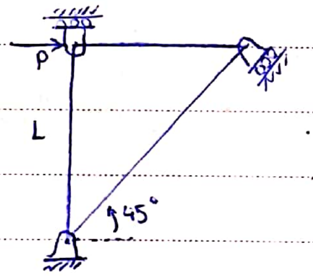
$F_{1y} = -3000\ lb \qquad F_{2y} = -3000\ lb$

$M_1 = -72000\ lb.in \qquad M_2 = 72000\ lb\text{-}in$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
u_1 & v_1 & q_1 & u_2 & v_2 & q_2 & u_3 & v_3 & q_3 & u_4 & v_4 & q_4 \\
144.3 & 0 & 127 & -141.7 & 0 & 0 & & & & & & \\
 & 213.3 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 & & & & & & \\
 & & 13542 & 0 & -56.4 & 27.8 & & & & & & \\
 & Sym & & 144.3 & 0 & 127 & & & & & & \\
 & & & & 213.3 & -56.4 & & & & & & \\
 & & & & & 13542 & & & & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
u_1 \\ v_1 \\ q_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ q_2 \\ \cancel{u_3}=0 \\ \cancel{v_3}=0 \\ \cancel{q_3}=0 \\ \cancel{u_4}=0 \\ \cancel{v_4}=0 \\ \cancel{q_4}=0
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
3000 \\ -3000 \\ -72000 \\ 0 \\ -3000 \\ 72000 \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_4
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ q_1 \\ u_2 \\ \cancel{q_2}\, v_2 \\ q_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0.092 & in \\ -0.00104 & in \\ -0.00139 & Rad \\ 0.0901 & in \\ -0.0018 & in \\ -3.58\times10^{-5} & rad \end{bmatrix}
$$

مثال آباکوس:



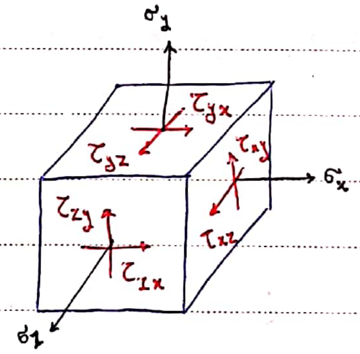
$L = 1m$ $\quad E = 210\ GPa$ $\quad P = 1000\ kN$

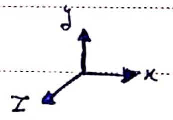
$A_{1,2} = 6\times10^{-4}\ m^2$ $\quad A_3 = 6\sqrt{2}\times10^{-4}\ m^2$

$\nu = 0.3$

(new)

مسائل ۳ بعدی:





$\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$\tau_{xz} = \tau_{zx}$

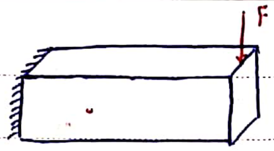
$\tau_{yz} = \tau_{zy}$

$\tau_{ij} = \tau_{ji}$

مؤلفه‌های تنش $\begin{cases} \sigma_x , \sigma_y , \sigma_z \\ \tau_{xy} , \tau_{zx} , \tau_{yz} \end{cases}$

مؤلفه‌های کرنش $\begin{cases} \varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} , \gamma_{zx} , \gamma_{yz} \end{cases}$

Subject:
Date



6 مولفهٔ تنش   6 مولفهٔ کرنش

برای همه المان روی تیر یا جسم)

بعضی از مسائل ۳ بعدی در حالت خاص تبدیل به مسئلهٔ ۲ بعدی می شود.

مشخصات این مسائل دوبعدی ؛ نحوهٔ مدل سازی در FEM

تنش صفحه‌ای   plane stress

$$\sigma_z = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = 0 \quad ; \quad \tau_{yz} = 0$$

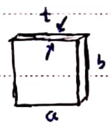
$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad ; \quad \varepsilon_z \neq 0$$

$$SO \rightarrow \begin{cases} \sigma_x , \sigma_y , \tau_{xy} \neq 0 \\ \varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z , \gamma_{xy} \neq 0 \end{cases}$$

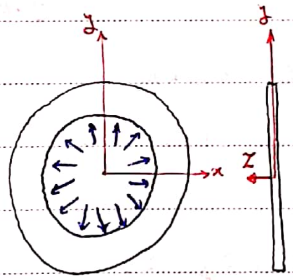
در مسئله‌ای تنش صفحه‌ای می‌گوییم به اولاً ضخامت صفحه در راستای (z) ناچیز باشد نسبت به سایر ابعاد صفحه (xy).

$t < \frac{1}{10} a$

$t < \frac{1}{10} b$



دوماً بارگذاری داخل صفحه‌ای باشد (داخل صفحهٔ xy باشد)



(در مدل سازی حجم نباید داشته باشد)

PaPCO

Subject: ۳۵
Date

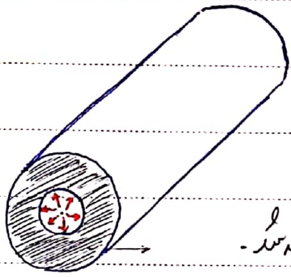
plane strain

کرنش صفحه‌ای :

$$\varepsilon_z = 0 \,,\ \gamma_{xz} = 0 \,,\ \gamma_{yz} = 0$$

$$\sigma_z \neq 0 \,,\ \tau_{yz} = 0 \,,\ \tau_{zx} = 0$$

$$\cancel{\varepsilon_z} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\sigma_z}{E} \Rightarrow \sigma_z = +\nu(\sigma_x + \sigma_y)$$



در مسئله‌ای کرنش صفحه‌ای می‌رسیم به :

۱. بعد ضخامت نسبت به سایر ابعاد بزرگ باشد.

۲. نیروها (بارگذاری) در داخل صفحه باشد.

روابط تنش و کرنش در ۲ بعد :

تنش صفحه‌ای :

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0\\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس نرمی}} \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\varepsilon_{x_0}\\ \varepsilon_{y_0}\\ \gamma_{xy_0}\end{Bmatrix}$$

مدول یانگ

مدول برشی

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

نسبت پواسون

Mpa

ماتریس نرمی Compliance matrix

ناشی از بارگذاری

کرنش اولیه (کرنش حرارتی)

$$\varepsilon = S\sigma + \varepsilon_0$$

$$\varepsilon = E^{-1}\sigma + \varepsilon_0$$

ماتریس نرمی

تنش صفحه‌ای :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سفتی}} \left[\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\varepsilon_{x_0}\\ \varepsilon_{y_0}\\ \gamma_{xy_0}\end{Bmatrix}\right]$$

ماتریس سفتی stiffness matrix

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

$$\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

ماتریس سفتی

حالت کرنش صفحه‌ای :

$$* \ E \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$* \ \nu \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu}$$

$$* \ G \rightarrow G$$

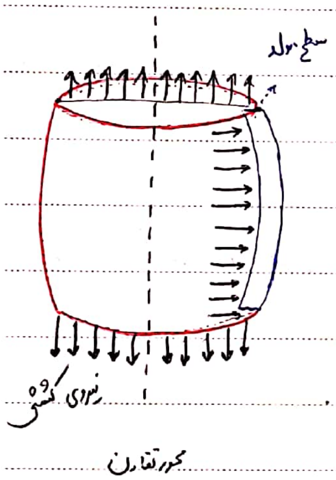
$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)^2}\begin{bmatrix}1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0\\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\frac{\nu}{1-\nu}}{2}\end{bmatrix}$$

Subject :
Date

برای تنش صفحه‌ای :

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\varepsilon_{x_0}\\ \varepsilon_{y_0}\\ \gamma_{xy_0}\end{bmatrix}\right]$$

تقارن محوری :



این بار گسترده که به سطح مولد وارد می شود نیز حول محوری حجم خود و به تمام جداره وارد می شود مثلاً مخزن CNG

← در این مسائل هندسه باید دارای تقارن محوری باشد

بارگذاری نیز باید دارای تقارن محوری باشد .

تذکر : در نرم افزار آباکوس محور تقارن محور y ها است و فقط سطح مولد را می کشیم به صورت صفحه و دو بعدی .

بار متقارن می تواند ← نیروی گسترده باشد ، نیروی کشش باشد .

سوپر المان :　　superelement / substructures :

برای ساده سازی ، آنهایی که چندین بار تکرار شده اند .