جلسه اول — استاتیک (ایستایی)

1) علم بررسی تعادل جسم تحت وارد شدن نیروهای مختلف

مفاهیم بنیادی:

زمان time	طول length
نیرو force	جرم mass

اصل های ایده آل: تعاریف:

ذره: جسمی است که ابعاد ندارد و با نقطه می توان در فضا مشخص کرد که دارای جرم است.

جسم صلب: جسمی که از شمار ذره تشکیل شده و این ذرات نسبت به هم ثابتند یا تغییر شکل نمی دهد.

2) نیرو (بار) متمرکز: نیرویی که در یک نقطه وارد می شود.

قوانین:

قانون اول نیوتن: برایند نیروهای وارد بر یک ذره صفر باشد

if ذره ساکن باشد ← ساکن می ماند F=0 ✓

if ذره در حال حرکت باشد ← روی خط مستقیم به حرکتش ادامه می دهد.

قانون دوم نیوتن: هر گاه ذره ای نیروی با برآیند F وارد شود، ذره در جهت اعمال نیرو شتاب می گیرد و متناسب با جرم جسم است.

Scanned by CamScanner

قانون سوم نیوتن: دو جسم که با یک نیرو در تعامل نیروی مساوی و خلاف جهت به یک نیرو وارد می کنند.

قانون گرانش: دو جسم به یک نیرو وارد می شوند و این نیرو متناسب با حاصل ضرب جرم آنها و یک نیرو متناسب با G که ثابت گرانش است و با عکس مجذور فاصله ی آن دو رابطه دارد.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

واحدهای اندازه گیری:

	Dimension	SI	US (Im) imperial units	
طول	ℓ	m	in	1in = 25.4 mm
زمان	T	s	s	1slug = 14.6 kg
جرم	M	kg	slug	$1 lb_{force} = 4.448 N$
نیرو	$\frac{kg.m}{T^2}$	N	lb	

Giga	G	10^9	km کیلومتر	
Mega	M	10^6	(Kom), (k m) کیلو	کیلومتر
kilo	k	10^3		
Mili	m	10^{-3}	$mm^2 = (mm)^2$	
micro	μ	10^{-6}		
nano	n	10^{-9}		

Finish

Scanned by CamScanner

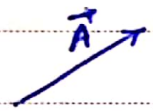
✓ در محاسبات جواب نهایی را با سه رقم بامعنی نمایش می دهیم .

✓ یک عادت خوب در محاسبات آن است که نتایج محاسبات میانی را در حافظهٔ ماشین حساب ذخیره کنیم

کمیت ها : نرده‌ای یا اسکالر ـ برداری

نرده‌ای (scalar) فقط مقدار دارد : دما ، جرم معمولی و ایتالیک a

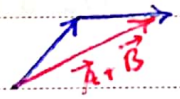
برداری (vector) مقدار + جهت : نیرو ـ شتاب به صورت بولد و غیرایتالیک $\mathbf{A}$



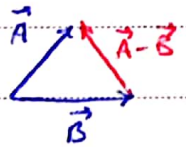
جمع برداری :

به روش متوازی الاضلاع :

روش مثلثی :



$\vec{A}-\vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$



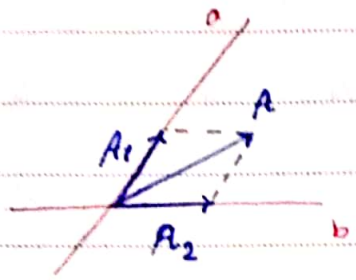
تجزیهٔ یک بردار به مؤلفه های آن :

مولفه های یک بردار ، بردارهایی هستند که جمع برداری آنها برابر با آن بردار می شود .

Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

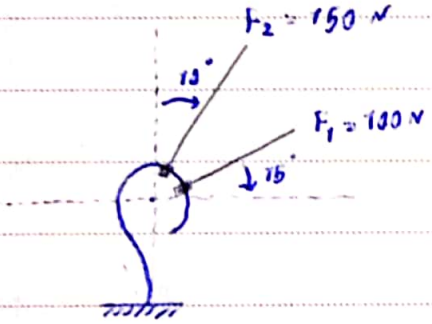
مثال) مؤلفه های $\vec{A}$ را روی دو راستای a و b بیابید.



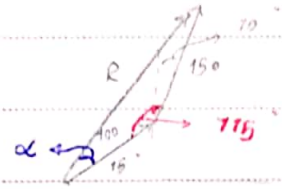
$A_1 + A_2 = A$

* حاصل جمع $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را بیابید (Resultant) این دو بردار برایند

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$



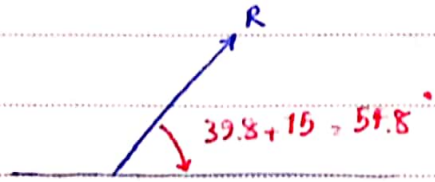
؟ مقدار و جهت نیروی برایند کدام است



$R = \sqrt{(100)^2 + (150)^2 - 2(100)(150)\cos 115^\circ} = 212.6\,N \simeq 213\,N$

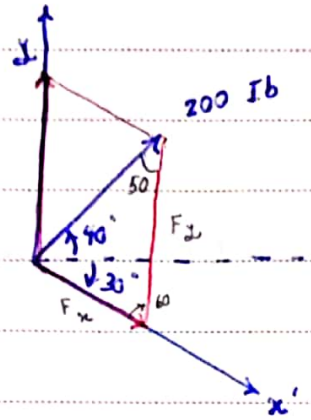
$\frac{150}{\sin\alpha} = \frac{212.6}{\sin 115} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{150 \sin 115}{212.6}$ $\quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{150 \sin 115}{212.6}\right)$

$\alpha = 39.8^\circ$



Scanned by CamScanner

مثال: مولفه‌های نیروهای داده شده را در راستای y و x' بیابید.

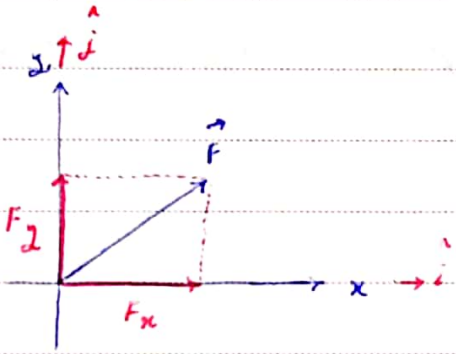


$$\frac{F_y}{\sin 70} = \frac{F_x}{\sin 50} = \frac{200}{\sin 60}$$

$$F_y = 217 \text{ lb}$$

$$F_x = 177 \text{ lb}$$

تجزیه یک بردار در سیستم کارتزین:



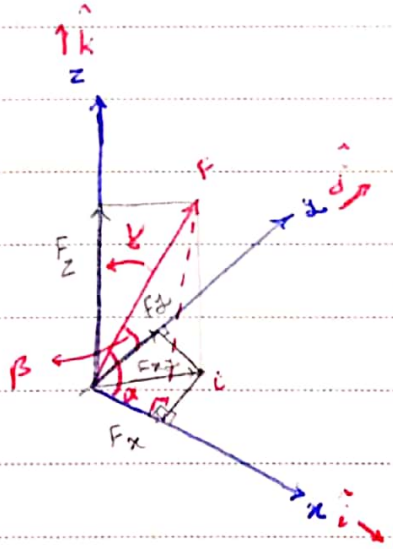
$$\vec{F_x} + \vec{F_y} = \vec{F}$$

$$F = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

$$F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$

تجزیه یک بردار در فضا:



$$F = F_{(x)}\hat{i} + F_{(y)}\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$F = \sqrt{F_{(x)}^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\alpha = \angle \vec{F}, x$$

$$\beta = \angle \vec{F}, y$$

$$\gamma = \angle \vec{F}, z$$

Scanned by CamScanner

$$\hat{u} = \frac{\vec{F}}{F} = \frac{F_x}{F}\hat{i} + \frac{F_y}{F}\hat{j} + \frac{F_z}{F}\hat{k}$$

$\hat{u}$ بردار واحد راستای F است.

$$\hat{u} \times F = \vec{F}$$

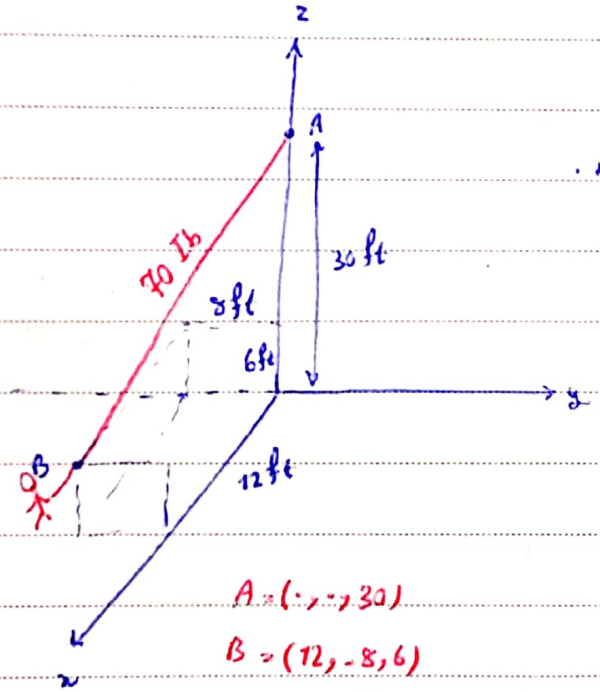
$$\hat{u} = \frac{F_x}{F}\hat{i} + \frac{F_y}{F}\hat{j} + \frac{F_z}{F}\hat{k}$$

$$u_x = \frac{F_x}{F} = \cos\alpha \qquad u_y = \frac{F_y}{F} = \cos\beta \qquad u_z = \frac{F_z}{F} = \cos\gamma$$

کسینوس های هادی

چون $|\hat{u}| = 1$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



مثال (example) نیروی کشش طناب 70lb است.
این نیرو را به صورت یک بردار کارتزین نمایش دهید.

راستای نیرو بر $\vec{AB}$ منطبق است.

$$u = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{12\hat{i} - 8\hat{j} - 24\hat{k}}{\sqrt{(12)^2 + (8)^2 + (24)^2}} =$$

$A = (0, 0, 30)$

$B = (12, -8, 6)$

$$u = \frac{12}{28}\hat{i} - \frac{8}{28}\hat{j} - \frac{24}{28}\hat{k}$$

$$\vec{AB} = 12\hat{i} - 8\hat{j} + 24\hat{k}$$

$$F = \frac{70}{28}(12\hat{i} - 8\hat{j} - 24\hat{k}) = 30\hat{i} - 20\hat{j} - 60\hat{k} \text{ lb}$$

Scanned by CamScanner

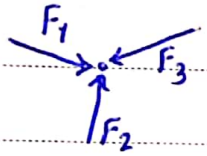
$\alpha = \cos^{-1}\frac{12}{25} = 64.6^\circ$

$\beta = \cos^{-1}\frac{-8}{25} = 107^\circ$

$\gamma = \cos^{-1}\frac{-24}{25} = 149^\circ$

تعادل ذره :

یک ذره در حال تعادل است اگر: برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد.



$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ $\qquad \Sigma \vec{F} = 0$

* رسم جسم آزاد

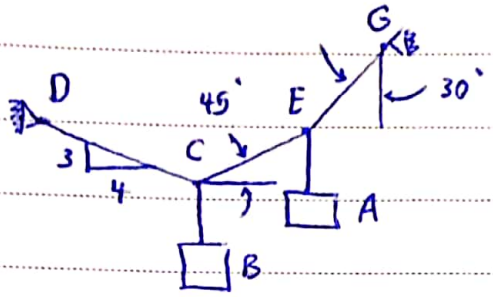
ترسیم دیاگرام جسم آزاد (Free body Diagram (FBD)

1) جسم مورد نظر را جدا کنیم 2) جسم را از محیط اطراف جدا کنیم

3) در دیاگرام جسم آزاد تمامی نیروهای وارده را نشان می دهیم.

4) ابعاد و اندازه‌های جسم را نیز در دیاگرام نشان می دهیم

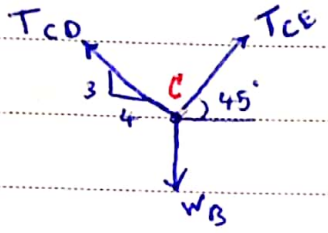
Scanned by CamScanner

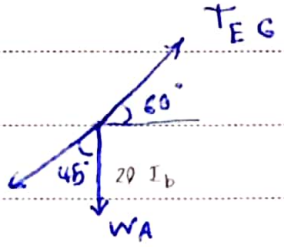


$m_B = ?$ (جرم)

$A = 20\ lb$

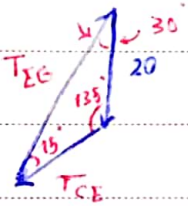
حل:



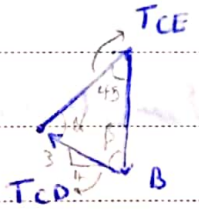


$\Sigma F = 0 \rightarrow \Sigma F_x = 0, \ \Sigma F_y = 0$

روش برداری:



$$\frac{20}{\sin 75^\circ} = \frac{T_{CE}}{\sin 30}, \quad T_{CE} = 38.6\ lb$$



$$tg\beta = \frac{4}{3} \qquad \sin\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin^{-1}(0.8) = \beta$$

$\beta = 53.13^\circ$ $\qquad \alpha = 81.87^\circ$

$$\frac{\beta}{\sin\alpha} = \frac{T_{CE}}{\sin\beta} = \frac{T_{CD}}{\sin 45}$$

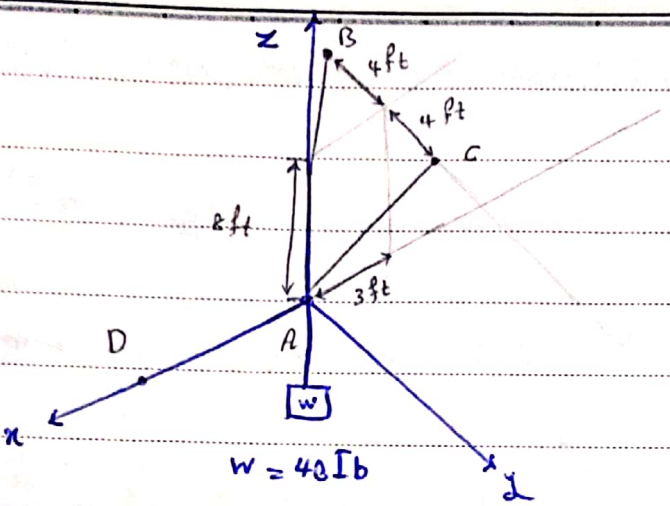
$$B = T_{CE} \cdot \frac{\sin 81.87}{\sin 53.13} = 20\ \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75} \cdot \frac{\sin 81.87}{\sin 53.13}$$

$B = 47.8\ lb$

Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

مثال ۱: نیروی کشش طناب‌ها؟

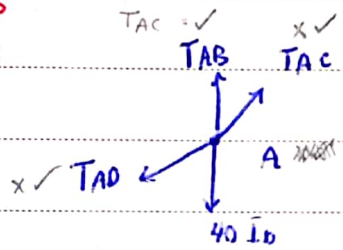


$C = (-3, 4, 8)$

$B = (-3, -4, 8)$

صفحهٔ تقارن است پس zx

$T_{AC} = T_{AB}$



$\Sigma F = 0$

$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$

$\Sigma F_z = 0 \rightarrow$ [illegible] $\quad \vec{T}_{AC} = T_{AC} \times \frac{-3\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k}}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 8^2}}$

$40 = 2\, T_{AC} \frac{8}{\sqrt{89}} \rightarrow T_{AC} = 23.6$ lb

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T_{AD} = 2T_{AC} \times \frac{3}{\sqrt{89}} \rightarrow T_{AD} = 2\, T_{AC} \frac{3}{\sqrt{89}}$

$T_{AD} = \frac{2 \times 20\sqrt{89}}{56} \times \frac{3}{\sqrt{89}} = 15$ lb

Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

سیستم های معادل نیرویی :

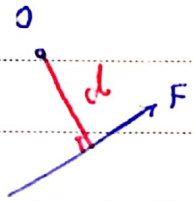
گشتاور نیرو :

Moment of a Force

گشتاور ← (حاصل ضرب نیرو در فاصله ← فاصله ← نیرو)

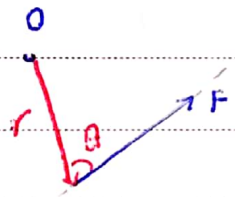
تمایل یک نیرو به دوران دادن یک جسم است

$M = Fd$



گشتاور F حول O

اگر F از O بگذرد ← گشتاور نداریم $M_O = 0$



$M_O = \vec{r} \times \vec{F} = rF\sin\theta = Fd$

برایند حاصل ضرب r در جهت چرخش عقربه F

جهت گشتاور برایند شامل است

مقدار $M_O = Fd$

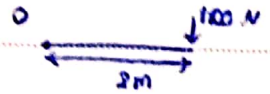
گشتاور F حول O

جهت قانون دست راست

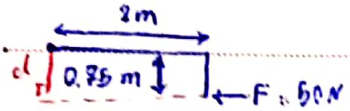
Scanned by CamScanner

SUBJECT: DATE: / /

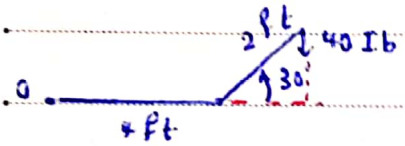
مثال) در هر حالت گشتاور نیروی داده شده حول O را بدست آورید.



$M_O = 2 \times 100 = 200 \ (N.m)$ ↓ در نسخه (1)

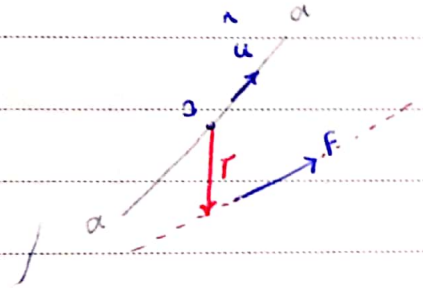


$M_O = \frac{3}{4} \times 50 = 37.5 \ (N.m)$ ↓



$M_O = 40 \times (4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2) = 229$ ↓ (lb ft)

گشتاور نیرو حول محور:

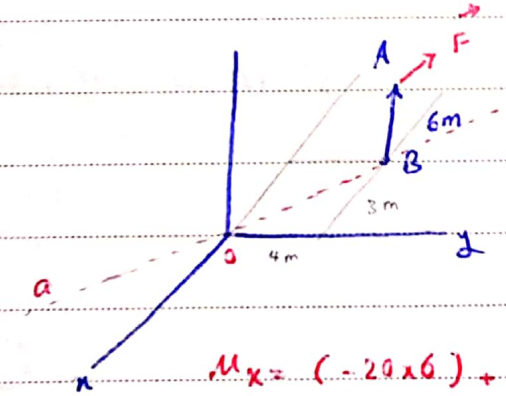


$M_O = \vec{r} \times \vec{F}$

$M_a = \hat{u}_a \cdot (M_O) = \hat{u}_a \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$

(2)

مثال)



$F = -40\hat{i} + 20\hat{j} + 10\hat{k}$ N

گشتاور حول محور x یا محور a

$M_x = (-20 \times 6) + 10(4) = 40 - 120 = -80 \ (N.m)$

$M_O = \vec{r} \times \vec{F} = (-3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}) \times (-4\hat{i} + 2\hat{j} + 1\hat{k}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & 6 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} (10) \ (N.m)$

$= -8\hat{i} - 21\hat{j} + 10\hat{k} \ (10) \ N.m$

Scanned by CamScanner

$M_x = \vec{i} \cdot \vec{M_o} = -80.0 \ N.m$

$u_{a-a} = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$ $\quad M_{a-a} = u_{aa}' \cdot \vec{M_o}$

$= -\frac{3}{5}(-8) + \frac{4}{5}(-21) = -120 \ N.m$

جلسه ③

سیستم های نیروی معادل :

نیروهایی که می‌توانیم آنها را به صورت برداری جمع بسیم

Force couple

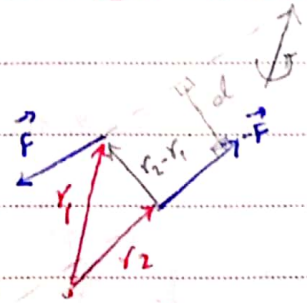
خصوصیت نیروی :

$\sum F = 0$ *

مقدار خصوصیت نیروی حول نقطه دلخواه :

$|M_o| = F.d$

جهت : عمود بر صفحه شامل خصوصیت نیرو است از قاعده دست راست پیروی می‌کند



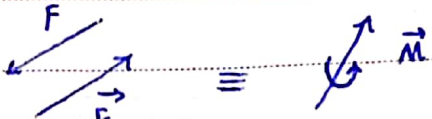
$M = \vec{r_1} \times \vec{F} + \vec{r_2} \times -\vec{F} = \vec{F}(\vec{r_1} - \vec{r_2})$

if $r_2 - r_1 = r \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = rF\sin\theta$

Scanned by CamScanner

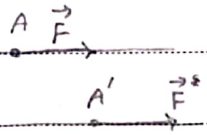
SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

پس می‌توان جفت نیرو را معادل یک بردار آزاد در راستا. چون اثر نیروی آن یکسان است



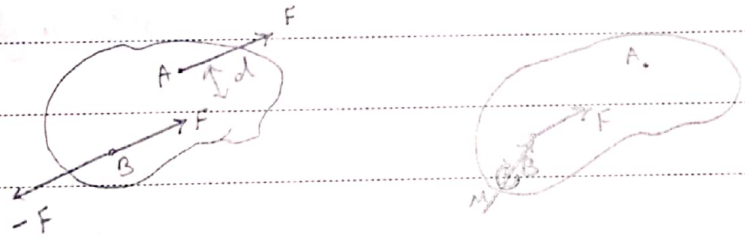
* نکته: نیرو برداری لغزنده است

sliding vector



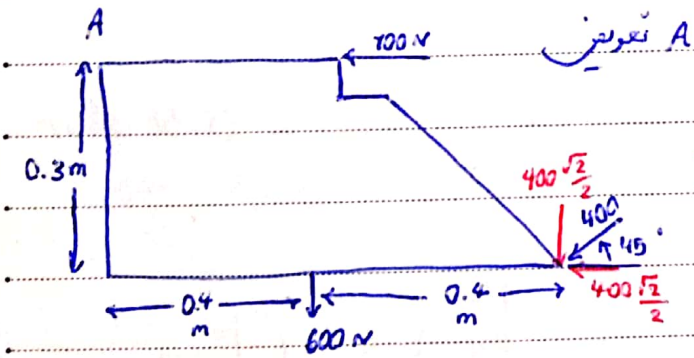
بردار راستای نیرو جابه‌جا می‌شود اما آن را (حتی موازی) نمی‌توان انتقال داد.

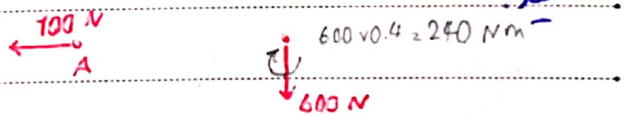
* نکته: بردار گشتاور برداری آزاد است. یعنی می‌توان نقطه اثر آن را آزادانه جابه‌جا کرد

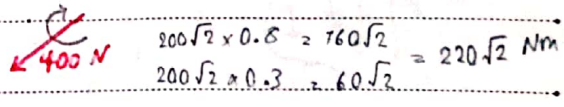


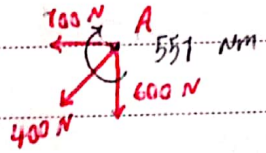
جهت آن عمود بر صفحه است $F \cdot d = |M|$

این سیستم نیروی را با سیستم معادل آن در A تعویض کنید.



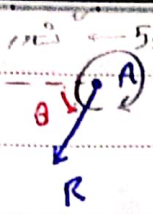






Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

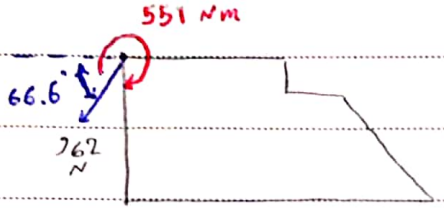


$R_x = 100 + 200\sqrt{2} = 382.8\ N \leftarrow$

$R_y = 600 + 200\sqrt{2} = 882.8\ N \leftarrow$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 962\ N$

$tg\,\theta = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \theta = 66.6^\circ$

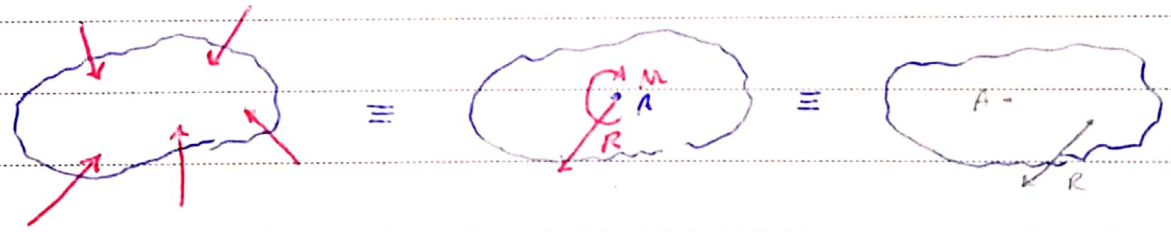


یک سیستم نیروی یک سیستم نیروی دیگر تبدیل شد.

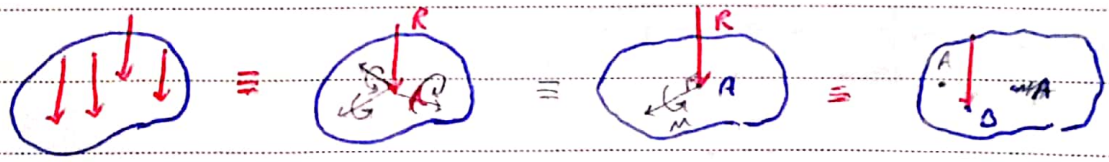
551

"concurent forces" نیروهای همرس

Coplanar forces نیروهای واقع در یک صفحه

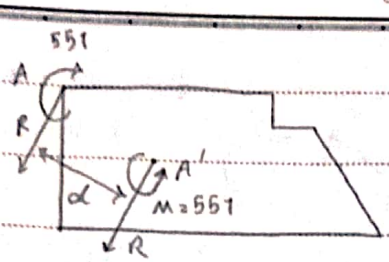


"parallel forces" نیروهای موازی



Scanned by CamScanner

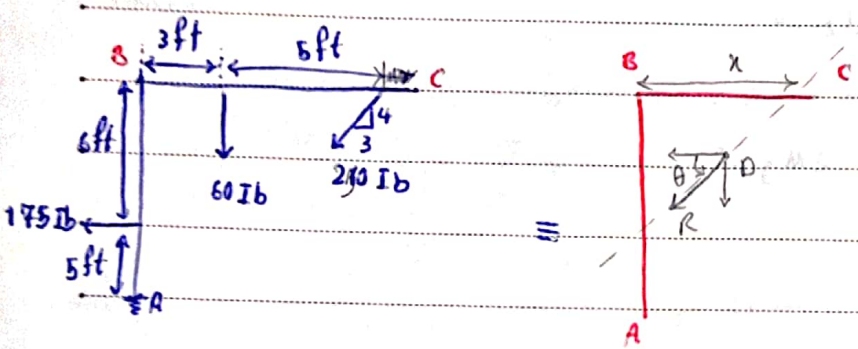
SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /



استوار معادل نیرو:

$M = F.d$

$551 = 962\, d \rightsquigarrow d = 0.572$



$R_x = 175 + 250(\frac{3}{5}) = 325\ Ib \leftarrow$

$R_y = 60 + 250(\frac{4}{5}) = 260\ Ib$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 416\ Ib$ $\qquad M_D = M_B$

$tg\theta = (\frac{260}{325}) \rightarrow \theta = 38.7^\circ$

$M_D = 3(60) + 6(175) + 8(\frac{4}{5})(250) = 2830\ Ibft$

$M_B = xR_y \rightarrow M_B = 260x \rightarrow x = \frac{2830}{260} = 10.9\ ft$

تعادل جسم صلب:

جسم صلب در حال تعادل است، اگر سیستم کلی نیروی وارد بر آن معادل سیستم صفر باشد.

$\sum \vec{F} = 0$

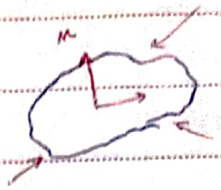
$\sum \vec{M} = 0$

Scanned by CamScanner

بعضی xy :

$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$

$\Sigma M = 0 \rightarrow \Sigma M_z = 0$



۳ بعدی :

$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$

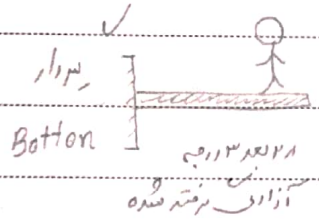
$\Sigma M_z = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_y = 0$

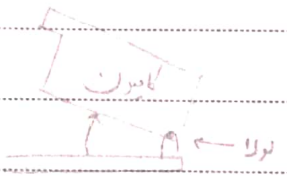
3 equation → solve 3 unknowns

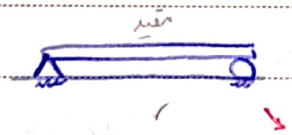
غلاف :

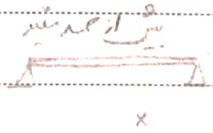
* انواع تیرها :

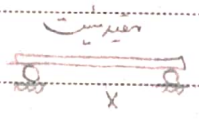
درجه آزادی = "Degree of freedom"









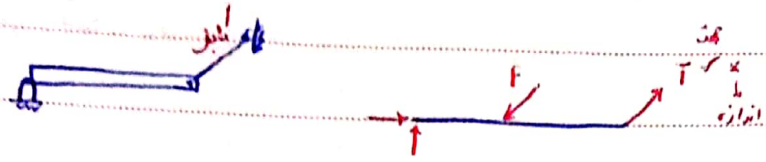


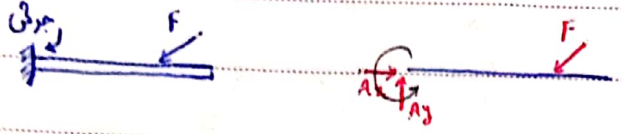
تیرهای ساده :

simply supported

Scanned by CamScanner

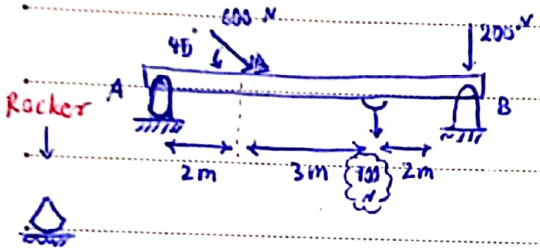
SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

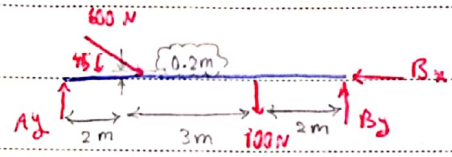




Cantilever ـ تیر دار

مثال: نیروهای عکس‌العمل چقدر است؟





$\Sigma F = 0 \qquad \Sigma M = 0$

$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow 100(2) - (7)A_y + \frac{600\sqrt{2}}{2}(5) - \frac{600\sqrt{2}}{2}(0.2) = 0$

$A = 319\ N \uparrow$

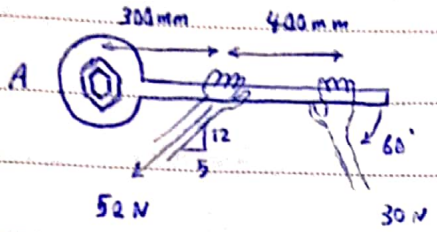
$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow A - 200 - 100 - \frac{600\sqrt{2}}{2} + B_y = 0 \longrightarrow B_y = 405\ N \uparrow$

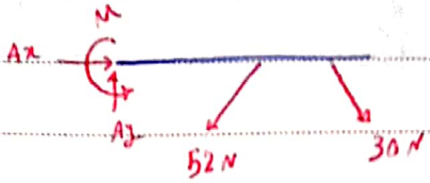
$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow B_x - \frac{600\sqrt{2}}{2} = 0 \longrightarrow B_x = 424\ N \leftarrow$

Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

مثال: نیرو دلشادر دارد یا خیر؟





$\Sigma M_A = 0 \rightarrow$

$M - 52 \times (\frac{12}{13})(0.3) - 30(\sin 60)(0.7) = 0$

$M = 32.6 \text{ N·m}$ ↺

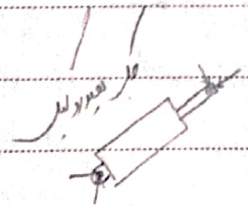
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x + 30(\cos 30) - 52(\frac{5}{13}) = 0 \rightarrow A_x = 5 \text{ N} \rightarrow$

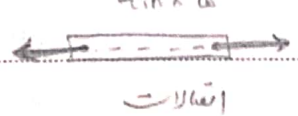
$\Sigma F_y = \rightarrow A_y - 50(\frac{12}{13}) - 30(\sin 60) = 0 \rightarrow A_y = 74 \text{ N} \uparrow$

جسم دو نیرویی: جسمی که نیروهای خارجی وارد بران فقط به ۲ نقطه اثر کند.

نیرو (برشادر)

جسم ۳ نیرویی: " " ۳ " " " "





جسم ۴ نیرویی

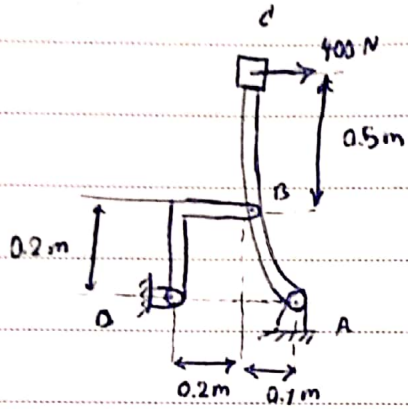
نیرو خلاف یکدیگر در راستای خط اثر هم

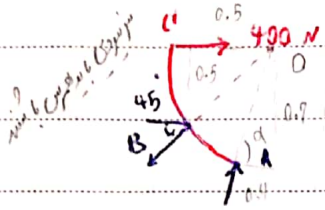
Scanned by CamScanner

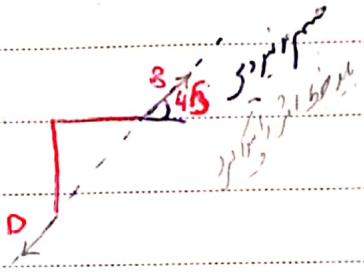
SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

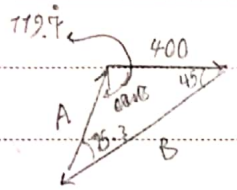
جسم ۳ نیرویی : نیروها باید همرس باشند.

مثال: نیروی تکیه گاه A و ... ؟









$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{0.7}{0.4}\right) \rightarrow \alpha = 60.3^\circ$

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 400 \times 0.7 - B\frac{\sqrt{2}}{2}(0.2) - B\frac{\sqrt{2}}{2}(0.1) = 0$

$B = 1.32\ kN$

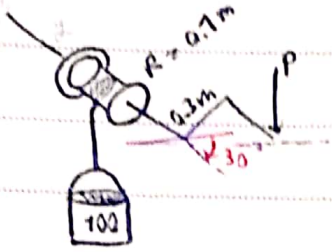
$\Sigma M_B = 0 \rightarrow A = 1.07\ kN \rightarrow$ O تعیین نیروی تکیه گاه

$\frac{400}{\sin(15.3)} = \frac{B}{\sin(119.7)} = \frac{A}{\sin 45^\circ}$ رابطه لامی

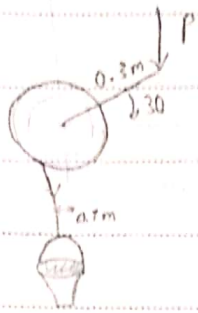
Scanned by CamScanner

SUBJECT: DATE: / /

مثال ۱) برای جسم معلق 100 kg باشد نیروی P چقدر باشد تا تعادل برقرار شود؟



معلق را به بالا انتقال می‌دهیم

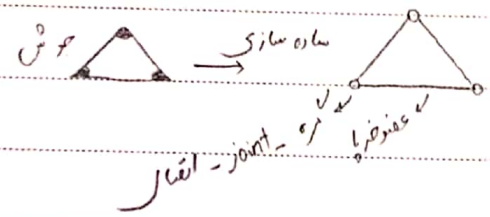


$\sum M_y = 0 \Rightarrow 100(9.8)(0.7) - P(0.3)(\cos 30) = 0 \quad P = 378$

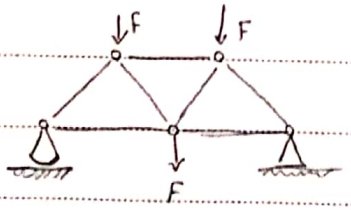
تحلیل سازه‌ها:

خرپا: سازه‌ای سبک است که برای نگه‌داری یک بار استفاده می‌شود. Truss

ساده‌ترین خرپا



الف) در یک خرپا، اگر عضو بیشتری نیاز باشد دیگر ساده نمی‌ماند.



عضوها همیشه نیروی محوری هستند.

نیروها باید در راستای عضو باشند.

Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

عضو کششی ←—o—→

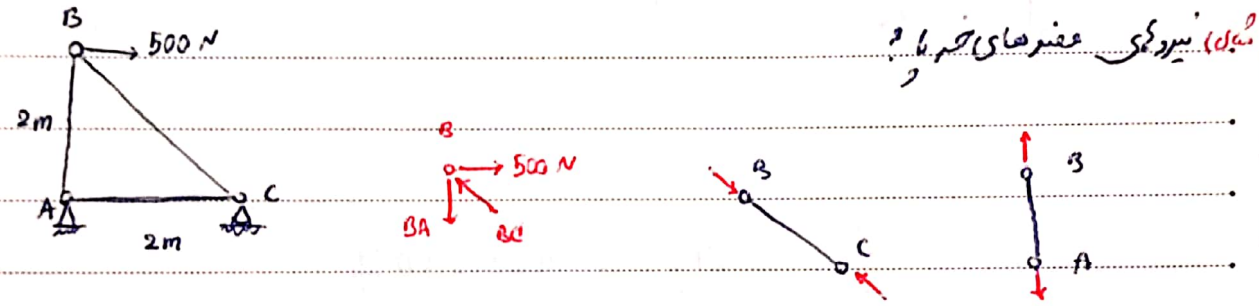
عضو فشاری →—o—←

عضو بی اثر o—o

هدف از تحلیل خرپا: پیدا کردن نیروی عضو یا عضوهای خرپا و مشخص نمودن فشاری یا کششی بودن آن عضو.

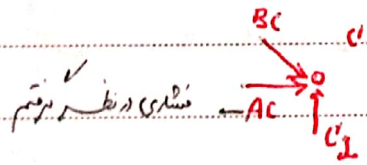
روش اتصال (joint) : برای تحلیل خرپا:

مثال) نیروی عضوهای خرپا؟



$\Sigma F_y = \frac{BC\sqrt{2}}{2} - 500$ $\quad BC = 500\sqrt{2} \simeq 707\ N$ فشاری

$\Sigma F_x = \frac{BC\sqrt{2}}{2} - AB$ $\quad AB = 500\ N$ کششی



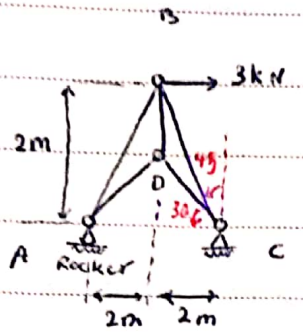
فشاری در نظر گرفتیم

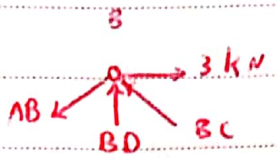
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \quad \frac{BC\sqrt{2}}{2} + AC = 0 \rightarrow \quad -\frac{500\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} - AC \rightarrow \quad AC = -500$ فشاری ✗

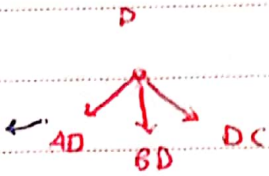
$AC = 500$ کششی ✓

Scanned by CamScanner

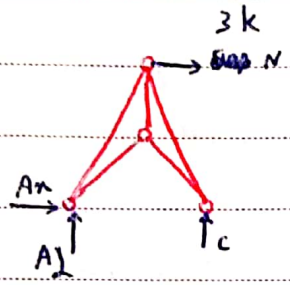
SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /



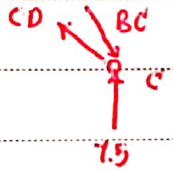




$\Sigma F_x = 0 \rightarrow CD = AD$



$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 3(2) = 4(C) \rightarrow C = 1.5\ kN$



$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \frac{BC\sqrt{2}}{2} = CD\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Sigma F_y = CD\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}CD = 1.5$

$CD\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.5\right) = 1.5 \rightarrow CD = 4.1\ kN$ کشی

$BC = \frac{\sqrt{3}}{2}CD = 5.02\ kN$ فشاری

$AD = CD = 4.1\ kN$ کشی

D :| : $\Sigma F_y = 0 \quad BD = -2AD\sin 30^\circ \quad BD = 4.1$ کشی

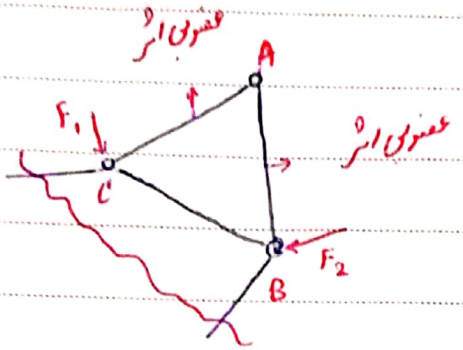
B :| : $\Sigma F_x = 0 \quad 3 = BC\frac{\sqrt{2}}{2} + AB\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3 = 5.02\frac{\sqrt{2}}{2} + AB\frac{\sqrt{2}}{2}$

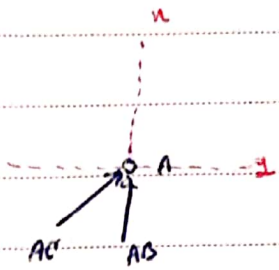
$AB = -0.776\ kN$ $\qquad AB = 0.776\ kN$ فشاری

Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

مثال: عضوی اثر:

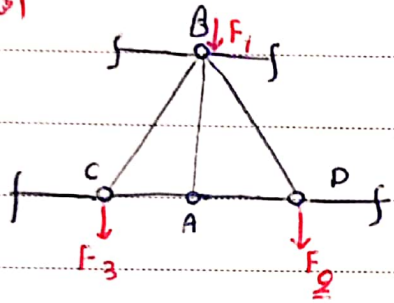


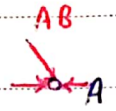


$\Sigma F_y = 0 \rightarrow AC = 0$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow AB = 0$

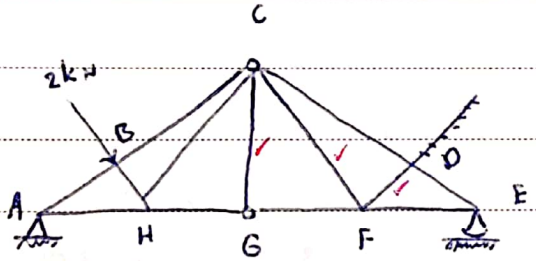
مثال:





$\Sigma F_y = 0 \rightarrow AB = 0$

مثال:

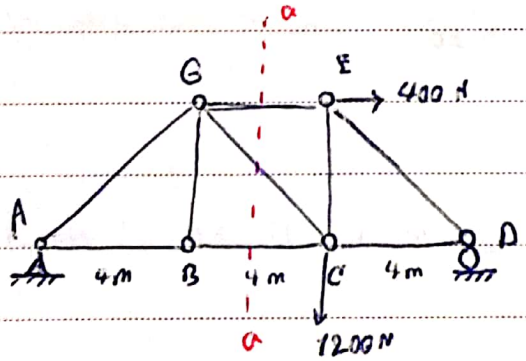


✓ عضای اثر اند:

* روش مقطع (section metode)

وقتی که نیروی تعدادی از عضو ها را بخواهیم پیدا کنیم، استفاده می شود.

مثال: نیروی های GE ، GC ، BC را پیدا کنید.

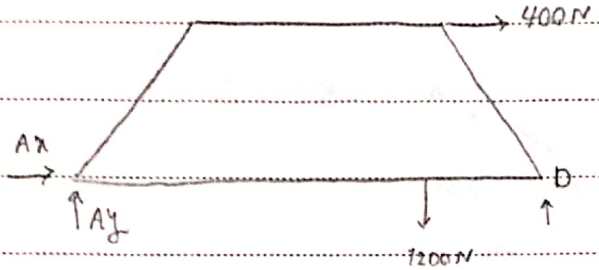


خط a را به گونه ای برش می دهیم که BC ، GC ، GE

برش بخورند.

Scanned by CamScanner

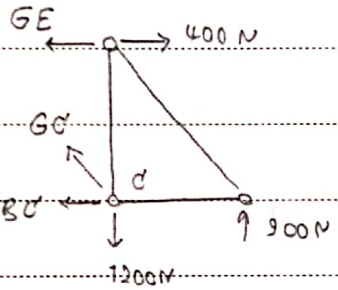
FDB طرف آزاد:



$\sum M_A = 0 \Rightarrow D(12) = 400(3) + 1200(8)$

$D = 900\ N$

نقطه C سمت است خواه:



$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{3}{5} GC + 900 - 1200 = 0$

$GC = 500\ N$ (کشی)

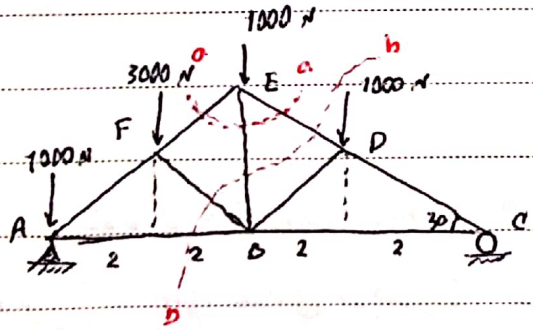
$\sum M_C = 0 \rightarrow 400(3) - 900(4) - GE(3) = 0$

$GE = -800\ N$ $GE = 800\ N$ (فشاری)

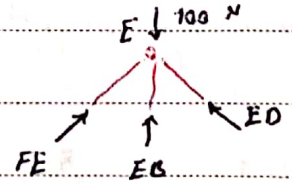
برای بدست آوردن BC

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ or $\sum M_G = 0 \Rightarrow BC(3) + 1200(4) - 900(8) = 0 \rightarrow BC = 800\ N$ (کشی)

مثال: نیروی EB را محاسبه کنید؟



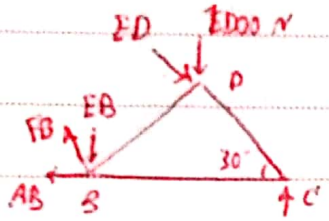
برش aa: تعادل نیمه



از تقارن: $FD = FE$ و از آن نتیجه میشود

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

روش bb : استاتیکی را با استفاده از کل خرپا و $\sum M_A = 0$ بدست می آوریم



$\sum M_A = 0 \rightarrow C(8) = 3000(2) + 1000(4) + 1000(6)$

$C = 2000\ N$

$\sum M_B = 0 \rightarrow 2000(4) - 1000(2) - ED\cos 30\,(2\tan 30) - ED\sin 30\,(2) = 0$

$ED = 3000\ N$ کششی $FE = 3000\ N$ کششی

گره E مثل FBD زیر: $EB + 2ED\sin 30 = 1000 \Rightarrow EB = -2000\ N$ $EB = 2000$ فشاری

(1) سعی می کنیم بررسی ها را طوری شامل حداکثر دو عضو باشد تا مجهول قابل بدست آمدن در شرایط خاص مانند تقارن و شکل و ...

III. سازه دوم : تاب : سازه ای که برای تحمل بار استاتیکی به کار می رود و حداقل یک عضو

(2) چندنیروی دارد.

a. بعضی از عضوهای تاب کشش در تحمل می کنند. (برخلاف خرپا که دو نیروی بودند)

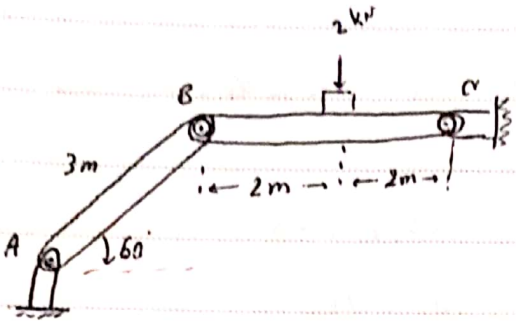
III. سازه ی سوم : ماشین : سازه ای که جزیت مکانیکی ایجاد می کند. مانند تاب است

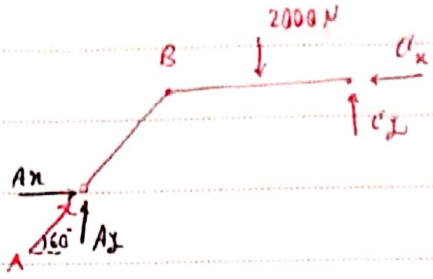
اما اعضای آن تاب حرکت هستند.

Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

مثال ۱: نیروی تکیه گاهی در C را بیابید.





FBD: ب

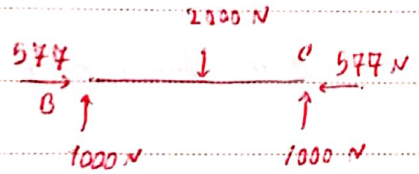
عضو AB: 2 نیرویی ، عضو BC: چند نیرویی (3)

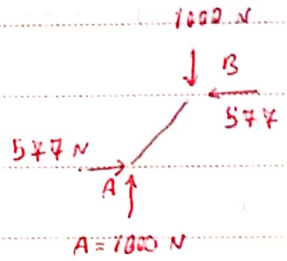
$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow C_y(2) = 2000 \rightarrow C_y = 7000\ N$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow C_x(3\sin 60) + 7000(4 + 3\cos 60) - 2000(2 + 3\cos 60) = 0$

$C_x = 577\ N$

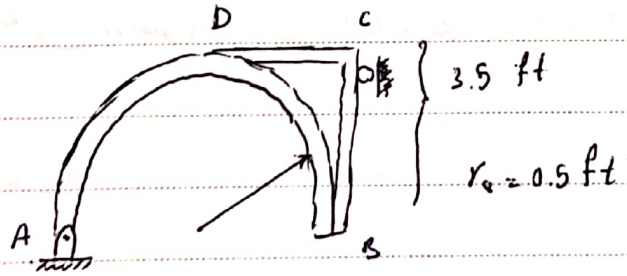
$A_x = 577\ N$

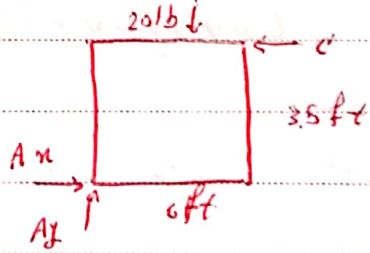




مثال ۲: دسته D به وزن 20lb توسط این تکیه گاه نگه داشته شده است.

مولفه های افقی و عمودی نیرو در B و D چقدر است؟





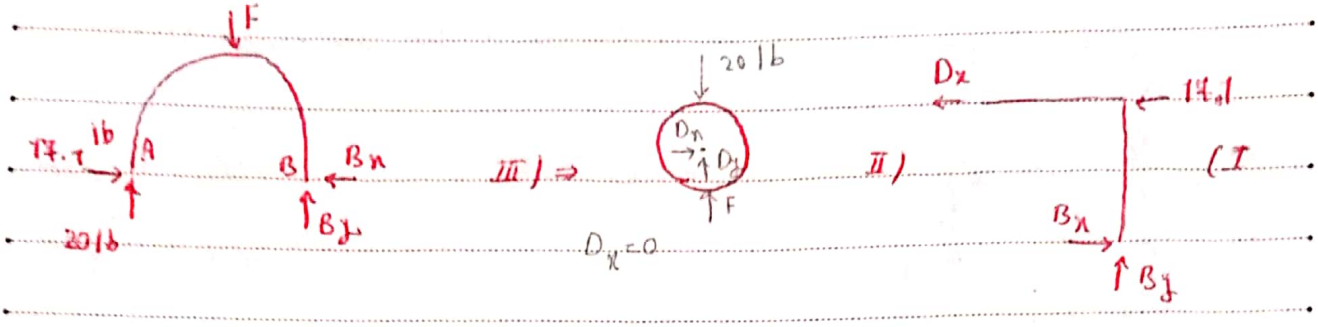
FBD:

$A_y = 20\ lb$ $\quad \Sigma M_A = 0 \rightarrow C(3.5) = 20(3) \rightarrow C = 17.1\ lb$

$A_x = C \rightarrow A_x = 17.1\ lb$

Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

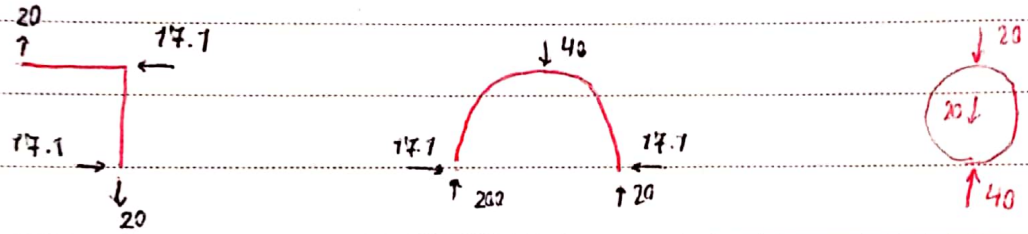


I) ⇒ $D_x = 0$

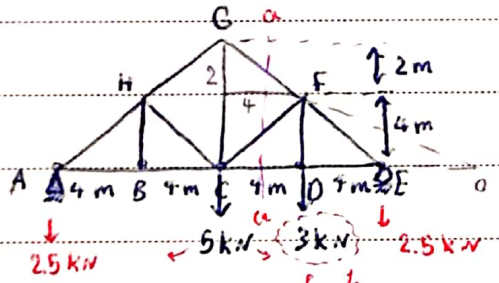
II) ⇒ $B_x = 17.1$ lb ، $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 17.1(3.5) + D_y(3) = 0 \Rightarrow D_y = -20$ lb ↑

$B_y = 20$ lb ↓

$I \Rightarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F - 20 = 20 \Rightarrow F = 40$ lb ↑



2) مثال: نیروی عضو CF = ؟



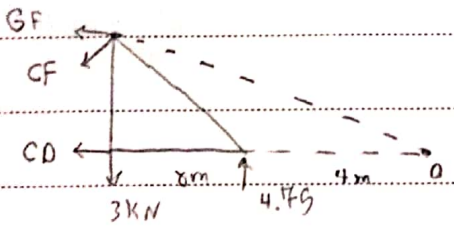
$\frac{2}{4} = \frac{6}{CD} \Rightarrow CD = 12$

0.75 kN

$\frac{5}{4} > \frac{1}{4}$ $\quad \frac{3}{4} = 3 \times 0.25 = 225$ kN

↑ 3.25 kN $\qquad$ 4.75 kN

حل aa:



$\Sigma M_D = 0 \rightarrow 3(8) - 4.75(4) + CF\frac{\sqrt{2}}{2}(8+4) = 0$

$CF = \frac{1}{\sqrt{2}}(-6+4.75) \rightarrow CF = +0.589$

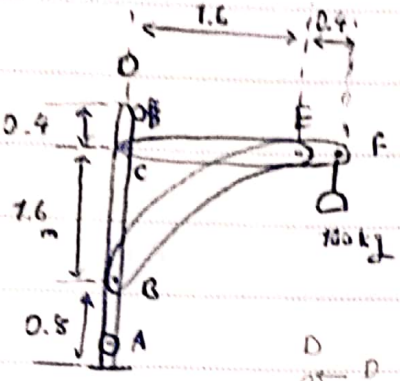
Scanned by CamScanner

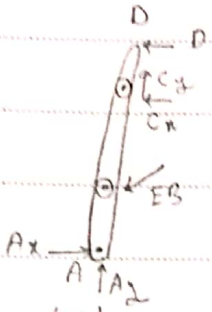
SUBJECT: DATE: / /

مثال ۲: معادله‌های افقی و عمودی نیروی که پین C تحمل می‌کند

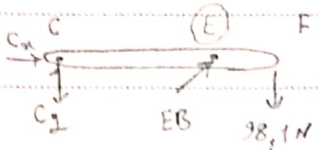
internal force نیروی C نیروی داخلی است.

نیروی که بعد برش ظاهر می‌شود.

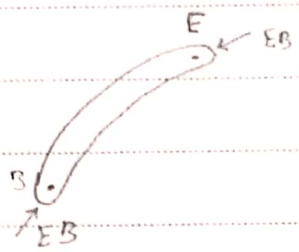




(II)



(I)

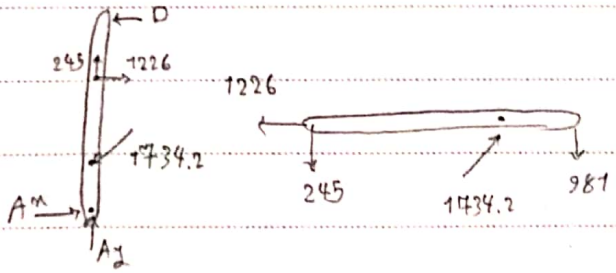


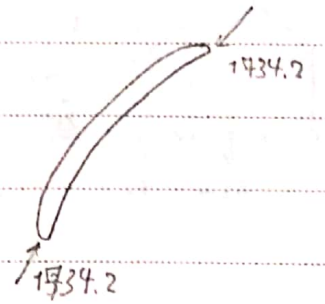
(III)

$I) \Rightarrow \sum M_E \qquad C_y(1.6) = 981(0.4) \rightarrow C_y = 245\ N$

$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} EB = 981 + 245\ N \Rightarrow EB = 1734.2\ N$

$C_x = EB\frac{\sqrt{3}}{2} = 1722.6\ N$

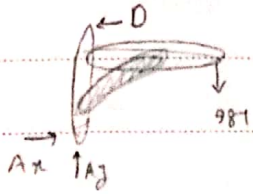




بقیه FBD:

$A_y - 1226 + 245 = 0 \rightarrow A_y = 981\ N$

و حل (FBD) آن



$M_D = A_x \times 2.8 + 981(2)$

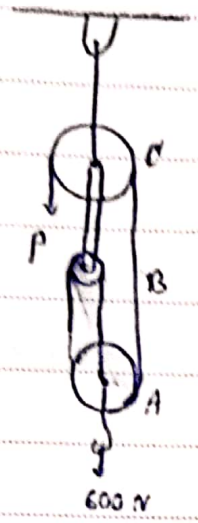
$M_D = 700.7\ N$

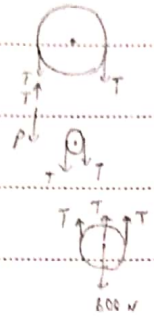
Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

* تحلیل ماشین ها:

ساده ترین ماشین ها: اهرم (1) — ترقوه‌ای که اصطکاک ندارد به طرفین T برابر است

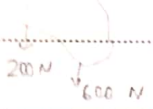


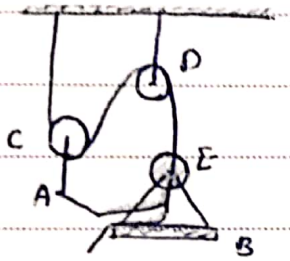


$T = P \rightarrow 3T = 600\,N$

$T = 200\,N$

برای بلند کردن طناب * چقدر نیرو نیاز است؟ 800

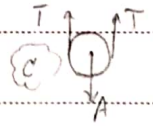


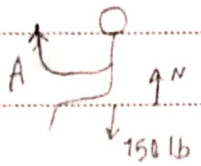


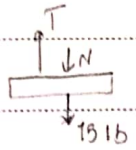
تخته‌ی B 15 lb

وزن شخص 150 lb

نیروی عمودی A که شخص برای بلند کردن خود باید اعمال کند؟ (2)







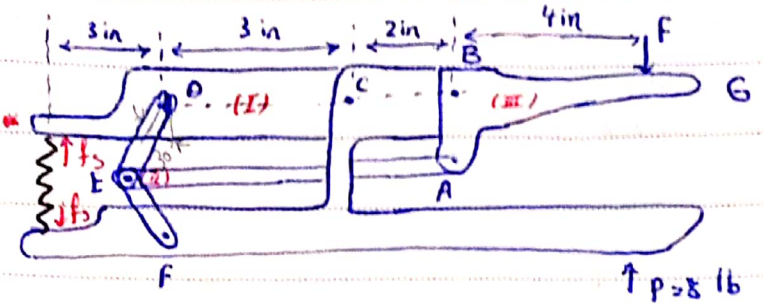
$2T + N = 150 \qquad T = 15 + N$

$2T + T - 15 = 150 \rightarrow 3T = 165$

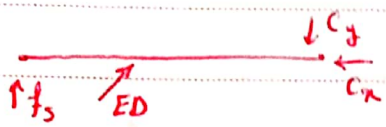
$T = \frac{165}{3} \rightarrow T = 55\,lb \qquad A = 110\,lb$

Scanned by CamScanner

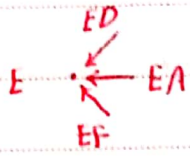
SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /



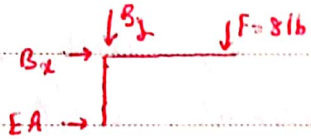
شکل نیروی اعضای به تفکیک



(I)



(II)

(III) ⇒ 

(III) ⇒ $\Sigma M_B = 0 \rightarrow P(4) = EA(1) \rightarrow EA = 72\ lb$

(II) ⇒ $\Sigma F_x = 0 \rightarrow 2ED\sin 30 + EA = 0$

$ED = -32\ lb$

(I) ⇒ $\Sigma M_C = 0 \rightarrow F_s(6) + (-32)\cos 30^\circ (3) = 0$

$F_{(s)} = \frac{32(2)}{2}\sqrt{3}\ lb$

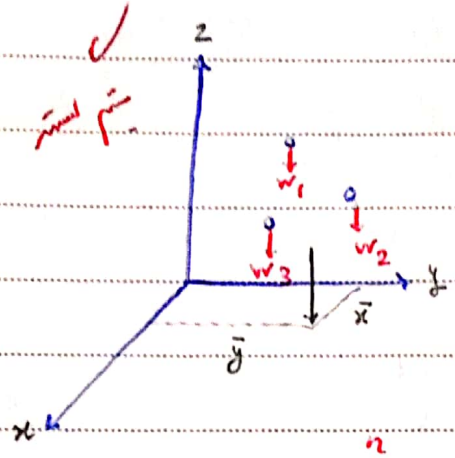
$F_s = 13.9\ lb$

Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

مرکز جرم ، مرکز سطح :

مرکز برآیند : (1)



سیستم گسسته

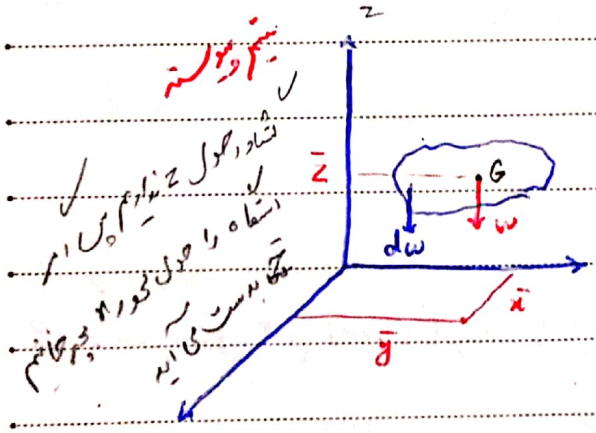
w_1 ، w_2 ، w_3 ← نیروی موازی هستند.

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i = w_1 + w_2 + w_3$$

$$\text{گشتاور} \Rightarrow \bar{x}w = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{w} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum w_i y_i}{w} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\sum w_i z_i}{w}$$



سیستم پیوسته

گشتاور حول z برابر است با گشتاور کل وزن ها حول z

(2)

$$w = \int dw = \int g\,dm = mg = \rho v g \quad \text{(ثابت)}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dw}{w} = \frac{\int x\,dm}{m} = \frac{\int x\,dv}{v}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dw}{w} = \frac{\int y\,dm}{m} = \frac{\int y\,dv}{v}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z\,dw}{w} = \frac{\int z\,dm}{m} = \frac{\int z\,dv}{v}$$

$G = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

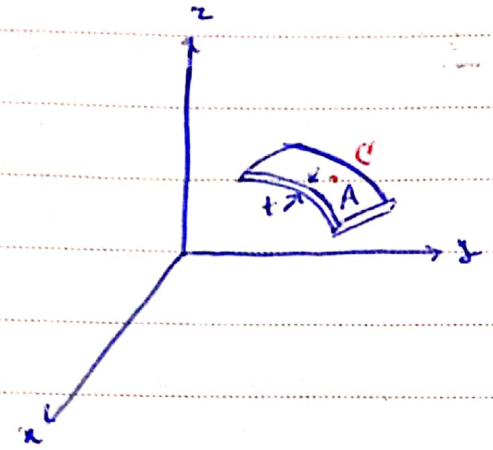
مرکز ثقل یا مرکز برآیند

Center of gravity ← G

Center of mass ← مرکز جرم

مرکز حجم

Scanned by CamScanner



$dv = t\,dA$

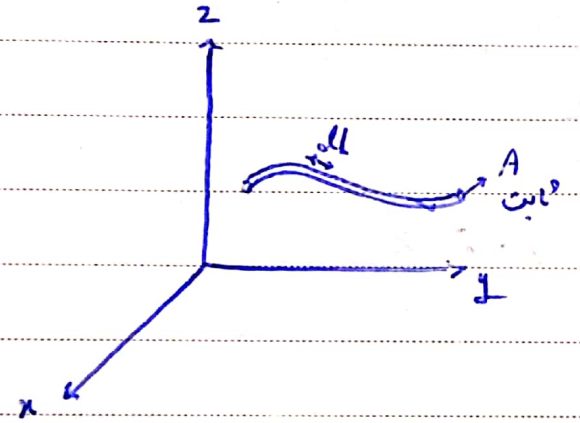
$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A}$

$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A}$

$\bar{z} = \frac{\int z\,dA}{A}$

مشتاق راحل سطح

Center of area: C' ← centeroid



$dv = A\,dl$

$\bar{x} = \frac{\int x\,dl}{L}$

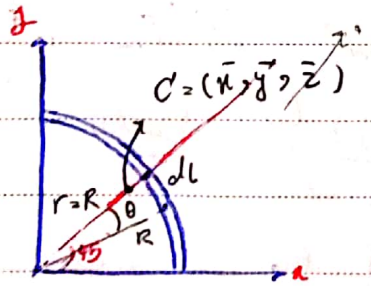
$\bar{y} = \frac{\int y\,dl}{L}$

$\bar{z} = \frac{\int z\,dl}{L}$

مرکز سطحی

مثال: مرکز هندسی حجم (سیم) دایره‌ای را بیابید.

مرکز هندسی روی خط یا صفحه تقارن قرار دارد.



$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{L} \Rightarrow L = \frac{\pi r}{2} \Rightarrow dL = R\,d\theta \Rightarrow \frac{\int x\,dL}{L} = \int_0^R x\,dL$

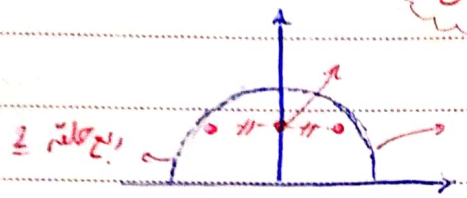
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\theta \cdot R\,d\theta = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = R^2 \sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2$

Scanned by CamScanner

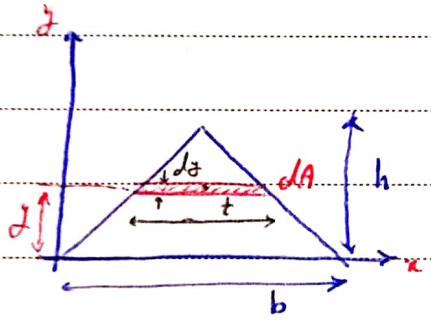
$$\bar{x} = \frac{R^2}{\frac{\pi R}{2}} = \frac{2R}{\pi} \qquad \bar{y} = \bar{x} = \frac{2R}{\pi}$$

مثال ۱: مرکز هندسی نیم دایره به صورت زیر را بیابید.

مرکز هندسی



مثال ۲: مرکز هندسی مثلث روبرو را بیابید؟



$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \Rightarrow A = \frac{1}{2}bh$$

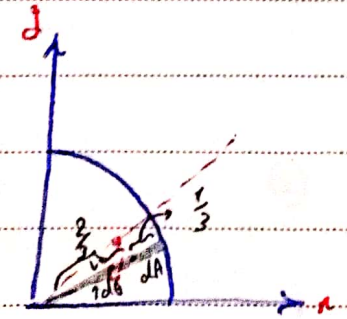
$$dA = t\,dy \Rightarrow \frac{h-y}{h} = \frac{t}{b}$$

$$t = \frac{b}{h}(h-y) \Rightarrow dA = \left(b - \frac{by}{h}\right)dy$$

$$\int y\,dA = \int y\left(b - \frac{by}{h}\right)dy \rightsquigarrow \int by\,dy - \int \frac{b}{h}y^2\,dy$$

$$= \frac{by^2}{2} - \frac{by^3}{3h} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{by^2}{2} - \frac{by^3}{3h}\Big|_h}{\frac{bh}{2}} = \frac{\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{h}{3}$$

مثال ۳: مرکز هندسی ربع دایره مقابل را بیابید؟



$C = \bar{x}, \bar{y}$

مرکز سطح دو بیضی است.

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} = \frac{\int \bar{x}\,dA}{A} \rightsquigarrow \bar{x} = \frac{\bar{r}}{3}$$

$$A = \frac{\pi r^2}{4}$$

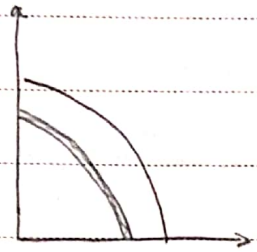
(dA را یک ذره بی‌نهایت کوچک در نظر بگیرید)

Scanned by CamScanner

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dA}{A} = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{2R}{3}\cos\theta \cdot \frac{R^2}{2} d\theta}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

$$dA = \tfrac{1}{2} R\,(R\,d\theta) = \frac{R^2}{2} d\theta$$

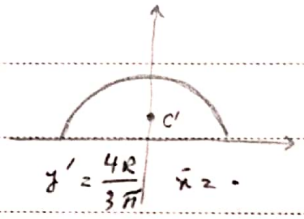
$$\bar{I} = \frac{4R}{3\pi}$$



$$\bar{x} = \frac{2R}{\pi} \qquad dL = \frac{\pi}{2} R\, dR$$

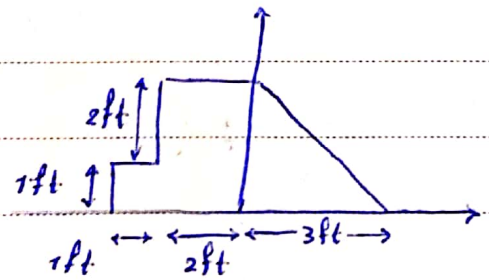
$$\int \tilde{x}\, dL = \int_0^R R^2 dR = \frac{R^3}{3}$$

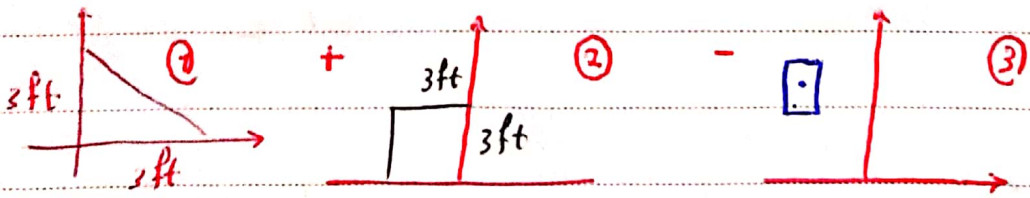
$$\bar{x} = \frac{4R^3}{3\pi}$$



نیم دایره :

مثال : مرکز سطح شکل مقابل را بیابید.





Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

	ft^2	ft	ft	ft^3	ft^3
	A_i	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{x}_i A_i$	$\bar{y}_i A_i$
①	4.5	+1	1	4.5	4.5
②	9	-1.5	1.5	-13.5	13.5
③	-2	-2.5	2	5	-4
	↓			↓	↓
Σ	11.5			-4	14

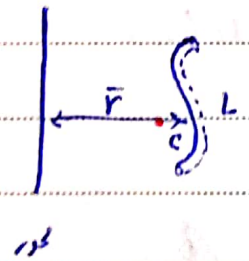
$$\bar{x} = \frac{-4}{11.5} = -0.348\ ft \qquad \bar{y} = \frac{14}{11.5} = 1.22\ ft$$

قضیهٔ پاپوس - گلدینوس

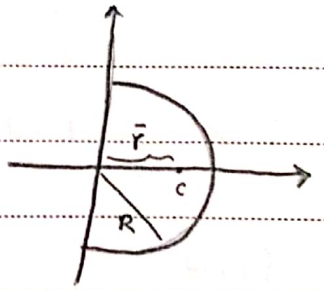
از دوران یک منحنی حول یک محور، یک رویه بدست می‌آید.

سطح رویهٔ حاصل از دوران را می‌توان از رابطهٔ زیر بدست آورد:

حالت ۲: اندازه‌ی θ رادیان



$$A = \bar{r} \cdot \theta \cdot L$$



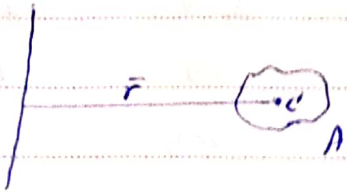
$$S = 2\pi \cdot \frac{2R}{\pi} \times \pi R = 4\pi R^2$$

$$\bar{r} = \frac{2R}{\pi}$$

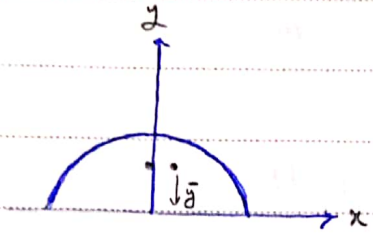
Scanned by CamScanner

. از دوران یک سطح حول یک محور یک حجم بدست می آید .

$V = \bar{r} A$



مثال : مرکز سطح نیم دایره ای ( ) را بدست آورید ؟

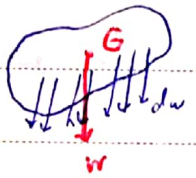


$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi \bar{y} \frac{\pi R^2}{2}$$

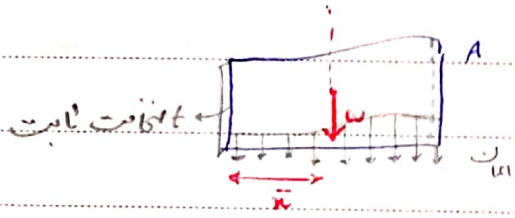
$$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

نیروی خارجی -

بارگسترده :



$w = \Sigma dw$



Body force

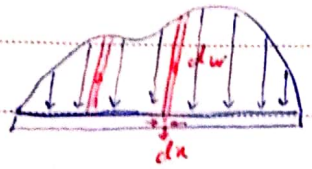
$$w = \int dw = \int \rho g t \, dA = \int \rho g t \, dA = \rho g t \int dA = \rho g t A$$

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dA}{dA}$$

Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

بار گسترده :



هر جسم ارتفاع داشته باشد نیروی وارده بر سطح زیرین است ①

بار گسترده : شدت بار ($\frac{N}{m}$) واحد

$$w = \frac{dw}{dx}$$

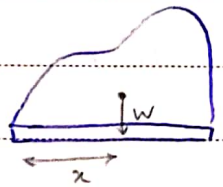
روی یک خط :

* نیروی معادل :

$$W = \int dw = \int w\,dx = \int dA = A$$

سطح زیر منحنی w

محل اثر نیرو :؟



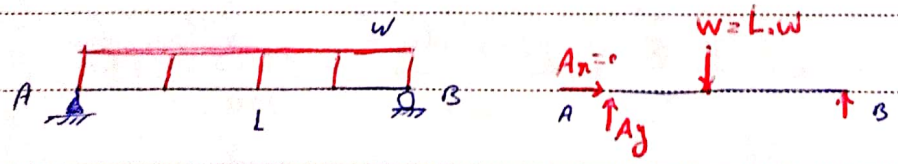
$$w\bar{x} = \int x\,dw = \int x\,dx\,w = \int x\,w\,dx$$

$dA \rightarrow$ (دیفرانسیل سطح زیر w)

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A}$$ ← مرکز سطح زیر منحنی بار گسترده

② برای بارهای گسترده داریم، می‌توان به جای بار گسترده یک بار متمرکز در نظر گرفت که این مقدار بار، مساحت زیر منحنی بار گسترده است. این نیرو از مرکز سطح زیر منحنی بار گسترده می‌گذرد.

* محاسبه reaction های A و B



$W = L \cdot w$

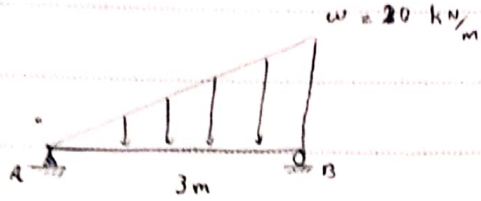
از $\frac{L}{2}$ اثر می‌کند.

$$A_y = B_y = \frac{1}{2} L \cdot w$$

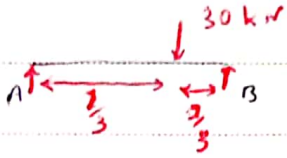
Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

عکس العمل های تکیه گاهی



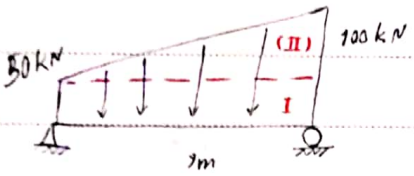
$w = 20 \times 3 \times \frac{1}{2} = 30\ kN$



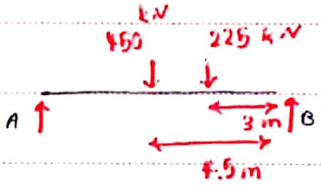
$B = 20\ kN$

$A = 10\ kN$

*** *** ***



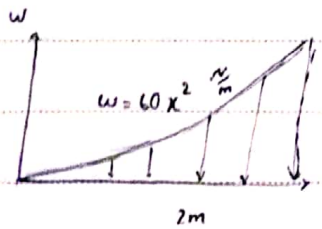
$\Sigma w = \frac{150 \times 3}{2} = 75 \times 3 = 675\ kN$



$B = 225 + \frac{2}{3}(225) = 375$ $A = 225 + \frac{225}{3} = 300$

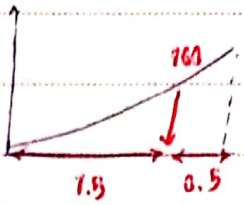
*** *** ***

بار معادل تمرین بار گسترده را بیابید.



$F = \int dA = \int_0^2 60x^2\,dx = 160\ N$

$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{160} = \frac{\int 60x^3\,dx}{160} = \frac{15 \times 2^{(4)}}{160} = 15$



Scanned by CamScanner

SUBJECT: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

internal forces loads : نیروهای داخلی

① نیروهای برشی و عمود برشی نیروها

Beam : تیر : سازه‌ای با ابعاد مقطع کوچک نسبت به طول آن که بارهای خارجی عمود بر آن عمل می‌کنند

external loads

تیر

مقطع تیر ⇒ I ; ○ ; □

نیروی داخلی را پس از برش اعمال می‌کنیم

تکیه‌گاه

شناور نمی

A_x A_y M V N B

نیروی داخلی

shear force : نیروی برشی

N

بارگذاری داخلی

نیروی برشی داخلی

+M +M

شناور خمشی داخلی

② ✓

برای طراحی و تحلیل تیر لازم است توزیع N ، V ، M را در طول تیر رسم می‌کنیم.

P

L

⇒

P

$\frac{P}{2}$ $\frac{L}{2}$ $\frac{L}{2}$ $\frac{P}{2}$

برش $0 < x < \frac{L}{2}$

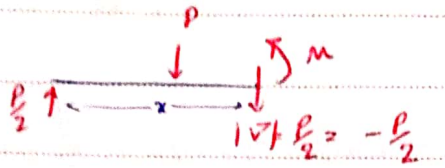
x M

$\frac{P}{2}$ V

$V = \frac{P}{2}$ $M = \frac{P}{2} x$

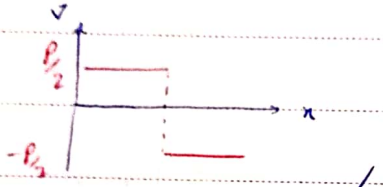
ECHN

Scanned by CamScanner

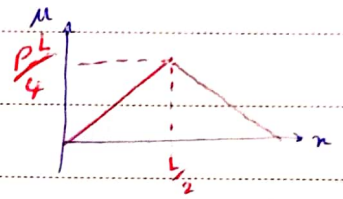


$\frac{L}{2} < x < L$

$M = \frac{P}{2}x - P(x - \frac{L}{2}) = -\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}$



دیاگرام نیروی برشی



دیاگرام ممان خمشی

نکاتی جهت رسم دیاگرام:

نکته: مقادیر ابتدا و انتهای دیاگرام منطبق بر نقاط مرزی تیر است. $(0,0)$ $(\frac{P}{2}, -\frac{P}{2})$

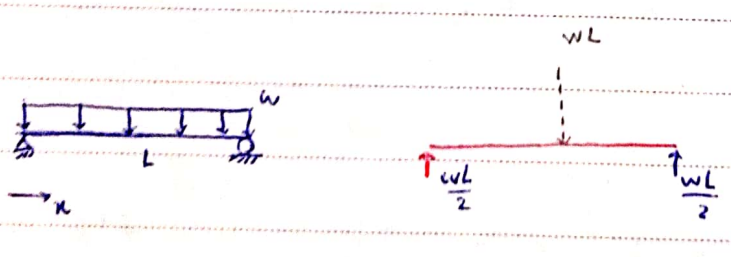
II) دیاگرام V: شیب دیاگرام M است. $V = \frac{dM}{dx}$

III) تغییرات M (ΔM) برابر سطح زیر منحنی V است. $\Delta M = \int V dx$

IV) در اثر اعمال بار متمرکز منحنی ها دچار ناپیوستگی می شوند. (باری تواند نیرو یا لنگر باشد)

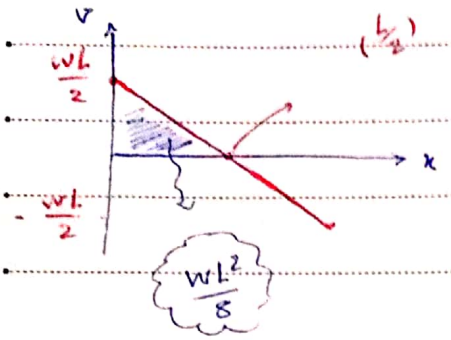
(در محلی که نیرو اعمال می شود)

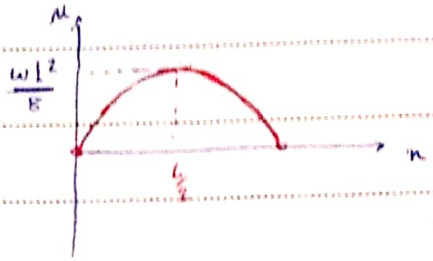
مثال:



$V = \frac{wL}{2} - wx$ $M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx}{2}x$

Scanned by CamScanner

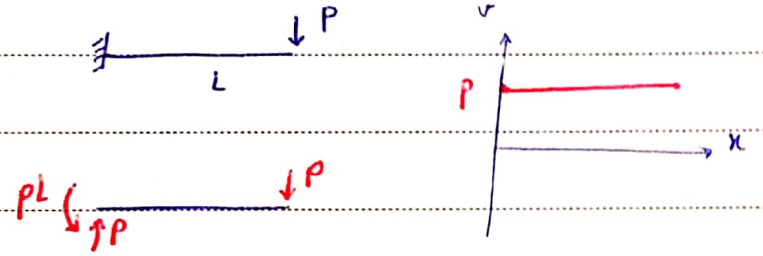


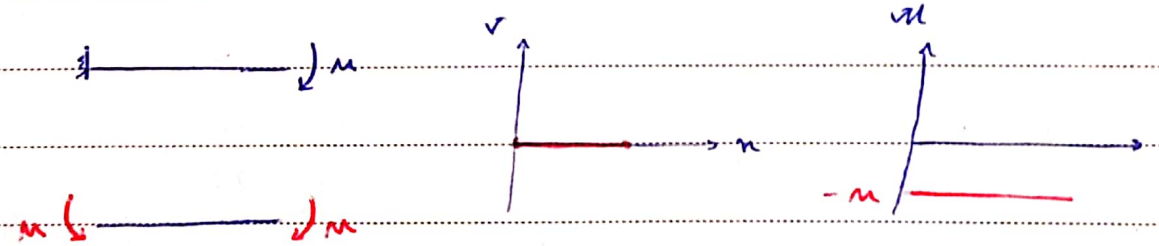


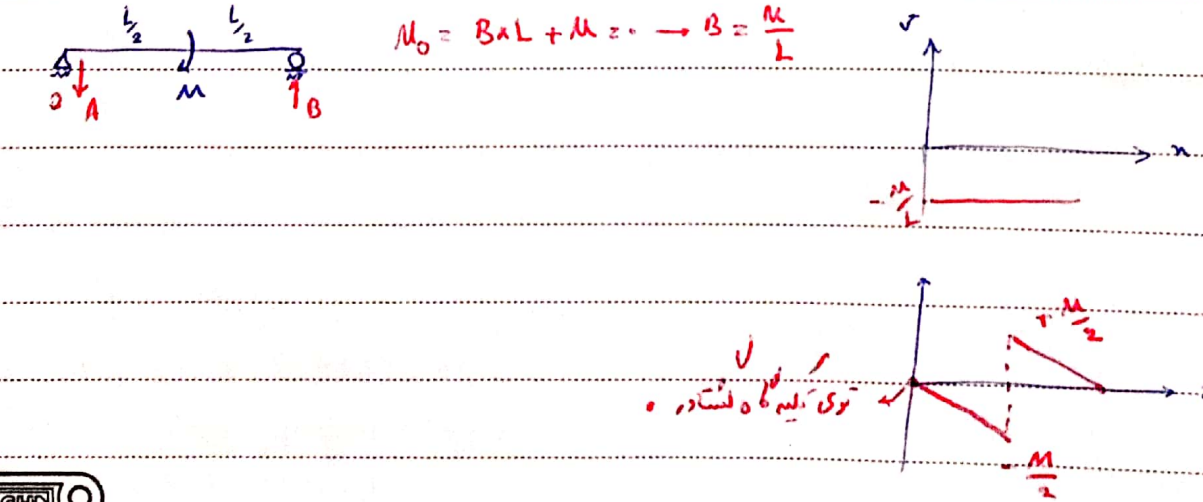
نکته CIV شیب V در دیاگرام w ـ است

قرارداد: $+w$ رو به پایین است.

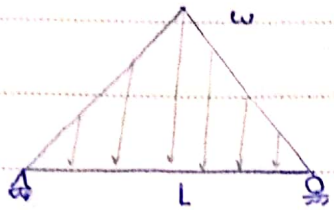
مثال) به روش ترسیمی حل کنید.

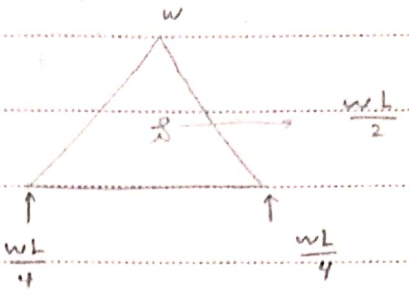


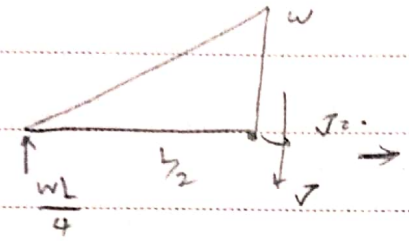




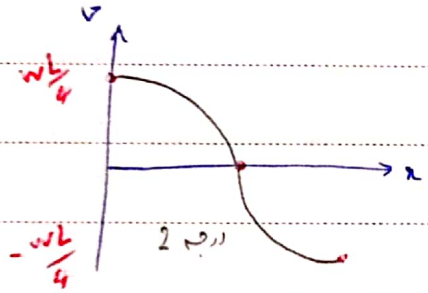
Scanned by CamScanner

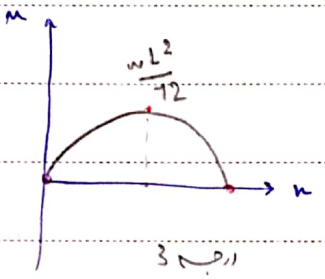


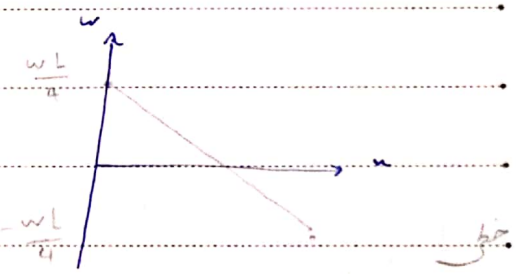


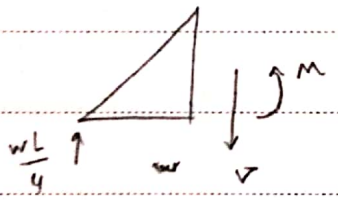


$$\frac{wL}{4} - \frac{wL}{4} = 0$$

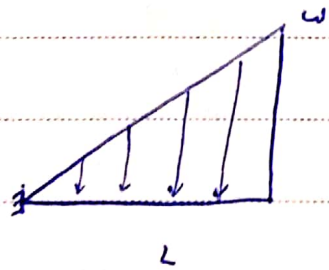






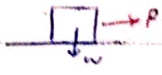


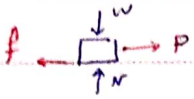
$$M = \frac{wL}{4}\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{wL}{4}\right)\left(\frac{L}{6}\right) = \frac{2wL^2}{24} = \frac{wL^2}{72}$$



Scanned by CamScanner

اصطکاک :





$P = 0$

برای آنکه جسم در راستای x حرکت نکند (متعادل باشد) نیروی P نمی تواند از مقدار بیشینه ای فراتر رود. به ازای مقدار بیشینه P جسم در آستانه حرکت قرار می گیرد. در این شرایط :

$F_s = \mu_s \cdot N$ $\qquad$ $P_{max} = F_s$

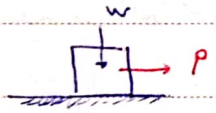
μ_s : ضریب اصطکاک ایستایی $\qquad$ $\mu_s > 0$ (و می تواند بزرگتر از 1 باشد)

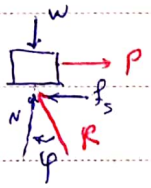
اگر نیروی P بیشتر از P_{max} شود، جسم شروع به حرکت می کند. در حالت حرکت (دینامیکی) اگر جسم بخواهد با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه دهد. در این حالت :

$F_k = \mu_k \cdot N$

$P = F_k$

μ_k : ضریب اصطکاک دینامیکی





if $P = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$P_{max} \Rightarrow \varphi_s$

$\tan \varphi_s = \frac{F_s}{N} = \mu_s$

φ_s : زاویه اصطکاک ایستایی .

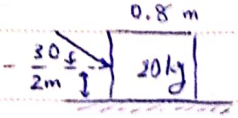
$\varphi_s = \tan^{-1}(\mu_s)$

مسائل اصطکاکی که در آن اصطکاک داریم : در این مسائل معمولاً وضعیت تعادل را در حالتی که یک جسم یا ماشین در آستانه حرکت قرار دارد، بررسی می کنیم.

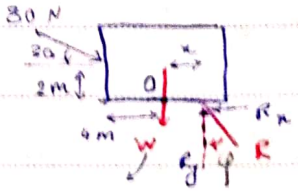
Scanned by CamScanner

Subject
Date

شال ۶ : معضلت تقارل :



$\mu_s = 0.3$



$W = 20(9.81)$

$N = 80 \sin 30 + 20(9.81) = 236.0$

$F = 80 \cos 30 = 69.28$

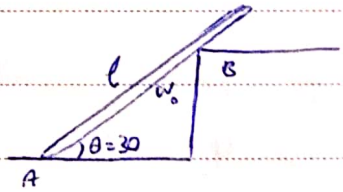
$\tan\varphi = \frac{F}{N} = \frac{69.28}{236.0} = 0.293$ $\qquad \tan\varphi_s = \mu_s = 0.3$

$\varphi < \varphi_s$ ارحال تعادل است .

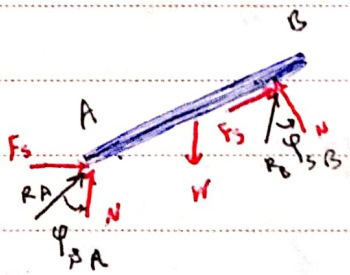
$\sum M_0 = 0 \Rightarrow \quad x = -9.98\ mm$

شال ۱ میله در آستانه حرکت قرار دارد . μ_s بین A و B را برابر بیابید

و آن را بدست آورید .



✓ دیاگرام جسم آزاد را برای حالتی که در آستانه حرکت قرار داریم بدست رسم می کنیم . توجه می کنیم که نیروی اصطکاک ! جهت حرکت جسم مخالفت می کند .

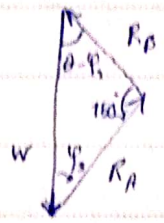


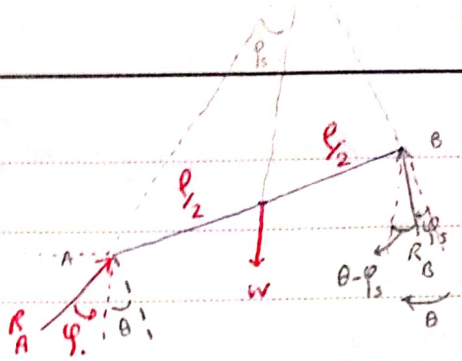
$\varphi_{sA} = \varphi_{sB}$

✓ زاویه ای که $\theta = 30$ تا میله از B قرار می گیرد

PaPCO

Scanned by CamScanner





$$\begin{cases} \dfrac{W}{\sin 150} = \dfrac{R_A}{\sin(\theta-\varphi_s)} = \dfrac{R_B}{\sin\varphi_s} \\ \Sigma M_B = 0 \end{cases}$$

$$R_A \cos(30+\varphi_s)\times \ell = W\,\frac{\ell}{2}\cos 30^\circ$$

~~$R_A \sin(30+\varphi_s)$~~

~~$\frac{\sin(30-\varphi_s)}{\cos(30+\varphi_s)} = \tan 30$~~

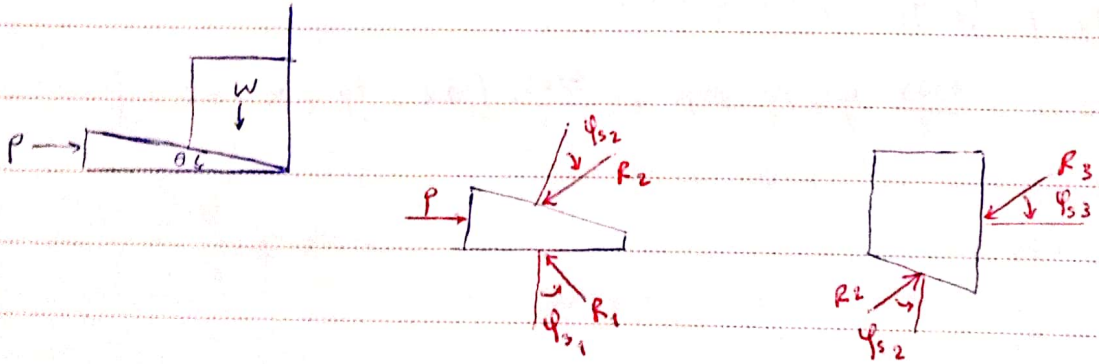
$$\frac{R_A}{\sin(\underset{30}{\theta}-\varphi_s)} = \frac{W}{\sin 150}$$

$$\sin(30^\circ-\varphi_s)\cos(30+\varphi_s) = \frac{\sin 30\cos 30}{2} = \frac{1}{4}\sin 60^\circ$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin(30)+\sin(-2\varphi_s)\right] = \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \sin(30)+\sin(-2\varphi_s) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin(30)-\sin(2\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin(2\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad 2\varphi_s = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

wedges:



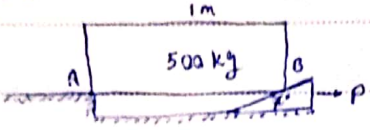
Scanned by CamScanner

Subject

Date

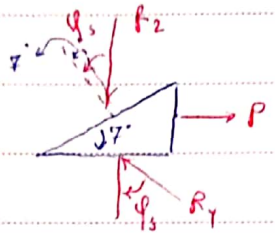
مثال: به کمک لوله سطحی را به ارتفاع ۱ متر بالا می‌کشیم. اگر بخواهیم لوله را به راه بیندازیم، نیروی P را محاسبه کنید.

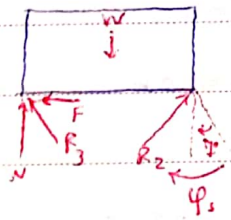
$\mu_s = 0.3$



در حالتی که بخواهیم لوله را بالا بکشیم، لوله در آستانه حرکت به سمت راست تمایل می‌یابد.

$W = 4905$





معادلات تعادل برای لوله:

$\Sigma F_x = 0 \qquad P = R_1 \sin\varphi_s + R_2 \sin(\varphi_s - 7^\circ)$

$R_1 \cos\varphi_s = R_2 \cos(\varphi_s - 7^\circ)$

تعادل برای میله:

$\Sigma M_A = 0 \qquad R_2 \times \cos(\varphi_s - 7^\circ) = 4905 \times 0.9$

$tg\,\varphi_s = 0.3 \qquad \varphi_s = Arc\,tg(0.3) = 16.7^\circ$

$P = R_2 \cos(\varphi_s - 7^\circ)\, tg\,\varphi_s + R_2 \sin(\varphi_s - 7^\circ)$

$P = \frac{4905}{2} \times (0.3) + \frac{4905}{2} tg(\varphi_s - 7^\circ) = \frac{4905}{2}\left[0.3 + tg(16.7 - 7^\circ)\right]$

$= 1154.2\,N = 1.15\,kN$

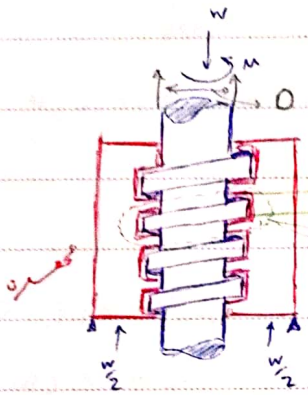
Scanned by CamScanner

Subject
Date

power transmission screw

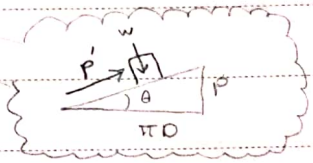
پیچ‌های

پیچ‌های انتقال قدرت اصطلاحاً دنده مربعی هستند.



با پیچاندن پیچ می‌توان وزن سه را به بالا حرکت دهیم.

مانند یک سطح شیبدار است



یک دور ← یک لوله

D: قطر پیچ انتقال قدرت

نیروی P' در فاصله $\frac{D}{2}$ از محور پیچ قرار دارد.

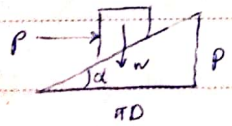
برای حرکت دادن بار سه به سمت بالا از پیچ انتقال قدرت استفاده T را اعمال می‌کنیم.

$$P \times \frac{D}{2} = T$$

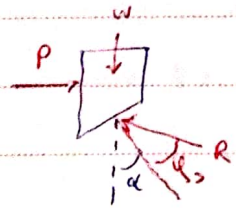
مثال: برای بالابردن بار سه چه نشادی نیاز است؟

" پایین آوردن " " " ؟

آیا پیچ خاصیت خود قفلی دارد؟



اگر بار در راستای حرکت به سمت α قرار گیرد داریم:



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow P = R\sin(\varphi_s + \alpha)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow W = R\cos(\varphi_s + \alpha)$$

$$P = W\,tg(\varphi_s + \alpha) \qquad \alpha = tg^{-1}\left(\frac{l}{2\pi r}\right)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

اگر حرکت رو به پایین بخواهد داشته باشد :

$$P = W \tan(\varphi_s - \alpha)$$

if $P = 0 \rightarrow W \neq 0 \rightarrow \tan(\varphi_s - \alpha) = 0 \quad \varphi_s = \alpha$

if $\varphi_s < \alpha \rightarrow P > 0$ خود قفل نداریم

if $\varphi_s > \alpha \rightarrow P < 0$ خود قفل داریم

$$\sum F_x = 0 \quad P = R\sin(\varphi_s - \alpha)$$
$$\sum F_y = 0 \quad W = R\cos(\varphi_s - \alpha)$$
$$P = -W \tan(\varphi_s - \alpha)$$

مثال) لشتاور M را طوری بیابید که نیروی بستی 2kN را وارد بدست بدهد.

$f_s = 0.25 \qquad D = 10\ mm \qquad p' = 2\ mm$

$$\tan\alpha = \frac{p'}{\pi D} = \frac{2}{\pi(10)} \Rightarrow \alpha = 3.64^\circ \qquad \tan\varphi_s = 0.25 \rightarrow \varphi_s = 14.04^\circ$$

$\varphi_s > \alpha$ پس خود قفل داریم ←

برای پیچ مربعی داریم :

$$\left.\begin{aligned} P &= W \tan(\varphi_s + \alpha) \\ M &= P \cdot \frac{D}{2} \end{aligned}\right\} \quad M = \frac{WD}{2}\tan(\varphi_s + \alpha)$$

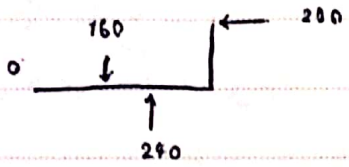
$$M_{tot} = WD\tan(\varphi_s + \alpha) = 10 \times 2 \cdot \tan(14.04 + 3.64) = 6.37\ N.m$$

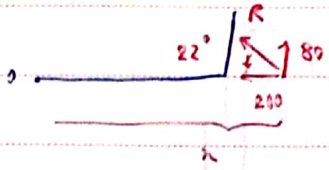
Scanned by CamScanner

Subject

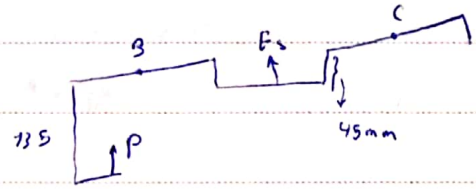
Date

مثال پایان ترم:





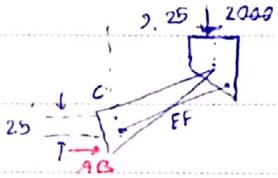
$M_O = 80x = 130000 \rightarrow x = 1625\ mm$



$\sum M_{BC} = 200(60)\cos 30 - P(135) = 0$

$P = 75\ N$

مثال پایان ترم:

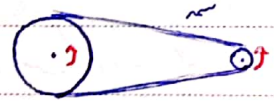


$\sum M_C = 0 \rightarrow AB_x(25) = 2.25(2000)$

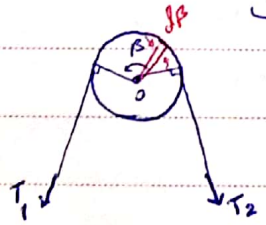
$AB = 7400\ lb$ $\quad \sum M_O = 0$ $\quad \sum F = 0$

اصطکاک تسمه:

اگر اصطکاک نداشته باشیم بین تسمه و قطعه گرد (پولی) پولی حرکت نمی‌کند.

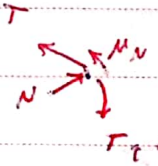


طول تماس دایره‌ای $\Rightarrow$ کمان $\quad \beta\ (rad)$



$T_1 = T_2 e^{\mu\beta}$

$T_2 = T_1 e^{-\mu\beta}$

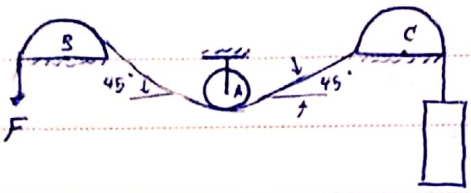


اثبات

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$\mu_s = 0.25$ ،مثال

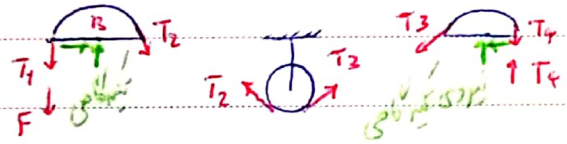


وزنه‌ای A می‌تواند آزادانه بچرخد.

نیروی لازم به طناب می‌تواند تحمل کند 500 N است.

* بیشترین وزنه‌ای که می‌توان راست و آن را بلند کرد را محاسبه کنید.

* بیشترین وزنه‌ای که می‌توان آن را ثابت نگه داشت و حرکت نکند؟ 500 N

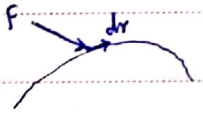


$500 = T_2 \times Exp(\mu\beta) = T_2 \times e^{0.25 \times \frac{3\pi}{4}} \Rightarrow T_2 = T_1 \rightarrow T_3 = T_4 \times e^{0.25 \times \frac{3\pi}{4}} \Rightarrow$

$T_4 = W = 153.9\ N$

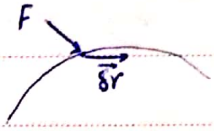
* روش کار مجازی virtual work

کاری است که در یک جابه‌جایی مجازی صورت گیرد.



$dw = \vec{F} \cdot \vec{dr}$

کار حقیقی — جابه‌جایی حقیقی



$\delta w = \vec{F} \cdot \vec{\delta r}$

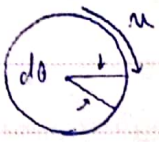
کار مجازی — جابه‌جایی مجازی

Scanned by CamScanner

Subject
Date

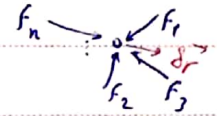
$$dw = \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$$

$$\delta w = \vec{M} \cdot \delta\vec{\theta}$$



تعریف کار مجازی برای تعادل یک ذره:

به تعریف کار مجازی: ذره در حال تعادل است اگر و فقط اگر کار نیروی مجازی وارد بر آن

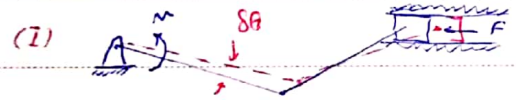


در هر جابجایی مجازی دلخواه صفر باشد.

$$\delta w = F_1 \cdot \delta r + F_2 \cdot \delta r + F_3 \cdot \delta r = (\Sigma \vec{F}) \cdot \delta r = \vec{R} \cdot \delta\vec{r}$$

اصل کار مجازی برای یک سیستم اجسام صلب که اتصال آنها بدون اصطکاک است:

این سیستم در حال تعادل است اگر و فقط اگر کار نیرو دلخواه در

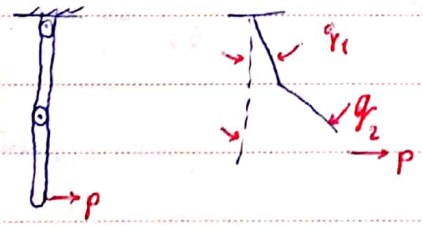


های نیروی وارد بر آن برای هر جابجایی مجازی دلخواه سیستم

صفر باشد. در جابجایی مجازی سیستم در نظر گرفته شده نباید از ارتباط بین اجزای سیستم صرف نظر کرد.

درجات آزادی: Degrees of freedoms (DOF)

(I) درجه آزادی (1)

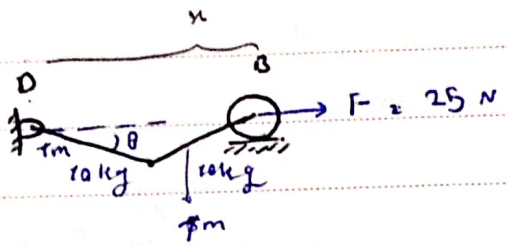


درجه آزادی (2)

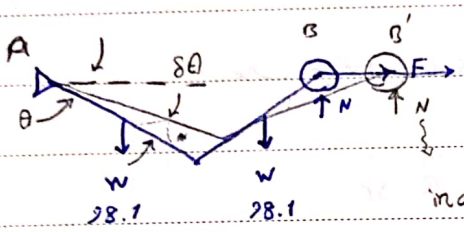
Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال: θ چقدر است زمانی که $F = 25$ نیوتن باشد.



سیستم دارای ۱ درجه آزادی است.



$\delta U = F . \delta x$

inactive force.

A نیروی تکیه‌گاهی

* از نیروی عمودی کار انجام می‌دهد. اندازه‌ی آن - است چون کار روی خلاف جهت مربت است.

$\omega = F . \delta r + (-2w\, \delta y) = 0$

$x = 2\ell \cos\theta \qquad \delta x = -2\ell \sin\theta\, \delta\theta$

$y = \frac{\ell}{2} \sin\theta \cdot w \qquad \delta y = \frac{\ell}{2} \cos\delta\theta \cdot w$

$\uparrow y : \downarrow x \leftarrow \uparrow \theta$

$\delta u = F . 2\ell \sin\theta\, \delta\theta + \frac{\ell}{2} \cos\theta . w\, \delta\theta = 0$

$\delta\theta . (F . 2\ell \sin\theta + \frac{\ell}{2} w \cos\theta) = 0$

$tg\theta = \frac{w}{2F} = \frac{98.1}{50} \Rightarrow$

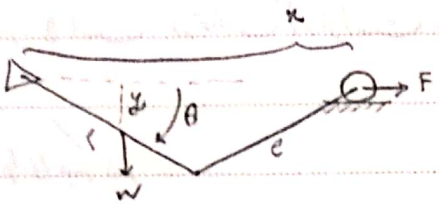
$\theta = 63.0^\circ$

زاویه تعادل

PAPCO

Scanned by CamScanner

روش بهتر :



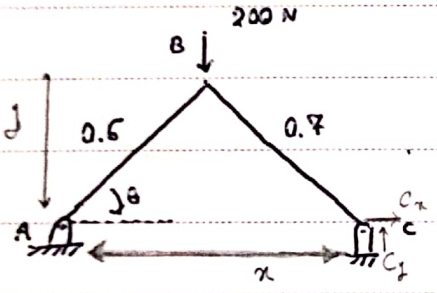
$$\delta u = W \delta y + F \delta x$$

$$x = 2\ell \cos\theta \qquad y = \frac{\ell}{2} \sin\theta \cdot w$$

$$\delta\theta \cdot w \frac{\ell}{2} \cos\theta - F \cdot 2\ell \sin\theta \, \delta\theta = 0 \quad \dots$$

مثال: اگر $\theta = 45$ ، مولفه افقی نیرو در تکیه‌گاه C چقدر است؟

C نقش تکیه‌گاه را دارد اما فرض می‌کنیم جابجایی می‌شود.



$$\delta u = -C_x' \delta x - 200 \delta y$$

$$y = 0.6 \sin\theta \qquad \delta y = 0.6 \cos\theta \, \delta\theta$$

$$0.7^2 = x^2 + 0.6^2 - 2(0.6)x \cos\theta$$

در این حالت خاص $\theta = 45^\circ$

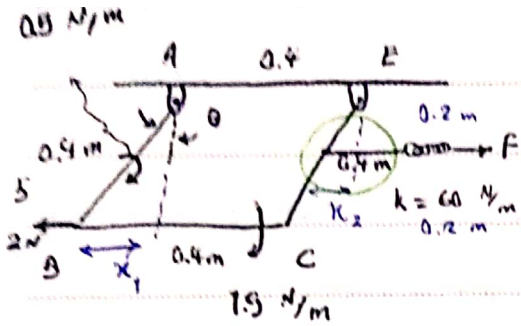
$$0.7^2 = x^2 + 0.6^2 - (0.6)\sqrt{2} \Rightarrow \qquad x = 0.981 \text{ m}$$

$$0 = 1.2\theta \cos\theta + 2x \, \delta x + 1.2 \sin\theta \, \delta\theta \Rightarrow \qquad \delta x = \frac{1.2x \sin\theta}{1.2\cos\theta - 2x} \delta\theta$$

$$-C_x \delta x = \frac{1.2x \sin\theta}{1.2\cos\theta - 2x} \delta\theta - 200(0.6)\cos\theta \, \delta\theta$$

$$C_x = \frac{200(0.6)\cos\theta \cdot (1.2\cos\theta - 2x)}{1.2x \sin\theta} = 114 \text{ N}$$

Scanned by CamScanner



فنر زمانی که θ است: در حالت آزاد است ؛ در این حالت

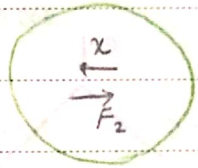
θ مقادیر را می بیشتر کنیم .

وقتی x_2 صفر باشد نیروی فنر صفر است .

BC همواره افقی می ماند ← پس وزن کار نمی تواند ایجاد کند ← BC است inactive

$$\delta U = 2\,\delta x_1 - k x_2\,\delta x_2 + k_2\,\delta\theta = 0$$

نیروی فنر

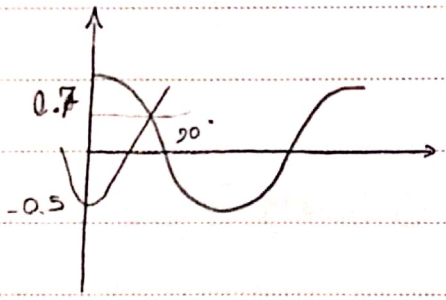


$x = 0.4\sin\theta \qquad \delta x = 0.4\cos\theta\,\delta\theta$

$y = 2\sin\theta \qquad \delta y = 2\cos\theta\,\delta\theta$

$$\delta U = 2(0.4)\cos\theta\,\delta\theta - 60(0.2)\sin(0.2)\cos\theta\,\delta\theta + 0.5 = 0$$

$$0.8\cos\theta - 2.4\sin\theta\cos\theta + 0.5 = 0$$



$\theta = 36.3°$

PAPCO

Scanned by CamScanner

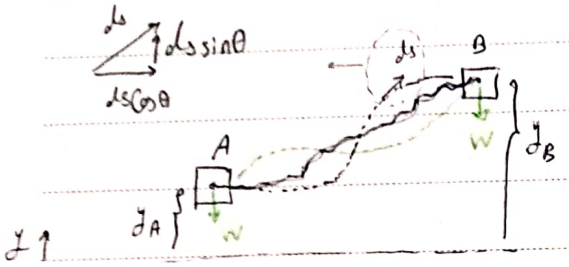
Subject
Date

انرژی پتانسیل :

نیروی پایستار :

Conservative fore

- کار نیرو مستقل از مسیر است ← از یک جا به جایی
- به عبارتی دیگر کار نیرو فقط به مختصات نقاط ابتدایی و انتهایی وابسته است .

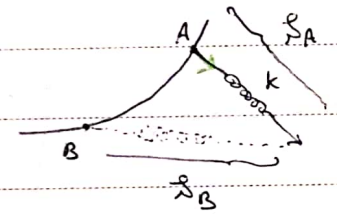


مثال : نیروی وزن :

$$dU = -W\,dy$$

$$U = -W(y_2 - y_A)$$

مثال :



$$F = k\vec{s} - k\vec{s}_0 = k\Delta\vec{s}$$

طول آزاد فنر

$$\vec{s}_1 = \vec{s}_A - \vec{s}_0$$

$$\vec{s}_2 = \vec{s}_B - \vec{s}_0$$

$$U = \frac{1}{2}k(\vec{s}_2^{\,2} - \vec{s}_1^{\,2})$$

چون کار نیروی پایستار مستقل از مسیر است می‌توان برای محاسبه آن از تابع پتانسیل استفاده کرد.

کار نیروی وزن (−) تغییرات پتانسیل وزن

$$V_g = W_g$$

کار نیروی فنر خلاف (−) ∼ فنر

$$V_s = \frac{1}{2}k\vec{s}^{\,2}$$

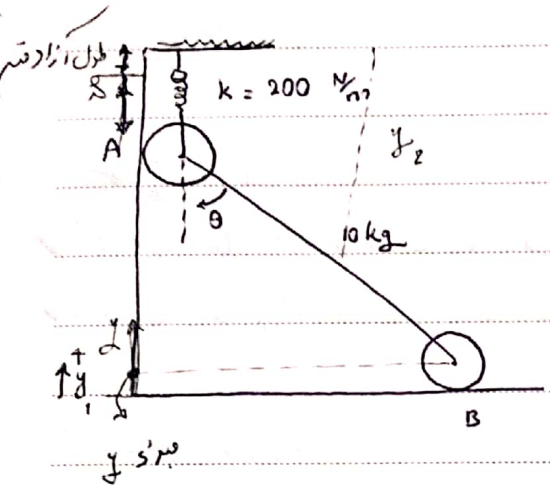
بردار $\vec{s}$ طول آزاد فنر است ← $\vec{s}_0 \neq \vec{s}_0 = 0$

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

θ تعادل:



شرط طول آزاد فنر را دارد. $\theta = 0 \rightarrow$

$$dw = -dv$$

$$v = w \times (+y) = -wy + \frac{vs}{\frac{1}{2}ks^2}$$

$\theta = 0 \rightarrow y = \frac{\ell}{2}$; $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 0$ if

$$v = +wy + \frac{1}{2}ks^2 \qquad v = +w\frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k(\ell - \ell\cos\theta)^2$$

↓ پرانتز صفر است $\Leftarrow \theta = 0$

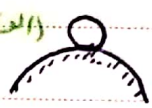
$$\delta v = -\frac{w\ell}{2}\sin\theta\,\delta\theta + \frac{\ell}{2}k(2)(\sin\theta)(\ell - \ell\cos\theta) = 0$$

$$\begin{cases} w = 2k(\ell - \ell\cos\theta) & \text{حالت دوم} \\ \sin\theta = 0 \rightarrow & \text{حالت اول} \end{cases}$$

$$\cos\theta = \left(\frac{-w}{2k}\right) \Rightarrow \frac{-\frac{w}{2k} + \ell}{\ell} \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{98.7}{2(200)(0.6)}\right) \\ \theta = 53.8^\circ \end{cases}$$

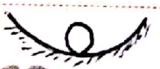
پایداری تعادل:

انواع تعادل:



(الف) تعادل ناپایدار unstable

با جابجایی به سمت اولیه برنمی گردد.



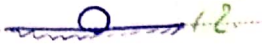
PqPCO

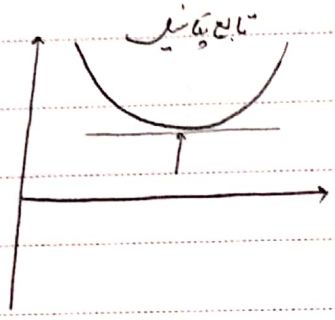
Scanned by CamScanner

Subject
Date

ب) تعادلی پایدار است. stable

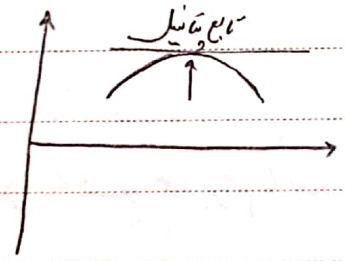
ج) تعادل خنثی nuttal equiliprim





تقعر رو به بالا $\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0$

$$(I) \quad \frac{dV}{d\theta} = -\frac{l}{2} w \sin\theta + 2k\frac{l}{2}\sin\theta\left(l - l\cos\theta\right) = 0$$



$\frac{d^2V}{d\theta^2} < 0$ تقعر رو به پایین

* در مسئله صفحه قبل 2 حالت تعادل $\theta = 53.8$, $\theta = 0$ بدست آمد؛ حالت تعادل دوم

در چه حالتی چنین است؟ $\theta = 0$ ← با تغییر سیستم ← پتانسیل آن کم می‌شود ← تعادل ناپایدار است.

از عبارت (I) یک بار دیگر مشتق می‌گیریم.

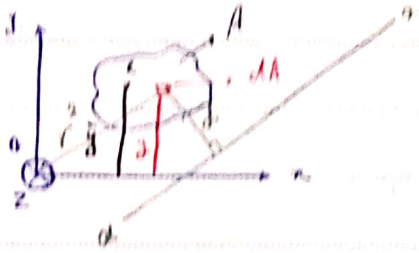
Scanned by CamScanner

Subject
Date

moment of inertia (ممان اینرسی سطح) ممان دوم سطح

ممان اول سطح : $\int y\,dA$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A}$$



تعریف :

ممان دوم سطح حول محور x $= \int y^2\,dA$ $\Rightarrow$ $I_x = \int_A y^2\,dA$

y : فاصله عنصر المان تا محور x

dA : دیفرانسیل سطح

$$I_y = \int_A x^2\,dA \qquad I_{a\text{-}a} = \int d^2\,dA$$

* اگر هردو 2 محور عمود بر هم باشند :

product of inertia

حاصل ضرب ممانت بردو $I_{x,y} = \int xy\,dA$ واحد $[I] = L^4$

$$I_C = J_O = \int r^2\,dA = \int (x^2+y^2)\,dA = I_x + I_y$$

ممان قطبی سطح :

r فاصله تا محور آن می گیریم

قضیه محورهای موازی :

$\bar{I}_x$: ممان اینرسی دوم است که محور x از مرکز سطح می گذرد .

$$I_{x'} = \bar{I}_x + Ad^2$$

$$\bar{I}_x = \int y^2\,dA$$

$$\bar{I}_{x'} = \int y'^2\,dA$$

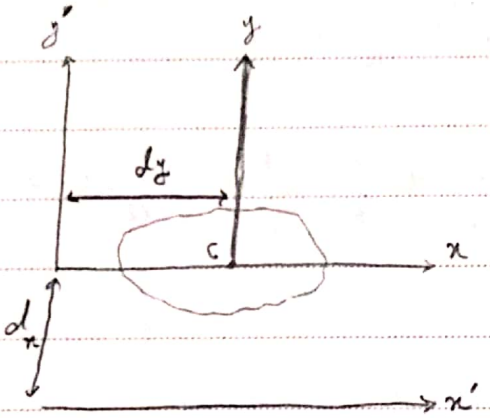
PqPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

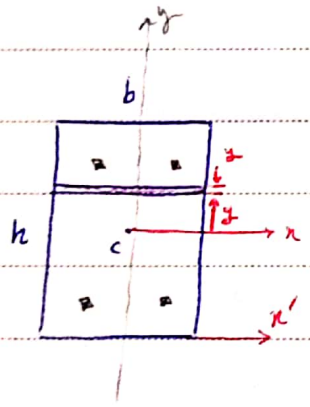
$I_{x'} = \int y^2 dA + d^2 \int dA + 2d \int y dA \rightarrow 0 \Rightarrow \int y dA = d \cdot \bar{y} A = \bar{y} A$

* $I_{x'} = \bar{I}_x + d^2 A$ * $I_{y'} = \bar{I}_y + d^2 A$



* $I_{x'y'} = I_{xy} + d_x d_y A$

x' و y' محورهای



$I_x = ?$ مثلث

$\bar{I}_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} by^2 dy = 2\int_0^{h/2} y^2 dy = 2b \frac{1}{3} \frac{h^3}{8}$

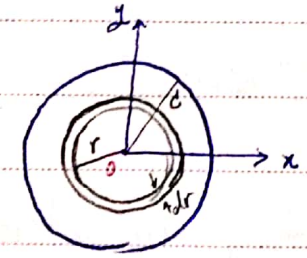
$= \frac{1}{12} bh^3$

سطح متقارن است

$I_{xy} = 0$ ؛ $I_{x'y} = 0$ محور تقارن است

$I_{x'} = \bar{I}_x + d^2 A = \frac{1}{12} bh^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{3}{12} bh^3 \left(\frac{1}{3}\right)$

$I_{x'y'} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y dA = \frac{b}{2} \frac{h}{2} \cdot bh = \left(\frac{bh}{2}\right)^2$



$I_x = ?$ دایره

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = J_0 / 2$

$J_0 = \int r^2 dA = \int r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_0^c r^3 dr = \frac{1}{2} \pi c^4$

$\bar{I}_x = \frac{1}{4} \pi c^4 = \bar{I}_y$

$I_{xy} = 0$

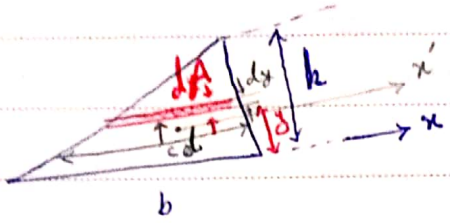
PqPCO

Scanned by CamScanner

Subject

Date

I_x محاسبه



$$I_x = \int y^2 dA$$

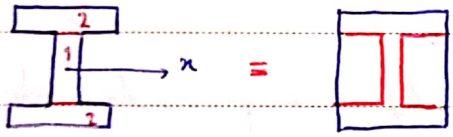
$$dA = d \cdot dy = \frac{b}{h}(h-y)\,dy$$

$$\frac{d}{h-y} = \frac{b}{h} \Rightarrow d = \frac{b}{h}(h-y)$$

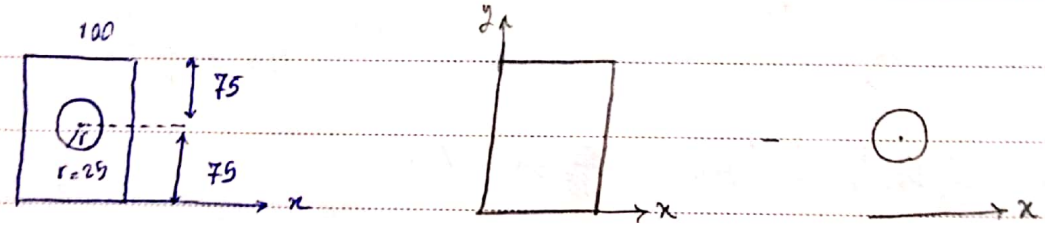
$$I_x = \int \frac{b}{h}(h-y)y^2\,dy = \frac{b}{h}\int (hy^2 - y^3)\,dy = \frac{b}{h}\left(h\cdot\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4}\right) = \frac{1}{12}bh^3$$

$$x' = x \Rightarrow \quad I_x = \bar{I}_x + \left(\frac{h}{3}\right)^2 A = \frac{1}{12}bh^3 + \left(\frac{h^2}{9}\right)\left(\frac{bh}{2}\right) = \frac{1}{36}bh^3$$

ترکیب:



مثال:



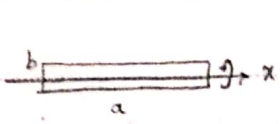
$$\square I_x = \frac{1}{3}bh^3 \qquad \bigcirc I_x = \frac{\pi}{4}(25)^2 + 75(\pi \cdot 25)^2\ mm^4 \qquad I_x = \square I_x - \bigcirc I_x$$

$$\square I_x = \frac{1}{3}(100)(150)^3 = 11.2 \times 10^6\ mm^4 \qquad \bigcirc I_x = 11.4 \times 10^6\ mm^4 \qquad I_x = 10.1(10^6)\ mm^4$$

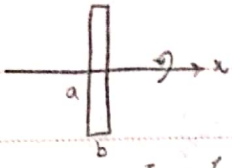
* عالت دوم = وضعیت توزیع سطح را نمایش می دهد.

Scanned by CamScanner

Subject
Date



$I_x = \frac{1}{12} a b^3$



$I_x = \frac{1}{12} b a^3$

$M = I\alpha$

$F = MQ$

راست ترین چرخ ... پرسش می پرسد ...

شعاع ژیراسیون یک سطح:

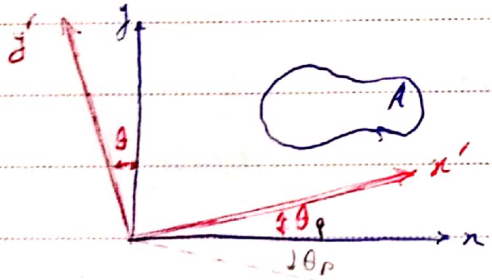
شعاع ژیراسیون حول محور x: $k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

شعاع ژیراسیون حول محور y: $k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

شعاع ژیراسیون قطبی: $k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$

$I_{a-a} = d^2 A \Rightarrow d = \sqrt{\frac{I_{a-a}}{A}}$

دوران محورها:

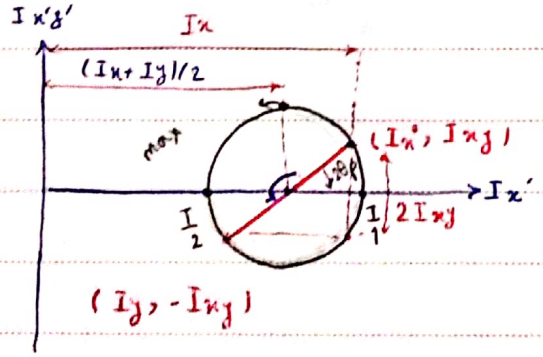


$I_x, I_y, I_{xy} \Rightarrow$ داریم ✓

$I_{x'}, I_{y'}, I_{x'y'} = ?$

$+90 \rightarrow \int xy\,dA \rightarrow$ جابجا دل $\rightarrow -\int yx\,dA = -I_{xy}$

θ	$I_{x'}$	$I_{x'y'}$
0	I_x	I_{xy}
1°		
2°		
90°	I_y	$-I_{xy}$
180		



• دایره مور برای تبدیل محورها:

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

رسم دایرهٔ مور :

۱ـ مرکز دایره روی محور I_x قرار دارد : $I_{avg} = \frac{(I_x + I_y)}{2} = I_0$

2 ـ نقطهٔ A از دایره را رسم می‌کنیم $A(I_x, I_{xy})$

* شعاع دایره را بدست آوریم : $R = \sqrt{(I_{xy})^2 + (I_x - I_{avg})^2}$

* دایره هیچگاه بصورت مثبتی محور x را قطع نمی‌کند.

* $I = \int y^2 dA$ $dA, y^2 > 0$

* ممان‌های اصلی : I_1, I_2

principle moments

$$I_{1,2} = I_{avg} \pm R$$

* محورهایی اصلی : محورهایی که حاصل ضرب ممان یا حول آنها صفر باشد.

محورهای اصلی بر هم عمودند.

حول محور تقارن صفر بود.

معادلهٔ دایره : $I_x = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

$I_{x'} + \pi \leftarrow I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$

$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{\frac{I_x - I_y}{2}}$

Scanned by CamScanner