جزوه تحلیل آماری

آزمون کای - دو

مسأله ۱) طبق گزارش یکی از سازمان های تحقیقاتی بین المللی تعداد فارغ التحصیلان دوره دکتری مدیریت که جذب دانشگاه ها و موسسات دولتی و خصوصی می شوند به نسبت ۵ و۳ و ۲ می باشد. در بررسی که روی ۳۰ نفر از فارغ التحصیلان دوره دکتری مدیریت به عمل آمد ملاحظه گردید که ۲۰ نفر آن ها در دانشگاه ها و ۵ نفر در موسسات دولتی و ۵ نفر در موسسات خصوصی بکار مشغول اند. آیا با احتمال ۹۵٪ می توان اظهار نظر نمود که نسبت جذب فارغ التحصیلان دکتری مدیریت در ایران مطابق استانداردهای بین المللی می باشد؟

توجه ۱) این مسأله مربوط می شود به آزمون کای – دو

توجه ۲) تعداد فارغ التحصیلان دوره دکتری مدیریت که جذب دانشگاه ها و موسسات دولتی و خصوص می شوند به نسبت ۵، ۳ و ۲ می باشد (به اعداد ۵، ۳ و ۲ فراوانی مطلق یا $\mathrm{F_i}$ می گویند).

توجه۳) جمع فراوانی مطلق را محاسبه می کنیم.

$$\sum Fi = 10$$

توجه۴) از این ۳۰ نفر فارغ التحصیل دوره دکتری ۲۰ نفر در دانشگاه ها و ۵ نفر در موسسات دولتی و ۵ نفر در موسسات خصوصی مشغول به کارند (این آمارها را چون دیده ایم اسمش را می گذاریم فراوانی مشاهده شده $\mathrm{F_o}$)

$$\sum Fo = 30$$

توجه ۵) چون در این مسأله فراوانی های مشاهده را گفته اند مجبور هستیم از آزمون کای-دو استفاده کنیم.

توجه۶) برای اجرای آزمون، فراوانی نسبی یا احتمال تجربی را پیدا می کنیم (فراوانی مطلق تقسیم بر جمع فراوانی ها).

$$Fi = P = \frac{Fi}{\sum Fi}$$

توجه ۷) برای اجرای آزمون به فراوانی نظری ($\mathrm{F_e}$) نیاز داریم. به فراوانی نظری، فراوانی مورد منتظره یا فراوانی مورد انتظار نیز می گویند.

احتمال تجربی* تعداد = فراوانی نظری

$$\mathrm{F_e} = n * p$$

توجه ۸) در آزمون کای-دو جمع فراوانی نظری با جمع فراوانی مشاهده ای برابر است.

توجه ۹) فراوانی های مشاهده شده را منهای فراوانی نظری می کنیم، به توان ۲ می رسانیم و حاصل را بر فراوانی نظری تقسیم می کنیم.

$$\frac{(Fo - Fe)^2}{Fe}$$

توجه ۱۰) برای اجرای آزمون x^2 به کای-دو جدول نیاز داریم. جدول را از روی سـطح کای-دو پیدا می کنیم. این جدول در اختیار است.

توجه ۱۱) کای-دو جدول x^2 را محاسبه می کنیم.

الف) درجه آزادی را پیدا می کنیم.

v= R (تعداد سطر)-1=3-1=2

ب) درصد اشتباه را پیدا می کنیم.

$P= 1- \gamma= 1- 0.95=0.05$

df	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
2	4.60	5.99147	7.82	9.21	13.82

F_i	F_o	$Fi = P = \frac{Fi}{\sum Fi}$	F_e=n.p	$\frac{(Fo - Fe)^2}{Fe}$
5	20	$\frac{5}{10}$	$30 \times \frac{5}{10} = 15$	$\frac{25}{15} = 1.66$
3	5	$\frac{3}{10}$	$30 \times \frac{3}{10} = 9$	$\frac{16}{9} = 1.77$
2	5	$\frac{2}{10}$	$30 \times \frac{2}{10} = 6$	$\frac{1}{6} = 0.16$
$\sum Fi = 10$	30	1	n=30	$x^2 = \sum \frac{(Fo - Fe)^2}{Fe} = 3.59$

توجه ۱۲) اگر کای- دو محاسبه شده کوچکتر از کای-دو جدول باشد، فرض H_0 مورد تأیید است.

محاسبه شده $x^2 < x^2$ جدول $H_0: F_o = F_e$

فرض H_0 عبارت است از فراوانی های مشاهده شده برابر فراوانی های نظری.

توجه ۱۳) اگر x^2 محاسـبه شـده بزرگ تر و مسـاوی کای-دو جدول باشـد فرض H_1 مورد تأیید اسـت. H_1 عبارت اسـت با فراوانی های مشاهده شده نامساوی فراوانی های نظری.

$x^2 \geq x^2$ $H_1: F_o \neq F_e$

تصمیم گیری آماری

چون در این مسأله x^2 محاسبه شده کمتر از x^2 جدول است فرض H_0 مورد تأیید است.

$x^2 < x^2$ $H_0: F_o = F_e$ $3.59 < 5.99147$

یعنی با اطمینان ۹۵٪ می توان اظهار نظر کرد نسبت جذب فارغ التحصیلان دکتری مدیریت در ایران مطابق استانداردهای بین المللی می باشد.

توجه ۱۴) تعریف عملیاتی فرض H_0 (فرض خنثی): فرض خنثی یا فرض عدم تفاوت را فرض خنثی می گویند.

توجه ۱۵) فرض تفاوت را فرض H_1 می گویند.

مسأله ۲) ۱۰۰ نفر زن و مرد که تحصیلات دانشگاهی دارند به تصادف انتخاب می شوند. درجات تحصیلی آن ها در جدول زیر منعکس است. به کمک آزمون کای-دو تحقیق نمایید که با احتمال ۹۵٪ بین نوع جنس و درجات تحصیلی بستگی دارد یا این دو صفت مستقل می باشند.

جنس / درجه تحصیلی	دکتری	فوق لیسانس	لیسانس	جمع
مرد	۱۵	۲۰	۲۵	۶۰
زن	۵	۱۰	۲۵	۴۰
جمع	۲۰	۳۰	۵۰	۱۰۰

توجه ۱) این مسأله مربوط می شود به آزمون کای-دو؛ زیرا در این مسأله جدول توافقی[1] فراوانی های مشاهده شده جزو معلومات است.

توجه ۲) به این جدول، جدول توافقی فراوانی های مشاهده شده می گویند.

توجه ۳) برای اجرای آزمون کای-دو به جدول توافقی فراوانی های نظری نیاز داریم.

جنس / درجه تحصیلی	دکتری	فوق لیسانس	لیسانس	جمع
مرد	$20 \times 0.6 = 12$	$30 \times 0.6 = 18$	$50 \times 0.6 = 30$	۶۰
زن	$20 \times 0.4 = 8$	$30 \times 0.4 = 12$	$50 \times 0.4 = 20$	۴۰
جمع	۲۰	۳۰	۵۰	۱۰۰

به این جدول، جدول توافقی فراوانی های نظری می گویند.

$$\textit{Men Percent} = \frac{60}{100} = 0.6$$

$$\textit{Women Percent} = \frac{40}{100} = 0.4$$

توجه ۴) χ^2 جدول را پیدا می کنیم.

[1] به جدول توافقی، جدول دو مرحله ای یا جدول دو جانبه ای هم گفته می شود.

الف) درجه آزادی را پیدا می کنیم.

$V= (R-1)(C-1)= (2-1)(3-1)=2$

ب) درصد اشتباه را پیدا می کنیم.

$P= 1- \gamma= 1- 0.95=0.05$

df	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
2	4.60	5.99147	7.82	9.21	13.82

F_o	F_e	$\frac{(Fo-Fe)^2}{Fe}$
15	12	$\frac{9}{12}=0.75$
20	18	$\frac{4}{18}=0.22$
25	30	$\frac{25}{30}=0.83$
5	8	$\frac{9}{8}=1.12$
10	12	$\frac{4}{12}=0.33$
25	20	$\frac{25}{20}=1.25$
		$x^2=\sum\frac{(Fo-Fe)^2}{Fe}=4.50$

$$x^2 < x^2$$

$$H_\circ: F_o = F_e$$

$$4.50 < 5.99147$$

یعنی تفاوت معنادار است و با احتمال ۹۵٪ بین نوع جنس و درجات تحصیلی بستگی وجود ندارد و دو صفت جنس و درجات تحصیلی، دو صفت مستقل می باشند.

آزمون های دامنه دار

مسأله ۱) یک موسسه بازرگانی یک نوع داروی کاهش وزن به بازار عرضه می کند که کاهش وزن برای یک دوره مشخص (مثلاً ۳ ماه) دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۲ کیلوگرم و انحراف معیار ۶ کیلوگرم است. موسسه از این بابت بسیار راضی است به جز در مواردی که ناراحتی اعصاب گزارش می شود. نتیجه به کارخانه سازنده دارو منعکس شده است. کارخانه سازنده دارو ادعا می کند که می تواند به ترکیب این دارو ماده دیگری بیفزاید، بدون اینکه میانگین کاهش وزن را تغییر دهد، عوارض جنبی قبلی را نداشته باشد. به منظور بررسی صحت ادعا از بین استفاده کنندگان ترکیب جدید یک نمونه به حجم *n=9* نفر انتخاب گردید که میانگین وزن آن ها ۹ کیلوگرم بدست آمد. آیا بر اساس این نمونه می توان گفت که میانگین کاهش وزن جامعه جدید همان ۱۲ کیلوگرم است؟ (با فرض اینکه واریانس کاهش وزن تغییر نکرده باشد) آزمون را در سطح احتمال $\propto = 0.05$ انجام دهید.

برای حل این مسأله توجه های زیر را در نظر می گیریم:

توجه ۱) این مسأله مربوط می شود به آزمون مقایسه میانگین نامعلوم (μ) با عدد دلخواه (μ_0) در جامعه نرمال.

توجه ۲) به δ انحراف معیار جامعه می گویند.

به δ^2 واریانس جامعه می گویند.

به S انحراف معیار نمونه می گویند.

به S^2 واریانس نمونه می گویند.

توجه ۳) در این مسأله واریانس جامعه و انحراف معیار جامعه معلوم است. ولی انحراف معیار نمونه نامعلوم است. برای اینکه به این مسأله جواب دهیم، تعاریف زیر را انجام می دهیم.

توجه ۴) تصمیم آماری: بیشتر اوقات بر پایه اطلاعات و ارقام بدست آمده از نمونه ها باید درباره جامعه تصمیم گرفت. به این طریق تصمیمات، تصمیمات آماری می گویند.

توجه ۵) احتمال دارد بر اساس ارقام نمونه درباره اینکه آیا سرم جدید در معالجه بیماری معینی واقعاً موثر است، اتخاذ تصمیم گردد.

توجه ۶) به n تعداد نمونه می گویند.

به H_0 فرضیه صفر یا فرضیه عدم تفاوت یا فرضیه خنثی گفته می شود.

به H_1 فرضیه تفاوت گفته می شود.

توجه ۷) فرضیه آماری، گزاره یا گمانی است که درباره قوانین توزیع کمیت های تصادفی و یا پارامترهای آن بیان می شود.

توجه ۸) آزمون آماری، قانون یا دستوری است که بر طبق آن بر اساس مشاهدات انجام شده، تصمیم به رد یا قبول فرضیه مورد نظر گرفته می شود.

توجه ۹) در آزمون آماری دو فرض ا ست، یکی فر ضیه $H_{\circ}$ که همان فر ضیه عدم تفاوت یا فر ضیه خنثی ا ست و دیگری فرض مخالف یا همان H_1 می باشد.

(μ) میانگین حقیقی جامعه و ($\mu_{\circ}$) میانگین فرضی جامعه است.

$H_{\circ}: \mu = \mu_{\circ}$ $H_{\circ}: \mu \leq \mu_{\circ}$ $H_{\circ}: \mu \geq \mu_{\circ}$

$H_1: \mu \neq \mu_{\circ}$ $H_1: \mu > \mu_{\circ}$ $H_1: \mu < \mu_{\circ}$

توجه ۱۰) ســـطح احتمال با ســـطح معنادار بودن: در مورد ملاک های آزمون، احتمال متناظر با حوادثی که در شـــرایط مورد برر سی وقوع آن ها غیر ممکن فرض شده ا ست، سطح احتمال و یا سطح معنادار بودن نامیده و آن را با $\propto$ نشان می دهیم و بسته به نوع مسأله و آزمون $\propto$ دارد. خطای مجاز می توانید ۰،۰۵، ۰،۰۱ و ... باشد.

توجه ۱۱) ناحیه پذیرش یا ناحیه مقادیر مجاز: مقادیری از ملاک آزمون که در ناحیه بحرانی قرار نمی گیرد را ناحیه پذیرش یا ناحیه مقادیر مجاز می گویند.

توجه ۱۲) این مسأله ای که در بالا گفتیم مربوط می شود به آزمون دو طرفه یا آزمون دو دامنه.

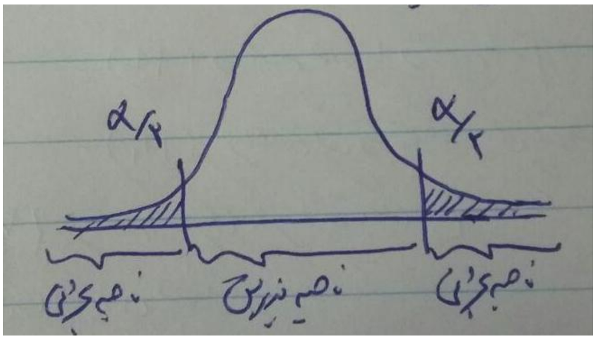
توجه ۱۳) آزمون دوطرفه یا دو دامنه: اگر برای یک ملاک آزمون، ناحیه بحرانی در طرفین فاصـــله اعتماد (اطمینان) تشـــکیل گردد، آزمون را دوطرفه یا دو دامنه می گوییم.

توجه ۱۴) در آزمون های دو طرفه، فرضیه های آماری، $H_{\circ}$ و H_1 بصورت زیر تعریف می شوند.

$H_{\circ}$ $: \mu = \mu_{\circ}$

راه تشخیص آزمون دو طرفه $: \mu \neq \mu_{\circ}$

توجه ۱۵) سطح احتمال $\propto$ در طرفین بصورت شکل زیر است.



شکل ۱: سطح احتمال آلفا در طرفین

توجه ۱۶) ناحیه بحرانی در آزمون های دو دامنه بصورت زیر است:

$$W\ (Z < -Z_{1-\frac{\propto}{2}}, \infty\ Or\ Z > Z_{1-\frac{\propto}{2}}, \infty) \quad Or \quad W\ (T < -T_{1-\frac{\propto}{2}}, n-1\ Or\ T > T_{1-\frac{\propto}{2}}, n-1)$$

توجه ۱۷) آماره آزمون را بنویسید.

میانگین فرضی

میانگین نمونه

$$Q_c = \frac{\bar{x}-\mu_\circ}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad Or \quad Q_c = \frac{\bar{x}-\mu_\circ}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$$

مقدار عددی ملاک آزمون

انحراف معیر نمونه

انحراف معیار جامعه

تعداد نمونه

توجه ۱۸) چگونگی قضاوت:

اگر Q_c عضو ناحیه بحرانی باشد فرض H_1 رد نمی شود.

اگر Q_c عضو ناحیه بحرانی نباشد فرض $H_\circ$ رد نمی شود.

توجه ۱۹) خطای نوع اول: **هرگاه فرضیه $H_\circ$ درست باشد و ما آن را رد کنیم** مرتکب خطایی شده ایم که آن را خطای نوع اول یا اشتباه نوع اول نامیده و احتمال این خطا را با $\propto$ نشان می دهیم.

توجه ۲۰) خطای نوع دوم: **هرگاه فرضیه $H_\circ$ درست نباشد و ما آن را بپذیریم** مرتکب خطایی دیگری شده ایم که آن را خطای نوع دوم یا اشتباه نوع دوم نامیده و احتمال این خطا را با β نشان می دهیم.

برای حل مسأله:

$H_\circ: \mu = \mu_\circ = 12$

$H_1: \mu \neq \mu_\circ \neq 12$

چون انحراف معیار جامعه معلوم است از فرمول زیر استفاده می شود:

$$Q_c = \frac{x-\mu_\circ}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \frac{9-12}{\frac{6}{\sqrt{9}}} = -1.5$$

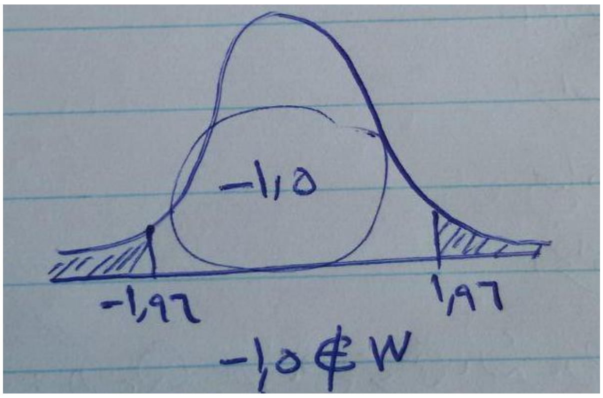
با توجه به فرض H_1 که $\neq 12\mu_\circ$ آزمون دو دامنه است، در آزمون دو دامنه ناحیه بحرانی یا بصورت Z است و یا بصورت T ولی چون در اینجا واریانس یا انحراف معیار جامعه معلوم است در ناحیه بحرانی Z بکار می رود و درجه آزادی ∞ است.

$$W\left(Z < -Z_{1-\frac{\propto}{2},\infty} \text{ یا } Z > Z_{1-\frac{\propto}{2},\infty}\right)$$

چون دو دامنه است و انحراف معیار جامعه معلوم است.

$$Z_{1-\frac{\propto}{2},\infty} = Z_{1-\frac{0.05}{2},\infty} = Z_{1-0.25,\infty} = Z_{0.975,\infty} = 1.96$$

$$W\left(Z < -1.96 \text{ یا } Z > 1.96\right)$$



تصمیم آماری: چون Q_c عضو ناحیه بحرانی نیست فرض H_0 رد نمی شود. $Q_c W \in$

بدین ترتیب ادعای کارخانه ســـازنده رد نمی شــود. یعنی میانگین کاهش وزن ترکیب جدید بر اســـاس این نمونه تا بررســـی مجددی صورت نگرفته است را می توان برابر ***12 kg*** گرفت. یعنی رضایت موسسه را تأمین می کند.

آزمون یک طرفه راست

توجه ۲۱) اگر برای یک ملاک آزمون ناحیه بحرانی در طرف راســت فاصــله اعتماد تشــکیل گردد، آزمون را یک طرفه یا یک دامنه راست می گویند.

توجه ۲۲) در آزمون یک طرف راست یا یک دامنه راست فرضیه های آماری به شرح ذیل است:

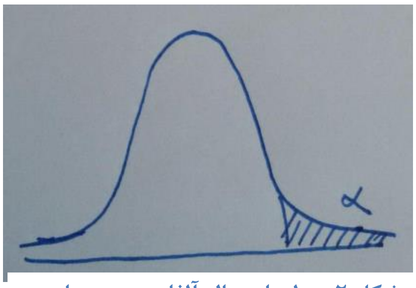
$H_\circ: \mu \le \mu_\circ$

$H_1: \mu > \mu_\circ$ **راه تشخیص یک طرف راست**

توجه ۲۳) آماره آزمون

$$Q_c = \frac{\bar{x}-\mu_\circ}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad \text{یا} \quad Q_c = \frac{\bar{x}-\mu_\circ}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$$

توجه ۲۴) سطح احتمال ∝ در سمت راست به شرح ذیل است:



شکل ۲: سطح احتمال آلفا در سمت راست

توجه ۲۵) ناحیه بحرانی

$$W(Z > Z_{1-\propto,\infty})$$

$$T(T > T_{1-\propto,n-1})$$

توجه ۲۶) چگونگی قضاوت:

$Q_c\ W\in \Longrightarrow$ **فرض H_1 رد نمی شود.**

$Q_c\ \not{W}\in \Longrightarrow$ **فرض H_0 رد نمی شود.**

م سأله ۲) فرض می کنیم قد زنان در سنین بین ۱۸ تا ۲۹ سال دارای توزیع نرمال با متو سط 160cm و انحراف معیار $\delta = 5cm$ با شد. یک نمونه به حجم $n = 36$ نفر از دانشجویان دختر دانشگاه آزاد ا سلامی را به تصادف انتخاب کردیم که متوسط قد آنان $\bar{x}$162cm= بدست آمد. آیا می توان گفت که قد کلیه دانشجویان دختر دانشگاه آزاد اسلامی از متوسط قد زنان در جامعه ایران بیشتر است.

$H_\circ : \mu \leq \mu_\circ = 160$

$H_1 : \mu > \mu_\circ = 160$

$$Q_c = \frac{x - \mu_\circ}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \frac{162 - 160}{\frac{5}{\sqrt{36}}} = 2.4$$

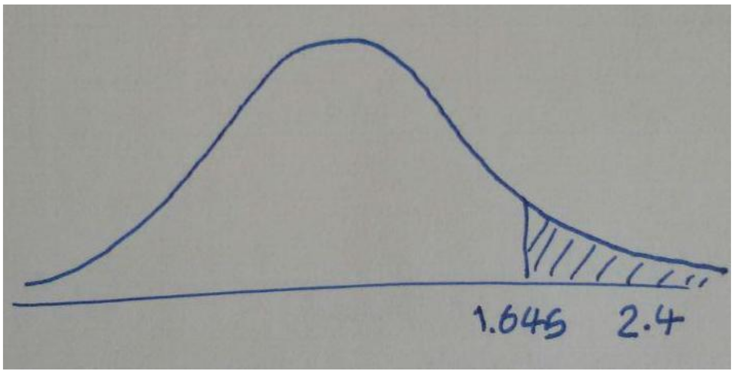
هر وقت دیدید انحراف معیار جامع (δ) یا واریانس جامعه (S) معلوم است در ناحیه بحرانی (Z) بکار می رود و درجه آزادی (∞) است.

$$W(Z < Z_{1-\alpha,\infty})$$

$$W(Z < Z_{1-0.05,\infty})$$

$$Z_{1-0.05,\infty} = Z_{0.95,\infty} = 1.645$$

فرض $H_\circ$ رد می شود یعنی می گوییم که میانگین قد دانشجویان دختر از میانگین قد زنان ایران بیشتر است.



آزمون یک طرفه چپ

اگر برای ملاک آزمون ناحیه بحرانی در طرف چپ فاصله اعتماد تشکیل گردد، آزمون یک طرفه یا یک دامنه طرف چپ می گوییم.

توجه ۲۷) فرضیه های آماری در آزمون یک طرفه چپ به شرح ذیل است.

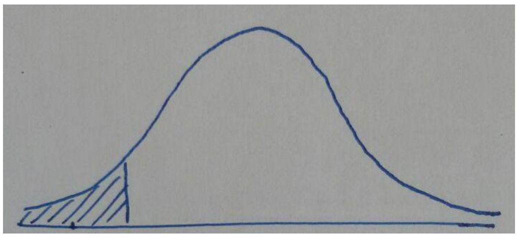
$H_\circ: \mu \geq \mu_\circ$

$H_1: \mu < \mu_\circ$ **راه تشخیص یک طرف چپ**

توجه ۲۸) آماره آزمون

$$Q_c = \frac{\bar{x}-\mu_\circ}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad \text{یا} \quad Q_c = \frac{\bar{x}-\mu_\circ}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$$

توجه ۲۹) سطح احتمال $\propto$ در سمت چپ قرار دارد.



شکل ۳: سطح احتمال آلفا در چپ

توجه ۳۰) ناحیه بحرانی در آزمون یک طرفه چپ به شرح ذیل می باشد.

$$W\left(Z < -Z_{1-\propto,\infty}\right)$$

$$T\left(T < -T_{1-\propto,n-1}\right)$$

چگونگی قضاوت:

$Q_c\ W\in \Longrightarrow$ فرض H_1 رد نمی شود.

$Q_c\ \cancel{W}\in \Longrightarrow$ فرض H_0 رد نمی شود.

م سأله ۳) نمرات درس آمار داذ شجویان ر شته مدیریت و ح سابداری داذ شگاه با یک روش امتحان دارای توزیع نرمال با 13= $\mu_\circ$ و $\delta^2 = 25$ بوده ا ست. در ترم گذ شته در روش امتحان تغییراتی داده شده ا ست. با این روش جد ید، متوســـط نمرات $n = 49$ و $\bar{x}$=12 بدســـت آ مد. آ یا می توان گفت که با روش جد ید، میانگین نمرات دانشجویان کمتر می شود. آزمون را در سطح احتمال 0.05 =∝ انجام دهید.

$H_\circ : \mu \geq \mu_\circ = 13$

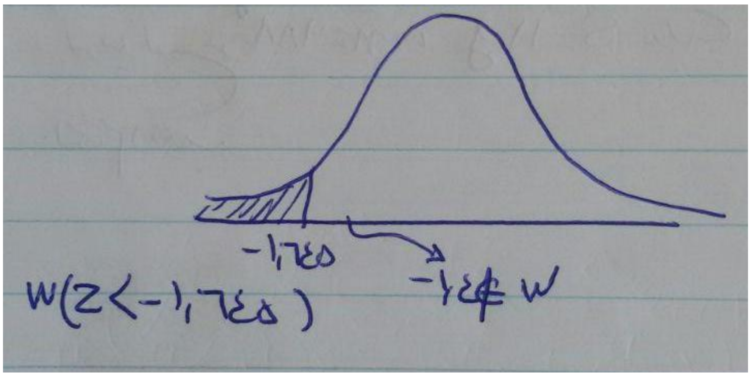
$H_1 : \mu < \mu_\circ = 13$

$$Q_c = \frac{x - \mu_\circ}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \frac{12 - 13}{\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}} = -1.4$$

از Z استفاده می شود چراکه δ معلوم است.

$$W\left(Z < -Z_{1-\propto,\infty}\right)$$

$$-Z_{1-\propto,\infty} = -Z_{1-0.05,\infty} = -Z_{0.95,\infty} = -1.645$$

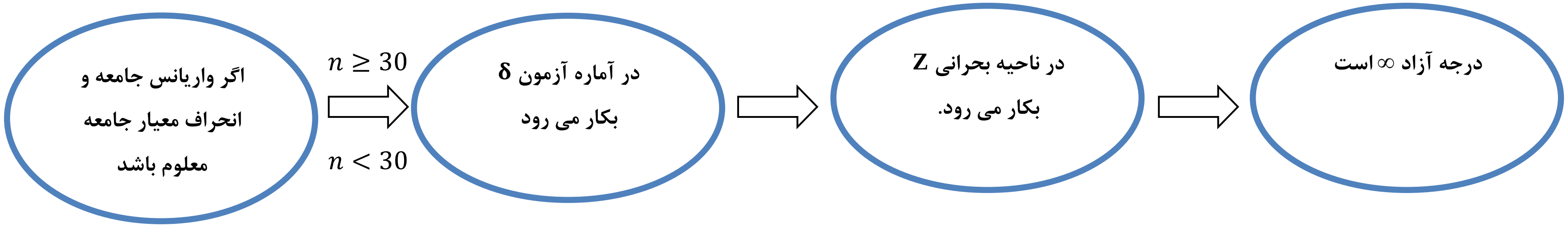


توجه ۳۱) چگونگی قضاوت

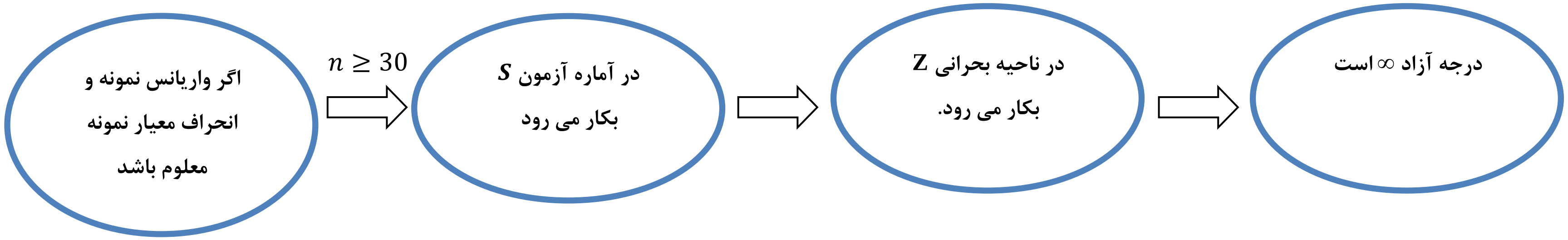
$Q_c \notin W \Longrightarrow$ **فرض H_0 رد نمی شود.**

چون Q_c عضو ناحیه بحرانی نیست فرض $H_\circ$ رد نمی شود یعنی با روش جدید امتحان دیگری به عمل نیامده است، فرضیه یکسان بودن میانگین نمرات درس آمار دانشجویان رشته مدیریت و حسابداری را با این روش می پذیریم.

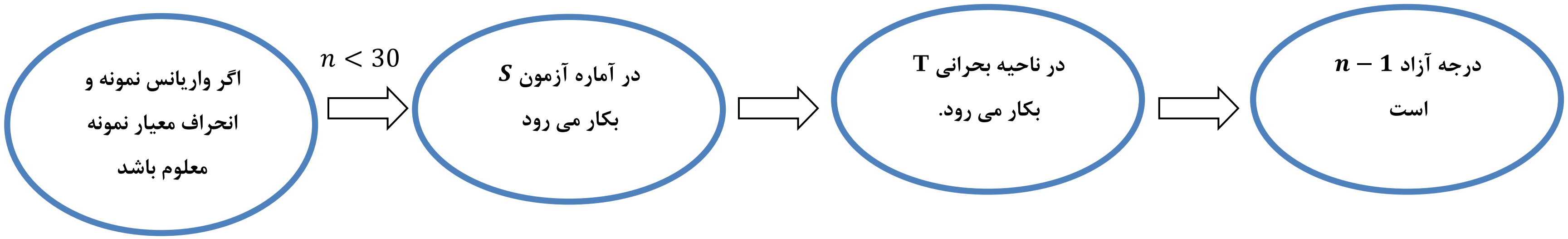
توجه بسیار مهم ۳۲)



توجه بسیار مهم ۳۳)



توجه بسیار مهم ۳۳)



مسأله ۴) کارخانه شیر پا ستوریزه، ما ست را در پاکت های *1kg* تو سط د ستگاه خودکار پر می شود عر ضه می کند و ادعا دارد که وزن خالص این پاکت ها کمتر از *1000 g* است. به منظور آزمون صحت ادعای کارخانه، نمونه ای به حجم *n=9* پاکت را انتخاب کرده ایم که میانیگین نمونه $\bar{x}$*kg 988 =* و $S = 12g$ بد ست آمد. آزمون در سطح احتمال $\propto = 0.01$ انجام دهید.

$H_\circ : \mu \geq \mu_\circ = 1000$

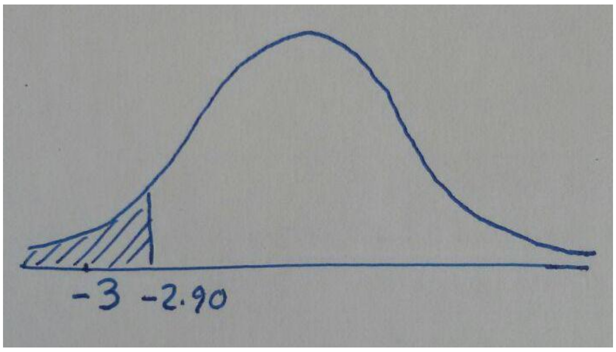
$H_1 : \mu < \mu_\circ = 1000$

$$Q_c = \frac{\bar{x} - \mu_\circ}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{988 - 1000}{\frac{12}{\sqrt{9}}} = \frac{-12}{\frac{12}{3}} = \mathbf{-3}$$

$$T\left(T < -T_{1-\propto,n-1}\right)$$

$$-T_{1-\propto,n-1} = -T_{1-0.01,9-1} = -T_{0.99,8} = \mathbf{-2.90}$$

$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{T} < -2.\mathbf{90})$$



فرض H_1 رد نمی شود. پس فرض H_0 رد می شود یعنی نمی توان ادعای کارخانه را پذیرفت.

آزمون های علامت

مسأله ۱) داده های زیر میزان بدهی های جاری شرکتی بر حسب میلیون تومان در انتهای چهل ماه مختلف است که با توجه به ترازهای آزمایشی بدست آمده است.

۳۵	۴۰	۳۹	۴۶	۲۸	۴۵	۵۶	۳۶	۵۰	۳۹
۵۱	۲۷	۳۷	۵۲	۶۰	۳۵	۷۰	۴۲	۸۰	۳۱
۳۵	۳۷	۴۲	۳۰	۳۷	۴۲	۵۲	۶۱	۵۴	۶۱
۳۶	۳۴	۵۰	۴۵	۵۲	۶۰	۵۵	۳۹	۳۲	۴۲

بانک ادعا می کند که میانگین بدهی های جاری شرکت بیش از ۳۸ میلیون تومان ا ست. با آزمون علامت[۲]، صحت ادعای بانک را در سطح معنا داری *0.05* با فرض اینکه جامعه غیر نرمال است، آزمون کنید.

توجه۱) اگر n بزرگ باشد توزیع نرمال، تقریب خوبی برای دوجمله ای است و به جدول Z نیاز داریم.

توجه ۲) برای نمونه های زیاد، $nq > 5$ و $np > 5$ باشد، می توان به جای توزیع دوجمله ای از توزیع تقریباً نرمال استفاده نمود.

توجه۳) در تقریب نرمال، آماره آزمون از فرمول زیر بدست می آید که تقریباً توزیع نرمال استاندارد را دارد.

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

Z: واحد استاندارد

x: تعداد علامت های مثبت

n: تعداد علامت های مثبت و منفی

p: احتمال وقوع

q: احتمال عدم وقوع

توجه۴: فرض های آماری را می نویسیم.

$H_0: \mu \leq 38$

$H_1: \mu > 38$

توجه ۵: n تعداد علامت های + و - است که در اینجا برابر ۴۰ است.

توجه ۶: x تعداد علامت های + است و آن برابر ۲۶ است.

توجه ۷: برای اینکه تشخیص دهیم توزیع تقریباً نرمال است یا نه np را تشکیل می دهیم.

$$np = 40 * \frac{1}{2} = 20 > 5$$

[۲] آزمون علامت جزو ناپارامتریک هاست.

$$Z=\frac{x-np}{\sqrt{npq}}=\frac{26-(40*\frac{1}{2})}{\sqrt{40*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}}}=1.89$$

توجه ۸) چون فرض $H_1: \mu > 38$ آزمون یک دامنه راست است. پس $Z_{1-\alpha,\infty}$ را پیدا می کنیم.

$Z_{1-\alpha,\infty}=Z_{1-0.05,\infty}=Z_{0.95,\infty}=1.645$

$1.89>1.645 \Longrightarrow$ فرض صفر مردود است، بنابراین می توان گفت که میانگین بدهی های جاری شرکت بیشتر از ۳۸ میلیون تومان است.

م سأله ۲) ادعا می شود که درجه اکتان نوع بنزین کمتر از ۱۹۸,۵ ست. با توجه به نمونه ۱۵ تایی زیر آزمون کنید که آیا در سطح معناداری *0.05* با فرض اینکه جامعه غیرنرمال است می توان ادعای فوق را پذیرفت؟

۹۴,۹	۹۸,۵	۹۸,۲	۹۷,۶	۹۶,۱	۹۹,۱	۹۳,۲	۹۵,۳	۱۰۰,۳	۹۷,۴	۹۶,۸	۹۶	۹۷,۳	۹۵,۲	۹۷,۵
–		–	–	–	+	–	–	+	–	–	–	–	–	–

توجه ۱) برای حل این مسأله از آزمون علامت یک نمونه ای استفاده می کنیم.

توجه ۲) آزمون علامت یک نمونه ای زمانی بکار می رود که می خواهیم از جامعه متقارن پیوســـته ای نمونه بگیریم، بطوریکه احتمال اینکه عددی کوچکتر از میانگین و یا بزرگ تر از آن باشد $\frac{1}{2}$ است.

توجه ۳) در آزمون علامت یک نمونه ای صـحت فرض را که به آن فرض صــفر می گوییم و μ میانگین حقیقی جامعه اســت، با توجه به نمونه n تایی آزمون می کنیم.

توجه ۴) برای اجرای آزمون از عملیات زیر استفاده می کنیم.

مقادیر نمونه را از میانگین مورد ادعا کم می کنیم. اگر تفاضل مثبت بود علامت + و اگر منفی بود علامت – می نویسیم. اگر تفاضل صفر باشد، آن نمونه را حذف می کنیم.

هر نمونه 1/2 شانس دارد تا به آن علامت + داده شود.

$H_0: \mu \geq \mu_0 = 98.5$

$H_1: \mu < \mu_0 = 98.5$

$x=2$

$n=14$

توجه ۵) n برابر ۱۴ است زیرا در بین نمونه، یکی از نمونه ها برابر ۹۸,۵ بوده و حذف می شود.

توجه ۶) هر عدد نمونه بزرگ تر از ۹۸,۵ را با علامت (+) و هر عدد نمونه کوچکتر از ۹۸,۵ را با علامت (-) نشـــان می دهیم. در نمونه، عددی پیدا می شود که برابر ۹۸,۵ است و آن را حذف می کنیم.

توجه ۷) $p=1/2$ اســت. اگر تعداد نمونه کم باشــد برای آزمون فرض، به جدول احتمال های دو جمله ای یعنی جدول ۷ مراجعه می کنیم.

مقدار بحرانی را برابر C می گیریم. این مقدار بحرانی را از جدول احتمال های تجمعی دو جمله ای (جدول ۷) پیدا می کنیم.

توجه۸) می دانیم $n=14$ و $p=1/2=0.05$ اسـت. حال دنبال عددی برای C می گردیم که $P(x \leq C) = 0.05$ باشـد. بنابراین نزدیک ترین مقدار کوچکتر یا مساوی ۰,۰۵ مقدار ۰,۰۲۹ است که متناظر با $C=3$ می باشد. پس:

$$C_{\alpha,n,p} = C_{0.05,14,\frac{1}{2}} = 3$$

توجه ۹) اگر $x \leq C$ باشد، فرض صفر رد می شود.

توجه ۱۰) اگر $x > C$ باشد، فرض صفر تأیید می شود.

توجه ۱۱) در این مسأله چون $x = 2 < C_{0.05,14,\frac{1}{2}} = 3$ است، بنابراین در ناحیه بحرانی قرار گرفته و فرض صفر رد می شود. از این طریق می توان ادعا کرد که میانگین اکتان بنزین مورد نظر کمتر از 98.5 است.

مسأله ۳) داده های زیر درجه رضایت شغلی ۱۰ نفر از کارکنان سازمانی را قبل و بعد از یک سیستم مدیریتی جدید نشان می دهد. آیا در سطح معنادار *0.05* می توان ادعا کرد که سیستم تشویقی موثر بوده است؟

۴۵	۶۸	۸۵	۵۹	۵۰	۷۵	۶۹	۷۴	۷۱	۷۰	قبل از سیستم مدیریتی جدید
۴۵	۸۷	۶۹	۵۸	۶۴	۸۰	۷۵	۷۰	۶۸	۷۵	بعد از سیستم مدیریتی جدید
	−	+	+	−	−	−	−	+	−	علامت

توجه ۱) برای داده های زوجی می توان از آزمون علامت استفاده کرد. به همین جهت نام این آزمون، آزمون علامت زوج نمونه ای است.

توجه ۲) فرضیه های آماری را می نویسیم.

$$H_0: \mu_2 \leq \mu_1$$

$$H_1: \mu_2 > \mu_1$$

توجه ۳) در آزمون علامت زوج نمونه ای عملیات زیر را انجام می دهیم.

اول هر زوج را در نظر می گیریم، اگر مقدار اولی بیشتر از دومی با شد، علامت + و اگر کمتر با شد علامت − و اگر دو مقدار برابر با شند، آنها را کنار می گذاریم.

توجه ۴) پس از عملیات این آزمون را مثل آزمون علامت یک نمونه ای انجام می دهیم.

توجه ۵) اگر حجم نمونه کم باشد، از جدول توزیع دو جمله ای (جدول احتمال های تجمعی دو جمله ای) استفاده می کنیم.

توجه ۶) اگر حجم نمونه زیاد باشد یعنی $nq > 5$ و $np > 5$ باشد، از جدول توزیع نرمال استاندارد (Z) استفاده می کنیم.

n=9   p=1/2   np=4.5<5   x= 4

$$C_{\alpha,n,p} = C_{0.05,9,\frac{1}{2}} = 1$$

توجه ۷) اگر $x \leq C$ باشد، فرض صفر رد می شود.

توجه ۸) اگر $x > C$ باشد، فرض صفر تأیید می شود.

پس سیستم مدیریت جدید باعث افزایش رضایت شغلی نشده است.

مسأله ۴) این داده ها ارزیابی دو ارزیاب از میزان موفقیت ۲۰ کارمند شرکتی در مقیاس ۱ تا ۱۳۰ ست. در سطح معنادار 0.05 با استفاده از آزمون علامت زوج نمونه ای آزمون کنید که آیا تفاوتی بین ارزیابی دو ارزیاب وجود دارد یا نه؟ (فرض کنید جامعه غیر نرمال است).

ارزیابی ارزیاب اول	۲۸	۲۵	۱۹	۱۷	۲۰	۱۹	۲۲	۳۰	۲۵	۱۷	۲۳	۲۶	۱۵	۲۰	۲۸	۲۱	۲۸	۲۷	۲۴	۲۵
ارزیابی ارزیاب دوم	۲۳	۲۵	۱۲	۱۵	۲۳	۱۹	۱۸	۲۷	۲۲	۲۰	۲۱	۲۶	۱۷	۱۵	۲۴	۲۳	۲۶	۲۲	۲۱	۲۷
علامت	+		+	+	−		+	+	+	−	+		−	+	+	−	+	+	+	−

توجه۱) آزمون علامت مشکلاتی دارد، زیرا آزمون علامت ساده است ولی چون مقادیر کمتر یا بیشتر از μ_0 با علامت + و − نشان داده می شود و تنها از آن ها در آزمون استفاده می کنند، باعث از دست دادن میزان قابل ملاحظه ای از اطلاعات می شود.

توجه ۲) فرضیه های آماری را می نویسیم.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

توجه ۳) علامت های را مشخص می کنیم.

x=12   n= 17   np=17*1/2=8.5>5

$$Z=\frac{x-np}{\sqrt{npq}}=\frac{12-(17*\frac{1}{2})}{\sqrt{17*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}}}=1.698$$

توجه ۴) چون توزیع تقریباً نرمال است و آزمون دو دامنه است.

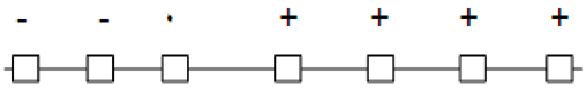
$$Z_{1-\frac{\alpha}{2},\infty}=Z_{0.975,\infty}=\pm 1.96$$

توجه ۵) چون $-1.96<1.698<+1.96$ فرض H_0 تأیید می شود. بنابراین ارزیابی دو ارزیاب یکسان است.

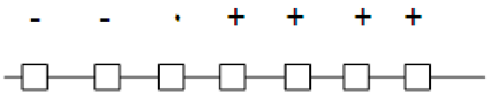
مسأله ۵) داده های زیر مربوط به وزن ۱۵ نفر، قبل و بعد از رژیم غذایی خاص است. با بکارگیری آزمون رتبه علامت دار در سطح معنادار 0.05، آیا می توان گفت رژیم غذایی در کاهش وزن موثر بوده است؟

قبل از رژیم غذایی	۱۱۰٫۱	۱۰۰٫۱	۱۰۵٫۴	۸۸٫۱	۸۹٫۶	۸۰٫۱	۹۰٫۵	۸۸٫۱	۹۳	۱۰۴٫۸	۹۵	۹۸٫۳	۸۶٫۳	۹۵٫۲	۸۳٫۱
بعد از رژیم غذایی	۱۲۱٫۷	۹۹٫۲	۱۰۰٫۱	۷۸	۶۹	۷۳٫۵	۸۹٫۱	۸۰٫۳	۹۱٫۱	۱۰۵٫۱	۸۹٫۱	۹۱٫۴	۹۴٫۵	۸۸٫۴	۷۸٫۱

دو شکل الف و ب را به شرح ذیل مقایسه می کنیم.



شکل ب



شکل الف

توجه ۱) این دو شکل از تفاضل های زوجی با تعداد علامت های مثبت مساوی ولی توزیع های مختلف تشکیل شده است. دو مجموعه تفاضل زوجی را که در شکل الف و ب بصورت مربع بر روی محور اعداد رسم شده است به شرح ذیل با هم مقایسه می کنیم. در هر دو حالت الف و ب، n=6 است.

در حالت ب انتقال بیشتر توزیع ها به سمت راست است. زیرا تفاضل مثبت بیش از تفاضل های منفی از صفر دور هستند.

توجه ۲) کاری که آزمون رتبه علامت دار می کند، این است که وزن های بیشتر را به علامت هایی می دهد که از صفر دور هستند.

توجه ۳) در آزمون رتبه علامت دار از تفاضل های زوجی بر حسب قدر مطلق مقادیر شان مرتب می شوند. تفاضل های صفر را باز هم کنار می گذاریم و اگر قدر مطلق دو یا چند تفاضل یکسان باشد به هر یک از آن ها میانگین رتبه هایی را که توأمان اشغال می کنند، تخصیص می دهیم.

توجه ۴) برای تشکیل آماره آزمون T^+ رتبه های مربوط به مشاهدات (+) را با هم جمع می کنیم.

توجه ۵) فرضیات مسأله را می نویسیم.

$H_{\circ}: \mu_1 \leq \mu_2$

$H_1: \mu_1 > \mu_2$

فرضیه صفر را اینگونه معنا می کنیم که رژیم غذایی در کاهش وزن موثر نبوده است.

H_1 را اینگونه معنا می کنیم که رژیم غذایی در کاهش وزن موثر بوده است.

توجه ۶) تفاضل های زوجی را پیدا می کنیم.

توجه ۷) مقادیر مطلق مرتب شده را می نویسیم.

قبل از رژیم غذایی	۸۳,۱	۹۵,۲	۸۶,۳	۹۸,۳	۹۵	۱۰۴,۸	۹۳	۸۸,۱	۹۰,۵	۸۰,۱	۸۹,۶	۸۸,۱	۱۰۵,۴	۱۰۰,۱	۱۱۰,۱
بعد از رژیم غذایی	۷۸,۱	۸۸,۴	۹۴,۵	۹۱,۴	۸۹,۱	۱۰۵,۱	۹۱,۱	۸۰,۳	۸۹,۱	۷۳,۵	۶۹	۷۸	۱۰۰,۱	۹۹,۲	۱۲۱,۷
تفاضل های زوجی	۵	۶,۸	-۸,۲	۶,۹	۵,۹	-۰,۳	۱,۹	۷,۸	۱,۴	۶,۶	۲۰,۶	۱۰,۱	۵,۳	۰,۹	-۱۱,۶
مقادیر مطلق مرتب شده	۰,۳	۰,۹	۱,۴	۱,۹	۵	۵,۳	۵,۹	۶,۶	۶,۸	۶,۹	۷,۸	۸,۲	۱۰,۱	۱۱,۶	۲۰,۶
رتبه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
علامت	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-	+

توجه ۸) مجموعه رتبه های تفاضل های (+) را با T^+ نمایش می دهیم.

$$T^+ = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 13 + 14 = 93$$

توجه ۹) برای مقادیر بزرگ n؛ $n \geq 15$ توزیع T^+ تقریباً نرمال است.

توجه ۱۰) برای انجام آزمون نیاز به امید ریاضی و واریانس T^+ داریم که عبارتند از:

$$E(T^+) = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{15(15+1)}{4} = 60$$

$$V(T^+) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} = 310$$

N=15$\geq$ 15

$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$Z_{1-\alpha,\infty}$= $Z_{1-0.05,\infty}$= $Z_{0.95,\infty}$= 1.645

$$Z = \frac{T^+ - E(T^+)}{\sqrt{V(T^+)}} = \frac{93 - 60}{\sqrt{310}} = 1.874$$

توجه ۱۱) چون Z محاسبه شده مساوی ۱,۸۷۴ و بزرگ تر از Z جدول است، فرض صفر رد می شود و می توان گفت رژیم غذایی در کاهش وزن افراد موثر بوده است.

مسأله ۶) ارزیابی دو ارزیاب در مقیاس ۰ تا ۲۰ از عملکرد ۲۰ نفر از کارکنان سازمانی را انتخاب کرده ایم که به این صورت بوده است.

ارزیاب ۱	۱۱	۱۵	۱۹	۱۱	۱۲	۱۵	۱۷	۱۶	۱۸	۱۳	۱۷	۱۴	۱۲	۱۸	۱۷	۱۴	۱۵	۱۳	۱۹	۱۸
ارزیاب ۲	۱۳	۱۲	۱۴	۱۱	۱۰	۱۷	۱۳	۱۶	۱۳	۱۳	۱۹	۱۲	۱۵	۱۵	۱۴	۱۰	۱۸	۱۱	۱۲	۱۳

با استفاده از آزمون رتبه علامت دار معین کنید که آیا در سطح معنادار 0.05 میانگین ارزیابی این دو ارزیاب با هم متفاوت است یا نه؟

توجه ۱) اگر قدر مطلق ۲ یا چند تفاضل یکسان باشند به هر یک از میانگین رتبه هایی را که توأمان اشغال می کنند، تخصیص می دهیم.

توجه ۲) فرض کنید که قدر مطلق تفاضل سومین و چهارمین مشاهده برابر باشد، در این صورت هر یک از آن ها $3.5 = \frac{3+4}{2}$ خواهد بود.

توجه ۳) اگر قدر مطلق تفاضل هشتمین، نهمین و دهمین مشاهده برابر باشد، آنگاه رتبه هر یک از آن ها $9 = \frac{8+9+10}{3}$ است.

توجه ۴) فرضیه های آماری این مسأله را می نویسیم.

$$H_\circ: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

توجه ۵) از آنجاییکه سه رقم یکسان داریم، $n=17$ است.

توجه ۶) تفاضل های زوجی را پیدا می کنیم.

توجه ۷) مقادیر مطلق مرتب شده را می نویسیم.

ارزیاب ۱	۱۱	۱۵	۱۹	۱۱	۱۲	۱۵	۱۷	۱۶	۱۸	۱۳	۱۷	۱۴	۱۲	۱۸	۱۷	۱۴	۱۵	۱۳	۱۹	۱۸
ارزیاب ۲	۱۳	۱۲	۱۴	۱۱	۱۰	۱۷	۱۳	۱۶	۱۳	۱۳	۱۹	۱۲	۱۵	۱۵	۱۴	۱۰	۱۸	۱۱	۱۲	۱۳
تفاضل زوجی	-۲	۳	۵	۰	۲	-۲	۴	۰	۵	۰	-۲	۲	-۳	۳	۳	۴	-۳	۲	۷	۵
مقادیر مطلق مرتب شده	۷	۵	۵		۵	۴	۴		۳		۳	۳	۳	۳	۲	۲	۲	۲	۲	۲
	۱۷	۱۶	۱۵		۱۴	۱۳	۱۲		۱۱		۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
رتبه	۱۷	۱۵	۱۵		۱۵	۱۲,۵	۱۲,۵		۹		۹	۹	۹	۹	۳,۵	۳,۵	۳,۵	۳,۵	۳,۵	۳,۵
علامت	+	+	+		+	+	+		+		−	+	+	−	−	+	−	−	+	+

توجه ۸) چون $n = 17 > 15$ است، توزیع تقریباً نرمال است.

$$E(T^+) = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{17(17+1)}{4} = 76.5$$

$$V(T^+) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} = \frac{17(17+1)(2(17)+1)}{24} = 446.25$$

$$Z = \frac{T^+ - E(T^+)}{\sqrt{V(T^+)}} = \frac{124.5 - 76.5}{\sqrt{446.25}} = 2.72$$

توجه ۹) چون $n = 17 > 15$ است، توزیع تقریباً نرمال است و چون با توجه به فرض $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ آزمون دو دامنه است پس:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2},\infty} = Z_{1-0.0.25,\infty} = Z_{0.975,\infty} = \pm 1.96$$

توجه ۱۰) چون Z محاسبه شده بین ± 1.96 قرار نمی گیرد، فرض صفر تأیید نمی شود. بنابراین ارزیابی این دو ارزیاب یکسان نیست.

استقلال و غیر استقلال

مســـأ له ۱) از دو جمع یت مختلف x و y هر کدام یک نمو نه دو تایی انت خاب نموده و ا ندازه کمی آن ها را تعیین کرده ایم. میانگین و واریانس مجموع و تفاضل x و y را در دو حالت زیر حساب کنید.

الف) وقتی x و y از هم مستقل هستند.

ب) وقتی که x و y طبق رابطه y=x+4 به هم بستگی دارند.

$\{x|1,3\}$

$\{y|5,7\}$

الف) وقتی x و y از هم مستقل هستند.

۱) میانگین مجموع وقتی x و y از هم مستقل هستند.

- **روش اول**

$$\mu_x = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$\mu_y = \frac{5+7}{2} = 6$$

$$\mu_{x+y} = \mu_x + \mu_y = 2 + 6 = 8$$

- **روش دوم**

x+y: 1+5, 1+7, 3+5, 3+7

$$\mu_{x+y} = \frac{6+8+8+10}{4} = 8$$

۲) واریانس مجموع وقتی x و y از هم مستقل هستند.

- **روش اول**

$$\delta_x^2 = E_{(x^2)} - \mu_x^2 = \frac{1^2+3^2}{2} - 2^2 = 1$$

$$\delta_y^2 = E_{(y^2)} - \mu_y^2 = \frac{5^2+7^2}{2} - 6^2 = 1$$

$$\delta_{x+y}^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2 = 1 + 1 = 2$$

روش دوم

$$\delta^2_{x+y} = E_{(x+y)^2} - \mu^2_{x+y} = \frac{6^2+8^2+8^2+10^2}{4} - 8^2 = 2$$

۳) میانگین تفاضل وقتی x و y از هم مستقل هستند.

- **روش اول**

$$\mu_{y-x} = \mu_y - \mu_x = 6 - 2 = 4$$

- **روش دوم**

y-x: 5-1, 5-3, 7-1, 7-3

$$\mu_{y-x} = \frac{4+2+6+4}{4} = 4$$

برای مطالعه

$\delta^2_{x+b} = \delta^2_x$؛ این قضـــیه بیانگر این اســـت که اگر به هر یک از مشـــاهدات مقدار ثابتی را اضـــافه کنیم، مقدار واریانس تغییری نمی کند.

$\delta^2_{x-b} = \delta^2_x$؛ این قضیه بیانگر این است که اگر از هر یک از مشاهدات مقدار ثابتی را کم کنیم، مقدار واریانس تغییری نمی کند.

مثال: مشاهدات مقابل فرض شده است؛ $x_i = 2, 4, 6, 8$

الف) واریانس نمونه (S_x^2) را پیدا کنید.

ب) از هر یک از مشاهدات مقدار ثابت ۲ را کم می کنیم و سپس واریانس نمونه را پیدا کنید.

x_i	$(x_i-\bar{x})^2$	Y=$x_i - 2$	$(y_i-\bar{y})^2$
2	$(2-5)^2 = 9$	2-2=0	$(0-3)^2 = 9$
4	$(4-5)^2 = 1$	4-2=2	$(2-3)^2 = 1$
6	$(6-5)^2 = 1$	6-2=4	$(4-3)^2 = 1$
8	$(8-5)^2 = 9$	8-2=6	$(6-3)^2 = 9$
$\sum x_i = 20$	$\sum (x_i-\bar{x})^2 = 20$	$\sum y = 12$	$\sum (y_i-\bar{y})^2 = 20$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{20}{4} = 5 \qquad S_x^2 = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{20}{4-1} = \frac{20}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{12}{4} = 3 \qquad S_x^2 = \frac{\sum (y_i-\bar{y})^2}{n-1} = \frac{20}{4-1} = \frac{20}{3}$$

اثبات ریاضی

$$\delta_x^2 = E_{(x-\mu_x)^2}$$

$$\delta_{x+b}^2 = E_{(x+b-\mu_x)^2} = E_{(x+b-\mu_x-b)^2=\delta_x^2}$$

$\delta_{ax}^2 = a^2\delta_x$ ؛ این قضیه نشان می دهد که اگر هر یک از مشاهدات به مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس به مربع آن ضرب می شود.

۴) واریانس تفاضل وقتی x و y از هم مستقل هستند.

- **روش اول**

$$\delta_{-y}^2 = \delta_{(-1)y}^2 = (-1)^2\delta_y^2 = \delta_y^2$$

$$\delta_{y-x}^2 = \delta_y^2 + \delta_x^2 = 1 + 1 = 2$$

- **روش دوم**

$$\delta_{y-x}^2 = \delta_{(y-x)^2} - \mu_{y-x} = \frac{4^2 + 2^2 + 6^2 + 4^2}{4} - 4^2 = 18 - 16 = 2$$

ب) وقتی که x و y طبق رابطه y=x+4 به هم بستگی دارند.

, y=x+4 x=1, y=5 x=3, y=7{x|1,3}

$$\delta_{x+y}^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2 + 2Cov(x,y)$$

$$\delta_{y-x}^2 = \delta_y^2 + \delta_x^2 - 2Cov(x,y)$$

$$\delta_x^2 = E_{(x^2)} - \mu_x^2 = \frac{1^2 + 3^2}{2} - 2^2 = 1$$

$$\delta_y^2 = E_{(y^2)} - \mu_y^2 = \frac{5^2 + 7^2}{2} - 6^2 = 1$$

$$Cov(x,y) = E_{x,y} - \mu_x\mu_y = \frac{1*5 + 3*7}{2} - 2*6 = 1$$

$$\delta_{x+y}^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2 + 2Cov(x,y) = 1 + 1 + 2*1 = 4$$

$$\delta_{y-x}^2 = \delta_y^2 + \delta_x^2 - 2Cov(x,y) = 1 + 1 - 2*1 = 0$$

اگر $Cov(x,y) = 0$ باشد می گوییم x و y مستقل هستند.

مســـأله ۲) تاســـی را پرتاب می کنیم. فضـــای نمونه $s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ را برای این آزمایش تصـــادفی در نظر بگیرید. کدامیک از توابع زیر تابع احتمال می شوند؟ چرا؟

$$\boldsymbol{P}_{(x)} = \begin{cases} \frac{x^2}{36} & x \in S \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases} \qquad \boldsymbol{P}_{(x)} = \begin{cases} 1 & x = 6 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

x	1	2	3	4	5	6	جمع	نتیجه
$P_{(x)}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2^2}{36}$	$\frac{3^2}{36}$	$\frac{4^2}{36}$	$\frac{5^2}{36}$	$\frac{6^2}{36}$	$\frac{91}{36} \neq 1$	تابع احتمال نیست
x	1	2	3	4	5	6	جمع	نتیجه
$P_{(x)}$	0	0	0	0	0	1	1=1	تابع احتمال است

مسأله ۳) شرکت تولید کننده پودر لباسشویی ادعا دارد که وزن خالص پودر یک نوع بسته بندی 480g می باشد. در ۲۵ جعبه که بصورت تصادفی نمونه گیری شد، میانگین وزن 468g با انحراف معیار 12g بدست آمد. با توجه به اطلاعات فوق در سطح تشخیص $\alpha = 0.05$ می توان نتیجه گرفت که وزن خالص پودر در این نوع بسته بندی 480g ادعایی نیست؟ (با استفاده از آزمون های مختلف تشخیص داده شده است که جامعه نرمال نیست)

توجه اول: فرضیه های آماری را می نویسیم.

$$H_\circ: \mu = 480 = \mu_\circ$$

$$H_1: \mu \neq 480 \neq \mu_\circ$$

توجه ۲:

$$n = 25 \qquad \bar{x} = 468 \qquad S = 12$$

توجه ۳: چون جامعه نرمال نیست و حجم نمونه کوچک است از " چه بی شف " برای اجرای آزمون استفاده می کنیم.

$$K = \frac{\bar{x} - \mu_\circ}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{468 - 480}{\frac{12}{\sqrt{25}}} = -5$$

توجه ۴: آماره آزمون را می نویسیم.

توجه ۵: در " چه بی شف " به جدول نیاز نداریم.

$$K = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{0.05}} = \pm 4.47$$

فرض $H_\circ$ تأیید نمی شود. یعنی وزن خالص پودر در یک نوع بسته بندی 480g نیست.

ضریب چولگی

ضریب چولگی یا SK

مسأله ۱) پس از محاسبات لازم کمیت های زیر بدست آمده است:

$$N = 100$$
$$\sum F_i \mathrm{x_i} = 1200$$
$$\sum F_i x_i^2 = 24400$$
$$\sum F_i (\mathrm{x_i} - \overline{\mathrm{x}})^3 = 133000$$
$$\sum F_i (\mathrm{x_i} - \overline{\mathrm{x}})^4 = 3241000$$

مطلوب است محاسبه میانگین، واریانس، انحراف معیار و ضریب واریانس و ضریب کشیدگی.

$$\overline{\mathrm{x}} = \frac{\sum F_i x_i}{N} = \frac{1200}{100} = 12$$
$$\delta^2 = \frac{1}{N}\left[\sum F_i x_i - \frac{1}{N}\left(\sum F_i x_i\right)^2\right] = \frac{1}{100}\left[\sum 24400 - \frac{1}{100}(1200)^2\right] = 100$$
$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{100} = 10$$
$$\mathrm{c.v} = \frac{100\delta}{\overline{\mathrm{x}}}\% = \frac{100 * 10}{12}\% = 83.33\%$$

کاربرد ضریب واریانس

مثال) خرید کدام لاستیک به صرفه است؟

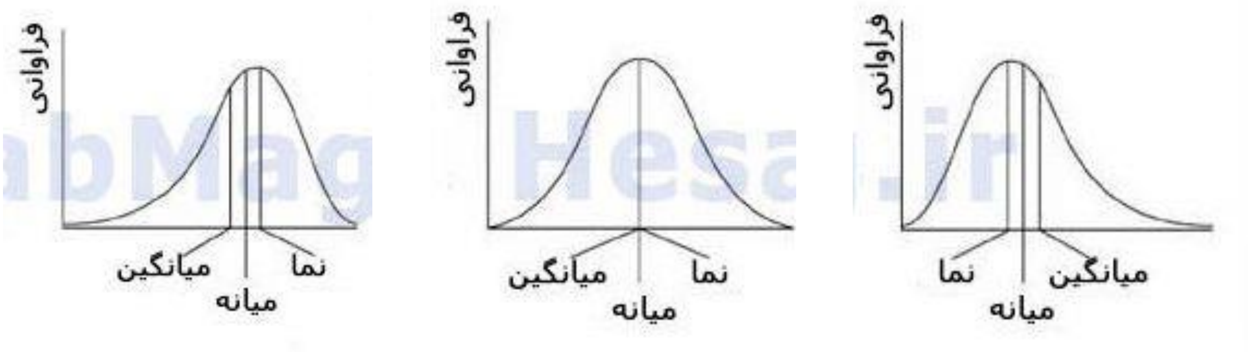
لاستیک نوع A	لاستیک نوع B
$\overline{x_A} = 24000km$	$\overline{x_B} = 23999km$
$\delta_{\mathrm{A}}^2 = 121$	$\delta_{\mathrm{B}}^2 = 100$
$\delta_{\mathrm{A}} = 11$	$\delta_{\mathrm{B}} = 10$
$\mathrm{c.v}_A = \frac{100\delta_{\mathrm{A}}}{\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{A}}}\%$	$\mathrm{c.v}_B = \frac{100\delta_{\mathrm{B}}}{\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{B}}}\%$

محاسبه ضریب چولگی به طریق گشتاور

$$SK = \frac{\mu_3}{\delta^3}$$
$$\mu_3 = \frac{\sum F_i\,(x_i - \overline{x})^3}{\mathrm{N}} = \frac{13300}{100} = 133$$
$$SK = \frac{\mu_3}{\delta^3} = \frac{133}{10^3} = 0.133$$

- اگر $SK > 0$ باشد، جامعه دارای چوله به راست است.
- اگر $SK < 0$ باشد، جامعه دارای چوله به چپ است.
- اگر $|SK| \le 0.1$ باشد، جامعه تقریباً نرمال است.
- اگر $0.1 < |SK| \le 0.5$ باشد، مقدار چولگی زیاد نیست.

- اگر $|SK| > 0.5$ باشد، مقدار چولگی زیاد است.



ضریب کشیدگی

$$E = \frac{\mu_4}{\delta^4} - 3$$

$$\mu_4 = \frac{\sum F_i\,(x_i - \overline{x})^4}{\mathrm{N}} = \frac{3241000}{100} = 32410$$

$$\mathrm{E} = \frac{\mu_4}{\delta^4}\text{-}3 = \frac{3241000}{10^4}\text{-}3 = 0.241$$

$0.1 < |E| = 0.241 \leq 0.5$ مقدار چولگی زیاد نیست.

کاربرد ضریب کشیدگی

اگر ضریب چولگی به طریق گشتاور برابر باشد ولی ضریب چولگی پیرسون شماره ۱ یکسان نباشد سراغ ضریب کشیدگی می رویم.

شرکت A	شرکت B
$\overline{x_A}$	$\overline{x_B}$
δ_A^2	δ_B^2
δ_A	δ_B
SK_A	SK_B
SK_{1_A}	SK_{1_B}

$$SK_1 = \frac{\overline{x} - MO}{\delta}$$

$E_A = 0.241$ $\qquad$ $E_B = -2$

$|E_A| = 0.241$ $\qquad$ $|E_B| = 2$

چون $0.1 < 0.241 \leq 0.5$ باشد، مقدار چولگی زیاد نیست.

چون $2 > 0.5$ باشد، مقدار چولگی زیاد است.

ضریب ،همبستگی رتبه ای (اسپیرمن)

مسأله ۱) داده های زیر مربوط به ضریب هوشی ۱۳ زوج جوان است. ضریب همبستگی رتبه ای را برای آن حساب کنید.

زوج	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
IQ شوهر	95	125	83	86	100	75	99	95	115	88	91	84	104
IQ زن	83	107	78	94	106	70	85	101	106	80	100	82	106

توجه ۱) برای حل مسأله از ضریب همبستگی رتبه ای استفاده می کنیم.

توجه ۲) چون آزمون معنی دار بودن (r) مبتنی بر فرضیه های دست و پا گیری است، بعضی اوقات روش های ناپارامتریک را که مبتنی بر شرایط معمولی تر هستند به جای آن بکار می بریم.

توجه ۳) فرض صفر در این آزمون این است که فرض می کند، همبستگی وجود ندارد.

توجه ۴) ضریب همبستگی رتبه ای را با (r_s) نشان می دهند که ضریب همبستگی رتبه ای اسپیرمن نیز می گویند.

توجه ۵) فرمول ضریب همبستگی رتبه ای به شرح ذیل است:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

توجه ۶) برای محاسبه ضریب همبستگی رتبه ای، اول داده های زوجی را در نظر می گیریم.

$$(x_i, y_i)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, k$$

اول تمام x ها را بر حسب مقادیرشان رتبه می دهیم و همین کار را برای y نیز انجام می دهند. تفاضل بین رتبه ای هر زوج را با (d_i) نشان می دهیم.

توجه ۷) اول xها و yها را رتبه بندی می کنیم و سپس تفاضل آن ها را به توان دوم می رسانیم.

	زوج	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
شوهر	IQ	95	125	83	86	100	75	99	95	115	88	91	84	104
	مرتب شده	75	83	84	86	88	91	95	95	99	100	104	115	125
	رتبه مرتب شده	1	2	3	4	5	6	7.5	7.5	9	10	11	12	13
	رتبه x	7.5	13	2	4	10	1	9	7.5	12	5	6	3	11
زن	IQ	83	107	78	94	106	70	85	101	106	80	100	82	106
	مرتب شده	70	78	80	82	83	85	94	100	101	106	106	106	107
	رتبه مرتب شده	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	11	11	13
	رتبه y	5	13	2	7	11	1	6	9	11	3	8	4	11
d_i	$(x-y)^2$	6.25	0	0	9	1	0	9	2.25	1	4	4	1	0

$$\sum d_i = 37.5$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 * 37.5^2}{13(13^2-1)} = 0.895$$

چون $0 < r_s = 0.895 < +1$ است بین ضریب هوشی شوهران و زنان همبستگی ناقص و مستقیم وجود دارد.

توجه ۸) تعریف همبستگی: اگر تغییر متغیر اول با تغییر متغیر دوم هماهنگ باشد می گوییم، متغیر اول با متغیر دوم همبسته است یا همبستگی دارد. برای اینکه تشخیص دهیم بین سرمایه گذاری و سود سالانه همبستگی وجود دارد یا نه از ضریب استفاده می کنیم بنام ضریب همبستگی.

$$r_s = \frac{SP_x}{\sqrt{SS_x . SS_y}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

$-1 \le r_s \le +1$ عدد همیشگی است که بین ۱+ و ۱- می باشد.

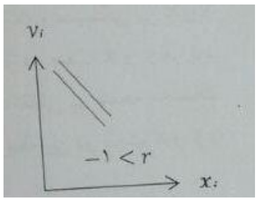
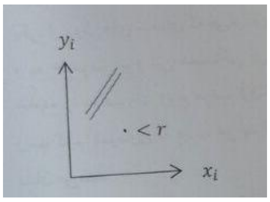
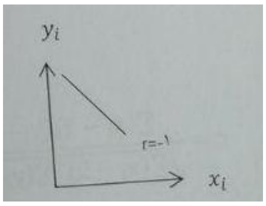
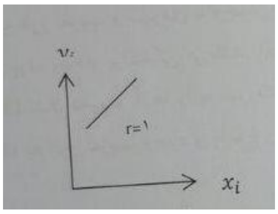
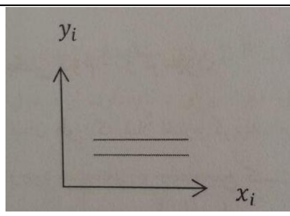
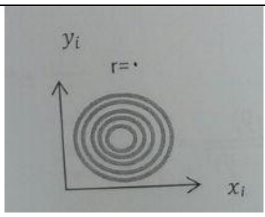
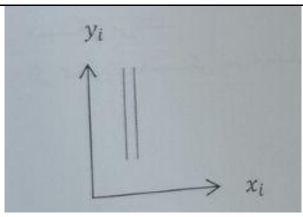
اگر $r_s = +1$ باشد بین x و y همبستگی کامل و مستقیم وجود دارد.

اگر $r_s = -1$ باشد بین x و y همبستگی کامل و معکوس وجود دارد.

اگر $0 < r_s < +1$ باشد بین x و y همبستگی ناقص و مستقیم وجود دارد

اگر $-1 < r_s < 0$ باشد بین x و y همبستگی ناقص و معکوس وجود دارد

اگر $r_s = 0$ باشد بین x و y همبستگی وجود ندارد.

			
بین x و y همبستگی ناقص و معکوس وجود دارد	بین x و y همبستگی ناقص و مستقیم وجود دارد	بین x و y همبستگی کامل و معکوس وجود دارد.	بین x و y همبستگی کامل و مستقیم وجود دارد.
انواع همبستگی			
	بین x و y همبستگی وجود ندارد.	بین x و y همبستگی وجود ندارد.	بین x و y همبستگی وجود ندارد.

آزمون کولموگروف- اسمیرنوف

مسأله ۱) این داده ها مربوط به ورود کشتی ها به اسکله ای برای بارگیری نفت در ۱۴ روز مختلف است. آ یا می توان در سطح معنادار ۰،۰۵ ادعا کرد که توزیع ورودی ها با توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = 2$ همگون (جامعه نرمال) است؟

تعداد روزها	تعداد ورودی ها در هر روز
2	0
4	1
5	2
1	3
0	4
2	5 و بیشتر

توجه ۱) آزمون کولموگروف- اسمینروف، روش ناپارامتری ساده ای برای تعیین ناهمگونی اطلاعات تجربی یا توزیع های آماری است.

توجه ۲) آزمون کولموگروف- اسمینروف را با علامت KS نشان می دهیم.

توجه ۳) علاوه بر کای – مربع (χ^2) برای همگونی یک توزیع فراوانی نظری، برای اطلاعات تجربی از آزمون KS استفاده می کنیم.

توجه ۴) این مسأله ای که در بالا گفته شد، مربوط می شود به آزمون کولموگروف- اسمینروف.

توجه ۵) این آزمون را دو آماردان روسی به نام های ال کولموگروف و ون اسمینروف ابداع کردند.

توجه ۶) برای این مسأله فرضیه های آماری را می نویسیم.

H_0 توزیع مشاهدات با توزیع پواسون با $\lambda = 2$ همگون (نرمال) است.

H_1 توزیع مشاهدات با توزیع پواسون با $\lambda = 2$ همگون (نرمال) نیست.

توجه ۷) KS نسبت به χ^2 مزایایی دارد:

- یکی از مزایای آزمون *KS* این است که هر یک از مشاهدات را بصورت اصلی در نظر می گیرد، در حالیکه در آزمون χ^2 به طبقه بندی مشاهدات پرداخته و بدین جهت مقداری از اطلاعات را از دست می دهد.
- در مواردی که تعداد مشاهدات n ا ست، آزمون *KS* به دلیل دقیق بودن اعمال شدنی ا ست، حال آنکه χ^2 ا سا ساً برای نمونه های بزرگ استفاده می شود.
- آزمون *KS* نسبت به χ^2 از سادگی و سهولت بیشتری برخوردار است.

توجه ۸) χ^2 به KS مزایای زیر را دارد:

- اول اینکه آزمون χ^2 ا به سادگی می توان طوری تغییر داد تا امکان تخمین پارامترها نیز به وسیله مشاهدات میسر شود ولی آزمون KS جنس انعطاف پذیری ندارد.
- آزمون χ^2 را می توان هم در داده های پیوسته و هم گسسته بکار برد، در حالیکه آزمون KS فقط در داده های پیوسته اعمال شدنی هست.

توجه ۹) آماره آزمون KS را با $\mathrm{D_n}$ هم نشان می دهند.

توجه ۱۰) آزمون KS مبتنی بر جدول خاصی است که بصورت جدول شماره ۸ به پیوست آورده شده است. اگر آماره آزمون از مقدار جدول کوچکتر باشد، فرض صفر پذیرفته و در غیر این صورت رد می شود.

توجه ۱۱) آماره آزمون $\mathrm{D_n} = KS = |F_o - F_e|$ حداکثر قدر مطلق تفاضل $F_o - F_e$.

F_o فراوانی مشاهده شده نسبی تجمعی است و F_e فراوانی فراوانی نظری نسبی تجمعی است. در اینجا *Maximum* همان حداکثر است.

توجه۱) یکی از توزیع های مهم احتمال گسسته، توزیع احتمال دو جمله ای است.

توجه۲) توزیع احتمال دو جمله ای یا توزیع بنیم یا فرمول برنولی.

توجه۳) توزیع احتمال دو جمله ای، هرگاه آزمایشی دو حالت یا دو حادثه داشته باشد، یکی از آن ها را موفقیت می نامیم و احتمال آن را P می گوییم. حالت دیگر ا عدم موفقیت می نامیم و احتمال آن را $q = 1 - p$ می گوییم. اگر این آزمایش را n بار انجام دهیم احتمال مورد نظر مسأله به شرح ذیل است:

$$f_{(x)} = C_n^x p^x q^{n-x}$$

X=0, 1, 2, 3, …., n

$f_{(x)} =$ احتمال مورد نظر مسأله

$C_n^x =$ ترکیب

$P =$ احتمال موفقیت

$q =$ احتمال عدم موفقیت

توجه۴) امید ریاضی و واریانس توزیع احتمال دو جمله ای به شرح ذیل می باشد.

$$E_x = \mu = np$$

$$Var_{(x)} = \delta^2 = npq$$

توجه ۵) توزیع احتمال دو جمله ای دارای دو پارامتر p و n می باشد.

توجه۶) توزیع احتمال پواسون:

اگر متغیر تصادفی x اعداد در ست نامنفی را اختیار کند و میانگین x ها را λ بدانیم به کمک فرمول پوا سون می توانیم احتمال وقوع هر x را به شرح ذیل محاسبه کنیم:

$$f_{(x)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

x=0, 1, 2, 3,…

e= عدد اولر= عدد نپرین= 2.71828

λ = میانگین

توجه۷) امید ریاضی و واریانس توزیع احتمال پواسون به شرح زیر است:

$$E_x = \mu = \lambda$$

$$Var_{(x)} = \delta^2 = \lambda$$

توجه ۸) توزیع احتمال پوا سون دارای یک پارامتر λ می با شد. با معلوم بودن آن، توزیع پوا سون کاملاً م شخص می شود. به کمک این پارامتر می توان امید ریاضی و واریانس توزیع احتمال پواسون را به شرح فوق محاسبه نمود.

تو جه ۹) اگر در توزیع احتـمال دو جمـله ای پارامتر n کو چک باشـــد (۳ و ۴و ۵و ۶)، مســـأ له را می توان از خود فرمول دو جمله ای حل کرد.

$$f_{(x)} = C_n^x p^q q^{n-x}$$

ولی اگر n بزرگ باشد (مثلاً ۵۰ یا ۱۰۰)، باید توزیع احتمال دو جمله ای را به طور تقریب یا از پواسون و یا از نرمال حل بکنید. اگر p و q کوچک باشد تقریب پواسون بهتر است و اگر p و q کوچک نباشد (در حد ۱/۲) فرمول نرمال بهتر است.

فرمول دو جمله ای $f_{(x)} = C_n^x p^q q^{n-x}$

فرمول پواسون $f_{(x)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$

فرمول نرمال $Z = \frac{x-\overline{x}}{\delta}$

توجه بسیار مهم)

❶ اگر n=1 یا n=2 باشد، برای محاسبه از احتمال ساده استفاده می کنیم.

مثال) دو سکه سالم را به هوا پرت می کنیم، فضای نمونه دو سکه به شرح ذیل است:

سکه اول	سکه دوم	x= تعداد شیرها	$F_i=P$
T	**T**	**0**	**1/4**
T	**H**	**1**	**1/4**
H	**T**	**1**	**1/4**
H	**H**	**2**	**1/4**

❷ اگر n بزرگ باشد:

- اگر $nq < 5$ یا $np < 5$ از راه پواسون حل می کنیم.
- اگر $nq \geq 5$ یا $np \geq 5$ از طریق نرمال حل می شود.

$$\mu = np$$

$$\delta^2 = npq$$

$$\delta = \sqrt{npq}$$

x تعداد ورودی در هر روز	تعداد روزها	فراوانی تجمعی مشاهده شده	F_o فراوانی نسبی تجمعی مشاهده شده	$f_{(x)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ فراوانی نسبی نظری	F_e فراوانی نسبی تجمعی نظری	$\lvert F_o - F_e \rvert$
0	2	2	2/14=0.143	0.135	0.135	0.008
1	4	6	6/14=0.428	0.271	0.406	0.022
2	5	11	11/14=0.785	0.271	0.677	0.108
3	1	12	12/14=0.857	0.180	0.857	0
4	0	12	12/14=0.857	0.090	0.947	0.090
5 و بیشتر	2	14	14/14=1	0.053	1.000	0
	n=14			1		

توجه ۱) ستون سوم: فراوانی تجمعی مشاهده شده

توجه ۲) ستون چهارم: فراوانی نسبی تجمعی مشاهده شده

توجه ۳) ستون پنجم: فراوانی نسبی نظری

توجه ۴) ستون ششم: فراوانی نسبی تجمعی نظری

برای اجرای آزمون $D_{a,n}$ را پیدا می کنیم.

از جدول شماره ۸ مقادیر بحرانی کولموگروف- اسمینروف

$D_{\alpha,n} = D_{0.05,14} = 0.349$

برای محاسبه D_n محاسبه شده

$D_n = KS = Max|F_o - F_e| = 0.108$

فرض صفر مورد تأیید است، بنابراین می پذیریم که داده های فوق با توزیع پواسون با میانگین ورودی دو کشتی در روز همگون است.

آزمون F یا تحلیل واریانس

(حالت اول)

مسأله ۱) از هر یک از ۴ نژاد سفید، زرد، سرخ و سیاه ۷ نمونه را به تصادف انتخاب کرده و به وسیله تست های هوش، نمره هوش هر یک را محاسبه کرده ایم. آیا می توان گفت بین ۴ نژاد، اختلافی وجود دارد یا خیر؟

نژاد (j) / نمونه(i)	White	Yellow	Red	Black	
1	6	8	4	6	
2	8	9	6	5	
3	7	9	5	5	
4	8	8	5	4	
5	6	7	6	4	
6	5	8	4	6	
7	8	8	6	7	
$Z_{0j}=\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}$	48	57	36	37	$Z_{00}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} Z_{ij} = 178$
$\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}^2$	338	467	190	203	$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}^2 = 1198$
$CF_j = \frac{(Z_{0j})^2}{n}$	$\frac{(48)^2}{7}$	$\frac{(57)^2}{7}$	$\frac{(36)^2}{7}$	$\frac{(37)^2}{7}$	$\sum_{j=1}^{m} CF_j = 1174$

توجه ۱) آزمون t را بررسی می کنیم. اگر یکسان بودن دو جامعه را تأیید بکنیم یا نکنیم، از آزمون t استفاده می کنیم. برای آزمون t مسأله ای را طرح می کنیم.

مسأله ۱-۱) جدول زیر متوسط دستمزد ساعتی یک گروه کارگران کرد و یک گروه کارگران زن را که معلومات و تجربه یکسان دارند را نشان می دهند.

مجموع مجذورات انحرافات	متوسط دستمزد ساعتی	تعداد نمونه	جنس
$SS_1=37856$	$\overline{x_1} = 375$	$n_1=15$	مرد
$SS_2=42500$	$\overline{x_2} = 354$	$n_2=17$	زن

آیا می توان گفت که به زنان از نظر پرداخت دستمزد ساعتی اجحاف شده است؟ $\alpha = 0.05$

چون در این مسأله تعداد نمونه ها از عدد ۳۰ کمتر است، با فرض یکسان بودن واریانس های جامعه اصلی $\delta_1^2 = \delta_2^2$ مراحل آزمون به شرح ذیل است:

$n_1 = 15 < 30$

$n_2 = 17 < 30$

$H_0: \mu_2 \geq \mu_1$ و $H_1: \mu_2 < \mu_1 \Rightarrow \mu_2 - \mu_1 \geq 0$

$$Q_c = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{SS_1 + SS_2}{n_1 + n_2 - 2}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{(375 - 354) - (0)}{\frac{37856 + 42500}{15 + 17 - 2}(\frac{1}{15} + \frac{1}{17})} = 1.15$$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2 \Longrightarrow W\big(T > T_{1-\alpha, n_1+n_2-2}\big)$$

$$T_{1-\alpha, n_1+n_2-2} = T_{0.95,30} = 1.70$$

$$W(T > 1.70)$$

فرض H_0 رد نمی شود یعنی بر اساس این دو نمونه در پرداخت دستمزد به زنان اجحاف نشده است.

توجه ۲) با اســـتفاده از t دو جامعه را از لحاظ مثلاً میانگین مورد مقایســـه قرار می دهیم و می گوییم دو جامعه از لحاظ میانگین با هم فرق دارند یا نه؟ اگر به جای دو جامعه، سه جامعه باشد، آیا می توانیم از آزمون t برای مقایسه استفاده کنیم؟

$$C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3_!}{2_!(3-2)_!} = \frac{3 * 2_!}{2_! * 1_!} = \frac{3}{1} = 3$$

استفاده از آزمون t زیاد دشوار نیست. ولی اگر به جای سه جامعه، ده جامعه را مورد مقایسه قرار دهیم.

$$C_{10}^2 = \binom{10}{2} = \frac{10_!}{2_!(10-2)_!} = \frac{10 * 9 * 8_!}{2 * 1 * 8_!} = 45$$

اســـتفاده از آزمون t در این حالت دشـــوار خواهد بود. زیرا برای مقایســـه ۱۰ جامعه، ۴۵ آزمون دو به دو باید انجام بدهیم. برای رفع این مشکل از توزیع F یا فیشر استفاده می کنیم.

توجه ۳) توزیع F یکی از مهمترین توزیع های نمونه است که در تحقیقات مسأله های مدیریتی کاربرد زیاد دارد.

حال مسأله خود را با استفاده از آزمون F حل و تفسیر می کنیم.

اول باید ببینیم توزیع F چیســـت؟ توزیع F یک توزیع ریاضـــی اســـت و مدلی را فراهم می کند که وقتی نمونه هایی از جوامع مختلف انتخاب شود به کمک آن می توان میانگین آن ها را مقایسه کرد.

توجه ۴) قانون توزیع کمیت تصـــادفی F از دو پارامتر DF_1 و DF_2 تبعیت می کند. یعنی اگر درجات آزادی تغییر کند، شـــکل منحنی تغییر می کند.

توجه ۵) برای رفع این مشـــکل گفتیم که از آزمون F کمک می گیریم. این آزمون به ما این توانایی را می دهد که تمام جوامع را یک جا مقایسه کنیم و تفاوت میانگین آن ها را با هم آزمون نماییم.

برای انجام تجزیه واریانس دو حالت متمایز را در نظر می گیریم.

حالت اول: وقتی است که تعداد نمونه های جوامع جزء، مساوی باشند.

حالت دوم: وقتی است که تعداد نمونه ها در جوامع جزء، مساوی نباشند.

برای حل این مسأله اولین کاری که انجام می دهیم، از جوامع جزء، نمونه گیری می کنیم.

دومین کاری که انجام می دهیم، وجود یا عدم وجود تفاوت حقیقی بین جوامع جزء را قضاوت می کنیم.

سومین کار، عده جوامع را با m نشان می دهیم. در اینجا m=4 (سفید، زرد، سرخ و سیاه)

پنجمین کار، با اندازه گرفتن صفت مورد نظر، mn عدد پیدا می شود. mn=4*7=28

ششمین کار، برای اجزای تجزیه واریانس ارقام به دست آمده را در یک جدول دو مرحله ی ثبت می کنیم.

هفتمین کار، در جدول دو بعدی ستون ها، مخصوص جوامع و سطرها، مخصوص افراد نمونه که از هر جامعه جزء انتخاب کرده ایم

نتیجه اینکه؛ یک جدول دو بعدی داریم که دارای n=7 سطر و m=4 ستون است.

هشتمین کار، شماره افراد نمونه را با i و شماره جامعه جزء ر با j نشان می دهند. البته تغییرات i و j به شرح زیر است.

$i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$

$j = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$

نهمین کار، صفت مورد مطالعه را با Z نمایش می دهیم و می توان اندازه افراد i ام در جامعه j ام را با Z_{ij} نشان داد.

دهمین کار، حال جدول دو بعدی را که در اول گفتیم، مورد بررسی قرار می دهیم. به این جدول ۳ سطر اضافه می شود.

اعداد سطر اول را با Z_{0j} یا $\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}$ نشان می دهیم.

همه اعداد روی هر ستون را با هم جمع کرده و زیر همان ستون می نویسیم.

هر سطر را به صورت سطری نیز جمع می کنیم.

برای پیدا کردن اعداد سطر دوم، اعداد هر ستون را به توان رسانده و با هم جمع می کنیم و زیر همان ستون می نویسیم.

$$6^2 + 8^2 + 7^2 + 8^2 + 6^2 + 5^2 + 8^2 = 338$$

هر سطر را به صورت سطری نیز جمع می کنیم.

برای پیدا کردن سطر سوم جمع اعداد هر ستون را مربع کرده بر تعداد تقسیم می کنیم.

وقتی جدول تنظیم شد، چهار کمیت محاسبه می شود که از این چهار کمیت برای تشکیل جدول تجزیه واریانس استفاده می کنیم.

$$\mathrm{CF}_{\text{کل}} = \frac{(\mathrm{Z}_{00})^2}{\mathrm{mn}} = \frac{178^2}{4 * 7} = 1131.57$$

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \sum_{i=1}^{n} Z_{ij}^2 - \mathrm{CF}_{\text{کل}} = 1198 - 1131.57 = 66.43$$

منظور از کل SS میزان پراکندگی کل مقادیر در نمونه ها می باشد.

سومین کمیت:

$$SS_\alpha = \sum_{j=1}^{m} CF_j - \text{CF}_{\text{کل}} = 1174 - 1131.57 = 42.43$$

$$SS_e + SS_\alpha = SS_{\text{کل}}$$

$$SS_e = SS_{\text{کل}} - SS_\alpha = 66.43 - 42.43 = 24$$

SS_e عبارت است از اختلاف مربوط به اندازه های افراد نمونه در داخل جوامع جزء.

هر کدام از $SS_{\text{کل}}$، SS_e، SS_α دارای درجه آزادی می باشند.

DFکل= mn-1=4*7-1=27

DFα=m-1=4-1=3

DFکل= DFe+ DFα

DFe= DFکل - DFα = 27-3=24

با معلوم بودن $SS_{\text{کل}}$، SS_e، SS_α و DFکل و DFα و DFe جدول تجزیه واریانس را تشکیل می دهیم.

منبع تغییرات	DF	SS	MS	F
کل	27	66.43	-	
α	3	42.43	$MS_\alpha = \frac{SS_\alpha}{DF_\alpha} = \frac{42.43}{3} = 14.14$	$F = \frac{MS_\alpha}{MS_e} = \frac{14.14}{1} = 14.14$
e	24	24	$MS_e = \frac{SS_e}{DF_e} = \frac{24}{24} = 1$	

توجه: برای تشکیل جدول تجزیه واریانس از متوسط مربعات یعنی MS استفاده می کنیم.

برای اجرای آزمون به F جدول نیز نیاز داریم.

$$n_1 = v_1 = DF_\alpha = 3$$

$$n_2 = v_2 = DF_e = 24$$

$$F_{0.01,3,24} = 4.72$$

$$F_{0.05,3,24} = 3.01$$

توجه:

اختلاف معناداری بین میانگین ها مشاهده نمی شود. $F_{\text{محاسبه شده}} < F_{0.01}, F_{0.05} \quad \Longrightarrow$

بین میانگین های جوامع جزء در سطح *0.05* تفاوت معنادار است. $\begin{cases} F_{\text{محاسبه شده}} \geq F_{0.05} \\ F_{\text{محاسبه شده}} < F_{0.01} \end{cases} \quad \Longrightarrow$

با اطمینان بیشتری بین میانگین جوامع جزء اختلاف معنادار است. $F > F_{0.01} \quad \Longrightarrow$

چهار نژاد با هم اختلاف معنادار دارند. $F > F_{0.01} F_{0.05} \quad \Longrightarrow$

اگر میانگین چهار نژاد با هم تفاوت داشته باشند، آن وقت از گروه بندی جوامع استفاده می کنیم.

فقط اگر بزرگ تر باشند مجبوریم گروه بندی جوامع را بررسی کنیم

برای این کار به LSD نیاز داریم. LSD کمیتی است به نام کوچکترین تفاوت معنادار. فرمول LSD به شرح ذیل است.

$$LSD = T.\sqrt{\frac{2MS_e}{n}} = 2.06.\sqrt{\frac{2*1}{7}} = 1.1$$

$$T_{1-\frac{\alpha}{2},DF_e} = T_{1-\frac{0.05}{2},24} = T_{0.975,24} = 2.06$$

حال میانگین ۴ نوع نژاد را جداگانه پیدا می کنیم.

رنگ	میانگین
سفید	48/7=6.86
زرد	57/7=8.14
قرمز	36/7=5.14
سیاه	37/7=5.29

برای میانگین ها جدول را تنظیم می کنیم.

میانگین بر حسب شماره اولیه	j	*1*	*2*	*3*	*4*
	Z_j	*6.86*	*8.14*	*5.14*	*5.29*
میانگین ها بر حسب بزرگی	j	*2*	*1*	*4*	*3*
	$\overline{Z}_j$	*8.14*	*6.86*	*5.29*	*5.14*

اختلاف بین دو میانگین را پیدا می کنیم، اگر کمتر از LSD باشـد، آنگاه دو جامعه از نظر صـفت مورد بررسـی تفاوتی ندارند و آن ها را می توانین مساوی بدانیم. اما اگر اختلاف دو جامعه بزرگتر و مساوی LSD باشد، دو جامعه از نظر میانگین با هم متفاوت هستند.

مثلاً می خواهیم ببینیم سفید یا زرد از نظر هوشی یکسان هستند یا نه؟

$$\left|\overline{Z}_2 - \overline{Z}_1\right| = 1.28 > LSD = 1.10$$

می گوییم سفید پوستان با زردپوستان از نظر هوشی یکسان نیستند.

$$\left|\overline{Z}_4 - \overline{Z}_3\right| = |5.29 - 5.14| = 0.15 < LSD = 1.10$$

سرخ پوست و سیاه پوست از نظر هوشی یکسان هستند.

اما اگر تعداد جوامع زیاد باشد این روش آزمون روش خوبی نیست و از روش دیگری استفاده می کنیم.

$$\left|\overline{Z}_2 = 8.14\right| - (LSD = 1.10) = 7.04$$

$$\left|\overline{Z}_1 = 6.86\right| - (LSD = 1.10) = 5.76$$

$$\left|\overline{Z}_4 = 5.29\right| - (LSD = 1.10) = 4.19$$

گروه	میانگین	دلیل انتخاب
1	$\overline{Z}_2 = 8.14$	چون ۸,۱۴ از ۷,۰۴ بزرگ تر است در گروه اول قرار می گیرد.
2	$\overline{Z}_1 = 6.86$	چون ۶,۸۶ از ۵,۷۶ بزرگ تر است در گروه دوم قرار می گیرد.
3	$\overline{Z}_4 = 5.29$	چون ۵,۲۹ از ۴,۱۹ بزرگ تر است در گروه سوم قرار می گیرد.
	$\overline{Z}_3 = 5.14$	چون ۵,۱۴ از ۴,۱۹ بزرگ تر است در گروه سوم قرار می گیرد.

برای تعمیم نتایج کل جامعه باید حدود اعتماد میانگین را پیدا کنیم.

$$\overline{Z} \pm T.\sqrt{\frac{MS_\alpha}{m`n}}$$

$$T_{1-\frac{\alpha}{2},DF_\alpha} = T_{1-\frac{0.05}{2},3} = T_{0.975,3} = 3.18$$

منظور از $m`$ تعدا میانگین هایی است که با هم در یک گروه هستند.

گروه	میانگین	حدود اعتماد
1	$\overline{Z}_2 = 8.14$	$\overline{Z} \pm T.\sqrt{\frac{MS_\alpha}{m`n}} = 8.14 \pm (3.18 * \sqrt{\frac{14.14}{1*7}})$
2	$\overline{Z}_1 = 6.86$	$\overline{Z} \pm T.\sqrt{\frac{MS_\alpha}{m`n}} = 6.86 \pm (3.18 * \sqrt{\frac{14.14}{1*7}})$
3	$\overline{Z}_4 = 5.29$	$\overline{Z} \pm T.\sqrt{\frac{MS_\alpha}{m`n}} = (\frac{5.29 + 5.14}{2}) \pm (3.18 * \sqrt{\frac{14.14}{2*7}})$
	$\overline{Z}_3 = 5.14$	

آزمون ردیف

مسأله ۱) می خواهیم ببینیم که ترتیب کاشت درختان سرو و کاج در خیابانی تصادفی است یا نه؟ برای اینکار درختان قسمتی از خیابان را به ترتیب یادداشت کرده ایم. در این صورت حرف (ک) برای کاج و (س) برای سرو است.

س	ک	س	س	س	س	س	س	ک	ک	س	س	س	ک	ک	س	ک	ک	ک	ک	س	ک	س	س
۱۱	۱۰			۹				۸			۷		۶		۵		۴			۳	۲	۱	

با توجه به مسأله بالا، فرض تصادفی بودن ترتیب درختان سرو و کاج را در سطح معنادار ۰٫۰۵ آزمون کنید.

توجه ۱) آزمون های مختلفی برای آزمون تصادفی بودن نمونه وجود دارد که یکی از آن ها بر اساس نظریه ردیف ها است. آن آزمون به نام آزمون مبتنی بر ردیف ها (آزمون استقلال) می باشد.

توجه ۲) از نظر ردیف ها، منظور از ردیف عبارت است از توالی حروف واحد (یا هر علامت دیگری) که قبل و بعد از آن ها ممکن است حروف دیگری قرار گرفته باشد و یا اصلاً چیزی نباشد.

توجه ۳) تعداد حروف نوع اول $n_1 = 14$ و تعداد حروف نوع دوم $n_2 = 10$ و $R = 11$

توجه ۴) وقتی n_1 و n_2 کوچک باشند، فرض صفر (تصادفی بودن) ترتیب حروف مبتنی بر جداول خاصی است که در دسترس می گذارند.

توجه ۵) وقتی $n_1 \geq 10$ و $n_2 \geq 10$ باشند، می توان از تقریب نرمال استفاده کرد.

توجه ۶) تحت فرض صفر امید واریانس ریاضی و واریانس R عبارتند از:

$$E_{(R)} = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1 = \frac{2 * 14 * 10}{14 + 10} + 1 = 12.67$$

$$V_{(R)} = \frac{2n_1 n_2(2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)} = \frac{2 * 14 * 10(2 * 14 * 10 - 14 - 10)}{(14 + 10)^2(14 + 10 - 1)} = 5.41$$

توجه ۷) فرضیه های آماری را می نویسیم

H_0:آرایش تصادفی است

H_1:آرایش تصادفی نیست

$14 \geq 10$ و $10 \geq 10 \Rightarrow$ توزیع تقریباً نرمال است

$$Z = \frac{R - E_{(R)}}{\sqrt{V_{(R)}}} = \frac{11 - 12.67}{\sqrt{5.41}} = -0.73$$

آزمون دو دامنه است.

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2},\infty} = Z_{1-\frac{0.05}{2},\infty} = Z_{0.975,\infty} = \pm 1.96$$

$$-1.96 < Z = -0.73 < +1.96$$

فرض H_0 تأیید می شود. یعنی نمی توان فرض تصادفی بودن کشت درختان سرو و کاج را مردود دانست.

مسأله ۲) فرض کنید اعداد زیر معرف قیمت نوع سهام (برحسب ۱۰ هزار تومان) در بازار سهام در ۴۰ روز متوالی باشد، آیا در سطح معنادار ۰٫۰۵ می توان تصادفی بودن قیمت ها را در هر روز پذیرفت.

54	53	52	54	53	53	53	51	52	55	54	56	54	55	56	55	53	55	54	54	55	57	56	56	56	55	54	54	54	55	56	56	57	57	58	61	59	58	56	56
a	a	a	a	a	a	a	a	a		a	b	a		b		a		a	a		b	b	b	b		a	a	a		b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
1											2	3		4		5					6					7				8									

توجه ۱) روشی که در بالا گفتیم تصادفی بودن رشته ای از حروف مشخص نیست و می توان آن را به نمونه های عددی نیز تعمیم داد. در این صورت می توان از حروفی مثلاً (a) برای بالا و (b) برای پایین مقداری همچون میانه بکار برد.

توجه ۲) اعدادی هم که برابر میانه باشد حذف می شوند.

توجه ۳) میانه ارزش عددی است که در سری اعداد منظم شده درست وسط قرار می گیرد. اگر ما این داده ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم و بخواهیم میانه را به دست آوریم، چون تعداد داده ها زوج است دو عدد وسطی را در نظر می گیریم، با هم جمع می کنیم و تقسیم بر ۲ می کنیم که در این مسأله میانه اعداد فوق ۵۵ است. $\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)$

توجه ۴) اگر a برای اعداد بزرگتر از ۵۵ و b برای اعداد کوچکتر از ۵۵ در نظر بگیریم و اعداد برابر ۵۵ را حذف کنیم، خواهیم داشت:

$R = 8$

$n_{1_a} = 16$

$n_{2_b} = 17$

H_0:قیمت هر روز سهام تصادفی است

H_1:قیمت هر روز سهام تصادفی نیست

$$E_{(R)} = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 = \frac{2*16*17}{16+17} + 1 = 17.48$$

$$V_{(R)} = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)} = \frac{2*16*17(2*16*17-16-17)}{(16+17)^2(16+17-1)} = 7.98$$

$16 \geq 10$ و $17 \geq 10 \Rightarrow$ توزیع تقریباً نرمال است

$$Z = \frac{R - E_{(R)}}{\sqrt{V_{(R)}}} = \frac{8 - 17.48}{\sqrt{7.98}} = -3.35$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2},\infty} = Z_{1-\frac{0.05}{2},\infty} = Z_{0.975,\infty} = \pm 1.96$$

چون $Z = -3.35$ در خارج از $Z_{1-\frac{\alpha}{2},\infty} = \pm 1.96$ فرض تصادفی بودن مقادیر فوق مردود است.

آزمون F یا تحلیل واریانس

(حالت دوم)

مسأله ۱) به منظور بررسی وضعیت درآمد خانوارهای شهر تبریز، با در نظر گرفتن ملاک خاص، آن را به ۶ ناحیه تقسیم کرده ایم. در ناحیه یک (۵ خانوار)، در ناحیه دو (۸ خانوار)، در ناحیه سه (۶ خانوار)، در ناحیه چهار (۳ خانوار)، در ناحیه پنج (۷ خانوار) و در ناحیه شش (۹ خانوار) به قید قرعه انتخاب شده و درآمد ماهیانه مشخص شده و نتایج بدست آمده بر حسب هزار تومان در جدول زیر آمده است. آیا می توان گفت متوسط درآمد خانوارها در نواحی هری دارای تفاوت معنادار است؟ در صورت تفاوت آن ها را گروه بندی نمایید.

	ناحیه ۱	ناحیه ۲	ناحیه ۳	ناحیه ۴	ناحیه ۵	ناحیه ۶	
1	2	7	8	3	4	5	
2	4	4	6	5	3	10	
3	7	4	5	7	3	11	
4	2	8	7		4	7	
5	5	11	7		2	7	
6		3	9		3	9	
7		9			2	13	
8		10				8	
9						11	
nj	5	8	6	3	7	9	$\sum_{j=1}^{m} nj = 38$
$Z_{0j}=\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}$	20	56	42	15	21	90	$Z_{00}=244$
$\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}^2$	98	456	321	83	67	860	$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}^2 = 1885$
$CF_j = \frac{(Z_{0j})^2}{nj}$	$\frac{(20)^2}{5}$	$\frac{(56)^2}{8}$	$\frac{(42)^2}{6}$	$\frac{(15)^2}{3}$	$\frac{(21)^2}{7}$	$\frac{(90)^2}{9}$	$\sum_{j=1}^{m} CF_j = 1804$

توجه ۱) این مسأله مربوط می شود به حالت دوم.

توجه ۲) در حالت دوم تعداد نمونه ها در جوامع جزء مساوی نمی باشد.

توجه ۳) محاسبه مثل محسبه فیشر است اما مطلبی که باید اضافه شود این است که در پای جدول دو جانبه ای باید سطر دیگری اضافه شود که آن را با (nj) نشان می دهیم. منظور از (nj) عده ای از افراد نمونه هر جامعه می باشد.

توجه ۴) این (nj) ها را بصورت سطری جمع می کنیم.

توجه ۵) همچنین CF_j را بصورت زیر محاسبه می کنیم. یعنی اول مجموع اعداد واقع در هر ستون را به توان دو رسانده و بر تعداد افراد نمونه همان ستون تقسیم می کنیم که CF_j هر ستون حاصل می شود.

$$DF_{کل} = \sum_{j=1}^{m} nj - 1 \qquad CF_j = \frac{(Z_{0j})^2}{nj}$$

توجه ۶) کل CF را بصورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\text{CF کل} = \frac{(\mathrm{Z}_{00})^2}{\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{nj}}$$

توجه ۷) $SS_{\text{کل}}$، SS_e، SS_α، DF_e، DF_α مثل مسأله حالت اول حل می شود.

توجه ۸) سپس جدول تجزیه واریانس را تشکیل می دهیم و روش آزمون این قسمت مثل روش های فیشر حالت اول است.

$$\text{CF کل} = \frac{(\mathrm{Z}_{00})^2}{\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{nj}} = \frac{(244)^2}{38} = 1566.73$$

$$SS\ \text{کل} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \sum_{i=1}^{n} Z_{ij}^2 - \text{CFکل} = 1885 - 1566.73 = 318.27$$

$$SS_\alpha = \sum_{j=1}^{m} CF_j - \text{CF کل} = 1804 - 1566.73 = 237.27$$

$$SS_e = SS_{\text{کل}} - SS_\alpha = 318.27 - 237.27 = 81$$

$$\mathrm{DF}_{\text{کل}} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{nj} - 1 = 38 - 1 = 37$$

DFα=m-1=6-1=5

DFe= $\mathrm{DF}_{\text{کل}}$ - DFα =37-5=32

جدول تجزیه و تحلیل واریانس را تشکیل می دهیم.

منبع تغییرات	DF	SS	MS	F
کل	37	318.27	-	
α	5	237.27	$MS_\alpha = \frac{SS_\alpha}{DF_\alpha} = \frac{237.27}{5} = 47.45$	$F = \frac{MS_\alpha}{MS_e} = \frac{47.45}{2.53} = 18.75$
e	32	81	$MS_e = \frac{SS_e}{DF_e} = \frac{81}{32} = 2.53$	

$F_{0.01,5,32} = 3.70$

$F_{0.05,5,32} = 2.53$

توجه ۹) چون F محاسبه شده برابر ۱۸,۷۵ بزرگتر از هر دو F جدول است، در سطح ۰,۰۱ معنادار است یعنی با اطمینان ۹۹٪ قضاوت می کنیم که در میان ۶ جامعه حداقل ۲ جامعه وجود دارد که از حیث صفت Z یکسان نیستند. با اطمینان ۹۹٪ قضاوت می کنیم میانگین درآمدها در نواحی مختلف تبریز با هم متفاوت است یا حداقل ۲ ناحیه وجود دارد که دارای متوسط درآمد مساوی نمی باشد. مجبور هستیم از گروه بندی جوامع استفاده کنیم. برای گروه بندی جوامع نیاز به LSD داریم. آزمون LSD را مورد آزمون قرار می دهیم.

از آزمون LSD ا ستفاده می کنیم و ت شخیص می دهیم کدام ناحیه دارای میانگین درآمد پایین تری ا ست و سپس در صدد کشف علت و تهیه برنامه ها می شویم. برای بالا بردن درآمد این نواحی، LSD نقش به سزایی دارد. می خواهیم میانگین ۲ جامعه جزء شماره j و $j`$ را با هم مقایسه کنیم.

$$LSD_{jj`} = T.\sqrt{MSe\left(\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_{j`}}\right)}$$

$$T_{DFe\,,1-\frac{\alpha}{2}} = T_{32\,,1-\frac{0.05}{2}} = T_{32\,,0.975} = 2.04$$

دو به دو محاسبه می کنیم:

$$LSD_{2.4} = 2.04.\sqrt{2.53\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\right)} = 2.18$$

$$\left|\overline{Z}_2 - \overline{Z}_4\right| = \left|\frac{56}{8} - \frac{15}{3}\right| = 2$$

$2 < 2.18 \quad \Rightarrow$ تفاوت دو میانگین معنادار نیست یعنی جامعه ۲ و ۴ از نظر میانگین با هم یکسان هستند.

اما ادامه این وضع مناسب نیست زیرا تعداد جوامع جزء زیاد است. مجبور هستیم از روش دیگری استفاده کنیم.

اول LSD مشترک را محاسبه می کنیم.

$$LSD_{\text{مشترک}} = T.\sqrt{\frac{2MSe}{\overline{n_h}}}$$

توجه ۱۰) منظور از $\overline{n_h}$ میانگین همساز یا میانگین هارمونیک می باشد و بصورت زیر محاسبه می شود.

$$\overline{n_h} = \frac{m}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}} = \frac{6}{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}} = 5.56$$

توجه ۱۱) برای اجرای آزمون جدول میانگین را تشکیل می دهیم.

میانگین بر حسب شماره اولیه	j	1	2	3	4	5	6
	$\overline{Z}_j$	4	7	7	5	3	10
میانگین ها بر حسب بزرگی	j	6	2	3	4	1	5
	$\overline{Z}_j$	10	7	7	5	4	3

گروه اول: $\left|\overline{Z}_6 = 10\right| - (LSD = 1.93) = 8.07$

گروه دوم: $\left|\overline{Z}_2 = 7\right| - (LSD = 1.93) = 5.07$

گروه دوم: $\left|\overline{Z}_3 = 7\right| - (LSD = 1.93) = 5.07$

گروه سوم: $\left|\overline{Z}_4 = 5\right| - (LSD = 1.93) = 3.07$

گروه سوم: $\left|\overline{Z}_1 = 4\right| - (LSD = 1.93) = 2.07$

گروه چهارم: $\left|\overline{Z}_5 = 3\right| - (LSD = 1.93) = 1.07$

حال این نمونه ها را به کل جامعه تعمیم می دهیم. یعنی حدود اعتماد میانگین درآمد ناحیه ها را بدست می آوریم.

$$\overline{Z} \pm T.\sqrt{\frac{MS_\alpha}{m`\overline{n}_h}}$$

$$T_{DF_\alpha,1-\frac{\alpha}{2}} = T_{5,1-\frac{0.05}{2}} = T_{5,0.975} = 2.57$$

حدود اعتماد میانگین گروه اول

$$10 \pm 2.57.\sqrt{\frac{47.45}{1 * 5.56}} = 10 \pm 2.57(2.92)$$

حدود اعتماد میانگین گروه دوم

$$\frac{7+7}{2} \pm 2.57.\sqrt{\frac{47.45}{2 * 5.56}} = 7 \pm 2.57(2.05)$$

حدود اعتماد میانگین گروه سوم

$$\frac{5+4}{2} \pm 2.57.\sqrt{\frac{47.45}{2 * 5.56}} = 4.5 \pm 2.57(2.05)$$

حدود اعتماد میانگین گروه چهارم

$$3 \pm 2.57.\sqrt{\frac{47.45}{1 * 5.56}} = 3 \pm 2.57(2.92)$$

آزمون ویل کاکسون یا من ویتنی

U

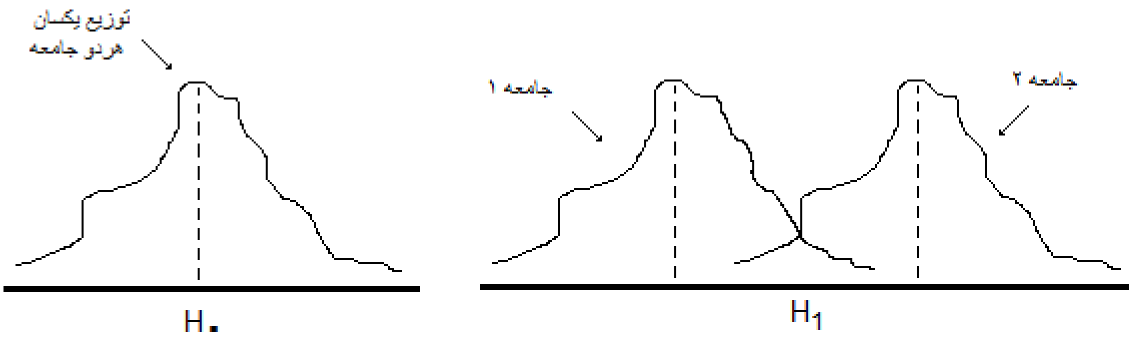
مسأله ۱) داده های زیر عمر دو نوع لامپ مهتابی است که به ساعت گرد شده است. با استفاده از آزمون u تحقیق کنید آیا در سطح معنادار 0.05 می توان گفت که میانگین عمر لامپ نوع اول بیشتر از نوع دوم است؟

1	17701	16873	15474	19647	17683	15847	16999	16678	17877	
2	16701	17871	16748	18542	14345	15596	16879	17686	17411	16848

توجه) برای حل مسأله توجهات زیر را در نظر می گیریم:

۱- آزمون های مجموع رتبه ها: در این آزمون می خواهیم ببینیم که آیا نمونه ها از جوامع پیوسته یکسانی هستند (میانگین های یکسانی دارند) یا اینکه جوامع یکسان نیستند (میانگین های متفاوتی دارند)

۲- دو شکل زیر فرض شده است.



به شکل اول فرض H_0 و به شکل دوم فرض H_1 می گویند. در شکل اول منحنی های دو جامعه روی هم منطبق شده اند یعنی میانگین یکسانی دارند. در شکل دوم منحنی های دو جامعه رو هم منطبق نیستند و میانگین های متفاوتی دارند.

فرض یکسان بودن جامعه ها را فرض صفر می نامیم.در اینجا مجبور نیستیم فرض کنیم که جامعه های مورد نمونه گیری توزیع نرمال دارند.

۳- اگر قضاوت درباره نمونه های گرفته شده از دو جامعه را بخواهیم مقایسه کنیم از آزمون U استفاده می کنیم ولی اگر نمونه های گرفته شده از K جامعه باشد، از آزمون H بهره می گیریم.

۴- به آزمون u آزمون ویل کاکسون یا آزمون من ویتنی می گویند.

۵- به آزمون H آزمون کروسکال والیس می گویند.

۶- آزمون u همان آزمون های مجموع رتبه ها می باشد.

۷- در آزمون u می خواهیم فرض یکسانی دو جامعه را با توجه به نمونه های گرفته شده از دو جامعه آزمون کنیم. برای اینکار، اول تمام مقادیر نمونه را به ترتیب صعودی مرتب می کنیم و سپس آن ها را به رتبه های ۱ و ۲ و ۳ و ... می دهیم. سپس مجموع رتبه های هر یک از دو نمونه را به دست می آوریم و آن ها را با $R_1, R_2, \dots$ نشان می دهیم.

۸- اگر تعداد نمونه های جامعه اول و دوم را با n_1 و n_2 نشان دهیم، در این صورت:

$$R_1 + R_2 = \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2}$$

۹- برای اجرای آزمون از آماره های u_1 و u_2 استفاده می کنیم:

$$u_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} \qquad\qquad u_2 = R_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

۱۰- از آماره مینیمم u_1 و u_1 استفاده می کنیم. Min (u_1 , u_2)

۱۱- آزمون های حاصل همه مبتنی بر R_1, R_2 هستند.

۱۲- برای مقادیر کوچک n_1 و n_2 آزمون های مجموع رتبه ای تحت فرض صـــفر (یکســـان بودن جامعه ها) مبتنی بر جداول خصی هستند که جدول در دسترس می بشد.

۱۳- ولی اگر n_1 و n_2 بزرگ تر از هشت باشند، توزیع u_1 یا توزیع u_2 عبارتند از:

در این مسأله $n_1 = 9 > 8$ و $n_2 = 10 > 8$ در نتیجه توزیع تقریباً نرمال است.

امید ریاضی: $E_{(u_1)} = E_{(u_2)} = \frac{n_1 n_2}{2} = \frac{9*10}{2} = 45$

واریانس: $V_{(u_1)} = V_{(u_2)} = \frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12} = \frac{9*10(910+1)}{12} = 150$

فرض های مسأله:

$H_0: \mu_1 < \mu_2$

$H_1: \mu_1 > \mu_2$

۱۴- داده های مرتب شده و نمونه و رتبه را می نویسیم. یعنی در بین تمام داده های نوع اول و دوم کوچکترین را پیدا و به ترتیب مرتب می کنیم.

داده های مرتب شده	نمونه	رتبه
14345	2	1
15474	1	2
15596	2	3
15847	1	4
16678	1	5
16701	2	6
16748	2	7
16848	2	8
16873	1	9
16878	2	10
16879	2	11
16999	1	12
17411	2	13
17686	2	14
17701	1	15
17871	2	16
17877	1	17
18542	2	18
19647	1	19

چون عدد مساوی بین داده ها نداریم پس رتبه ها از ۱ تا ۱۹ مرتب شده اند.

۱۵- مجموع رتبه های نمونه اول و نمونه دوم را به دست می آوریم و Min را انتخاب می کنیم.

$$R_1 = 2 + 4 + 5 + 9 + 12 + 15 + 17 + 19 = 49$$

$$R_2 = 1 + 3 + 6 + 7 + 8 + 10 + 11 + 13 + 14 + 16 + 18 = 107$$

$$u_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} = 49 - \frac{8(8 + 1)}{2} = 49$$

$$u_2 = R_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} = 107 - \frac{11(11 + 1)}{2} = 41$$

چون جامعه تقریباً نرمال است از آزمون Z استفاده می کنیم.

$$Z = \frac{u_1 - E_{(u_1)}}{\sqrt{V_{(u_1)}}} = \frac{49 - 45}{\sqrt{150}} = 0.33$$

چون توزیع نرمال به سمت راست است پس:

$$Z_{1-\alpha,\infty} = Z_{1-0.05,\infty} = Z_{0.95,\infty} = 1.645$$

۱۶- چون Z محاسبه شده برابر ۰,۳۳ و کوچکتر از Z جدول برابر ۱,۶۴۵ است، فرض صفر تأیید می شود. بنابراین میانگین عمر دو نوع لامپ مهتابی یکسان است.

آزمون کروسکال والیس

H

مسأله ۱) برای مقایسه میزان فروش ماهیانه ۳ شعبه یک شرکت زنجیره ای نمونه های تصادفی از فروش های ماهیانه آن ها گرفته شده و در جدول زیر آورده شده است:

فروش ماهیانه بر حسب میلیون تومان					
شعبه اول		**شعبه دوم**		**شعبه سوم**	
8010	7	5630	1	9840	9
13410	11	7840	6	6950	4
10490	10	5980	2	7810	5
9610	8			6430	3

با استفاده از آزمون H در سطح معنادار ۰٫۰۵ بررسی کنید که آیا میانگین فروش سه شعبه با هم برابر است؟

۱- آزمون مجموع رتبه ها یا آزمون H یا آزمون کروسکال والیس برای این مسأله بکار می رود.
۲- آزمون H عمیم آزمون u برای مقایسه K جامعه است. یعنی در این آزمون می خواهیم فرض برابری K جامعه را آزمون کنیم.
۳- آزمون H با تحلیل واریانس به صورت زیر مقایسه می شود. این آزمون شبیه تحلیل واریانس است با این تفاوت که نیازی به فرض نرمال بودن جامعه ها ندارد و به جای استفاده از خود داده ها از رتبه آن ها استفاده می کند (H ناپارامتریک برای غیر نرمال/ تحلیل واریانس پارامتریک برای نرمال).
۴- روش آزمون H به شرح ذیل است: اول مجموع رتبه ها را برای نمونه i ام پیدا می کنیم و سپس آماره H را که آزمون بر آن مبتنی است به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{{R_i}^2}{n_i} - 3(n+1)$$

که k تعداد جامعه و n برابر $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ است. اثبات می شود آماره فوق دارای توزیع کای مربع با درجه آزاد $k-1$ می باشد.

۵- فرضیه های مسأله را می نویسیم:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1:$ حداقل دو میانگین با هم برابر نیستند

۶- آماره آزمون با رتبه بندی مشاهدات از ۱ تا ۱۱ این جدول بدست می آید:

شعبه اول	شعبه دوم	شعبه سوم
7	1	9
11	6	4
10	2	5
8		3

$n_1 = 4 \qquad R_1 = 36$

$n_2 = 3 \qquad R_1 = 9$

$n_3 = 4 \qquad R_3 = 21$

$df = k - 1 = 3 - 1 = 2$

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{{R_i}^2}{n_i} - 3(n+1) = \frac{12}{11(11+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{36^2}{4} + \frac{9^2}{3} + \frac{21^2}{4} - 3(11+1) = 5.9321$$

${x^2}_{\alpha,k-1} = Z_{0.05,2} = 5.99147$

$5.9321 < 5.99147$ پس فرض صفر تأیید می شود و می پذیریم میانگین فروش سه شعبه با هم برابر است.

همبستگی رتبه ای

مسأله ۱) داده های زیر مربوط به ضریب هوشی (IQ) ۱۳ زوج جوان است. ضریب همبستگی رتبه ای را برای آن حساب کنید.

زوج	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
IQ شوهر	95	125	83	86	100	75	99	95	115	88	91	84	104
IQ زن	83	107	78	94	106	70	85	101	106	80	100	82	106

قسمت اول مسأله حل شده است.

قسمت دوم مسأله: با توجه به مسأله بالا آیا می توان در سطح معنادار ۰٫۰۵ ادعا کرد که همبستگی مثبتی بین ضریب هوشی زنان و شوهران وجود دارد چون $n = 13 > 10$ است.

$$Z = \frac{r_s - E_{(r_s)}}{\sqrt{V_{(r_s)}}} = \frac{0.895 - 0}{\sqrt{0.083}} = 3.09$$

$$E_{(r_s)} = 0 \qquad V_{(r_s)} = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{12} = 0.083$$

فرضیه های مسأله عبارتند از:

$H_0: \rho \leq 0 = \rho_0$

$H_1: \rho > 0 = \rho_0$

$Z_{1-\alpha,\infty} = Z_{1-0.05,\infty} = Z_{0.95,\infty} = 1.645$

چون Z محاسبه شده برابر ۳٫۰۹ و بزرگتر از Z جدول ۱٫۶۴۵ است، پس فرض صفر تأیید نمی شود و فرض H_1 تأیید می شود. بنابراین می توان ادعا کرد که همبستگی مثبتی بین ضریب هوشی شوهران و همسرانشان وجود دارد.

حسن بزرگ ضریب همبستگی r_s نسبت به ضریب همبستگی r در این است که با توجه به جدول زیر مقدار ۱۷۵ نسبت به بقیه y ها افراطی است و باعث تأثیر زیادی در r خواهد شد ولی رتبه آن ۶ می شود و حساسیت زیادی در r_s موجب نمی شود (با وجود اعداد افراطی باید سراغ ضریب همبستگی رتبه ای r_s برویم).

x	8	11	13	14	18	21
y	4	52	50	59	60	175
رتبه	1	2	3	4	5	6

مسأله ۲) ضریب همبستگی رتبه ای را برای داده های زیر حساب کرده، آزمون کنید که آیا در سطح معنادار ۱۰٪ می توان ادعا کرد که بین دو متغیر x و y همبستگی وجود ندارد.

x	-5	-7	11	6	5
y	8	3	1	4	5

$H_0: \rho = 0$ همبستگی معنادار نیست یا همبستگی وجود ندارد.

$H_1: : \rho \neq 0$ همبستگی معنادار است یا همبستگی وجود دارد.

x	-5	-7	11	6	5
y	8	3	1	4	5
رتبهx	2	1	5	4	3
رتبهy	5	2	1	3	4
d_i^2	9	1	16	1	1

$$\sum d_i^2 = 28$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 * 28}{5(25-1)} = -0.400$$

$$r_{s\frac{\alpha}{2},n} = r_{s\frac{10\%}{2},5} = \pm 0.900$$

چون $r_s = -0.400$ بین ± 0.900 قرار می گیرد، فرض صفر تأیید می شود. نتیجه اینکه همبستگی معناداری بین دو متغیر x و y وجود ندارد.

مسأله ۳) در منطقه A از یک نمونه ۱۵۰۰ تایی، ۷۵۰ نفر و در منطقه B از یک نمونه ۲۰۰ تایی، ۸۰۰ نفر کیفیت یک کالا را تأیید کرده اند.

الف) آیا می توان گفت نسبت تأییدکنندگان کیفیت کالا در منطقه A بیش از ۰,۴۵ می باشد؟

ب) آیا می توان گفت مردم این دو منطقه در مورد تأیید کیفیت کالای مذکوز نظر یکسان دارند؟

فرضیه ها: نسبت را با π نشان می دهیم.

حل بخش الف)

$H_0: \pi_1 \leq 0.45$

$H_1: \pi_1 > 0.45$

$$P_1 = \frac{750}{1500} = 0.5$$

$$Q_c = \frac{P_1 - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n_1}}} = \frac{0.5 - 0.45}{\sqrt{\frac{0.45(1-0.45)}{1500}}} = 3.80$$

$$W\left(Z > Z_{1-\alpha,\infty}\right) = Z_{1-0.05,\infty} = Z_{0.95,\infty} = 1.645$$

چون ۳,۸۰ عضو ناحیه بحرانی است فرض H_1 تأیید می شود. یعنی نسبت تأیید کنندگان کیفیت کالا در منطقه A بیش از ۰,۴۵ می باشد.

حل بخش ب)

$H_0: \pi_1 = \pi_2 \qquad\qquad \pi_1 - \pi_2 = 0$

$H_1: \pi_1 \neq \pi_2$

$$\overline{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{750 + 800}{2000 + 1500} = \frac{1550}{3500} = 0.44$$

$$Q_c = \frac{(P_1 - P_2)(\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\overline{P}(1-\overline{P})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{(0.5 - 0.4)(0)}{\sqrt{0.44(1-0.44)(\frac{1}{1500} + \frac{1}{200})}} = \frac{0.1}{\sqrt{0.0002}} = 7.14$$

$$W\left(Z < -Z_{1-\frac{\alpha}{2},\infty} \; or \; Z > Z_{1-\frac{\alpha}{2},\infty}\right)$$

$$W(Z < -1.96 \;\; or \; Z > +1.96)$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2},\infty} = Z_{1-\frac{0.05}{2},\infty} = Z_{0.975,\infty} = 1.96$$

چون عدد ۷,۱۴ عضو ناحیه بحرانی است فرض H_1 تأیید می شود یعنی نظر مردم در دو منطقه در مورد کیفیت کالای مذکور یکسان نیست.