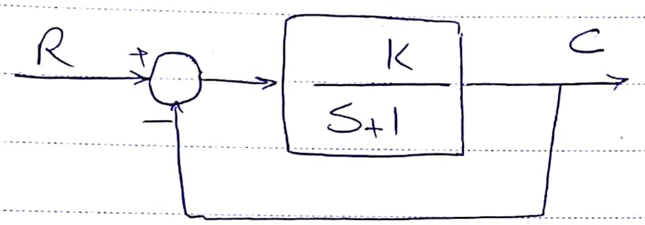
Subject:
Date

فصل چهارم

مکان هندسی ریشه‌ها Root Locus

تعیین محل ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی یک سیستم به ازای مقادیر مختلف K

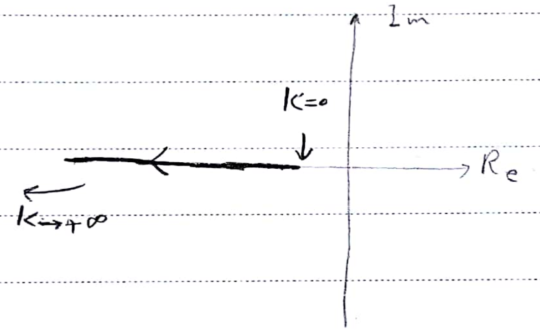
مثال: مکان هندسی ریشه‌های سیستم زیر را به ازای مقادیر مختلف K بدست آورید $0 < K < +\infty$

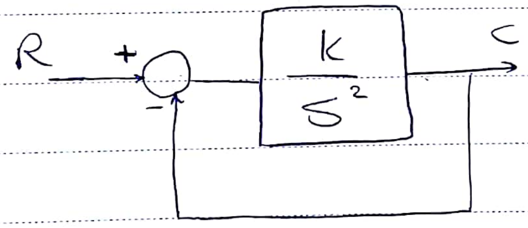


$$\frac{C}{R} = \frac{K}{S+1+K}$$

$$S+1+K = 0$$

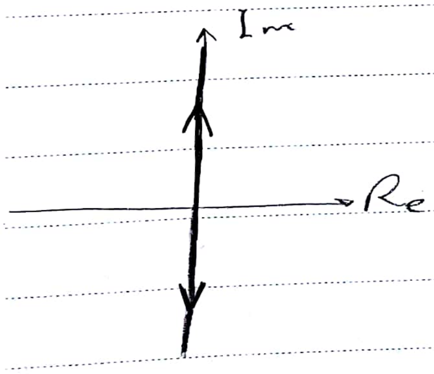
$$S_1 = -K-1$$





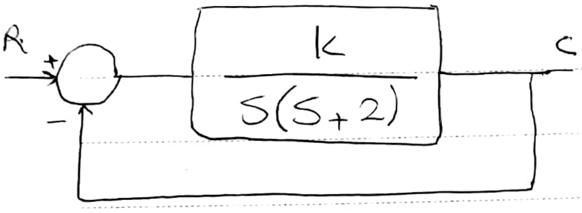
$$\frac{C}{R} = \frac{K}{S^2+K}$$

$$S_{1,2} = \pm\sqrt{-K} = \pm\sqrt{K}\,j$$



PAPCO

Subject
Date



$$\frac{C}{R} = \frac{k}{S(S+2)+k}$$

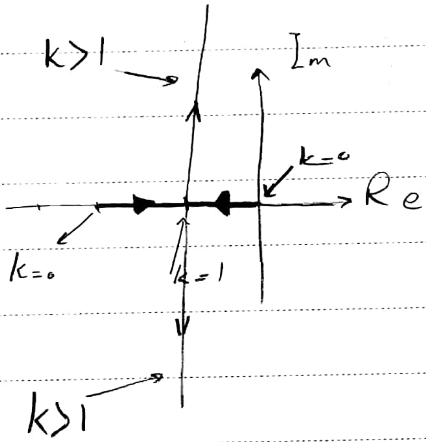
$$S^2 + 2S + k = 0$$

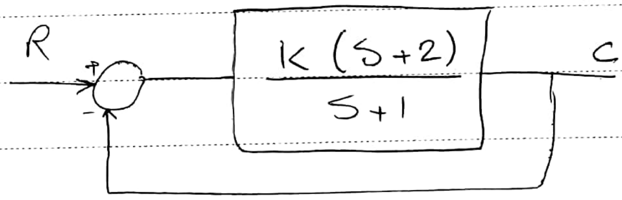
$$S_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k}$$

$k=0$: $S_1 = 0$, $S_2 = -2$

$k=0{,}5$: $S_1 = -1+\sqrt{0{,}5}$, $S_2 = -1-\sqrt{0{,}5}$

$k=1$: $S_1 = -1$, $S_2 = -1$



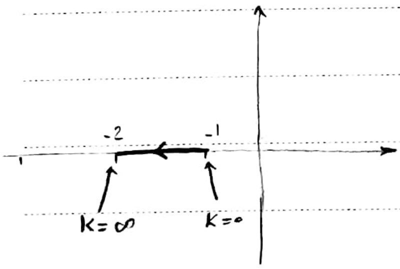


$$\frac{C}{R} = \frac{k(S+2)}{k(S+2)+(S+1)}$$

$$(k+1)S + 2k + 1 = 0$$

$$S_1 = \frac{-(2k+1)}{k+1}$$

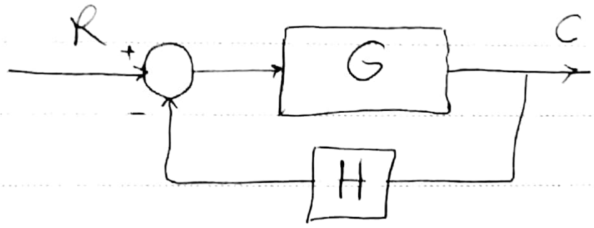
$k=0$	$S=-1$
$k=1$	$S=-\frac{3}{2}$
$k=9$	$S=-1{,}9$
$k=99$	$S=-1{,}99$



PAPCO

Scanned by CamScanner

رسم مکان هندسی ریشه‌ها در حالت کلی :



در ابتدا باید معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم را به صورت $1+KF(s)=0$ بنویسیم

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$1+kF(s)=0 \longrightarrow kF(s)=-1 \xrightarrow{\text{شرط اندازه}} |kF(s)|=1$$

شرط زاویه

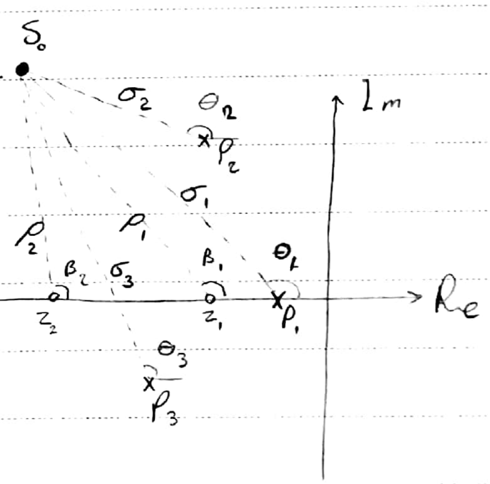
$$\angle KF(s)=\cancel{\angle K}+\angle F(s)=\pm 180(2k+1)$$

همه‌ی نقاطی که در شرط زاویه صدق کنند جز مکان هندسی ریشه‌ها هستند

$$\angle F(s_0)=\pm 180(2k+1)$$

برای مثال :

$$F(s)=\frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$



$$\angle F(s)=(\beta_1+\beta_2)-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

$$F(s)=\frac{\rho_1 e^{j\beta_1}\,\rho_2 e^{j\beta_2}}{\sigma_1 e^{j\theta_1}\,\sigma_2 e^{j\theta_2}\,\sigma_3 e^{j\theta_3}}$$

Subject:
Date

$$\frac{\rho_1\rho_2}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\,\frac{e^{j(\beta_1+\beta_2)}}{e^{j(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}} = \frac{\rho_1\rho_2}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\, e^{j[(\beta_1+\beta_2)-(\theta_1-\theta_2-\theta_3)]}$$

قواعد کلی رسم مکان هندسی ریشه‌ها:

۱- معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم را به صورت $1+kF(s)$ استخراج کنید که در آن

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$$

2- صفرها و قطب‌های $F(s)$ را در صفحه‌ی اعداد موهومی مشخص کنید

با $z_1, z_2 \ldots$ (o) با $p_1, p_2 \ldots$ (x)

- شاخه‌های مکان هندسی از قطب‌های $F(s)$ شروع می‌شود و به صفرهای $F(s)$ ختم می‌شود

$$1+kF(s) = 1+k\frac{A}{B} = 0$$

$$B+kA=0$$

$k=0 \longrightarrow B(s)=0 \longleftrightarrow$ قطب‌ها

$k=\frac{-B}{A} \longrightarrow k\to\infty \longrightarrow A=0 \longleftrightarrow$ صفرها

پس به تعداد قطب‌ها شاخه داریم

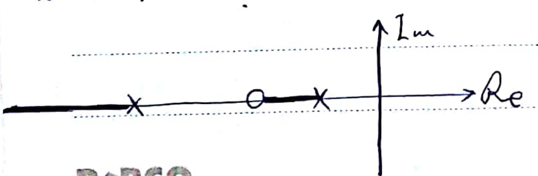
اگر تعداد صفرها (m) و تعداد قطب‌ها (n) برابر باشد ← شاخه‌ها محدود هستند

اما اگر $m<n$ باشند به تعداد $n-m$ شاخه به سمت بی‌نهایت خواهد رفت

3- رسم مکان هندسی ریشه‌ها روی محور حقیقی

آن بخش از محور حقیقی که سمت راست آن تعداد فرد صفر و قطب وجود دارد

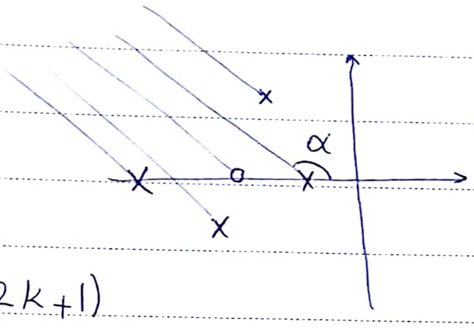
جزء مکان هندسی ریشه‌هاست



Subject :
Date

4_ تعیین مجانب ها: به تعداد $n-m$ شاخه به سمت بی نهایت می رود

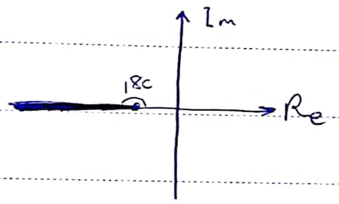
زاویه ی مجانب ها α



$$m\alpha - n\alpha = \pm 180(2k+1)$$

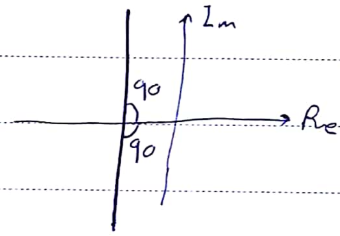
$$\alpha = \frac{\pm 180(2k+1)}{n-m}$$

I



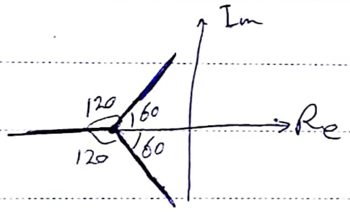
$n-m=1$

II



$n-m=2$

III



$n-m=3$

زاویه مجانب ها $\alpha = \dfrac{\pm 180(2k+1)}{n-m}$

محل برخورد مجانب ها با محور حقیقی $\sigma = \dfrac{\sum P_i - \sum z_i}{n-m}$

5_ تعیین نقاط شکست: نقاطی هستند که معادله مشخصه ریشه تکراری در آن نقاط دارد

$F(s) = (s+P_1)^2 (\ldots$

Subject:
Date

$$\frac{dF(s)}{ds}\Big|_{s=P_1} = 0 \longrightarrow \cancel{\frac{A'B - B'A}{B^2} = 0} \longrightarrow B' + kA' = 0 \longrightarrow k = -\frac{B'}{A'}$$

$\cancel{F(s) = \frac{A}{B}}$

$$1 + k\frac{A}{B} = 0 \longrightarrow f(s) = B + kA = 0$$

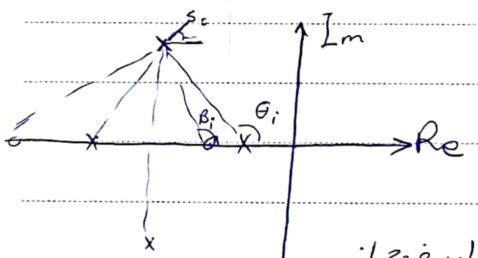
$$B - \frac{B'}{A'}A = 0 \longrightarrow A'B - B'A = 0 \longrightarrow S_0$$

کاندیدهای نقاط شکست

اگر $k = \frac{-B}{A}\Big|_{s=S_0}$

K حقیقی و مثبت شده است ← یک نقطه‌ی شکست خواهد بود

6_ تعین زاویه خروج از قطب مختلط و زاویه ورود به صفر مختلط

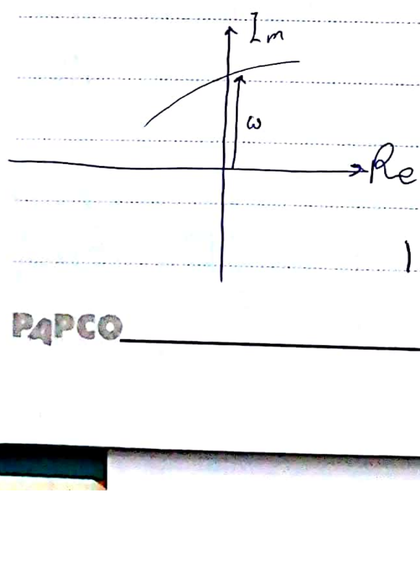


$$\sum\beta_i - \left(\alpha + \sum\theta_i\right) = \pm 180(2k+1)$$

زاویه خروج از قطب مختلط $\alpha = \pm 180(2k+1) + \sum\beta_i - \sum\theta_i$

زاویه‌ی ورود به صفر مختلط $= \pm 180(2k+1) - \sum\beta_i + \sum\theta_i$

7_ تعین محل برخورد شاخه‌ها با محور موهومی



$$1 + k\frac{A}{B} = 0 \longrightarrow B(s) + kA(s) = 0$$

$$S = j\omega$$

Subject:
Date

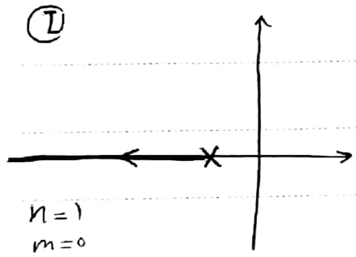
$$\beta(j\omega) + kA(j\omega) = 0$$

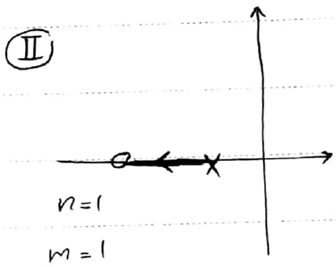
قسمت حقیقی $= 0$ → $k = \checkmark$

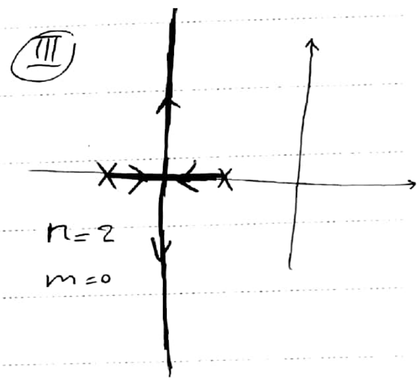
قسمت موهومی $= 0$ → $\omega = \checkmark$

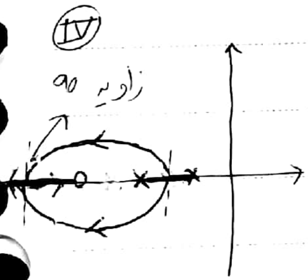
روش دوم: استفاده از روش روث

رسم تقریبی مکان هندسی ریشه ها با استفاده از چهار مرحله ی اول

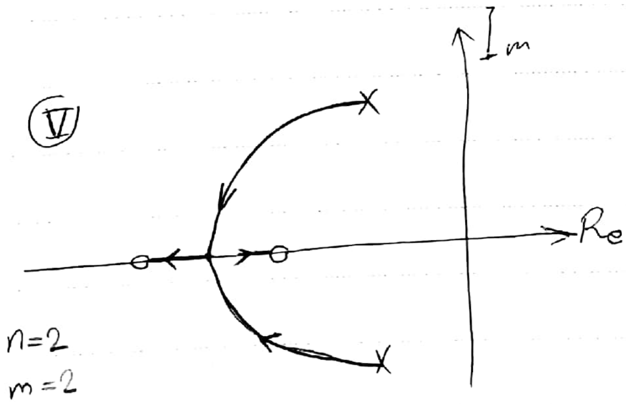


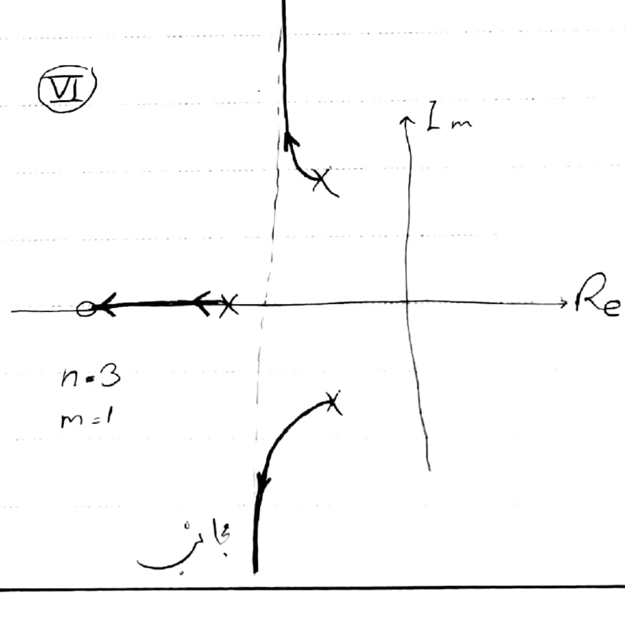






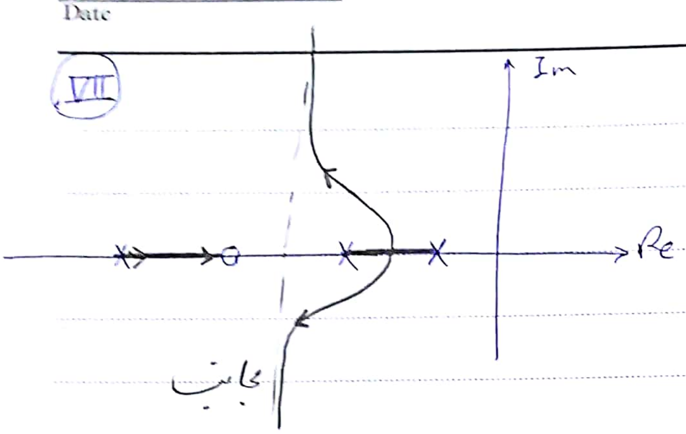
→ در هیچ حالتی شاخه ها به خود صفر وارد نمی شود



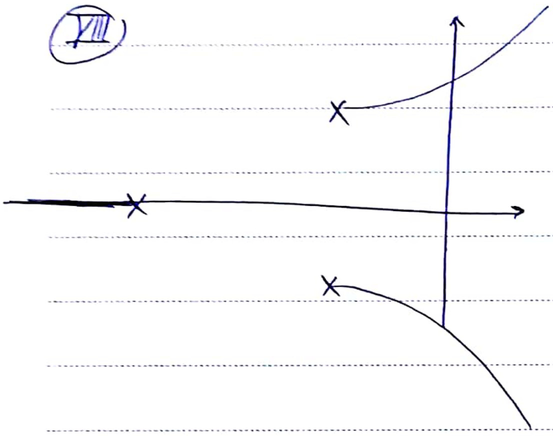


Subject :
Date

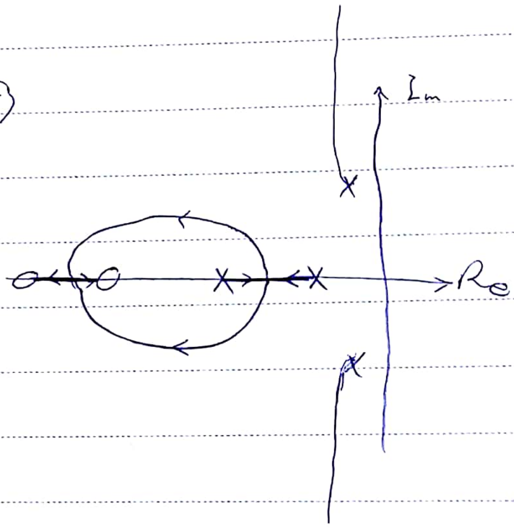
VII



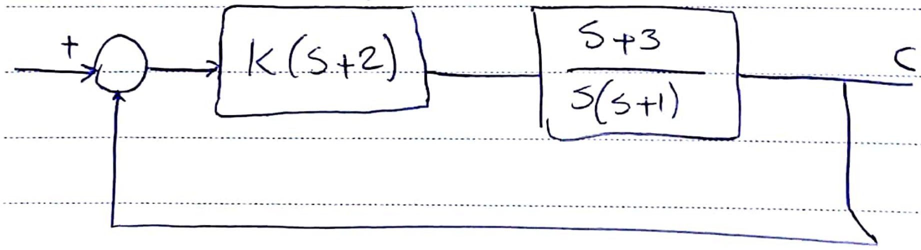
VIII



IX



مثال : مکان هندسی ریشه‌ها را برای سیستم زیر رسم کنید



معادله مشخصه $\quad S(S+1) + k(S+2)(S+3) = 0$

$$1 + kF(s) = 0$$

$$1 + k\frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = 0 \qquad \frac{C}{R} = \frac{k(S+2)(S+3)}{S(S+1) + k(S+2)(S+3)}$$

Subject:
Date

$$\begin{cases} \text{صفرها} & z_1=-2 \quad z_2=-3 \quad m=2 \\ \text{قطبها} & P_1=0 \quad P_2=-1 \quad n=2 \end{cases}$$

جانب ندارم

$A = S^2+5S+6$

$B = S^2+S \qquad A'B+B'A=0$

$(2S+5)(S^2+S)-(2S+1)(S^2+5S+6)=0$

$\cancel{2S^3}+2S^2+5S^2+5S\cancel{-2S^3}-10S^2-12S-S^2-5S-6=0$

$-4S^2-12S-6=0$

$\Longrightarrow S^2+3S+1.5=0$

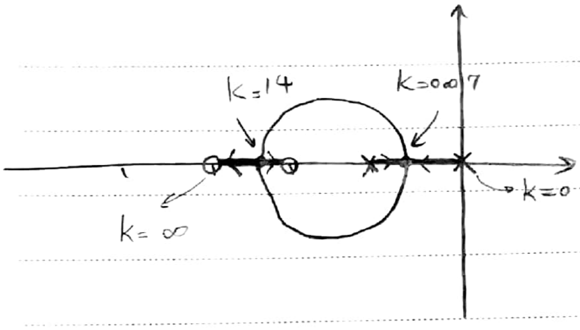
$S_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-6}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{2} \begin{cases} -0.634 \\ -2.36 \end{cases}$

$k=\dfrac{-S(S+1)}{(S+2)(S+3)}\Bigg|_{S=-2.36}$

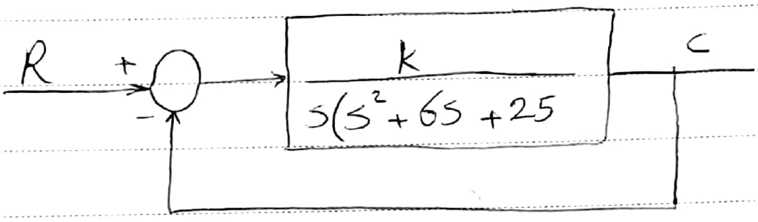
$k=\dfrac{-(-2.36)(-1.36)}{-(-0.36)(3-2.36)}=14>0$ قابل قبول است

$k\Big|_{S=-0.634}=0.07>0$

Subject
Date



مثال:



معادله مشخصه $\quad 1+\dfrac{k}{s(s^2+6s+25)}=0$

صفر → نداریم $\qquad m=0$

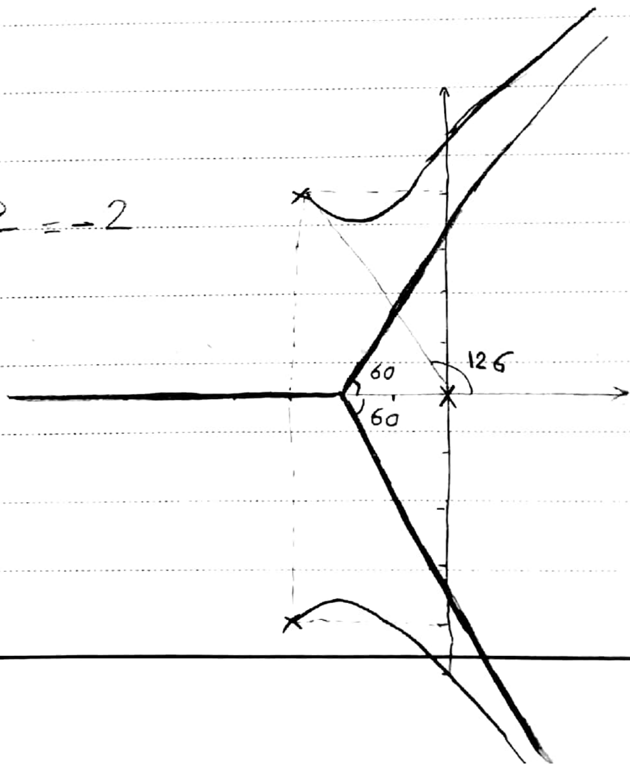
$n-m=3$

قطب → $s_1=0$

→ $s_2, s_3=-3\pm 4j \qquad n=3$

زاویه مجانب‌ها $\quad \alpha=\begin{cases}-180\\ +60\\ -60\end{cases}$

$$\sigma=\frac{\Sigma P_i-\Sigma Z_i}{n-m} \qquad \frac{-3-3}{3}=-2$$



Subject
Date

زاویه‌ی خروج از قطب:

$$\alpha = \pm 180(2k+1) - \sum \theta_i + \sum \beta_i$$

$$\alpha = \pm 180(2k+1) - (90 + 126) + 0$$

$$= \pm 180(2k+1) - 216 \qquad = 180 - 216 = \boxed{-36^\circ}$$

تعیین محل برخورد با محور موهومی:

$$s(s^2 + 6s + 25) + k = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 25s + k = 0 \qquad s = j\omega$$

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 25(j\omega) + k = 0$$

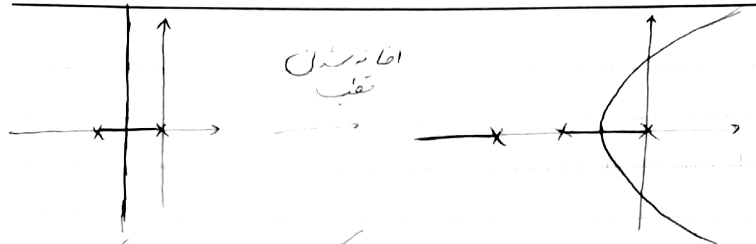
$$-\omega^3 j - 6\omega^2 + 25j\omega + k = 0$$

$$\begin{cases} -\omega^3 + 25\omega = 0 \longrightarrow \omega(-\omega^2 + 25) = 0 & \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \pm 5 \end{cases} \\ -6\omega^2 + k = 0 \longrightarrow \omega = 0 \longrightarrow k = 0 \\ \qquad \omega = 5 \longrightarrow k = 150 \end{cases}$$

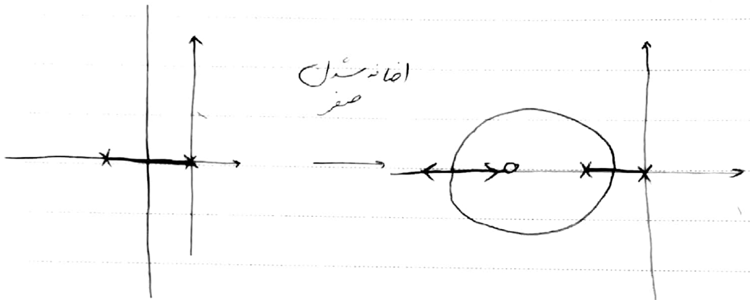
اثر اضافه کردن صفر و قطب روی مکان هندسی ریشه ها: اضافه کردن یک قطب به سیستم باعث می‌شود شاخه های مکان هندسی ریشه ها به سمت راست متمایل شود و پایداری سیستم کاهش یابد

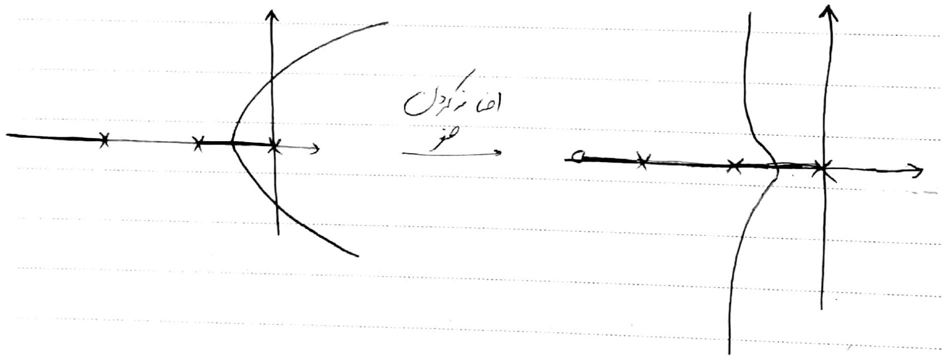
PAPCO

Subject
Date

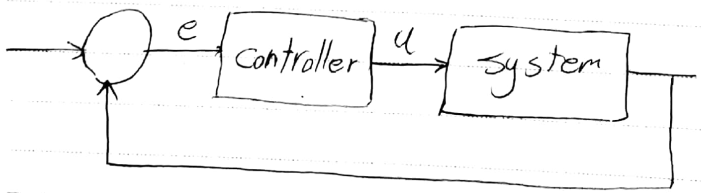


اضافه کردن صفر به سیستم باعث می‌شود شاخه‌های مکان هندسی ریشه‌ها به سمت چپ متمایل گشته و پایداری سیستم بیشتر شود





کنترلر PID : یکی از متداول‌ترین کنترلرها در صنعت و کاربردهای مختلف
PID می‌باشد



PAPCO

Subject
Date

P تناسبی — D مشتقی — I انتگرالی

$$u = k_p e + k_d \dot{e} + k_i \int e\,dt$$

$$U(s) = k_p E + k_d S E + \frac{k_i E}{S} = \left(k_p + k_d S + \frac{k_i}{S}\right) E(s)$$

شکل های متداول
$$\begin{cases} P \\ PD \\ PI \\ PID \end{cases}$$

کنترلر تناسبی: کنترلر تناسبی به صورت یک بهره ی ساده می باشد افزایش بهره می تواند زمان نشست را کاهش دهد و یا باعث کاهش خطای حالت ماندگار شود اما افزایش بیش از حد k_p ممکن است منجر به ناپایداری سیستم شود

$$u = k_p e$$

کنترلر مشتقی: این کنترلر در حقیقت یک صفر به سیستم اضافه می کند اضافه شدن صفر باعث افزایش پایداری سیستم می شود و ماکزیمم فراجهش را کاهش می دهد. در کنترلر مشتقی از آن جا که نیاز به گرفتن مشتق از سیگنال خطا می باشد noise بسیار تاثیرگذار خواهد بود

$$u = k_d \dot{e}$$

و در صورت وجود noise سیستم ممکن است ناپایدار شود
بنابراین معمولا جهت حذف noise مجبور به استفاده از فیلترهای پایین گذر هستیم

کنترلر انتگرالی: این کنترلر یک واحد به نوع سیستم اضافه می کند از یک طرف چون اضافه شدن قطب به سیستم است باعث کاهش پایداری می شود و از طرف دیگر به خاطر اضافه شدن نوع سیستم منجر به کاهش خطای حالت ماندگار می شود

$$u = k_i \int e\,dt$$

PAPCO

Subject
Date

	t_s	t_r	M_p	e_{ss}
K_p	—	↓	↑	↓
K_d	↓	—	↓	—
K_i	↑	↓	↑	↓ حذف

نحوه‌ی تنظیم پارامترهای PID

- تنظیم K_p جهت رسیدن به t_r مورد نظر
- اضافه کردن K_d جهت رسیدن به M_p مناسب
- اضافه کردن K_i جهت رسیدن به e_{ss} مناسب
- تنظیم هر سه پارامتر جهت رسیدن به خواسته‌های نهایی

Subject: تحلیل پاسخ فرکانسی   فصل پنج

Date

منظور از پاسخ فرکانسی یک سیستم پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودی سینوسی می باشد

$R(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$ $r(t) = \sin \omega t$ $y(t)$ ، $y_{ss} = \lim_{t \to \infty} y(t)$

در حالت کلی

$$G(s) = \frac{(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$Y(s) = G(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2} =$$

$$\frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n} + \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega}$$

$$y(t) = a_1 e^{-p_1 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t} + a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t}$$

$t \to \infty$

$$y_{ss} = a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t}$$

$$a = \lim_{s \to -j\omega} \left[(s+j\omega)\, G(s) \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$a = \lim \left[G(-j\omega)\frac{\omega}{s-j\omega}\right] = \lim \frac{\omega\, G(-j\omega)}{-2j\omega} = -\frac{G(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = \frac{G(j\omega)}{2j}$$

$$y_{ss} = -\frac{G(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{G(j\omega)}{2j} e^{j\omega t}$$

Subject
Date

با درنظرگرفتن

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{j\phi}, \quad \phi = \angle G(j\omega)$$

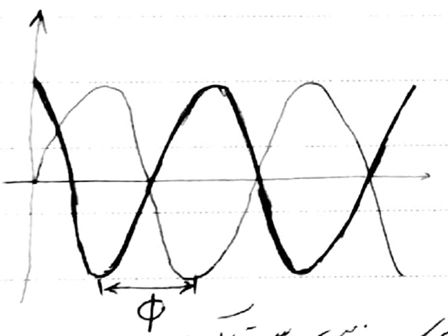
$$y_{ss} = \frac{-|G(j\omega)|\, e^{-j\phi}\, e^{-j\omega t}}{2j} + \frac{|G(j\omega)|\, e^{j\phi}\, e^{j\omega t}}{2j}$$

$$= |G(j\omega)| \left(\frac{e^{j(\phi+\omega t)} - e^{-j(\phi+\omega t)}}{2j} \right)$$

$$y_{ss} = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

$$\xrightarrow{\sin \omega t} \boxed{G(s)} \longrightarrow y_{ss} = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

$$\phi \angle G(j\omega)$$



مثال : پاسخ حالت ماندگار سیستم زیر را به ورودی سینوسی بدست آورید

$$G(s) = \frac{s+1}{s+2} \qquad G(j\omega) = \frac{j\omega+1}{j\omega+2}$$

$$G(j\omega) = \frac{|j\omega+1|}{|j\omega+2|} = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\sqrt{\omega^2+4}}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = \angle j\omega+1 - \angle j\omega+2 = \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

$$y_{ss} = \sqrt{\frac{\omega^2+1}{\omega^2+4}} \sin(\omega t + \phi)$$

منظور از تحلیل پاسخ فرکانسی یک سیستم این است که مقدار (تغییرات) دامنه و فاز یک سیستم به ازای فرکانس های مختلف به چه صورت است

$\phi = \angle G(j\omega)$ و $|G(j\omega)|$

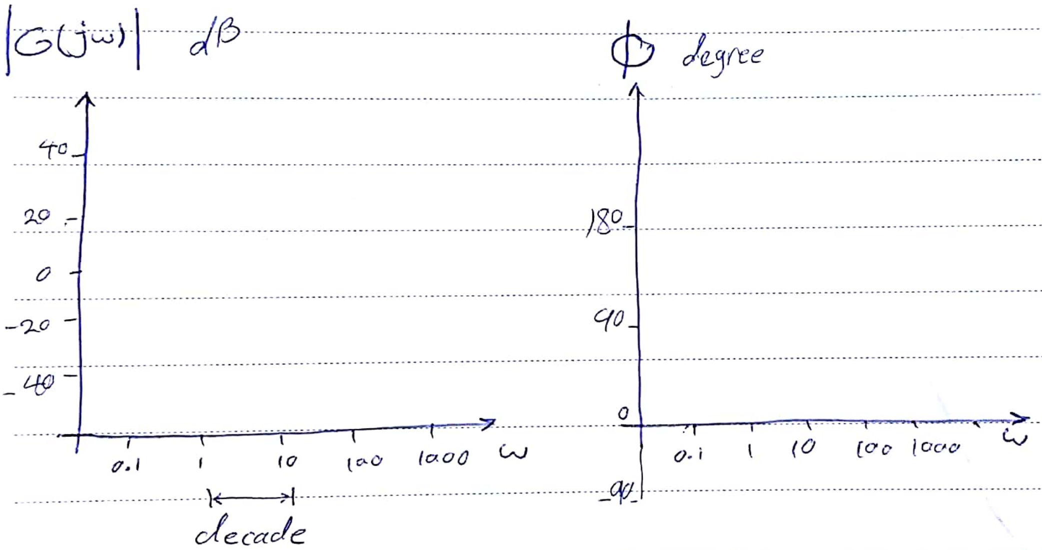
روش های نمایش این تحلیل

1- دیاگرام بود Bode

2- دیاگرام نایکوییست Nyquist

3- دیاگرام نیکولز

دیاگرام بود



عوامل پایداری:

1- عامل پایداری ثابت $G(s)=k$

2- عامل پایداری انتگرال گیر و مشتق گیر $G(s)=\left(\frac{1}{s}\right)^{\pm 1}$

3- عامل پایداری مرتبه اول $G(s)=(Ts+1)^{\pm 1}$

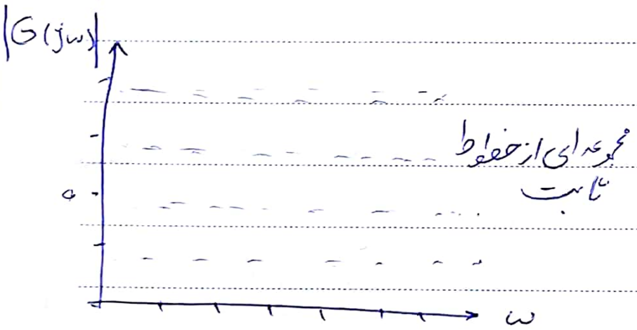
4- عامل پایداری مرتبه دوم $G(s)=\left(\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$

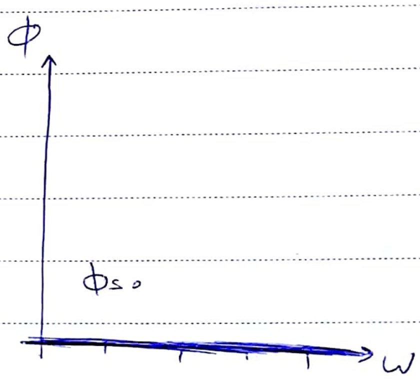
Subject
Date

$G(s) = k \qquad G(j\omega) = k$

$M = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg k$

$\phi = 0$



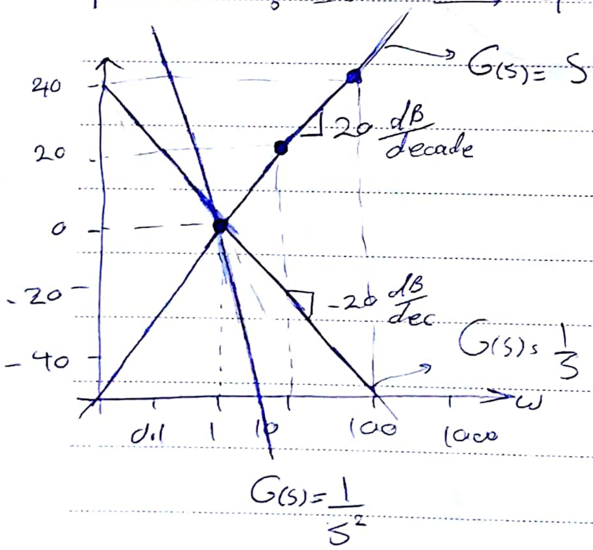


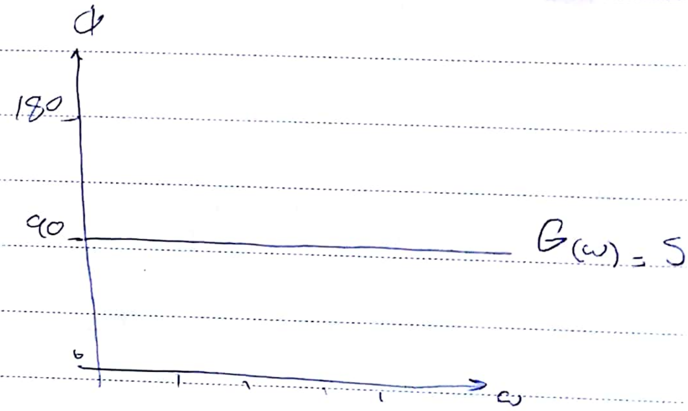
$G(s) = S \qquad G(j\omega) = j\omega$

عامل مشتق‌گیر

$M = 20 \lg |j\omega| = 20 \lg \omega$

$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{0} = \infty \longrightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$





PAPCO

Subject
Date

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \qquad G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}$$

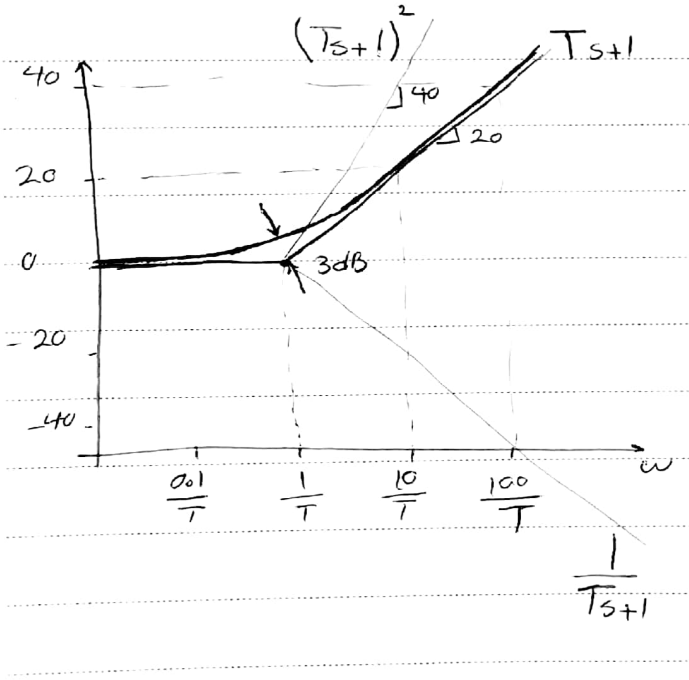
$$M = 20 \lg \left| \frac{1}{(j\omega)^2} \right| = -40 \lg \omega$$

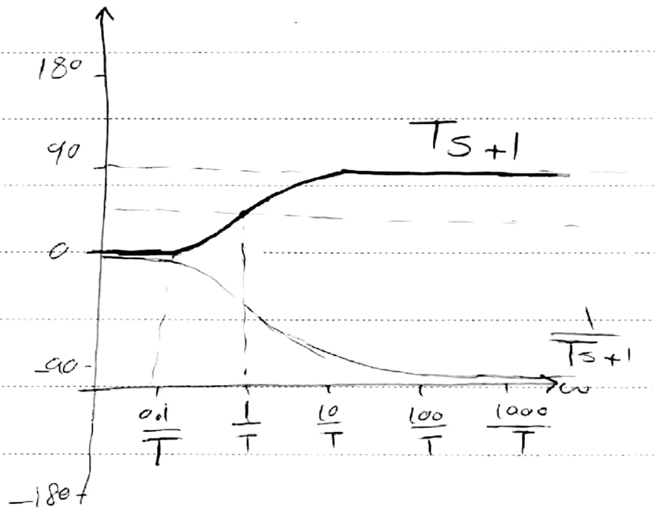
$$\phi = 0 - 90 - 90 = -180$$

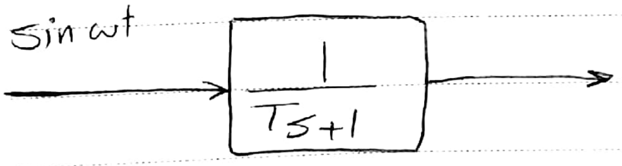
$$G(s) = Ts + 1$$

$$G(j\omega) = T\omega j + 1 \qquad M = 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1} \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{T} \\ 20 \lg T\omega & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

$$\phi = \tan^{-1} T\omega \begin{cases} 0 & \omega \to 0 \\ 45 & \frac{1}{T} \\ 90 & \omega \to \infty \end{cases}$$







فیلتر پایین گذر

Low pass filter

Scanned by CamScanner

Subject

Date

مثال

★ $r(t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{10S+1}} \longrightarrow$

$$r(t) = \sin(0.001\,t) + \sin(0.1\,t) + \sin(10t) + \sin(100t)$$

$$y_{ss} = \sin(0.01\,t) + \sin(0.1\,t - 45) + 0.01\sin(10t - 90)$$

$$+\,0.001\sin(100t - 90)$$

عامل پایه ای مرتبه دوم :

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{S}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{S}{\omega_n} + 1} \qquad G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta\omega}{\omega_n}j}$$

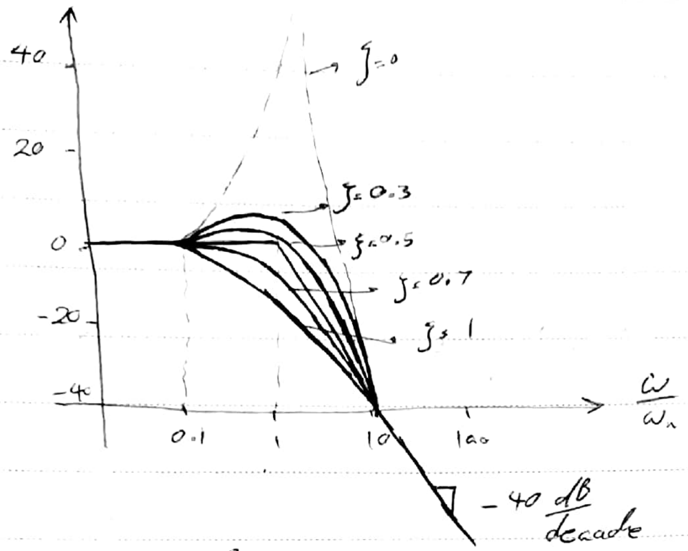
$$M = 20\lg|G(j\omega)| = -20\lg\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$M = \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \\ -40\lg\frac{\omega}{\omega_n} & \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \end{cases}$$

$$\phi = 0 - \tan^{-1}\frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \qquad \phi = \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \\ -90 & \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \\ -180 & \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \end{cases}$$

Subject

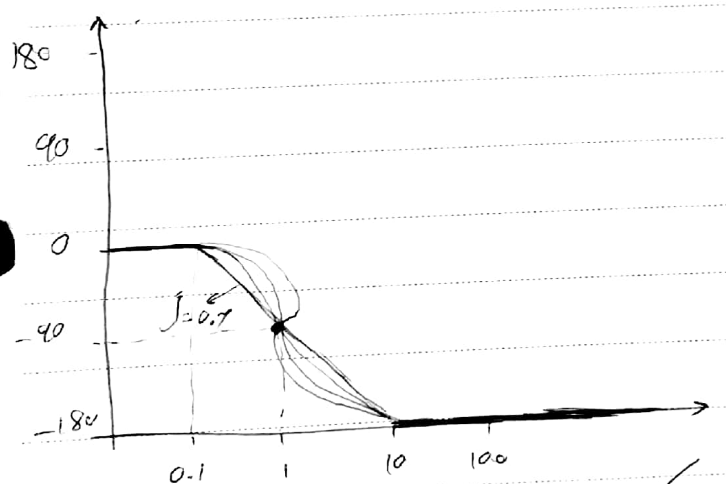
Date



$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$\frac{dg}{d\omega} = 0 \longrightarrow \longrightarrow \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \qquad 0<\zeta<0.707$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$



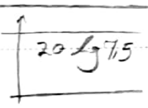
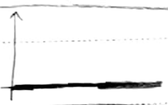
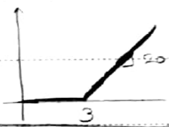
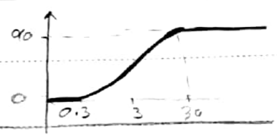
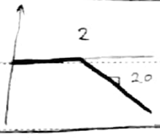
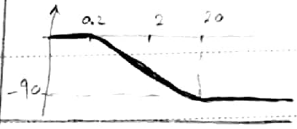
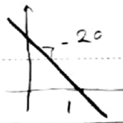
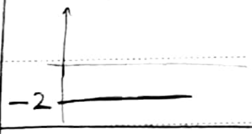
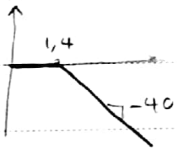
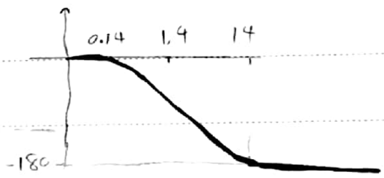
مثال: نمودار بود تابع تبدیل زیر را رسم کنید.

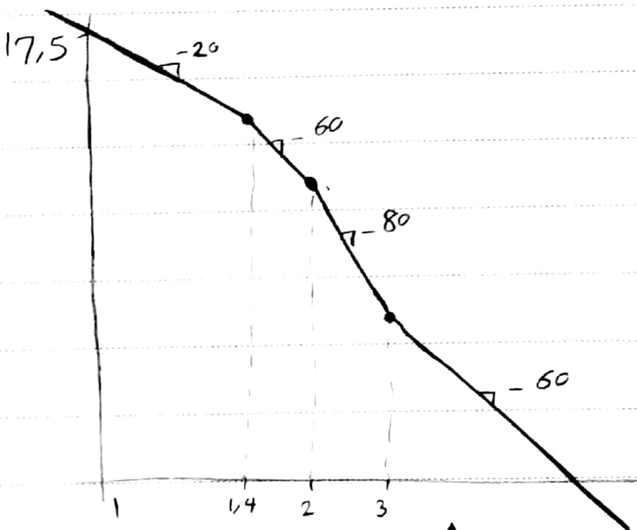
$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

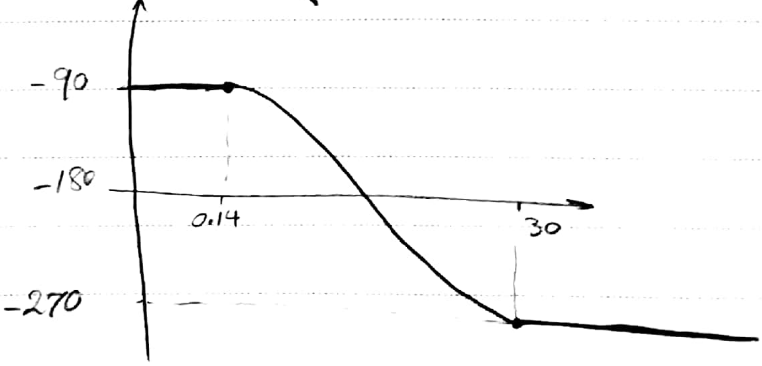
Subject

Date

☆ $$\frac{3\times10\left(\frac{s}{3}+1\right)}{2\times2\times s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{s}{2}+1\right)}$$

	نمودار دامنه	نمودار فاز
$G(s)_1 = 7{,}5$		
$G(s)_2 = \frac{s}{3}+1$		
$G(s)_3 = \frac{1}{\frac{s}{2}+1}$		
$G(s)_4 = \frac{1}{s}$		
$G(s)_5 = \frac{1}{\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{s}{2}\right)+1}$		





Subject
Date

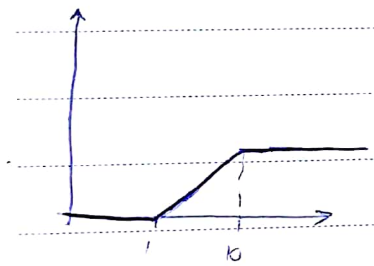
سیستم های مینیمم فاز MF و غیر مینیمم فاز یا NMF

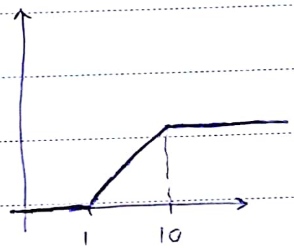
یک سیستم MF به سیستمی گفته می شود که هیچ صفر و قطبی سمت راست محور $j\omega$ نداشته باشد

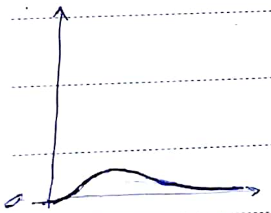
سیستم NMF به سیستمی گفته می شود که حداقل یک صفر یا قطب سمت راست محور $j\omega$ داشته باشد

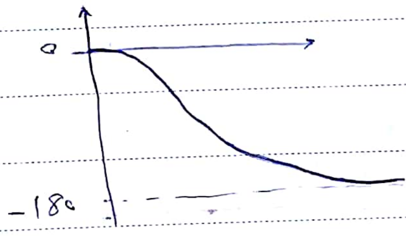
می توان از روی دیاگرام بود یک سیستم بدون داشتن تابع تبدیل آن MF یا NMF بودن یک سیستم را تشخیص داد

$$G(s)_1 = \frac{s+1}{s+10} \qquad G(s)_2 = \frac{s-1}{s+10}$$









برای یک سیستم MF

شیب انتهای نمودار دامنه $= -20\,(n-m)$

مقدار فاز $= -90\,(n-m)$

Subject
Date

برای یک سیستم NMF

شیب انتهای نمودار فاز $= -20(n-m)$

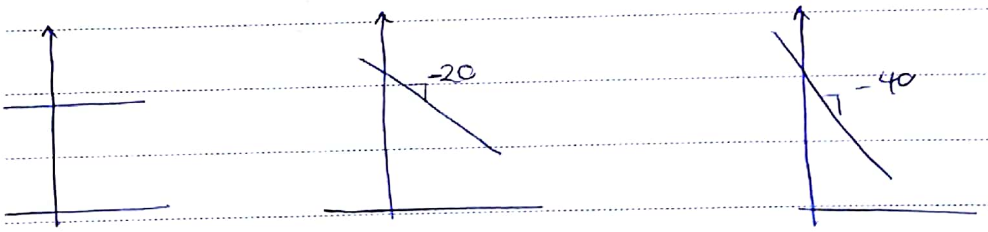
مقدار فاز $\neq -90(n-m)$

برای سیستم های MF می توان تابع تبدیل را از روی دیاگرام بود به صورت یکتا تعیین نمود

خاصیت ی تابع تبدیل یک سیستم MF از روی دیاگرام بود: برای یک سیستم MF می توان تابع تبدیل را به صورت یکتا از روی دیاگرام بود بدست آورد

مراحل تعیین تابع تبدیل از روی دیاگرام بود

- چک کردن MF بودن یک سیستم
- رسم مجانب های منحنی دامنه که شیب آن ها باید مضربی از 20 باشد و بین فرکانس های گوشه ای را تعیین کنیم
- شیب اول نمودار عامل انتگرال گیر و مشتق گیر را تعیین می کند



$G(s) = \frac{1}{s^0}$ $\quad G(s) = \frac{1}{s^1(--)}$ $\quad G(s) = \frac{1}{s^2(---)}$

اگر در فرکانس گوشه ای ω_n شیب نمودار دامنه به اندازه $20\,\frac{dB}{decade}$ کاهش می یابد

یک عامل مرتبه ی ۱ به صورت $\frac{1}{\frac{s}{\omega_n}+1}$ داریم

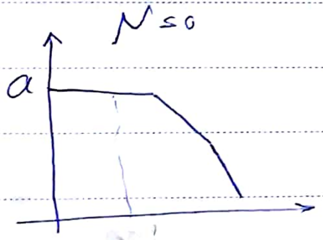
اگر در فرکانس گوشه‌ای ω_n شیب نمودار دامنه به اندازه‌ی $20\frac{dB}{decade}$ افزایش یابد

یک عامل مرتبه‌ی ۱ به صورت $\frac{s}{\omega_n}+1$ داریم

اگر به اندازه‌ی $40\frac{dB}{decade}$ کاهش یابد ← $\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1}$ داریم

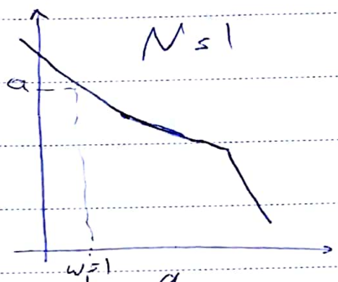
اگر به اندازه‌ی $40\frac{dB}{decade}$ افزایش یابد ← $\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1$ داریم

- تعیین پارامتر ثابت k

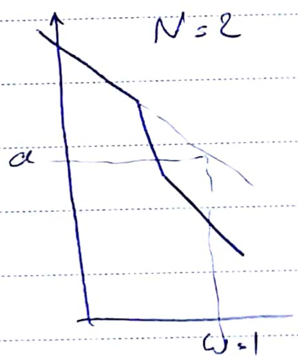


$a = 20\log k$

$k = 10^{\frac{a}{20}}$



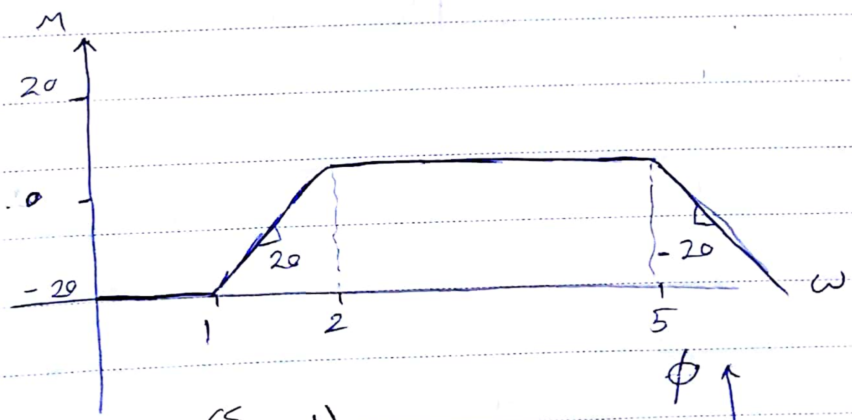
$k = 10^{\frac{a}{20}}$



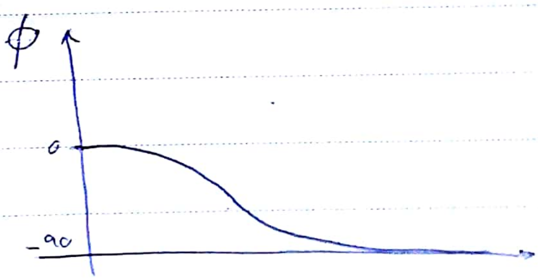
$k = 10^{\frac{a}{20}}$

مثال:

سیستم MF است



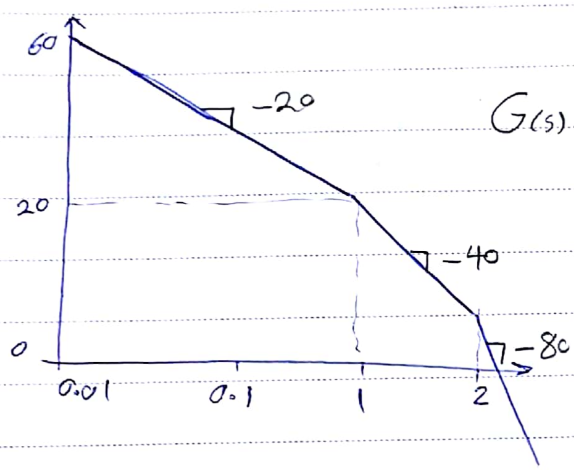
$$G(s) = \frac{\left(\frac{s}{1}+1\right)\times 0.1}{\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{5}+1\right)}$$



Subject
Date

$K = 10^{a/20} = 10^{-20/20} = 0.1$

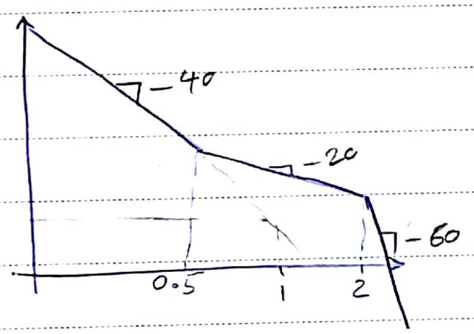
مثال:

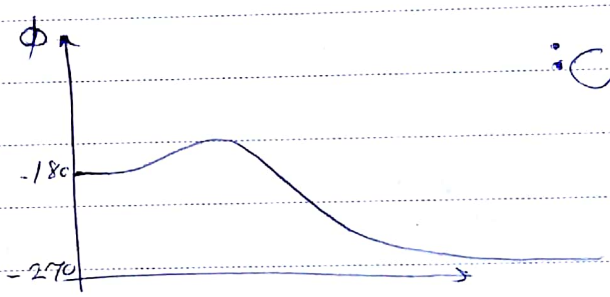


$$G(s) = \frac{10}{s\left(\frac{s}{1}+1\right)\left(\left(\frac{s}{2}\right)^2+\frac{2\xi s}{2}+1\right)}$$

$K = 10^{a/20} = 10^{1}$

مثال:

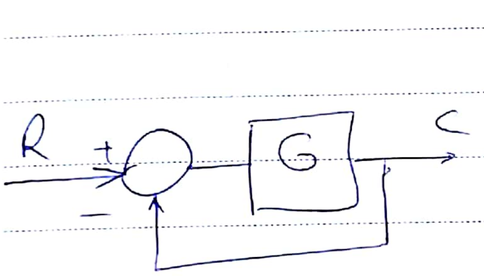




$$G(s) = \frac{\left(\frac{s}{0.5}+1\right) \times 0.01}{s^2\left(\left(\frac{s}{2}\right)^2+\frac{2\xi s}{2}+1\right)}$$

$K = 10^{a/20} = 10^{-40/20} = 10^{-2} = 0.01$

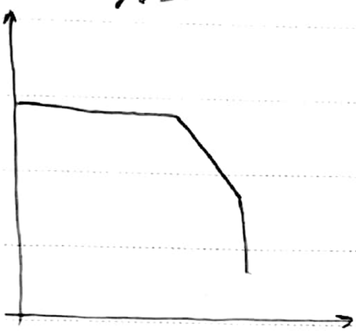
تعیین خطای حالت ماندگار از روی دیاگرام بود



$$G(s) = \frac{k(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}$$

Scanned by CamScanner

ct



شیب $e_{ss}=\infty$

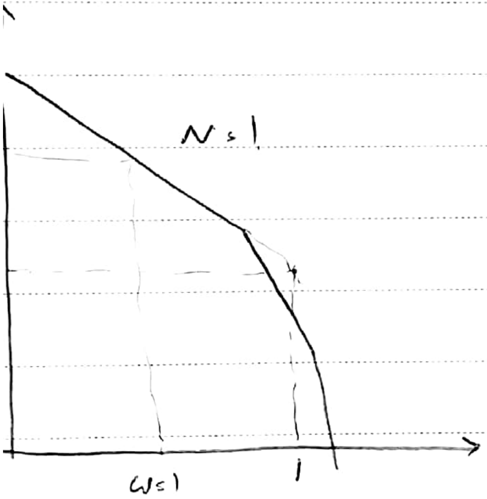
سهمی $e_{ss}=\infty$

پله $e_{ss}=\frac{1}{1+k_p}$

$k_p=\lim_{s\to 0} G(s)$

$20\log k_p = 20\log\left|G(j\omega)\right|_{\omega\to 0}=a$

$\boxed{k_p=10^{\frac{a}{20}}}$



$k_v=\lim_{s\to 0} sG(s)$

$k_v=j\omega\, G(j\omega)_{\omega\to 0}$

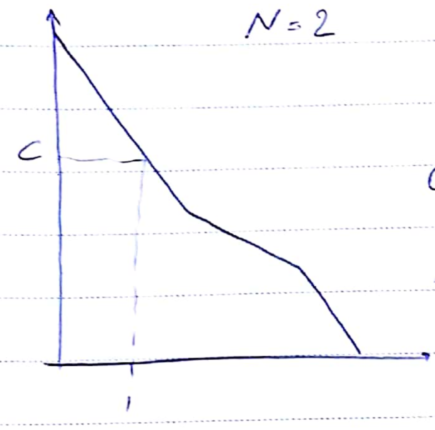
$G(j\omega)=\lim \frac{k_v}{j\omega}$

$20\log\left|G(j\omega)\right| = 20\log\left|\frac{k_v}{j\omega}\right|$

$\omega=1 \longrightarrow 20\log\left|G(j\omega)\right| = 20\log k_v$

$\longrightarrow 20\log k_v=b$ $\boxed{k_v=10^{\frac{b}{20}}}$

سهمی $e_{ss}=\infty$ شیب $e_{ss}=\frac{1}{k_v}$ پله $e_{ss}=0$



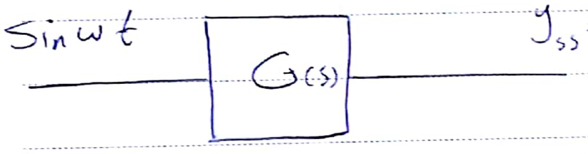
$N = 2$ $\qquad k_a = 10^{C/20}$

شتاب $e_{ss} = \dfrac{1}{K_a}$

شیب $e_{ss} = \infty$

پله $e_{ss} = 0$

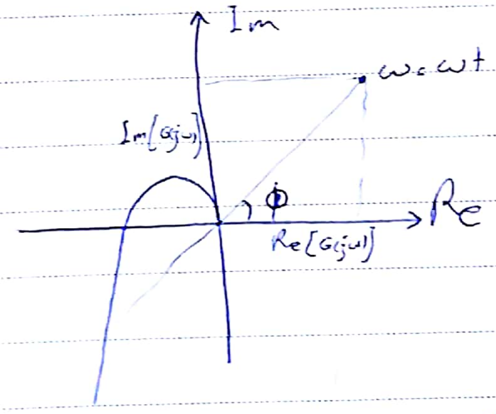
نمودار قطبی نایکوئیست :



$y_{ss} = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$

$$G(j\omega) = Re[G(j\omega)] + Im[G(j\omega)]j = |G(j\omega)| e^{j\phi}$$

$$\phi = \angle G(j\omega)$$



مثال : نمودار نایکوییست تابع تبدیل زیر را رسم کنید

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+3)(s+1)}$$

Subject

Date

$$G(j\omega) = \frac{20(j\omega+5)}{j\omega(j\omega+3)(j\omega+1)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{20\sqrt{\omega^2+25}}{\omega\sqrt{\omega^2+9}\ \sqrt{\omega^2+1}}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = \angle 20 + \angle(j\omega+5) - \angle j\omega - \angle(j\omega+3) - \angle(j\omega+1)$$

$$= 0 + \tan^{-1}\frac{\omega}{5} - 90 - \tan^{-1}\frac{\omega}{3} - \tan^{-1}\omega$$

برای بدست آوردن قسمت حقیقی و موهومی باید در مزدوج مخرج ضرب کنیم

$$G(j\omega) = \frac{20(j\omega+5)}{j\omega(j\omega+3)(j\omega+1)} \times \frac{(-j\omega)(-j\omega+3)(-j\omega+1)}{(-j\omega)(-j\omega+3)(-j\omega+1)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow R[G(j\omega)] = \frac{-20(\omega^2+17)}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)} \quad , \quad Im\, G(j\omega) = \frac{20(\omega^2-15)}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)}$$

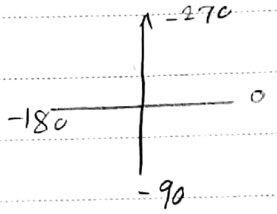
$$|G(j\omega)| = \begin{cases} \infty & \omega \to 0 \\ 0 & \omega \to \infty \end{cases}$$

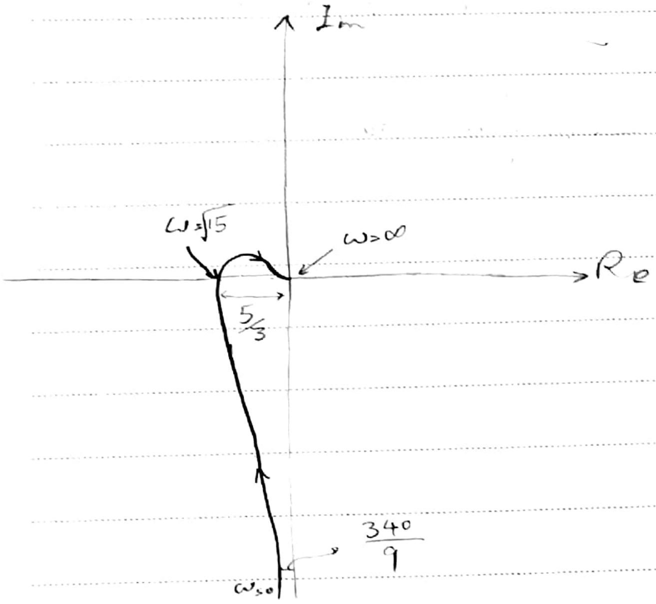
$$\phi = \begin{cases} -90 & \omega \to 0 \\ 90 - 90 - 90 - 90 = -180 & \omega \to \infty \end{cases}$$

Subject :
Date

$$Re\left[G(j\omega)\right] = \begin{cases} \dfrac{-20\times 17}{9} & \omega \to 0 \\ 0^- & \omega \to \infty \end{cases}$$

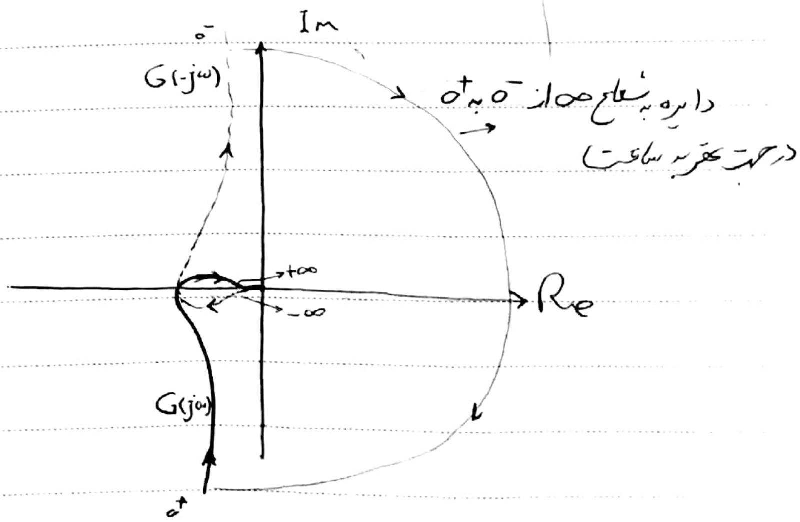
$$Im\left[G(j\omega)\right] = \begin{cases} -\infty & \omega \to 0 \\ 0^+ & \omega \to \infty \end{cases}$$





$Im\left[G(j\omega)\right] = 0 \qquad \omega = \sqrt{15}$

$$Re\left[G(j\omega)\right]\Big|_{\omega=\sqrt{15}} = \frac{-20\,(15+17)}{(15+9)(15+1)} = -\frac{5}{3}$$



PAPCO

Subject:
Date

نمودار نایکوئیست برای سیستم های نوع صفر :

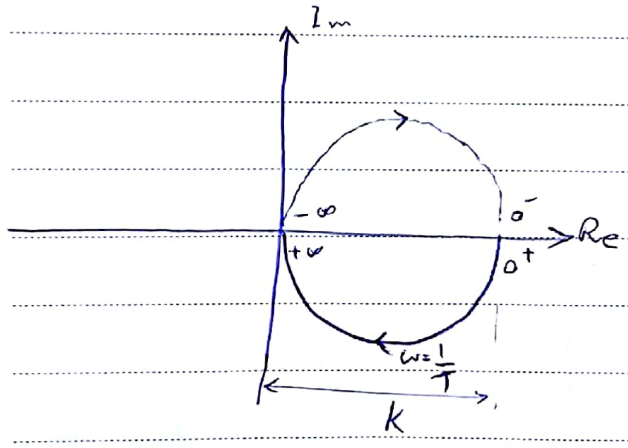
$$G(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{k}{T\omega j+1} \times \left(\frac{1-T\omega j}{1-j\omega T}\right) \longrightarrow G(j\omega) = \frac{k-kT\omega j}{T^2\omega^2+1}$$

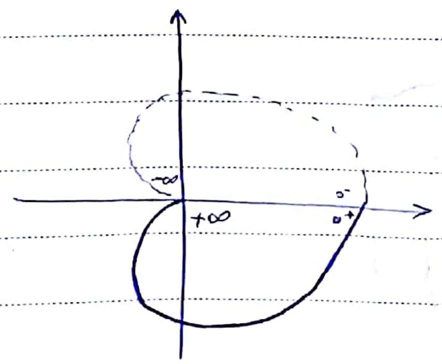
$$Re[G(j\omega)] = \frac{k}{T^2\omega^2+1} \qquad Im[G(j\omega)] = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

$$\phi = -\tan^{-1}T\omega \qquad |G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

$$\omega \to 0 \begin{cases} Re[G(j\omega)] = k \\ Im[G(j\omega)] = 0^- \\ |G(j\omega)| = k \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \omega \to \infty \begin{cases} Re[G(j\omega)] = 0^+ \\ Im[G(j\omega)] = 0^- \\ \phi = -90 \\ |G(j\omega)| = 0 \end{cases}$$

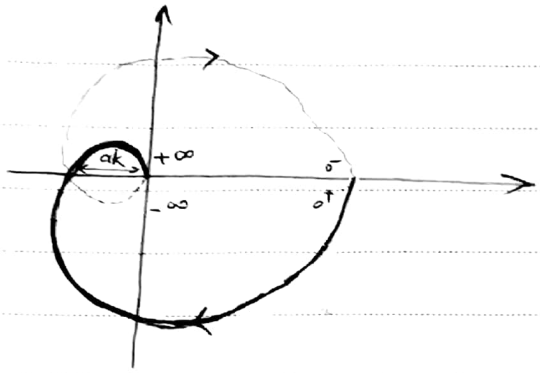


$$G(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

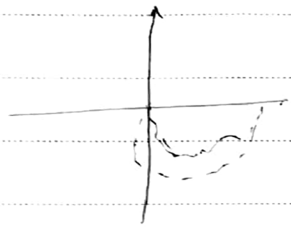


$$G(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

Subject :
Date



$$G(s) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$$



نیاز به محاسبه دقیق

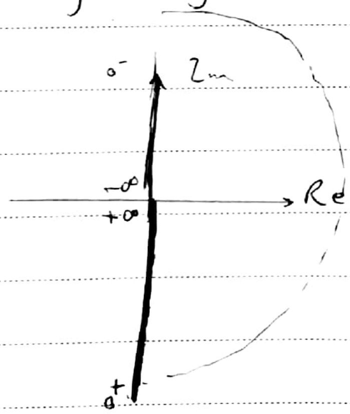
$$G(s) = \frac{k(T_1 s+1)}{(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$$

نمودار نایکوئیست برای سیستم های نوع اول :

$$G(s) = \frac{1}{s} \qquad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \times \frac{-j\omega}{-j\omega} = \frac{-j\omega}{\omega^2} = \frac{-j}{\omega}$$

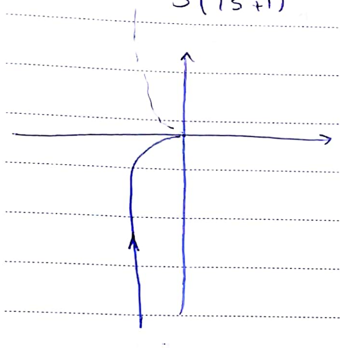
$$Re[G(j\omega)] = 0$$

$$Im[G(j\omega)] = \frac{-1}{\omega}$$

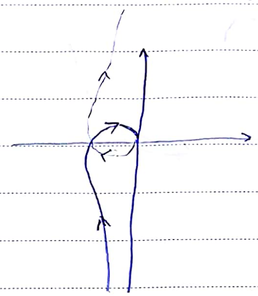


Subject :
Date

$G(s) = \dfrac{1}{s(Ts+1)}$



$G(s) = \dfrac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$

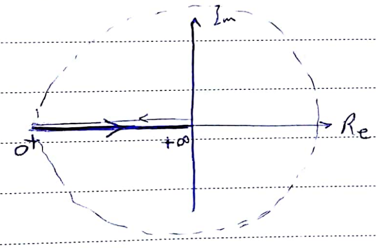


سیستم های نوع 2 :

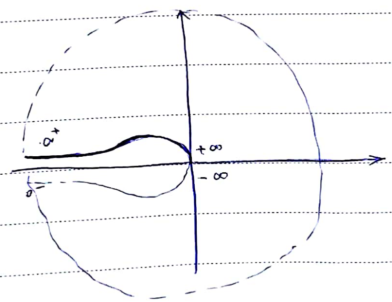
$G(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$G(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)^2} = \dfrac{-1}{\omega^2}$

$G(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)(j\omega)} \longrightarrow \phi = -90-90=-180$



$G(s) = \dfrac{1}{s^2(Ts+1)}$



روش محاسبه ϕ

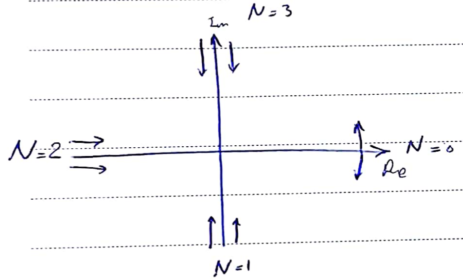
Subject:
Date

قواعد کلی رسم نمودارهای نایکوئیست: تابع تبدیل $G_{(s)}$ را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$G_{(s)} = \frac{k(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots}$$

نوع سیستم N قسمت فرکانس پائین نمودار $(\omega \to 0)$ منحنی را تعیین می کند

$$G(j\omega)_{\omega \to 0} = \frac{k}{(j\omega)^N} \qquad \phi = -90N \qquad |G(j\omega)| = \infty$$

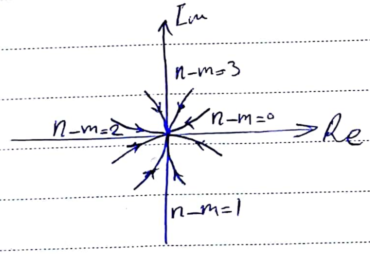


$n-m$ قسمت فرکانس بالای منحنی را تعیین می کند

$$G(j\omega)_{\omega \to \infty} = \frac{b_0}{a_0 (j\omega)^{n-m}}$$

$$|G(j\omega)| = 0$$

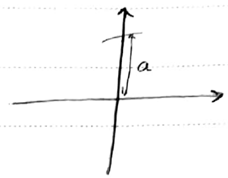
$$\phi = -90(n-m)$$



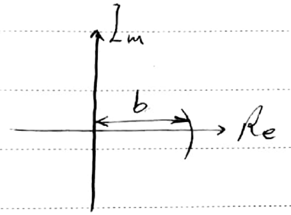
تعیین محل تقاطع با محور موهومی

$Re[G(j\omega)] = 0 \longrightarrow \omega^{+} =$ ۲

$Im[G(j\omega)]\Big|_{\omega=\omega^{+}} = a$



تعیین محل برخورد با محور حقیقی



$Im[G(j\omega)] = 0 \longrightarrow \omega$

$Re[G(j\omega)] = b$

تعیین مجانب‌ها:

$$\omega \longrightarrow 0 \quad \begin{cases} Re[G(j\omega)] = -\infty \\ Im[G(j\omega)] = a \end{cases}$$

$$\omega \longrightarrow \infty \quad \begin{cases} Re[G(j\omega)] = b \\ Im[G(j\omega)] = -\infty \end{cases}$$

درصورتی که تابع تبدیل $G(s)$ صفر نداشته باشد در این صورت زاویه‌ی $G(j\omega)$ به صورت پیوسته کاهش یا افزایش می‌یابد در غیر این صورت نمودار نایکویست دارای تورفتگی و اعوجاج خواهد شد

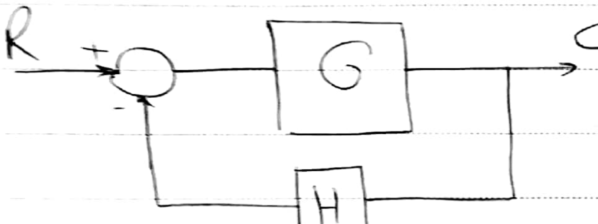
Subject:
Date

بعد از رسم نمودار $G(j\omega)$ نمودار $G(-j\omega)$ نیز باید رسم شود که این نمودار تقارن نمودار $G(j\omega)$ نسبت به محور حقیقی خواهد بود

در صورتی که منحنی نایکوییست به صورت باز بود باید منحنی را به صورت بسته درآورد با رسم یک دایره به شعاع ∞ از 0^- به 0^+ حلقه در جهت عقربه‌های ساعت

Subject :
Date

معیار پایداری نایکوئیست : سیستم حلقه بسته ی زیر را در نظر بگیرید
برای پایداری این سیستم باید تمام ریشه‌های معادله مشخصه ($1+KGH=0$) در سمت چپ صفحه‌ی S قرار داشته باشند
طبق معیار پایداری نایکوئیست ابتدا باید نمودار نایکوئیست را برای تابع تبدیل حلقه باز GH رسم کنیم
سپس داریم



$$Z = N + P$$

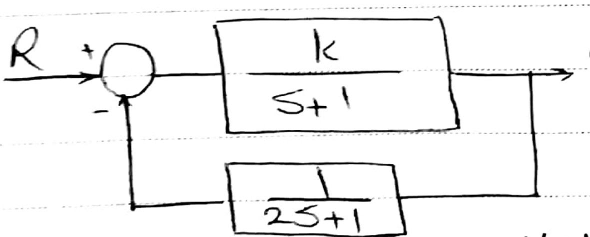
Z : تعداد ریشه‌های سمت راست محور $j\omega$ در معادله‌ی $1+kGH=0$

یا به عبارت دیگر قطب‌های ناپایدار سیستم. پس برای پایداری سیستم حلقه بسته باید $Z=0$

N : تعداد دوری که منحنی نایکوئیست نقطه $-1+0j$ را در جهت عقربه‌های ساعت می‌زند
دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت منفی در نظر گرفته می‌شود

P : تعداد قطب‌های سمت راست (قطب‌های ناپایدار) تابع تبدیل حلقه باز GH

مثال : پایداری سیستم زیر را به روش نایکوئیست بررسی کنید

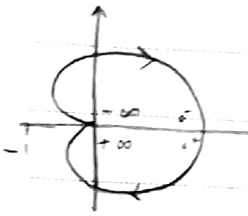


$$GH = \frac{k}{(S+1)(2S+1)}$$

تابع تبدیل حلقه باز

$\begin{cases} P_1 = -1 \\ P_2 = -0.5 \end{cases}$ ← قطب‌های GH ⟶ $P=0$

Subject :
Date

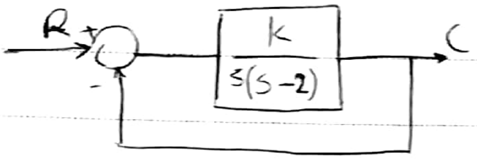


$N=0 \longrightarrow Z = N + P$

$0 + 0 = 0$

$\boxed{Z = 0}$ تابع تبدیل حلقه بسته پایدار است

مثال : پایداری سیستم زیر را به روش نایکوئیست بررسی کنید



$$G(s) = \frac{k}{s(s-2)}$$

تابع تبدیل حلقه باز

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = 0 \\ P_2 = 2 \end{array}\right\} \longrightarrow P = 1$$

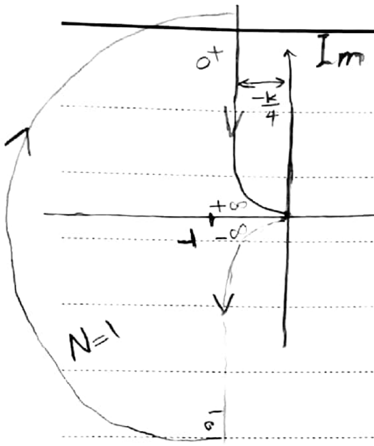
$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(j\omega-2)} \times \frac{-j\omega(-j\omega-2)}{-j\omega(-j\omega-2)} = \frac{k[-\omega^2+2\omega j]}{\omega^2(\omega^2+4)} = \frac{k(-\omega+2j)}{\omega(\omega^2+4)}$$

$$Re[G(j\omega)] = \frac{-k\omega}{\omega(\omega^2+4)} = \frac{-k}{\omega^2+4}$$

$$Im[G(j\omega)] = \frac{2kj}{\omega(\omega^2+4)}$$

$$\omega \to 0^+ \begin{cases} Re[G(j\omega)] = \frac{-k}{4} \\ Im[G(j\omega)] = +\infty \end{cases} \qquad \omega \to \infty^+ \begin{cases} Re[G(j\omega)] = 0^- \\ Im[G(j\omega)] = 0^+ \end{cases}$$

Subject:
Date



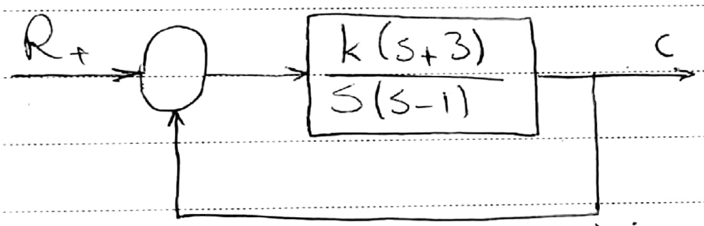
$Z = N + P$

$1 + 1 = 2$

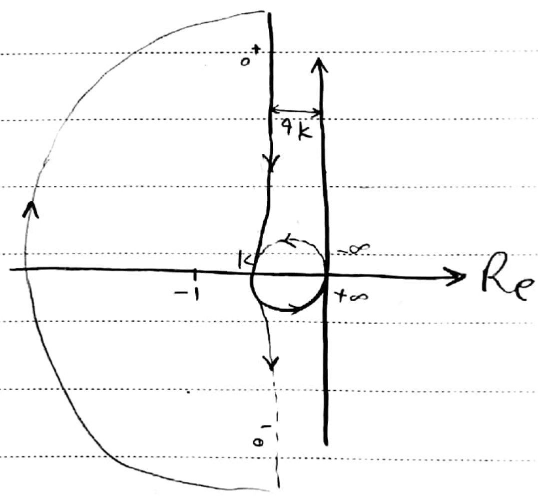
$\boxed{Z = 2}$ ناپایدار

دو قطب ناپایدار داریم

مثال: پایداری سیستم زیر را به روش نایکوئیست بررسی کنید



$$G(j\omega) = \frac{-4k}{\omega^2+1} + \frac{k(-\omega^2+3)j}{\omega(\omega^2+1)}$$



$$\omega \longrightarrow 0^+ \begin{cases} Re[G(j\omega)] = -4k \\ Im[G(j\omega)] = +\infty \end{cases}$$

$$\omega \longrightarrow +\infty \begin{cases} Re[G(j\omega)] = 0^- \\ Im[G(j\omega)] = 0^- \end{cases}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{3} - 90 - \tan^{-1}\frac{\omega}{-1}$$

$Im[G(j\omega)] = 0 \longrightarrow 3 - \omega^2 = 0 \quad \omega = \sqrt{3}$ $\quad Re(G(j\omega))\Big|_{\omega=\sqrt{3}} = \frac{-4k}{3+1} = -k$

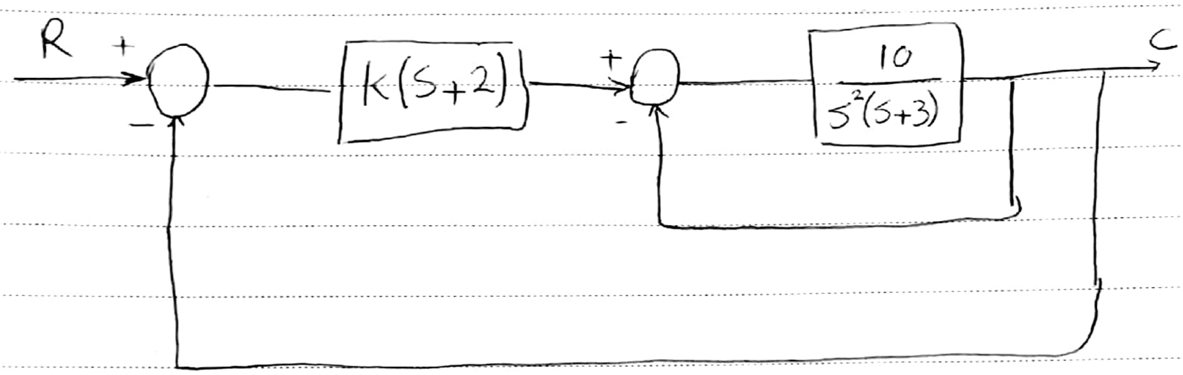
Subject :
Date

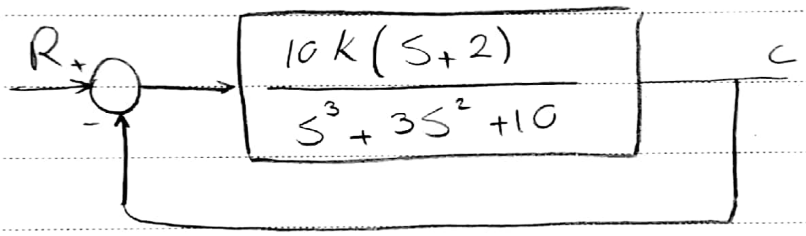
$k<1 \longrightarrow N=1 \quad , \quad P=1 \longrightarrow Z=2$

$k>1 \longrightarrow N=-1 \quad , \quad P=1 \longrightarrow Z=0$

سیستم به ازای $k>1$ پایدار است

مثال :





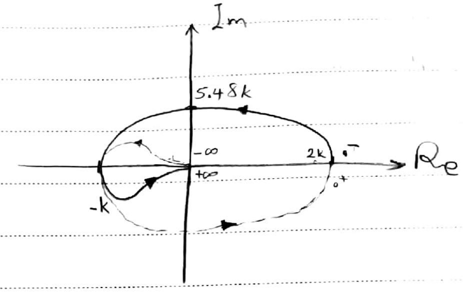
$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega+2)}{(10-3\omega^2) - j\omega^3}$$

$$Re\left[G(j\omega)\right] = \frac{10(20-60\omega^2-\omega^4)}{(10-3\omega^2)^2+\omega^6}$$

$$Im\left[G(j\omega)\right] = \frac{10k\omega(10-\omega^2)}{(10-3\omega^2)+\omega^6}$$

Subject:
Date

$$\omega \to 0^+ \quad \begin{cases} Re[G(j\omega)] = \dfrac{200k}{100} = 2k \\ Im[G(j\omega)] = 0^\circ \end{cases}$$



$$\omega \to +\infty \quad \begin{cases} Re[G(j\omega)] = 0^- \\ Im[G(j\omega)] = 0^- \end{cases}$$

$n - m = 2 \qquad \phi = -180$

$Im[G(j\omega)] = 0 \longrightarrow \begin{matrix} \omega = 0 \\ \omega = \sqrt{10} \end{matrix} \qquad Re[G(j\omega)] = 0 \longrightarrow \omega = 1.54$

$Re[G(j\omega)]\Big|_{\omega=0} = 2k \qquad Im[G(j\omega)]\Big|_{\omega=1.54} = 5.48k$

$Re[G(j\omega)]\Big|_{\omega=\sqrt{10}} = -K$

$k < 1 \longrightarrow \boxed{N = 0} \qquad P = 2 \longrightarrow \boxed{Z = 2}$

$K > 1 \longrightarrow \boxed{N = -2} \qquad P = 2 \longrightarrow \boxed{Z = 0}$

$s^3 + 3s^2 + 10 = 0$

$s^3: \quad 1 \quad 0$

$s^2: \quad 3 \quad 10 \qquad \boxed{P = 2}$

$s^1: \quad -\frac{10}{3} \quad 0$

$s^0: \quad +10$

Subject:
Date

پایداری سیستم حلقه بسته با تابع تبدیل حلقه باز زیر را به روش نایکوئیست بررسی کنید

$$GH = \frac{k(T_2 S + 1)}{S^2(T_1 S + 1)} \qquad T_1, T_2 > 0$$

برای سه حالت

$T_1 > T_2$

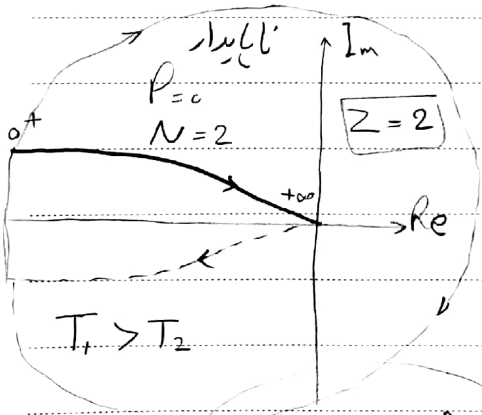
$T_1 = T_2$

$T_1 < T_2$

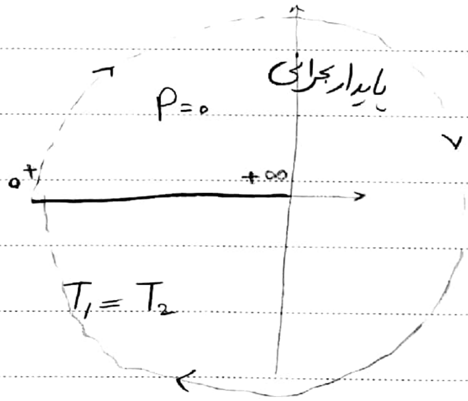
$$GH = \frac{k(T_1 - T_2)j}{\omega(1 + T_1^2\omega^2)} + \frac{-k(1 + T_1 T_2 \omega^2)}{\omega^2(1 + T_1^2\omega^2)}$$

$$\omega \to 0^+ \begin{cases} Im[G(j\omega)] = +\infty \\ Re[G(j\omega)] = -\infty \\ \phi = -90 - 90 = -180 \end{cases} \qquad \omega \to +\infty \begin{cases} Im[G(j\omega)] = 0^+ \\ Re[G(j\omega)] = 0^- \\ \phi = -180 \end{cases}$$

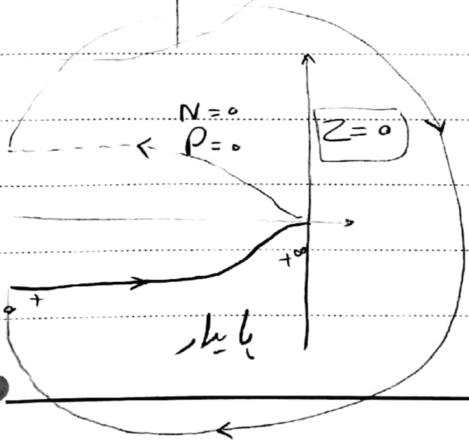
$n - m = 2$



$T_1 > T_2$



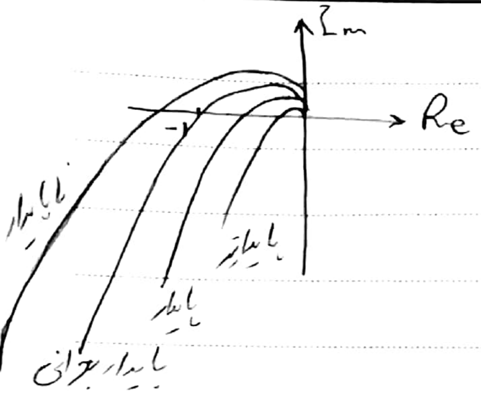
$T_1 = T_2$



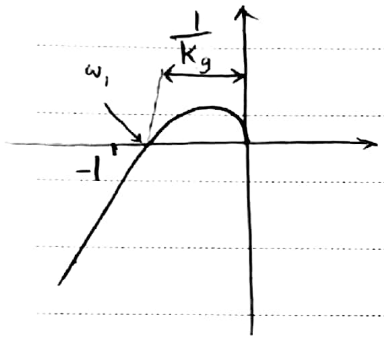
$T_1 < T_2$

PAPCO

Subject :
Date



موضوع پایداری نسبی را می‌توان با دو کمیت حاشیه بهره و حاشیه فاز بیان نمود



حاشیه بهره :

$$\frac{1}{K_g} = |G(j\omega_1)|$$

$$Im[G(j\omega)] = 0 \longrightarrow \omega_1 = \checkmark$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = -180 \longrightarrow \omega_1 = \checkmark$$

Phase cross over frequency — ω_1 فرکانس قطع فاز

$$20 \log \frac{1}{k_g} = 20 \log |G(j\omega_1)|$$

$$-20 \log k_g = 20 \log |G(j\omega_1)|$$

$$K_g = 20 \log k_g = -20 \log |G(j\omega_1)|$$

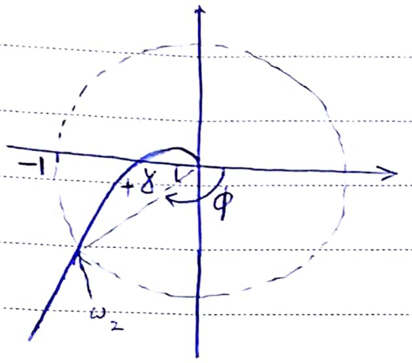
dB → حاشیه بهره

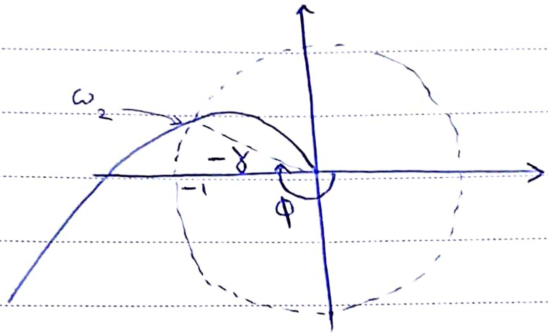
K_g برحسب دسی بل

سیستم پایدارتر باشد $k_g > 1 \longrightarrow K_g > 0$

سیستم ناپایدارتر شود $k_g < 1 \longrightarrow K_g < 0$

Subject:
Date





حاشیه فاز : γ به صورت زیر تعریف می شود

$$\gamma = 180 + \phi$$

$$\phi = \angle G(j\omega_2)$$

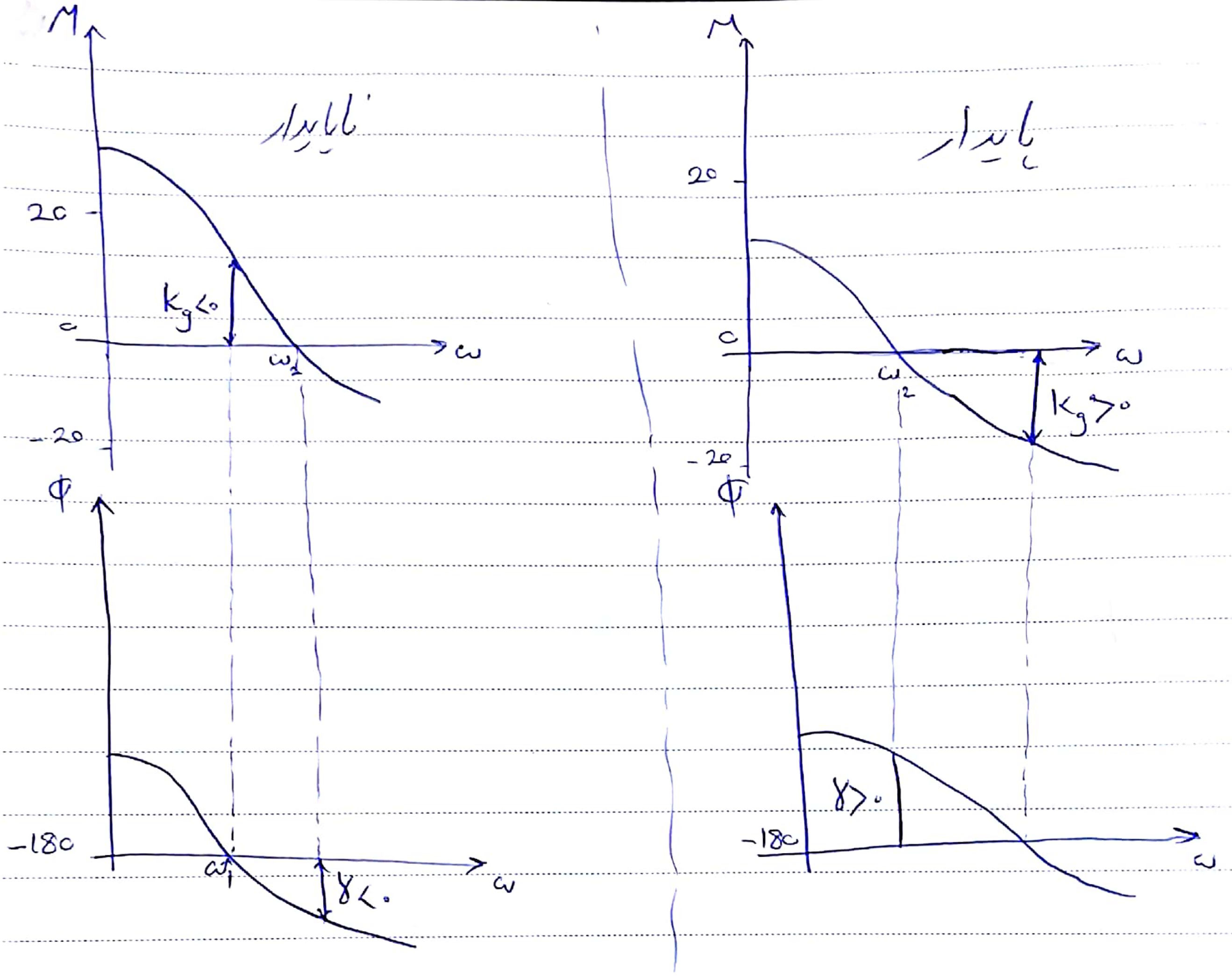
ω_2 زمان قطع بهره Gain Cross over frequency

$$|G(j\omega_2)| = 1 \longrightarrow \omega_2 = ?$$

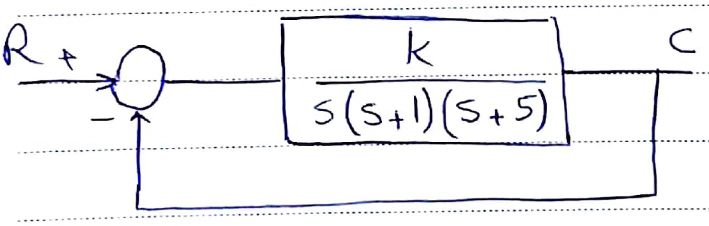
$\gamma < 0$ سیستم ناپایدار

$\gamma >$ سیستم پایدار

حاشیه بهره و حاشیه فاز در دیاگرام بود



حاشیه بهره و فاز را برای سیستم زیر در حالت $K=10$ و $K=100$ بدست آورید



$$G(j\omega)=\frac{10}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+5)}$$

$$\Phi=\angle G(j\omega)=-90-\tan^{-1}\frac{\omega}{1}-\tan^{-1}\frac{\omega}{5}$$

Subject :
Date

جهت محاسبه ω_1 (فرکانس قطع فاز)

$$-90 - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{5} = -180$$

$$\tan^{-1}\omega + \tan^{-1}\frac{\omega}{5} = 90 \longrightarrow \omega_1 = 2,2$$

$$K_g = -20\lg\left|\frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+25}}\right| = -20\lg 0.344 = +9.2\ dB$$

حاشیه فاز :

$$\left|G(j\omega)\right| = 1 \longrightarrow \frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+25}} = 1$$

$$\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+25} = 10$$

$$\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+25) = 100$$

ω ها را با سعی و خطا بدست می آوریم

$$\omega = 1 \longrightarrow 52$$

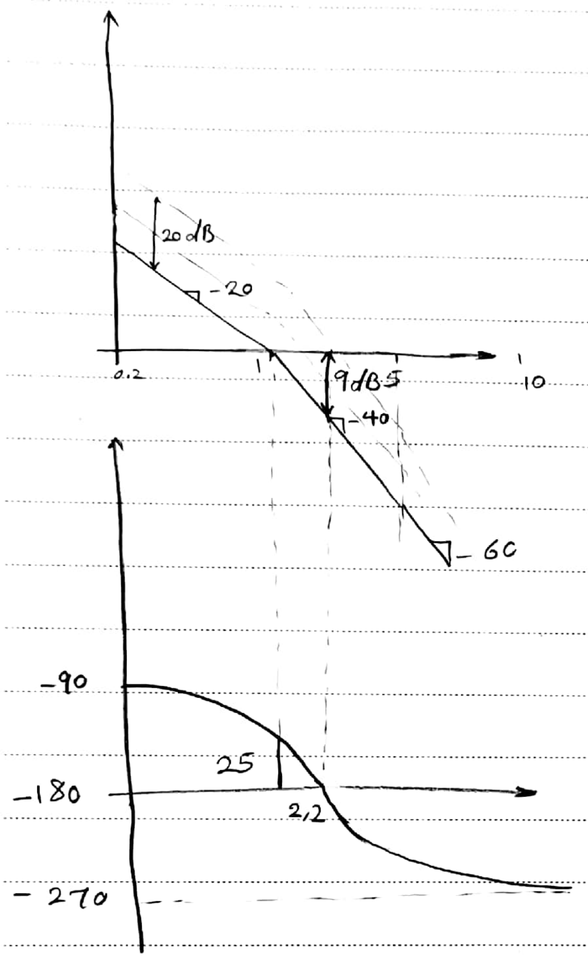
$$\omega = 1,25 \longrightarrow 106$$

$$\boxed{\omega_2 = 1,23} \longrightarrow 100,7$$

فرکانس قطع بهره

$$\phi = \angle G(j\omega)\Big|_{\omega_2} = -90 - \tan^{-1}1,23 - \tan^{-1}\frac{1,23}{5} = -154,7$$

$\gamma = 180 + \phi = 180 - 155 = \boxed{+25^\circ}$



$K_g = 20 \lg k_g$

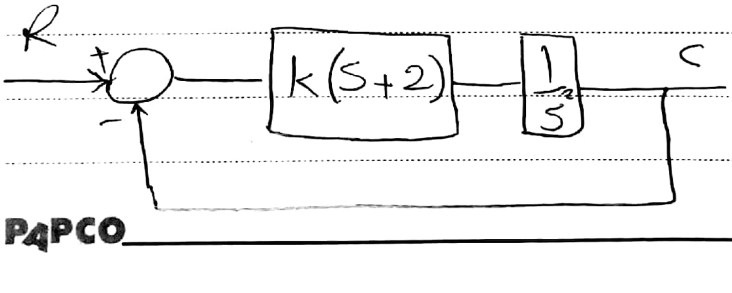
$9 = 20 \lg k_g$

$\lg k_g = \frac{9}{20} = 0.5$

$K_g = 10^{0.5} = 3.3$

if $k = 100$ $\begin{cases} \gamma = -30 \\ K_g = -12 \end{cases}$

مثال: نمودار نایکوئیست سیستم به صورت زیر می باشد
جهت K را به نحوی تعین کنید که حاشیه فاز 50° باشد
حاشیه بهره در این حالت چه قدر است؟



Subject :
Date

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{s^2}$$

$\gamma = \Phi + 180$ $\quad\quad$ $\Phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - 90 - 90$

$\gamma = \Phi + 180 \longrightarrow 50 = \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - 180 + 180$

$\longrightarrow \tan^{-1}\frac{\omega}{2} = 50$ $\quad\quad$ $\omega = 2,38$

برای حاشیه‌ی فاز

$|G(j\omega)| = 1 \longrightarrow \frac{k\sqrt{\omega^2+4}}{\omega^2} = 1$

$\omega = 2,38 \longrightarrow k = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2+4}}\Big|_{\omega=2,38} = 1,82$

$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - 90 - 90 = -180$

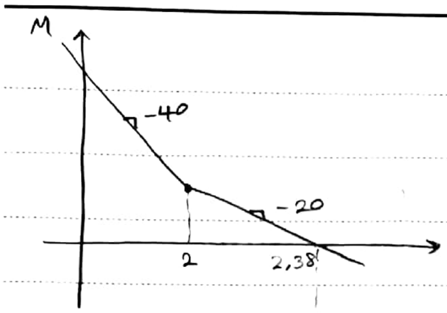
$\longrightarrow \tan^{-1}\frac{\omega}{2} = 0$ $\quad\quad$ $\omega = 0$

$|G(j\omega)|_{\omega=0} = \infty$

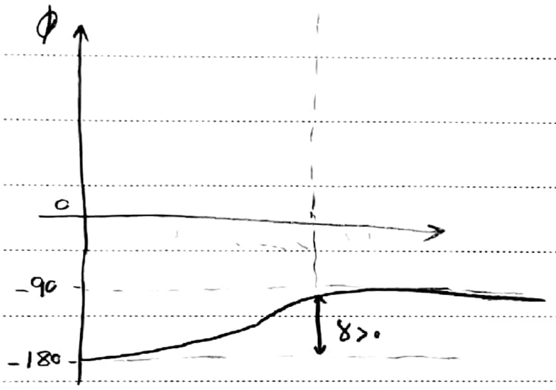
$K_g = -20\lg|G(j\omega)| = -\infty$ $\quad$ X

$\longrightarrow K_g = +\infty$

Subject:
Date



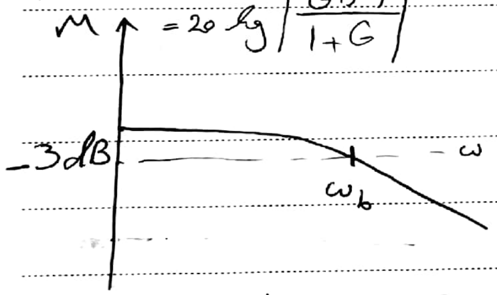
برای اینکه سیستم ناپایدار است نمودار بود اک
باید زیر خط -180 باشد اما در اینجا
می بینیم هرچه نمودار بهره بیشتر شود نمودار فاز
بالاتر می رود و $+90$ می شود



حاشیه بهره و فاز هم علامت هستند

پهنای باند band width : فرکانس قطع : پهنای باند فرکانس ω_b می باشد
که در آن دامنه پاسخ فرکانس حلقه بسته 3dB کمتر از دامنه پاسخ فرکانسی در فرکانس
صفر است

$M = 20 \log \left| \frac{G(j\omega)}{1+G} \right|$



دیاگرام بود در این حالت آن تابع تبدیل
حلقه بسته را رسم می کنیم

$$|M| = 20 \log \left| \frac{C}{R} \right| = -3$$

$$\log \left| \frac{C}{R} \right| = \frac{-3}{20} \longrightarrow \frac{C}{R} = 10^{-\frac{3}{20}} = 0.7$$

نسبت دامنه خروجی
به دامنه ورودی برابر 0.7 شده است

$R = \sin \omega t \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow C$

$\omega < \omega_b \qquad |R| \simeq |C|$

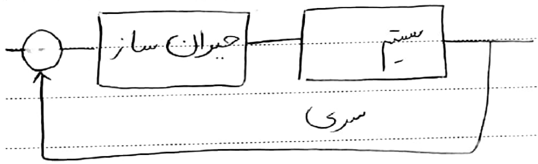
فصل ۶ طراحی جبران سازها Compensator

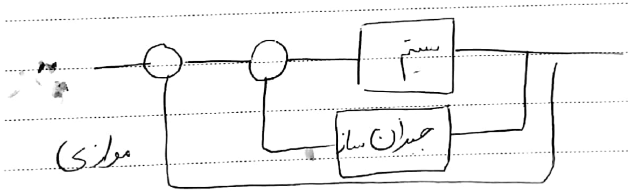
طراحی جبران سازها:

- حوزه زمان
  - جبران ساز پس فاز Lag
  - جبران ساز پیش فاز Lead
  - جبران ساز پیش پس فاز Lead_lag
- حوزه فرکانس
  - جبران ساز پس فاز
  - جبران ساز پیش فاز
  - جبران ساز پیش پس فاز

حوزه زمان ← مکان هندسی ریشه‌ها
حوزه فرکانس ← با استفاده از دیاگرام بود

نحوه قرارگیری بلوک جبران ساز





حالت سری معمول‌تر و کلی‌تر و پرکاربردتر است

طراحی جبران ساز در حوزه‌ی زمان
جبران ساز پیش فاز Lead compensator

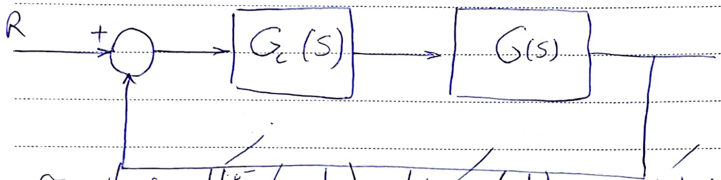
نحوه طراحی جبران ساز: جبران ساز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

Subject:
Date

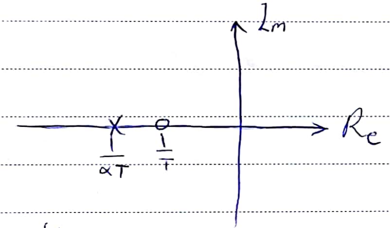
$$G_c(s) = k_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

$0<\alpha<1$ یا

$$G_c(s) = k_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$$



جبران ساز پیش فاز از یک صفر $\left(\frac{-1}{T}\right)$ و یک قطب $\left(\frac{-1}{\alpha T}\right)$ تشکیل شده است و همچنین یک ضریب k_c



1- با توجه به مشخصات عملکرد و خواسته‌های مسئله محل مطلوب برای قطب‌های غالب حلقه بسته به دست می‌آید (s_d)

2- چک شود که آیا مکان هندسی ریشه‌ها از روی s_d عبور می‌کند یا خیر. در صورت منفی بودن جواب زاویه‌ی ϕ محاسبه شود - ϕ زاویه‌ای است که جبران ساز باید اضافه کند تا مکان هندسی ریشه‌های جدید از روی s_d بگذرد

$$\phi = \angle G_c(s_d) = -180 - \angle G(s_d)$$

3- α یا به عبارت دیگر صفر و قطب جبران ساز به گونه‌ای با توجه به ϕ تعیین می‌شود

4- k_c با توجه به شرط اندازه تعیین می‌شود

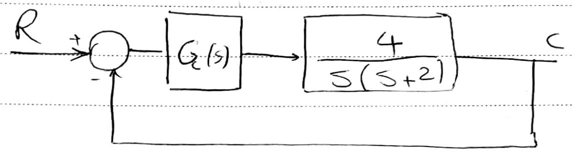
Subject:
Date

$$\left| G_c(s)\, G(s) \right|_{S_d} = 1$$

مثال: برای سیستم زیر جبران‌سازی طراحی کنید که قطب‌های غالب حلقه‌بسته دارای مشخصات زیر باشند

$\omega_n = 4$

$\zeta = 0.5$

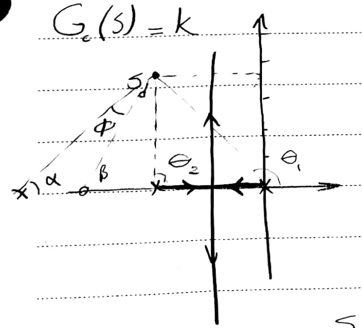


در مسائل مربوط به جبران‌سازی پیش‌فاز خواسته‌ها به صورت زیر داده می‌شود

- مستقیماً S_d یا همان قطب غالب داده شده است
- ζ و ω_n قطب غالب داده است $\qquad S_d = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
- t_s و M_p و t_r و ... داده شده است

در مرحله‌ی اول فرض می‌شود $\qquad G_c(s) = k$

مکان هندسی ریشه‌ها برای $G(s)$ رسم می‌شود



$$S_d = -2 + 4\sqrt{1-0.5^2} = -2 \pm 2\sqrt{3}\, j$$

PAPCO

Subject:
Date

$S_d = -1 \pm 2\sqrt{3}\,j$ فرض شود

نیازی به طراحی جبران ساز نداریم

$$\left|\frac{4k}{S(S+2)}\right|_{S_d} = 1 \longrightarrow \left|\frac{4k}{(-1+2\sqrt{3}j)(1+2\sqrt{3}j)}\right| = 1$$

ϕ

$$\angle G_c(s)\Big|_{S_d} + \angle G(s)\Big|_{S_d} = \pm 180\,(2K+1)$$

$$\angle G(s)\Big|_{S_d} = -\theta_1 - \theta_2 = -120 - 90 = \boxed{-210}$$

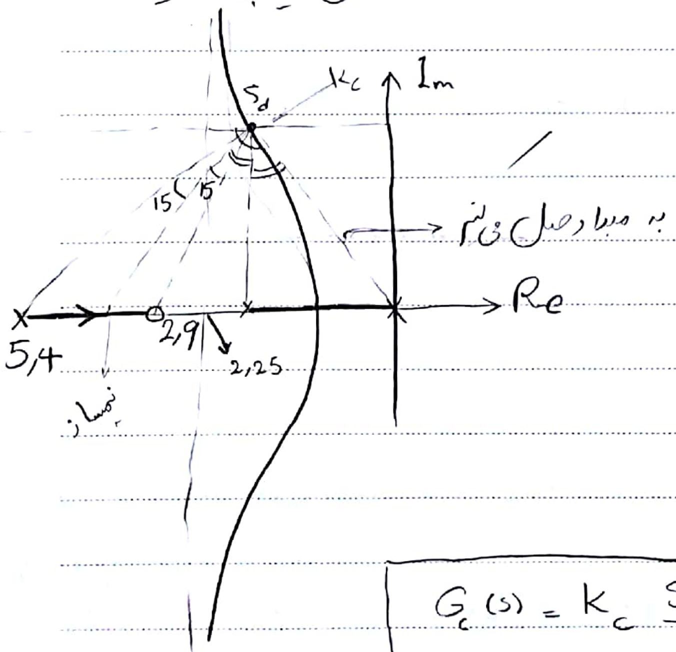
$\phi = +210 - 180 = +30$ زاویه‌ای که جبران ساز باید جبران کند

$\phi = \beta - \alpha$

صفر و قطب می تواند به صورت دلخواه اضافه و انتخاب شود

یک انتخاب بهینه که باعث می شود خطای حالت ماندگار به ورودی شیب کمینه می شود

استفاده از روش نیمساز می باشد



$$\sigma = \frac{\Sigma P - \Sigma Z}{n-m}$$

$$\frac{(-2-5,9)-(-2,9)}{3-1} = \frac{-7,9+2,9}{2}$$

$\longrightarrow \boxed{-2,25}$

$$\boxed{G_c(s) = K_c\,\frac{S+2,9}{S+5,4}}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

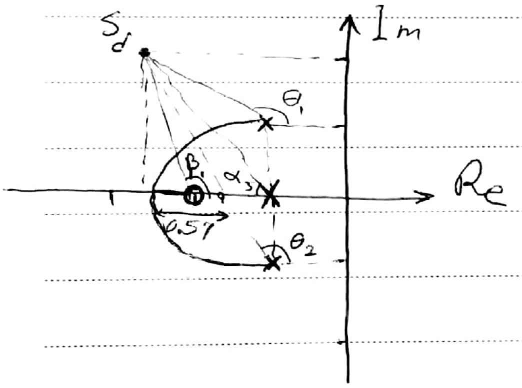
از شرط اندازه داریم

$$|G_c(s)\,G(s)|_{s_d} = 1$$

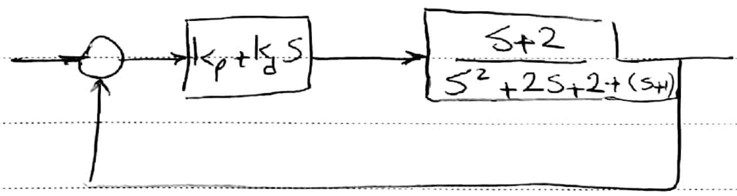
$$\left| k_c \frac{S+2,9}{S+5,4} \frac{4}{S(S+2)} \right|_{s_d} = \left| k_c \frac{0.9 + 2\sqrt{3}j}{3,4 + 2\sqrt{3}j} \frac{4}{(-2+2\sqrt{3}j)(+2\sqrt{3}j)} \right|$$

$$k_c = \frac{\sqrt{0.9^2 + 12} \times 4}{\sqrt{3,4^2+12} \cdot \sqrt{4+12}\ (2\sqrt{3})} = 1 \Longrightarrow \boxed{k_c = 4,7}$$

مثال : برای سیستم زیر یک کنترلر PD طراحی کنید به نحوی که قطبهای غالب سیستم حلقه بسته در $S_d = -2,5+2j$ قرار بگیرد



$$G_c(s) = k_p + k_d S$$



$$\angle G(s_d) = \beta_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = 104 - 146 - 117 - 127 = -286$$

$\tan \alpha_1 = \frac{1}{1,5} \longrightarrow \alpha_1 = 34 \qquad \theta_1 = 180 - 34 = 146$

$\tan \alpha_2 = \frac{3}{1,5} \longrightarrow \alpha_2 = 63 \qquad \theta_2 = 180 - 63 = 117$

$\tan \gamma_1 = \frac{2}{2,5} = 4 \qquad \gamma = 76 \qquad \beta_1 = 180 - 76 = 104$

PAPCO

$\tan \alpha_3 = \frac{2}{1,5} \qquad \alpha_3 = 53 \qquad \theta_3 = 127$

Subject:
Date

$\tan\psi_2 = \frac{2}{x}$ $\psi_2 = 180 - 106 = 74$ $\tan 74 = \frac{2}{x}$ $x = 0.57$

$2.5 - 0.57 = 1.93$

$\frac{k_p}{k_d} = 1.93$

$G_c(s) = k_d(s + 1.93)$

$\left| k_d(s+1.93) \frac{s+2}{(s^2+2s+2)(s+1)} \right|_{s_d} = 1 \longrightarrow k_d = \checkmark$

جبران ساز پس فاز: این جبران ساز در مواقعی استفاده می شود که سیستم پاسخ شخصی مطلوبی دارد ولی پاسخ حالت ماندگار آن رضایت بخش نیست

در این حالت اساس جبران سازی افزایش بهره ی حلقه باز است بدون اینکه مشخصات پاسخ گذرا تغییر محسوسی کند یعنی مکان هندسی ریشه ها در اطراف قطب های حلقه بسته ی غالب نباید زیاد تغییر کند

ولی بهره ی حلقه باز باید تا حد لازم زیاد شود

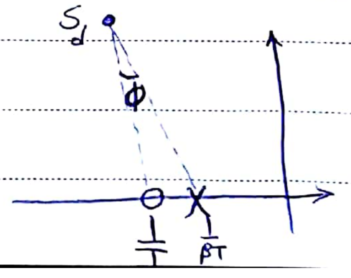
برای پرهیز از تغییر مکان هندسی ریشه ها در حوالی s_d زاویه ای که جبران ساز اضافه می کند باید کمتر از $5°$ باشد

بنابراین صفر و قطب جبران ساز خیلی به هم نزدیک باشند و مقادیر کوچکی خواهند داشت

روند طراحی:

1- تابع تبدیل جبران ساز پس فاز به صورت زیر در نظر گرفته می شود

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$$



$\beta > 1$

PAPCO

Subject:
Date

$\phi < 5^\circ$ $\phi = \angle G(s_d)$

2- ثابت خطای استاتیک k_v بدون جبران ساز محاسبه می شود

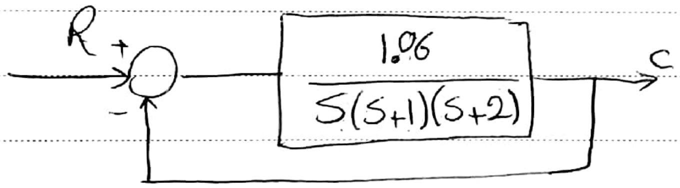
3- $\beta = \dfrac{k_{vd}}{k_v} \rightarrow$ صورت مسئله

4- T به گونه ای انتخاب شود که $|\phi| < 5^\circ$

5- محاسبه ی k_c از شرط اندازه $|G_c(s)\, G(s)| = 1 \rightarrow k_c = \dots$

k_c عددی نزدیک به یک خواهد بود

مثال: برای سیستم زیر می خواهیم ثابت خطای استاتیک سرعت k_v را به حدود 5 برسانیم بدون اینکه محل قطب های غالب حلقه بسته تغییر زیادی کنند



$$\frac{C}{R} = \frac{1.06}{S(S+1)(S+2)+1.06}$$

معادله مشخصه $S(S+1)(S+2)+1.06=0$

$$\begin{cases} S_{1,2} = -0.33 \pm 0.586j \\ S_3 = -2.33 \end{cases}$$

$$k_v = \lim_{S\to 0} S\,G(s) = \frac{1.06}{2} = 0.53$$

Subject:
Date

$$G_c(s_d) = \angle \frac{-0.33+0.586j+0.005}{-0.33+0.586j+0.005} = \angle \frac{-0.2807+0.5864j}{-0.3357+0.5864j}$$

$$= -154 + 150 = -4.2$$

$$1 < |\angle G_c(s_d)| < 5$$

$$T\uparrow = |\angle G_c(s_d)|\downarrow \qquad T\downarrow = |\angle G_c(s_d)|\uparrow$$

$$G_c(s_d) = k_c \frac{s+0.005}{s+0.005}$$

محاسبه‌ی k_c از شرط اندازه

$$|G_c(s)\,G(s)|_{s_d} = 1$$

$$\left| k_c \frac{(-0.33+0.586j+0.05)}{(-0.33+0.586j+0.005)} \times \frac{1.06}{(0.33+0.586j)(1.33+0.586j)(2.33+0.586j)} \right|$$

$$\longrightarrow k_c = 0.966$$

$$G_c(s) = 0.966\,\frac{s+0.05}{s+0.005}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G_c(s)\,G(s) = \frac{0.966 \times 0.05}{0.005} \times \frac{1.06}{2} = 5.12$$

جبران ساز پیش پس فاز : این جبران ساز در مواقعی استفاده می شود که هم بخواهیم محل قطب های غالب را تغییر داده و به محل مطلوب برسانیم وهم بخواهیم خطای حالت ماندگار را کاهش دهیم و یا به عبارت دیگر k_v را افزایش دهیم

تابع تبدیل جبران ساز به صورت زیر تعریف می شود

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

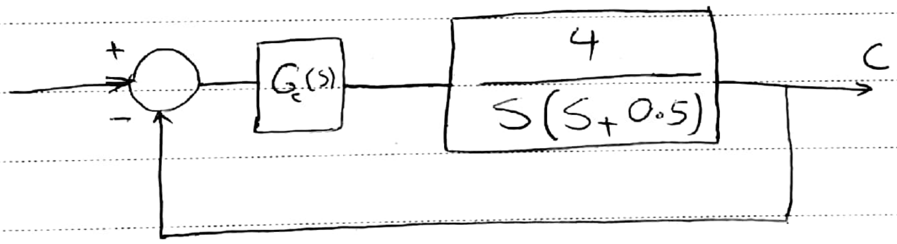
$$G_c(s) = k_c \underbrace{\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha T_1}} \right)}_{G_{c_1}} \underbrace{\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} \right)}_{G_{c_2}} \qquad \beta > 1 \qquad 0 < \alpha < 1$$

مراحل طراحی به این صورت است که در ابتدا جبران ساز پیش فاز طراحی شده و قطب های غالب در محل مطلوب قرار گیرند در این مرحله k_c و α و T_1 محاسبه می شوند

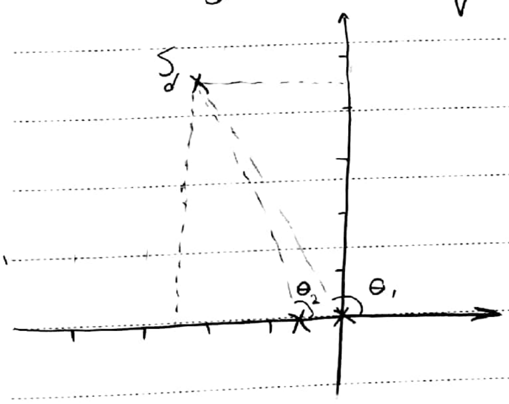
سپس برای تابع تبدیل $G_{c_1}(s)G(s)$ جبران ساز پس فاز $G_{c_2}(s)$ طراحی می شود به طوریکه خواسته های مربوط به خطای حالت ماندگار برآورده شود

مثال: برای سیستم زیر جبران سازی طراحی کنید که قطب های غالب دارای مشخصات زیر باشند

$\omega_n = 5 \qquad \zeta = 0.5 \qquad K_v = 80$



$$S_d = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, j = -2.5 \pm 5\sqrt{1-0.25}\, j = -2.5 \pm 4.33 j$$



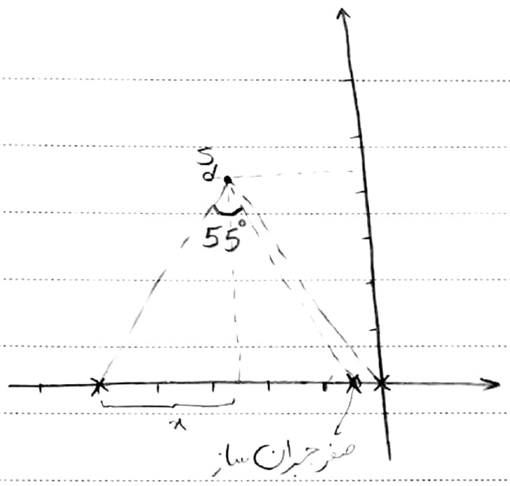
$$\angle G(S_d) = -\theta_1 - \theta_2 = -235^\circ$$

$$\phi = -180 + 235 = +55^\circ$$

طراحی جبران ساز پیش فاز

$$G_{c_1}(s) = K_c \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha T_1}}$$

Subject:
Date



محاسبه‌ی k_c

$$|G_{c_1}(s) + 0.5| = 1$$

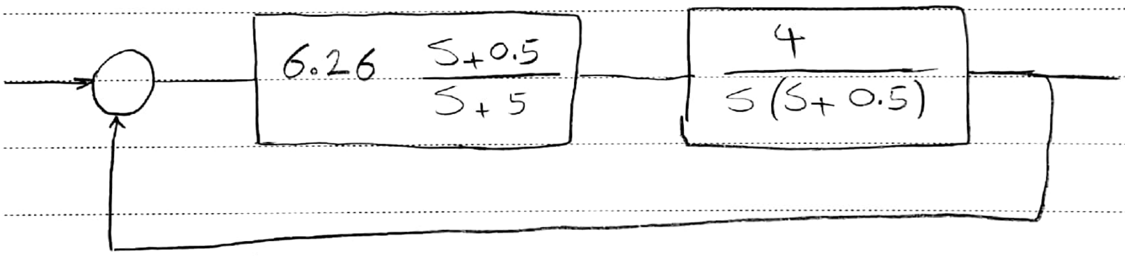
$$\left| k_c \frac{S+0.5}{S+5} \frac{4}{S(S+0.5)} \right| = 1$$

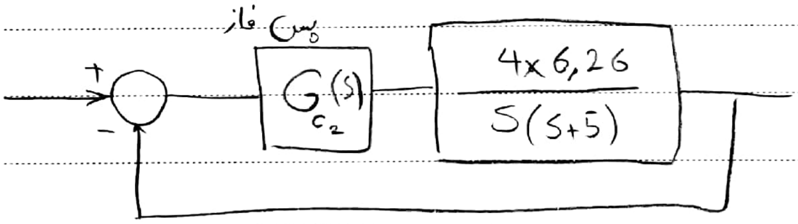
$S_d = -2.5 + 4.33j$

$$\left| k_c \frac{4}{(2.5+4.33j)(-2.5+4.33j)} \right| = 1 \qquad \left| k_c \frac{4}{\sqrt{2.5^2+4.33^2}\sqrt{2.5^2+4.33^2}} \right| = 1$$

$$\Longrightarrow k_c = 6.26$$

پس سیستم جدید با جبران ساز پیش فاز می‌شود





$$k_v = \lim S\, G_{c_1}(s)\, G(s) = \frac{4\times 6.26}{5} = 5$$

$$\beta = \frac{k_{v_d}}{k_v} = \frac{80}{5} = 16$$

تعیین $T_2 = 5$

PAPCO

Subject:
Date

$$G_{c_2} = \frac{S + \frac{1}{T_2}}{S + \frac{1}{\beta T_2}} = \frac{S + 0.2}{S + 0.0124}$$

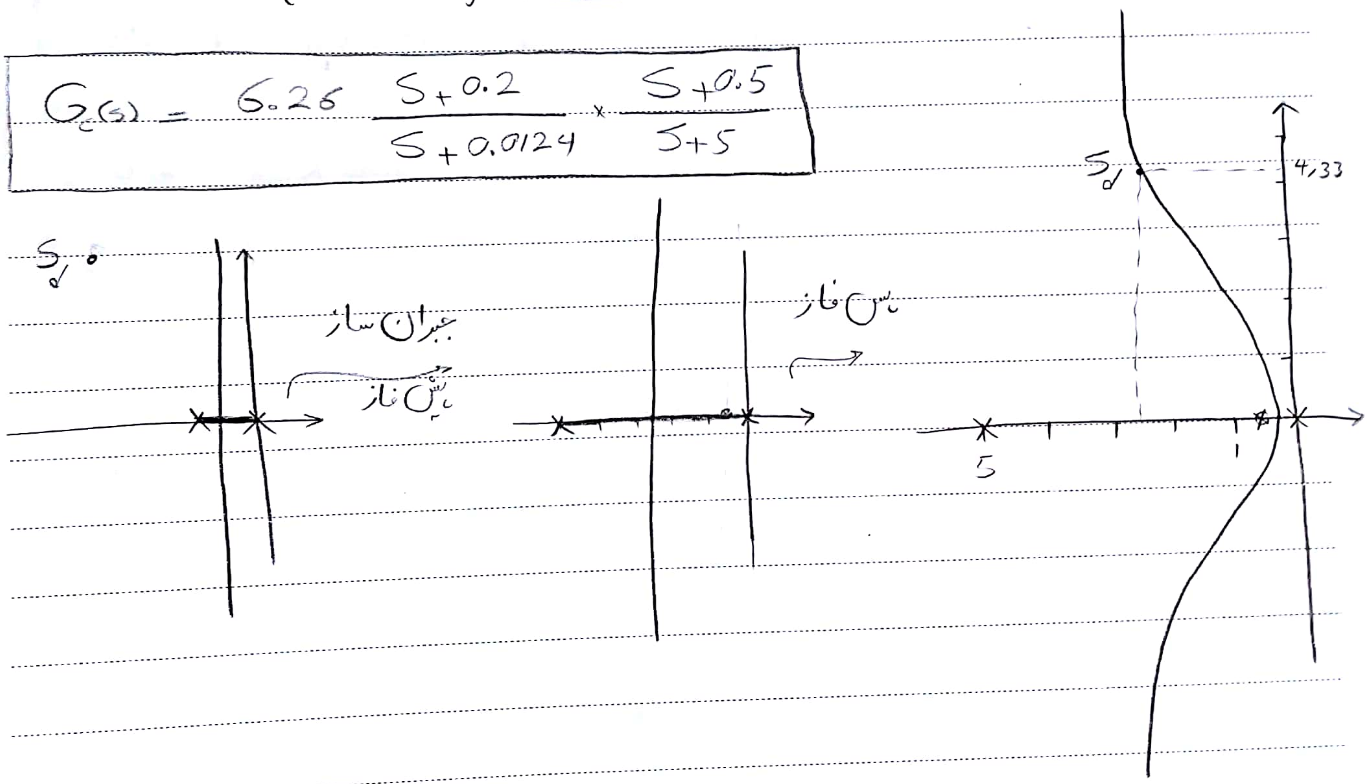
$$\angle G_{c_2}(S_d) = \angle \frac{-2.5 + 0.2 + 4.33j}{-2.5 + 0.0124 + 4.33j}$$

$$\angle G_{c_2}(S_d) = \angle -2.3 + 4.33j - \angle -2.4876 + 4.33j$$

$$\tan^{-1}\frac{4.33}{-2.3} - \tan^{-1}\frac{4.33}{-2.487}$$

$$= -62 - (-59.95) = \boxed{-2^\circ}$$

$$\boxed{G_c(s) = 6.26 \, \frac{S + 0.2}{S + 0.0124} \times \frac{S + 0.5}{S + 5}}$$



طراحی سیستم های کنترل به روش تحلیل پاسخ فرکانسی: در طراحی یک سیستم کنترل عملکرد حوزه زمان معمولا مهم ترین حوزه است در رهیافت ورودی پاسخ فرکانسی عملکرد پاسخ گذرا به نحو غیرمستقیم بر حسب حاشیه فاز حاشیه بهره پهنای باند و ... بیان می شود

طراحی در حوزه فرکانس ساده و سرراست است و نمودار پاسخ فرکانسی به روشنی نشان می دهد که سیستم چگونه باید اصلاح شود

در این روش پیش بینی دقیق و کمی پاسخ گذرا مشکل است

طراحی در حوزه فرکانس دو روش اساسی دارد

نمودار قطبی و نمودار بود

اما روش نمودار بود بسیار ساده تر است

روش متداول در این رهیافت ابتدا بهره ی حلقه باز در جهت رسیدن به دقت حالت ماندگار مطلوب تنظیم می شود سپس منحنی های دامنه و فاز سیستم حلقه باز جبران نشده رسم می شود

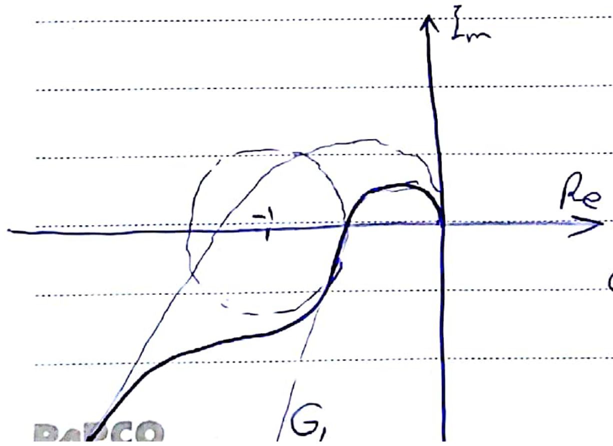
اگر مشخصات حاشیه فاز و بهره برآورده نشود جبران ساز مناسب طراحی می گردد

طراحی جبران ساز یک مصالحه ای است بین دقت حالت ماندگار و پایداری نسبی

بهره در فرکانس بالا باید به حد کافی بزرگ باشد تا خطای حالت ماندگار کم شود

شیب منحنی لگاریتم دامنه در نزدیکی فرکانس بهره باید $-20 \frac{dB}{decade}$ باشد تا حاشیه فاز مطلوب را تامین کند

در ناحیه فرکانس های بالا بهره باید به سرعت تنظیم شود تا اثرات نویز min شود



شکل مناسب پاسخ فرکانسی حلقه باز

رفتار سیستم در فرکانس های بالا مثل G_1 باشد و در فرکانس های پایین مثل G_2

Subject:

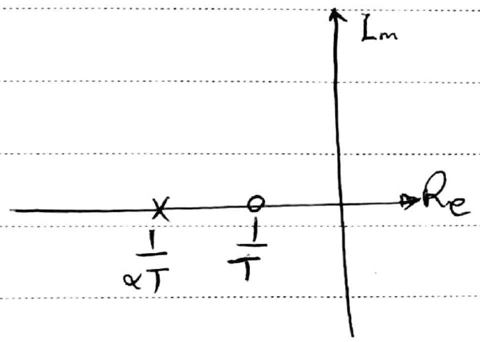
Date

جبران ساز پیش فاز: جبران ساز پیش فاز را به صورت زیر در نظر بگیرید

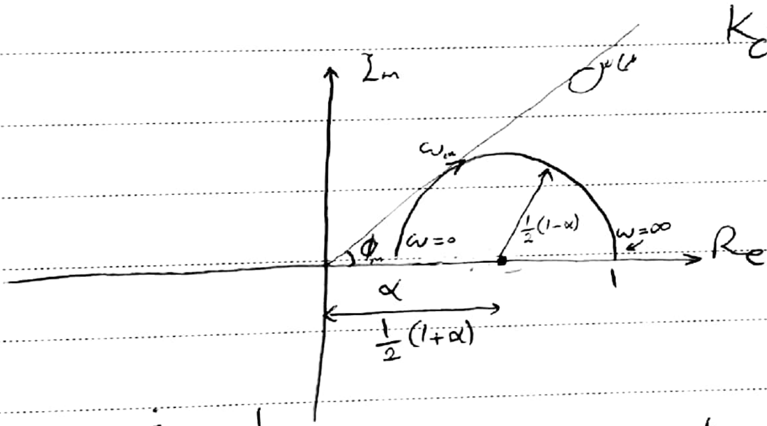
$$G_c(s) = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \qquad 0<\alpha<1$$

α ضریب تضعیف جبران ساز گفته می شود

$0.05<\alpha<1$



نمودار قطبی $G_c(s)$ به ازای $K_c=1$



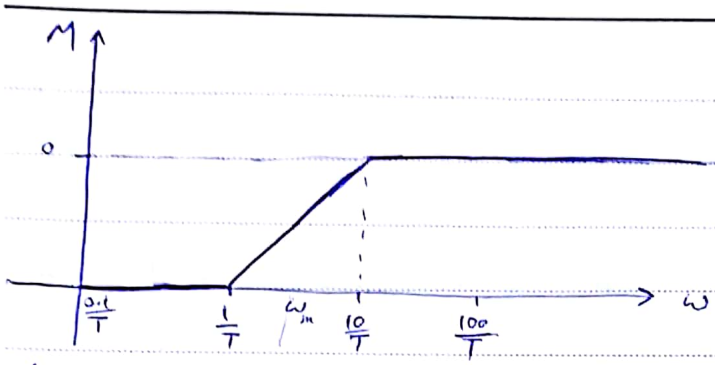
$$G(j\omega) = \frac{j\omega+\frac{1}{T}}{j\omega+\frac{1}{\alpha T}} \qquad \sin\phi = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

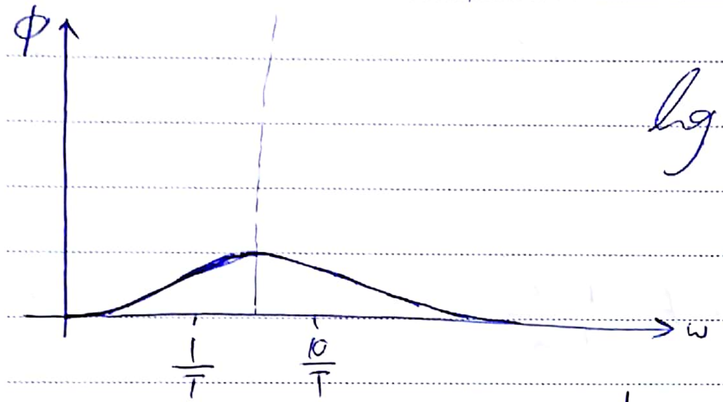
چون α مینیمم حدود 0.05 است حداکثر زاویه ی پیش فازی که جبران ساز ایجاد می کند حدود 65° است

نمودار بود جبران ساز به ازای $K_c=1$

Scanned by CamScanner

Subject:
Date





$$\log \omega_m = \frac{1}{2}\left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T}\right)$$

$$\boxed{\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\, T}}$$

$$20 \log \left| G_c(s) \right|_{\omega_m} = 20 \log \sqrt{\alpha}$$

روند طراحی جبران ساز پیش فاز: کار اصلی جبران ساز پیش فاز تغییر شکل دادن منحنی پاسخ فرکانسی است به طوری که زاویه ی پیش فازی لازم ایجاد شود

خواسته ها بر حسب حاشیه فاز و حاشیه بهره و ثابت خطای ایستای سرعت داده شده است

۱- جبران ساز پیش فاز را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$G(s) = K_c\, \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \qquad K_c \alpha = K$$

که در نظر می گیریم

جبران ساز در کنار تابع تبدیل سیستم اصلی می شود

$$G_c(s)\, G(s) = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} K G(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G_1(s)$$

Subject:
Date

که $G_1(s) = kG(s)$

بهره‌ی K به طوری تعیین می‌شود که خواسته‌ها در مورد ثابت خطای ایستای سرعت برآورده شود

2- با استفاده از k بدست آمده نمودار بود $G_1(s)$ را رسم کنیم و حاشیه فاز را تعیین کنید (β)

3- زاویه‌ی ϕ_m از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود

$$\phi_m = \phi_d - \beta + 5^\circ$$

4- با استفاده از رابطه‌ی $\sin\phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ مقدار α تعیین می‌شود

فرکانسی که در آن دامنه‌ی سیستم جبران نشده $(G_1(s))$ برابر $-20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ است را به عنوان ω_m یا فرکانس عبور بهره جدید در نظر می‌گیریم

داشتیم $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,T}$ پس مقدار T تعیین می‌شود

5- فرکانس های گوشه‌ای می‌شود $\frac{1}{T}$ و $\frac{1}{\alpha T}$

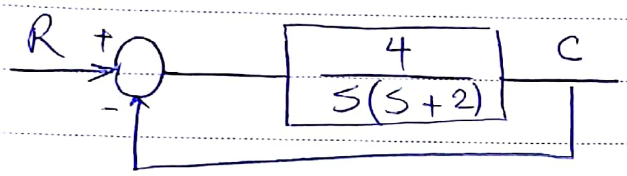
6- $k = k_c\alpha \longrightarrow k_c = ✓$

7- دیاگرام بود $\frac{G_c}{k}$ را رسم کرده و با $kG(s)$ جمع می‌کنیم، حاشیه بهره و فاز را بررسی کرده تا از رضایت بخش بودن آن اطمینان حاصل شود

اگر نبود محل صفر و قطب جبران ساز اصلاح شود

Subject:
Date

مثال: برای سیستم زیر جبران سازی طراحی کنید که $k_v=20$ و حاشیه فاز حداقل 50° و حاشیه بهره $10\,dB$ باشد



تابع تبدیل جبران ساز به صورت

$$G_1(s) = K_c\alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

$$K = K_c\alpha$$

$$G_1(s) = K G(s) = \frac{4K}{2} = 20 \qquad 2K = 20 \qquad \boxed{K=10}$$

حال دیاگرام بود $G_1(s)$ را رسم می کنیم

$$G_1(s) = \frac{40}{s(s+2)} = \frac{20}{s(\frac{s}{2}+1)}$$

$$\phi_m = \phi_d - \beta + 5 = 50 - 17 + 5 = 35^\circ$$

$$\sin\phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \alpha = \boxed{0.24}$$

$$-20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = -6.2\ dB \longrightarrow \boxed{\omega_m = 9}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{T} = 4.41} \qquad \boxed{\frac{1}{\alpha T} = 18.4}$$

$$G_c(s) = K_c\frac{s+4.41}{s+18.4} = \boxed{41.7\frac{s+4.41}{s+18.4}}$$

Subject:
Date

$K = K_c \alpha \longrightarrow 10$ $K_c\ 0.24 \Rightarrow K_c = 41,7$