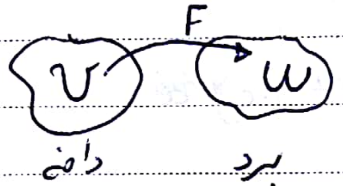
ریاضی مهندسی

Subject
Date

تابع : تابع نگاشتی است که از فضای V به فضای W تحت یک رابطه (معادله) مشخص.



به اعضای داخل V ، متغیر مستقل (Independent variable)

به اعضای داخل W ، متغیر وابسته (dependent variable)

در حالت کلی یک تابع برحسب متغیرهای مستقل به شکل $y = f(x_1, \dots, x_n)$ نمایش می‌دهند

معادله دیفرانسیل (Diffrential Equation)

هر رابطه‌ی کلی بین تابع ، متغیرهای مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیرهای مستقل را معادله‌ی دیفرانسیل می‌گویند

$x^2y'' + xy' + y = 0$ و $y = y(x)$

انواع : ① معادله‌ی دیفرانسیل معمولی (ODE) ← معادله‌ای که مشتقات آن کامل باشند
ordinary ...
$y''' + 2xy' + x^4 - 2 = 0$

② معادله‌ی دیفرانسیل جزئی (PDE) ← معادله‌ای که مشتقات جزئی آن کامل باشند
partial ...
$$\frac{\delta^4 u}{\delta x^4} + \frac{\delta^4 u}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 u}{\delta y^4} = 0$$

مرتبه‌ی یک معادله دیفرانسیل : (order of ...)

بالاترین مرتبه‌ی مشتق در یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه می‌گویند.

درجه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل : (Degree of ...) : توان بالاترین مشتق یک معادله به شرطی که

Subject
Date

معادله‌ی دیفرانسیل همگن (Homogeneous D.E)

هرگاه در معادله‌ی دیفرانسیلی جمله‌ی خالص از متغیر مستقل وجود نداشته باشد همگن است.

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = R(x) \longrightarrow \begin{cases} \text{if } R(x) = 0 \longrightarrow \text{همگن و خطی} \\ \text{if } R(x) \neq 0 \longrightarrow \text{ناهمگن، غیرخطی} \end{cases}$$

$$y' + y - x = 0 \longrightarrow \alpha_1(\underbrace{y_1' + y_1}_{x}) + \alpha_2(\underbrace{y_2'' + y_2}_{x}) - x = \cancel{x} \longleftarrow ?$$

پس غیرخطی

مثال) $y''' + 3y'' + 2y = 0$ ODE, 3rd_order, degree of 1, خطی، همگن

$y''' + 3(y'')^2 + 2y = 0$ ODE, 3rd-order, degree of 1, همگن، غیرخطی ← $(y'')^2$

$yy'' + y'\sin y + xy = x$ ODE, 2nd_order, NO degree, ناهمگن، غیرخطی

$\frac{d^2}{dx^2}(xy'') + xy'^2 + 3x = 0$ ODE, 4^{th} order, degree of 1, ناهمگن، غیرخطی

(مشتق برحسب x)

یادآوری

مثال) مطلوب است حل معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + 4y = 3\cos 5x$ ؟

جواب عمومی $\Rightarrow y'' + 4y = 0 \rightsquigarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

$$y_h = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$$

جواب خصوصی $\Rightarrow y'' + 4y = 3\cos 5x \rightsquigarrow y_p = A\cos 5x + B\sin 5x$

جایگذاری $\rightsquigarrow A = -\frac{1}{7}$ و $B = 0 \rightsquigarrow y_p = -\frac{1}{7}\cos 5x$

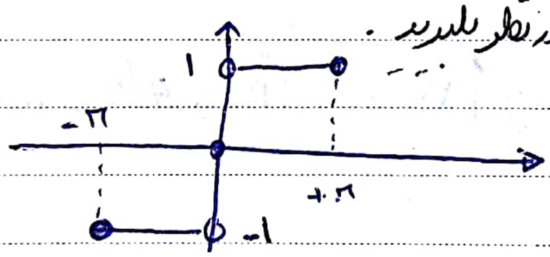
$$y = y_h + y_p = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{1}{7}\cos 5x$$

اگر $R(x)$ ترکیبی از توابع مثلثاتی یعنی یا چندجمله‌ای باشد پیدا کردن جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ با حدس جواب به شکل همان نوع تابع میسر است. چنانچه $R(x)$ شکل خاص و ویژه‌ای مانند حالت‌های مذکور وجود نداشته باشد راه حل چیست؟

اگر $R(x)$ به شکل تابع سینوسی و کسینوسی نباشد اما بتوان آن را به صورت چندجمله از توابع مثلثاتی تقریب زد آنگاه حل تقریبی معادله میسر می‌باشد.

مثال) تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0 \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$



تقریبی از خود تابع از مجموع sin و cos ها

$$g(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right\} \rightsquigarrow$$ سری فوریه تابع f

چگونه برای یک تابع دلخواه سری فوریه آن را بدست آوریم؟

؟!

Subject
Date

توابع متناوب (periodic fu...)

تابعی را متناوب می‌گویند هرگاه عدد مثبت مانند P وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x داشته باشیم $f(x+P) = f(x)$ ، P دوره تناوب است

ق: اگر تابع $f(x)$ متناوب باشد و P دوره تناوب آن ، آنگاه 2P نیز دوره تناوب آن خواهد بود

بنابراین nP هم یک دوره‌ی تناوب برای تابع $f(x)$ می‌باشد . پس منظور از دوره‌ی تناوب کوچکترین P است .

ق: اگر توابع f و g دو تابع متناوب با دوره‌ی تناوب P باشند آنگاه تابع $af+bg$ نیز تناوبی با دوره‌ی تناوب P می‌باشد

نکته : در این درس برای سهولت در محاسبات از $P=2L$ استفاده می‌کنیم

مثال) دوره‌ی تناوب تابع $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ را بدست آورید ؟

باید معادله‌ی $f(x+P)=f(x)$ را حل کنیم

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+P)\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}x+\frac{n\pi}{L}P\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(y+\frac{n\pi}{L}P\right) = \sin(y) \Rightarrow \frac{n\pi}{L}P = 2\pi \Rightarrow P = \frac{2L}{n}$$

$$\Downarrow$$

Subject
Date

در بحث سری فوریه به دنبال این هستیم که یک تابع متناوب دلخواه با دوره‌ی تناوب $P=2L$ را بتوان

به شکل مجموعی از جملات $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ و $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ بنویسیم.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

به ضرایب ثابت a_0، a_n و b_n در اصطلاح ضرایب سری فوریه می‌گویند. به عنوان مثال

اگر سری فوریه تابع پله را در نظر بگیریم ضرایب a_0، a_n و b_n آن به شکل زیر هستند

$a_0=0$ چون جمله‌ی ثابتی ندارد $\qquad$ $a_n=0$ چون کسینوس ندارد $\qquad$ $L=\pi$ چون دوره تناوب 2π بود

$b_1=\frac{4}{\pi}$ و $b_2=0$ و $b_3=\frac{4}{3\pi}$ و ... چون فقط فردها را دارد

توضیح داده شد که یک تابع دلخواه با دوره‌ی تناوب $P=2L$ در بازه‌ی $[-L,L]$ را می‌توان به صورت

یک سری از جملات مثلثاتی به شکل زیر تقریب زد: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$

برای به دست آوردن ضرایب سری فوریه: ابتدا چهار رابطه‌ی مهم به نام فرمول‌های اویلر معرفی می‌شوند

① $\displaystyle\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx=\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi}{L}x\,dx=0$ $\qquad$ (m و n اعداد صحیح)

② $$\int_{-L}^{L}\left(\sin\frac{n\pi}{L}x\ \sin\frac{m\pi}{L}x\right)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L & m=n\end{cases}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

(۳) $\int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{n\pi}{L}x\ \cos\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} L & m=n \\ 0 & m\neq n\end{cases}$

(۴) $\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi}{L}x\ \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = 0$

برای اثبات این روابط می‌توان از اتحادهای زیر کمک گرفت:

✓ $\sin a\sin b = \frac{1}{۲}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$

✓ $\sin a\cos b = \frac{1}{۲}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$

✓ $\cos a\cos b = \frac{1}{۲}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$

از طرفین رابطه‌ی سری فوریه در بازه‌ی $(-L, L)$ انتگرال می‌گیریم.

$$\int_{-L}^{L}f(x)dx = \frac{1}{۲}\int_{-L}^{L}a_0\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\underbrace{\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{0}+b_n\underbrace{\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{0}\Big)$$

$$\Rightarrow a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$$

طرفین معادله‌ی فوریه را در $\cos\frac{\pi m}{L}x$ ضرب کرده و از طرفین انتگرال می‌گیریم:

$$\Rightarrow f(x)\cos\frac{m\pi}{L}x = \frac{a_0}{۲}\cos\frac{m\pi}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{m\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{m\pi}{L}x\Big)$$

$$\xRightarrow{\int_{-L}^{L}}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{m\pi}{L}x = L\,a_m \Rightarrow a_m=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{m\pi}{L}x\,dx$$

Subject
Date

طرفین معادله‌ی فوریه را در $\sin\frac{m\pi}{L}x$ ضرب کرده و در بازه‌ی $(-L,L)$ انتگرال می‌گیریم.

$$\Longrightarrow b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

* به طور خلاصه داریم:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

حالا تابع یک را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<\pi \\ 0 & x=0,\pi,-\pi \\ -1 & -\pi<x<0 \end{cases}$$

می‌خواهیم سری فوریه‌ی این تابع را بدست آوریم

اگر فرض کنیم این تابع متناوب در بازه‌ی $(-\pi,\pi)$ باشد، سری فوریه‌ی آن مشابه رابطه‌ی (۱) می‌شود

اما باید ضرایب را بدست آوریم: $L=?\quad p=2\pi \Rightarrow L=\pi$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\,dx = 0 \rightarrow$$ یا از روی شکل

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx \rightarrow$$ برای $f(x)$، ۲ ضابطه داریم پس در بازه جدا می‌کنیم.

$$\Longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx = \dots = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) \rightarrow \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

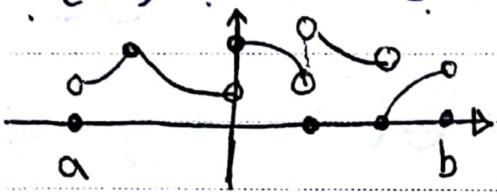
سری

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \dots = \frac{4}{\pi}(\sin x + \dots)$$

فوریه

Subject
Date

تابع تکه‌ای - پیوسته : هرگاه تعداد نقاط ناپیوستگی آن محدود و قابل شمارش در بازه‌ی $[a,b]$ باشد



به عنوان مثال تابع شکل روبرو ۵ نقطه‌ی ناپیوستگی باشد

قضیه دیریکله : اگر $f(x)$ یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب $p=2L$ در بازه‌ی $[-L,L]$ باشد به علاوه $f(x)$ و $f'(x)$ هر دو در بازه‌ی مذکور تکه‌ای - پیوسته باشند ، آنگاه در نقاط پیوستگی تابع ، سری فوریه به خود تابع همگراست

هم‌چنین در نقاط ناپیوستگی مانند x ، سری فوریه به $\frac{1}{2}\{f(x^+)+f(x^-)\}$ همگراست

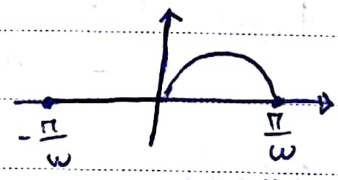
به عنوان مثال تابع پله را در نظر بگیرید . اولاً $f(x)$ و $f'(x)$ هر دو تکه‌ای پیوسته است . بنابراین سری فوریه‌ی

تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=0$ به مقدار همگراست : $\quad$ at $x=0 \rightarrow \frac{1}{2}\{f(0^+)+f(0^-)\}=0$

at $x=\pi \rightarrow \frac{1}{2}\{f(\pi^+)+f(\pi^-)\}=0$

برای تابع متناوب زیر در بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$ سری فوریه را بدست آورید ؟

$$u(t)=\begin{cases}0 & -\frac{\pi}{\omega}<t\leq 0\\ E\sin\omega t & 0\leq t<\frac{\pi}{\omega}\end{cases}$$



$p=\frac{2\pi}{\omega} \rightarrow L=\frac{\pi}{\omega}$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\,dt=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}f(t)\,dt=\frac{\omega}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{\omega}}E\sin\omega t\,dt=\dots=\frac{2E}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt=\dots=\frac{\omega}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{\omega}}E\sin\omega t\cos\frac{n\pi}{L}t\,dt \xRightarrow{\text{ضرب به جمع}} \begin{cases}0 & \text{n فرد}\\ \frac{-2E}{(n^2-1)\pi} & \text{n زوج}\end{cases}$$

$$b_n=\dots=\begin{cases}\frac{E}{2} & n=1\\ 0 & n=2,3,\dots\end{cases}$$

⚠ حتماً بررسی کنید

برای $n=1$ مخرج ۰ می‌شه پس باید جداگانه حساب کرد b_1 رو .

توابع زوج و فرد : $f(x)$ تابع فرد است اگر $f(x) = -f(-x)$ (نسبت به مبدأ متقارن)

و تابع زوج است اگر $f(x) = f(-x)$ (نسبت به y متقارن است)

الف) حالت خاص تابع فرد

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$$

ف = ز × ف

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

ز = ف × ف

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

(تابع فرد فقط b_n دارد)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

ب) حالت خاص تابع زوج

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

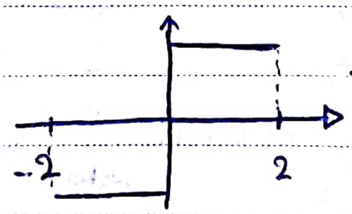
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

مثال) سری فوریه تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -2<x<0 \\ +1 & 0<x<2 \end{cases}$$



فرد $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \end{cases}$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow \frac{2}{2}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx \Rightarrow \dots = \frac{-2}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\{(-1)^n - 1\} \Rightarrow b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2} + \cdots$$

Subject
Date

سری فوریه تابع $f(x)=\sin x$ در بازه‌ی $(-\pi,\pi)$ می‌شه خودش 

" " $f(x)=\sin x$ " " $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ باید حل شه ← $b_n=\frac{-8n(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}$

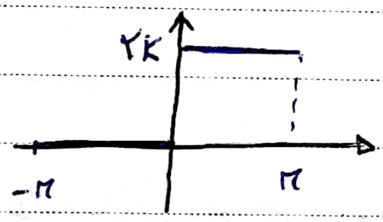
قضیه‌ی جمع و ضرب

۱) ضرایب فوریه‌ی تابع f_1+f_2 برابر است با مجموع ضرایب سری فوریه f_1 و f_2

۲) ضرایب فوریه‌ی تابع cf برابر است با c برابر ضرایب سری فوریه‌ی تابع f

c ← عدد ثابت

مثال) سری فوریه را بیابید.



ضابطه داد شکل می‌کشی، شکل داد ضابطه می‌نویسی

$$f(x)=\begin{cases}2K & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}\quad , \dots$$

1ق   2ق

راه حل: این تابع K برابر $\oplus$ K سری فوریه تابع پله است پس:

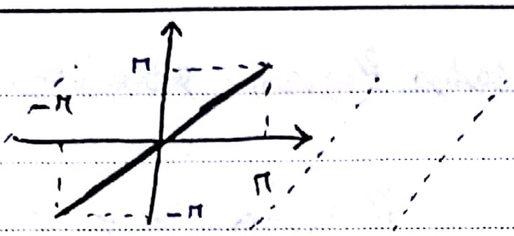
$$K f_{پله}(x)=\frac{4K}{\pi}\left\{\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\dots\right\}$$

عدد ثابت سری فوریه خودش است ← ثابت است ← $f_2=K$

$$\Rightarrow f(x)=K f_1(x)+K=K+\frac{4K}{\pi}\left\{\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\dots\right\}$$

ضرایب: $a_0=2K$ $a_n=0$ $b_n=\begin{cases}\frac{4K}{n\pi} & n \text{ فرد}\\ 0 & n \text{ زوج}\end{cases}$

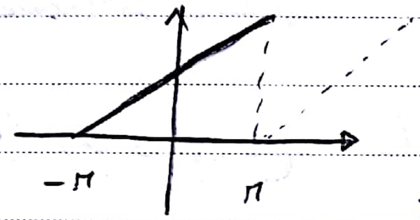
PAPCO



سری فوریه تابع $f(x)=x$ مطابق شکل را حساب کنید؟

بررسی کنید $\to$ $b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$

تابع فرد $\to$ $a_0 , a_n = 0$



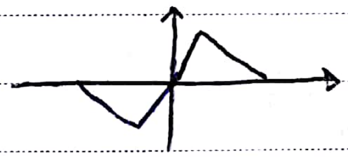
سری فوریه تابع روبرو را بدست آورید؟

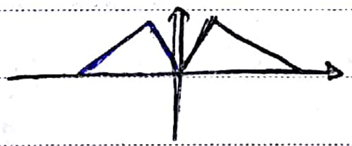
$f(x) = f_1 + \pi$

سوال بالا ← ① ق → خودش

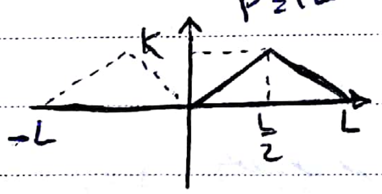
$$\begin{cases} a_0 = 2\pi \\ a_n = 0 \\ b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n \end{cases}$$

توسعه‌ی زوج و فرد تابع: چنانچه تابع مورد نظر تناوبی نباشد می‌توان آن را به شکل تناوبی زوج یا فرد توسعه داد.





مثال) سری فوریه تابع شکل روبرو را به کمک توسعه‌ی زوج حساب نمایید



$P = 2L$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2K}{L}x & 0<x<\frac{L}{2} \\ \frac{2K}{L}(L-x) & \frac{L}{2}<x<L \end{cases}$$

چون تابع زوج شده است $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2K}{L}x\,dx + \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2K}{L}(L-x)\,dx \Rightarrow a_0 = K$$

Subject
Date

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow \frac{2}{L}\int_0^{L/2}\frac{2K}{L}x\,dx\cos\frac{n\pi}{L} + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L}\frac{2K}{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x$$

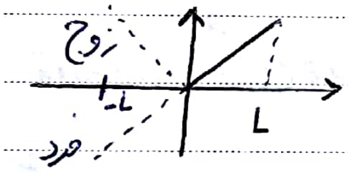
جزء جزء $\Rightarrow \dots \Rightarrow a_n = \frac{4K}{n^2\pi^2}\left\{2\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n - 1\right\}$

$$f(x) = \frac{K}{2} + \frac{4K}{\pi^2}\left\{\frac{1}{4}\times -2\times\cos\frac{2\pi x}{L}\right\} + \frac{4K}{36\pi^2}\left\{\cos\frac{6\pi x}{L}\times(-2)\right\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{K}{2} - \frac{16K}{\pi^2}\left\{\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{L} + \dots\right\}$$

توسعه‌ی فرد و زوج سری فوریه‌ی تابع $f(x) = x$ برای $0<x<L$ را رسم کرده و مشخص کنید کدام توسعه

جواب دقیق‌تری از تقریب $f(x)$ می‌باشد؟



توسعه‌ی زوج: $f(x) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x$ ✓ n^2

توسعه‌ی فرد: $f(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$ n

قضیه انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوریه:

اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(-L,L)$ در شرایط قضیه دیریکله صدق کند آنگاه می‌توان سری فوریه تابع

$g(x) = \int_{-L}^{x} f(u)\,du$ را می‌توان از انتگرال جمله به جمله سری فوریه $f(x)$ محاسبه کرد.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\Rightarrow g(x) = \int_{-L}^{x} f(u)\,du = \frac{a_0}{2}(x+L) + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{n}\left(\sin\frac{n\pi x}{L}\right) - \frac{b_n}{n}\left(\cos\frac{n\pi x}{L} + (-1)^{n+1}\right)\right\}$$

Subject
Date

برای توسعه‌ی تابع فرد $f(x)=x$ در بازه‌ی $0<x<L$ داشتیم:

$$x=f(x)=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

مثلاً برای سری فوریه‌ی $f(x)=1$ داریم:

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 1=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

اگر چند جمله‌ی اول را ببینیم مشخص می‌شود که سری به ۱ همگرا نمی‌شود پس همه جا نمی‌توان مشتق گرفت $(f(L)\neq f(-L))$

قضیه مشتق گیری جمله به جمله:

اگر: ① تابع $f(x)$ متناوب با دوره تناوب $p=2L$ در بازه‌ی $(-L, L)$ باشد

② تابع $f(x)$ به ازای هر x در بازه‌ی $(-L, L)$ پیوسته باشد و $f(L)=f(-L)$

③ $f'(x)$ در بازه‌ی $[-L, L]$ تکه ای پیوسته باشد

اگر هر سه شرط باهم برقرار بود آنگاه می توان از مشتق گیری جمله به جمله سری فوریه بدست آورد.

کاربرد سری فوریه در مکانیک %

کاربرد سری فوریه در ریاضی: بدست آوردن یک دنباله (توی امتحان دنباله‌ای ده و سری فوریه

رو بدست می آری بعد به ازای x ای سری فوریه مساوی دنباله می شود)

Subject
Date

قضیه تساوی پارسوال: فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[-L, L]$ دارای سری فوریه به شکل زیر باشد

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

حال طرفین را در $f(x)$ ضرب می‌کنیم و در بازه‌ی $[-L, L]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\Rightarrow \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$ تساوی پارسوال

نکته: اگر دنباله‌ی داده شده _ داشت از جایگذاری حل می‌کنیم. اگر مثبت + بود باید از پارسوال حل کنیم

مثال) به کمک سری فوریه تابع مقابل مقدار سری فوریه (دنباله) زیر را بدست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} t+\frac{\pi}{2} & -\pi<t<0 \\ -t+\frac{\pi}{2} & 0<t<\pi \end{cases} \qquad f(t) = \frac{4}{\pi}\left\{\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \dots\right\}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = ? \qquad \text{at } t=0 \rightsquigarrow f(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\left\{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right\} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

به کمک سری فوریه فوق مقدار دنباله $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$ را بدست آورید؟

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)^2 dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^2 dt = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{3^2\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{5^2\pi}\right)^2 + \dots = \frac{16}{\pi^2}\left\{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right\} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \text{دنباله} = \frac{\pi^4}{96}$$

Subject

Date

فرم مختلط سری فوریه :

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ a_n \frac{e^{\frac{in\pi x}{L}} + e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{in\pi x}{L}} - e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{2i} \right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ e^{\frac{in\pi x}{L}}\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) + e^{-\frac{in\pi x}{L}}\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) \right\}$$

$$= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{C_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ \underbrace{\left(\frac{a_n - b_n i}{2}\right)}_{C_n} e^{\frac{in\pi x}{L}} + \underbrace{\left(\frac{a_n + b_n i}{2}\right)}_{C_{-n}} e^{-\frac{in\pi x}{L}} \right\}$$

$$\Rightarrow f(x) = C_0 + \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$ ← فرم مختلط سری فوریه

$$\begin{cases} C_0 = \dfrac{a_0}{2} \\ C_n = \dfrac{a_n - b_n i}{2} \\ C_{-n} = \dfrac{a_n + b_n i}{2} \end{cases}$$

$$C_n = \frac{1}{2}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx - \frac{i}{2}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

بعد از جایگذاری $\sin$ و $\cos$: $\ldots = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{L}}\,dx$

پس جای اینکه a_n و b_n رو حساب کنیم بعد C_n رو بدست بیاریم ، یه راست C_n رو حساب می‌کنیم.

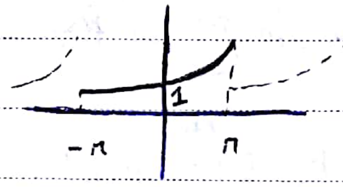
Subject

Date

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx \,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ C_{-n} = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{\frac{in\pi x}{L}}\, dx \end{cases}$$

فرم مختلط سری فوریه تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x) = e^{x} \quad -\pi < x < \pi$$



$\boxed{L = \pi}$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x} e^{-\frac{in\pi x}{\pi}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{1-in} e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{1-in}\left\{ e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi} \right\} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{1-in}\left\{ (-1)^n e^{\pi} - (-1)^n e^{-\pi} \right\}$$

$e^{\pi} \times e^{-in\pi}$ $(-1)^n$ $\hookrightarrow \cos n\pi - i\cancel{\sin n\pi}$

$e^{-\pi} \times e^{in\pi}$ $(-1)^n$ $\hookrightarrow \cos n\pi + i\cancel{\sin n\pi}$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)}\left\{ e^{\pi} - e^{-\pi} \right\} \xRightarrow{\text{مزدوج}} \frac{(-1)^n (1+in)}{(2\pi)(1+n^2)}\left\{ e^{\pi} - e^{-\pi} \right\}$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1+in)}{2\pi\,(1+n^2)}\left\{ e^{\pi} - e^{-\pi} \right\} e^{\frac{in\pi x}{\pi}}$$

Subject
Date

قضیه ریمان: اگر تابع $f(x)$ دارای سری فوریه به شکل زیر باشد $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L})$

آنگاه: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

تبدیلات محدود فوریه: فرض کنید $f(x)$ یک تابع فرد باشد (یا به شکل فرد توسعه داده شده باشد) در این

صورت $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$; $b_n=\frac{2}{L}\underbrace{\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{F_s(n)}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} F_s(n)\sin\frac{n\pi}{L}x$

به $F_s(n)$ در اصطلاح تبدیل فوریه محدود سینوسی $f(x)$ می گویند.

فرض کنید $f(x)$ یک تابع زوج یا به شکل زوج توسعه داده شده باشد آنگاه

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$; $a_n=\frac{2}{L}\underbrace{\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{F_C(n)}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}F_c(n)\cos\frac{n\pi x}{L}dx+\frac{F_c(0)}{L}$

به $F_c(n)$ در اصطلاح تبدیل فوریه کسینوسی محدود $f(x)$ می گویند.

مثال) تبدیل فوریه‌ی محدود سینوسی و کسینوسی تابع $f(x)=4x$ در بازه‌ی $0<x<4$ را بدست آورید.

$F_s(n)=\int_0^4 4x\sin\frac{n\pi x}{4}dx=\dots=\frac{16}{n\pi}(-1)^{n+1}$

$L=4$

P4PCO

Subject
Date

$F_C(n) = \int_0^4 4x \cos\frac{n\pi x}{4} dx = \cdots = \frac{64}{(n\pi)^2}\{(-1)^n - 1\}$; $F_C(0) = \int_0^4 4x\, dx = 32$

سری فوریه برای توابع محدود (در یک بازه‌ی تعریف شده) قابل محاسبه است، حال اگر دامنه‌ی تابع نامحدود باشد

چه باید کرد؟ در این شرایط سری فوریه تبدیل به انتگرال فوریه می‌شود

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v)\cos\lambda(x-v)\, dv\, d\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \int_0^\infty (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\, d\lambda \\ A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos\lambda v\, dv \\ B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin\lambda v\, dv \end{cases}$$

حالات خاص :

$f(x)$ یک تابع فرد باشد :

$A(\lambda) = 0 \qquad B(\lambda) = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin\lambda t\, dt}_{F_S(\lambda)}$

و $f(x) = \int_0^\infty B(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda$

$F_S(\lambda) \rightsquigarrow$ تبدیل فوریه سینوسی نامحدود

$f(x)$ یک تابع زوج باشد :

$A(\lambda) = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(w)\cos\lambda w\, dw}_{F_C(\lambda)}$

$B(\lambda) = 0$

$F_C(\lambda) \rightsquigarrow$ تبدیل فوریه کسینوسی نامحدود

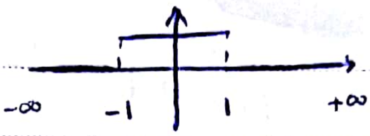
و $f(x) = \int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda$

Subject

Date

تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$



تابع زوج است $B(\lambda)=0$

$$A(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos\lambda v\,dv=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\lambda v\,dv+\frac{2}{\pi}\int_1^\infty 0\times\cos\lambda v\,dv$$

$$=\frac{2}{\pi\lambda}\sin\lambda v\Big|_0^1=\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^\infty\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda=\begin{cases}1 & |x|<1\\ \frac{0+1}{2} & x=\pm1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

در نقاط ناپیوسته از میانگین رد می شود.

$$\Rightarrow\int_0^\infty\frac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |x|<1\\ \frac{\pi}{4} & x=\pm1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$$\text{at } x=0\Rightarrow\int_0^\infty\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda=\frac{\pi}{2}$$

سینک کاربرد آن در معماری انتگرال

بعد ۵۰٪

تبدیل فوریه نامحدود:

فرم مثلثاتی (۱) انتگرال فوریه را در نظر بگیرید

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos\lambda(x-v)\,dv\,d\lambda$$

$$\text{if } \cos\lambda(x-v)=\frac{e^{i\lambda(x-v)}+e^{-i\lambda(x-v)}}{2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{i\lambda(x-v)}+\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{-i\lambda(x-v)}\,dv\,d\lambda\right\}$$

با جابجا کردن: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{i\lambda(x-v)}\,dv\,d\lambda$: فرم مختلط انتگرال فوریه

P4PCO

Subject
Date

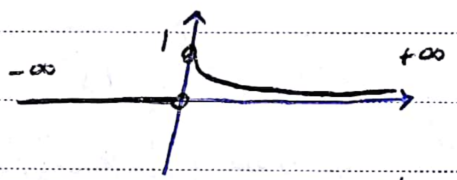
از فرم مختلط انتگرال فوریه داریم : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\underbrace{\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\,e^{-i\lambda v}\,dv\right\}}_{F(\lambda)} d\lambda$

$F(\lambda) \rightsquigarrow$ تبدیل فوریه نامحدود

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda$ $\qquad F(\lambda) = \mathcal{F}(f) \rightarrow$ شکل دیگر

مثال) تبدیل فوریه‌ی نامحدود تابع $f(x)$ را حساب نمایید؟

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$



با نگاه به بازه ها هم می‌شه فهمید نامحدوده !! ←

حل : $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,e^{-i\lambda s}\,ds$

$$= 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-as} e^{-i\lambda s}\,ds = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\lambda)s}\,ds = \frac{-1}{a+i\lambda} e^{-(a+i\lambda)s}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a+i\lambda} \overset{\text{مزدوج}}{=} \frac{a-i\lambda}{a^2+\lambda^2}$$

ق (۱) : اگر تبدیل فوریه توابع f و g موجود باشد :

$$\mathcal{F}(af+bg) = a\mathcal{F}(f)+b\mathcal{F}(g)$$

ق (۲) : فرض کنید $f(x)$ در طول محور x پیوسته باشد و $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$

$$\mathcal{F}(\underbrace{f'(x)}_{\text{مشتق تابع اصلی}}) = i\lambda\,\mathcal{F}(\underbrace{f(x)}_{\text{تابع اصلی}})$$

مثال) می‌دانیم تبدیل فوریه $\mathcal{F}(e^{-x^2}) = \sqrt{\pi}\,e^{-\lambda^2/4}$ در اینصورت تبدیل فوریه نامحدود تابع

Subject

Date

xe^{-x^2} را بدست آورید.

شرط اول: پیوسته است ✓ شرط دوم: در ∞ به سمت ۰ می‌رود $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ ✓

$$\longrightarrow \mathcal{F}(xe^{-x^2}) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left((e^{-x^2})'\right)$$

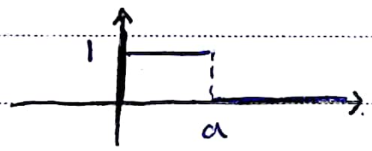
$$= -\frac{1}{2} i\lambda\, \mathcal{F}(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2} i\lambda \sqrt{\pi}\, e^{-\lambda^2/4}$$

تساوی پارسوال در انتگرال فوریه:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx = \int_0^{\infty} A^2(\lambda) + B^2(\lambda)\,d\lambda$$

برای محاسبه یک سری انتگرال های خاص می توان از پارسوال استفاده کرد

مثال) ابتدا برای تابع شکل زیر انتگرال فوریه را بدست آورید.



نکته ① تابع نامحدود است پس سری فوریه ندارد نکته ② تابع فقط از یک طرف ادامه دارد اما ما در فوریه $-\infty$ و $+\infty$ داریم پس باید از توسعه زوج و فرد استفاده کنیم

بسط زوج:
$$\begin{cases} A(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(w)\cos\lambda w\,dw = \frac{2}{\pi}\int_0^{a}\cos\lambda w\,dw = \frac{2}{\pi}\frac{\sin a\lambda}{\lambda} \\ B(\lambda) = 0 \end{cases}$$

بسط فرد:
$$\begin{cases} A(\lambda) = 0 \\ B(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(w)\sin\lambda w\,dw = \frac{2}{\pi}\int_0^{a} 1\times \sin\lambda w\,dw = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos a\lambda}{\lambda}\right) \end{cases}$$

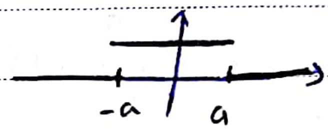
حال به کمک نتایج بدست آمده انتگرال های زیر را محاسبه کنید؟

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx \quad , \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

از تساوی پارسوال استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx = \int_0^\infty \left(A^2(\lambda)+B^2(\lambda)\right)$$

طرف چپ: $\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}(1)^2\,dx = \frac{2a}{\pi}$



با توجه به بسط زوج تابع:

$$\frac{2a}{\pi} = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin a\lambda}{\lambda}\right)^2 d\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{\pi} = \int_0^\infty \frac{4}{\pi^2}\,\frac{\sin^2 a\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin^2 a\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^2 a\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda = \frac{\pi a}{2} \rightsquigarrow$$ صورت سوال

برای $a=1$ صورت سوال بدست می‌آید پس جواب $\frac{\pi}{2}$ است

با توجه به بسط فرد تابع:

$$\frac{2a}{\pi} = \int_0^\infty \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1-\cos a\lambda}{\lambda}\right)^2 d\lambda$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos a\lambda}{\lambda}\right)^2 d\lambda \rightsquigarrow \text{if } a=2 \Rightarrow \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{(1-\cos 2\lambda)^2}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{(2\sin^2\lambda)^2}{\lambda^2}\,d\lambda = \frac{4\times 4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin^4\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^4\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda = \frac{\pi}{4}$$

پایان فصل ۳

Subject
Date

- فصل دوم -

- حل معادلات PDE -

تعداد زیادی از مسائل مهندسی مکانیک تبدیل به معادلات PDE می شوند :

معادله انتقال حرارت یک بعدی $\frac{\delta u}{\delta t} = c^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ معادله ی موج یک بعدی $\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = c^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$

اثبات مهم نیست .

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \frac{\delta u}{\delta t}(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

حل معادله ی موج یک بعدی : $\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = c^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$

ا قدم : $u(x,t) = F(x)\, G(t)$

روش جداسازی متغیرها :

داخل معادله $\Rightarrow F(x)\, G''(t) = c^2 F''(x)\, G(t)$

می گذاریم $\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{G''}{G} = \frac{F''}{F} = K$ ثابت

یک تابع زمان مساوی با یک تابع مکان شده، این در صورتی امکان دارد که هر دو عدد باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} F'' - KF = 0 \quad (1) \\ G'' - KC^2 G = 0 \quad (2) \end{cases}$$

در روش جداسازی متغیرها یک معادله ی PDE به دو معادله ی ODE تبدیل می شود.

حل (1) :
شرایط مرزی $\Rightarrow u(0,t) = 0 \Rightarrow F(0)\, G(t) = 0 \rightsquigarrow F(0) = 0$
$\Rightarrow u(L,t) = 0 \Rightarrow F(L)\, G(t) = 0 \rightsquigarrow F(L) = 0$

$$\begin{cases} F'' - KF = 0 \\ F(0) = 0 \\ F(L) = 0 \end{cases}$$

الف) $K = 0$ $\quad F'' = 0 \Rightarrow F = C_1 x + C_2 \xrightarrow[\text{مرزی}]{\text{با شرایط}} C_1, C_2 = 0$
$\Rightarrow F(x) = 0$ ✗

ب) $K \neq 0$

ب) $K > 0$ یا $K = \mu^2$ $\quad F'' - \mu^2 F = 0 \Rightarrow F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$

Subject
Date

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ F(L)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A+B=0 \\ Ae^{\mu L}+Be^{-\mu L}=0 \end{matrix} \Rightarrow A(e^{\mu L}-e^{-\mu L})=0 \Rightarrow A=0 \rightsquigarrow B=0 \rightsquigarrow \cancel{F(x)=0}$$

$K=-\mu^2$ ، $K<0$ (۲

$$F''+\mu^2F=0 \Rightarrow F(x)=A\cos\mu x+D\sin\mu x$$

$$\begin{cases} F(0)=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow B\sin\mu x=F(x) \\ F(L)=0 \Rightarrow B\sin\mu L=0 \Rightarrow \sin\mu L=0 \Rightarrow \mu L=n\pi \Rightarrow \mu=\frac{n\pi}{L} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{L}x \quad , n=1,2,\dots \quad *$$

$$G''-KC^2G=0 \Rightarrow G''+\mu^2C^2G=0 \Rightarrow G''+(\underbrace{\tfrac{n\pi}{L}C}_{\lambda_n})^2G=0 \quad :(۲) \text{ حل}$$

$$\Rightarrow G''+(\lambda_n)^2G=0 \Rightarrow G_n(t)=C_n\cos\lambda_n t+D_n\sin\lambda_n t \quad **$$

$$\Rightarrow u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t) \overset{*}{\underset{**}{=}} (\alpha_n\cos\lambda_n t+\beta_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos\lambda_n t+\beta_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

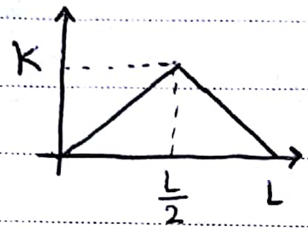
$$u(x,0)=f(x) \rightsquigarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi x}{L} \rightsquigarrow \alpha_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$u_t(x,0)=g(x) \rightsquigarrow u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\alpha_n\lambda_n\sin\lambda_n t+\beta_n\lambda_n\cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n\lambda_n)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \beta_n\lambda_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L} \rightsquigarrow \beta_n=\frac{1}{\lambda_n}\times\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

مثال) معادله‌ی ریسمان مرتعش را برای جابه‌جایی اولیه‌ی $f(x)$ و سرعت رهاسازی $g(x)=0$ حل کنید.



$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = c^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$$

استخراج ضابطه‌ی $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2K}{L}x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{2K}{L}(L-x) & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

$g(x)$ مشتق زمانی $U(x)$ است و چون گفته سرعت ۰ است ← $g(x)=0 \rightsquigarrow \beta_n = 0$

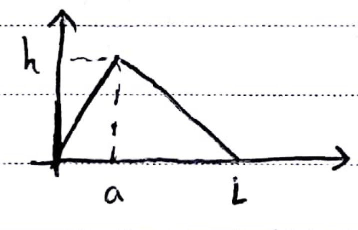
$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\left\{\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2K}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2K}{L}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\}$$

$$= \dots = \frac{8K}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$u(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\lambda_n t + 0\right)\sin\frac{n\pi x}{L} \quad \text{و} \quad \lambda_n = \frac{n\pi c}{L}$$

$$u(y,t) = \frac{8K}{\pi^2}\left\{1\times\cos\frac{\pi c t}{L}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi c}{L}t\,\sin\frac{3\pi x}{L} + \dots\right\}$$

مثال) معادله‌ی ریسمان مرتعش برای جابه‌جایی اولیه‌ی $f(x)$ و سرعت رهاسازی $g(x)=0$ حل کنید.



$$g(x)=0 \rightsquigarrow \beta_n = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{a}x & 0 \le x \le a \\ h\left(\frac{L-x}{L-a}\right) & a \le x \le L \end{cases}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \dots = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 a(L-a)}\sin\frac{n\pi a}{L}$$

Subject
Date

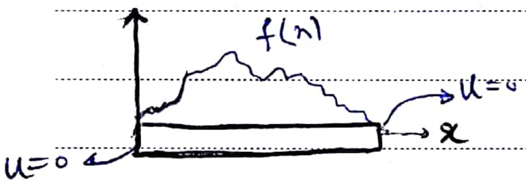
مثال) سوال قبل با شرط $f(x)=0$ و سرعت رهاسازی $g(x)$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{vx}{a} & 0\leq x\leq a \\ v\,\dfrac{L-x}{L-a} & a\leq x\leq L \end{cases}$$

ثابت

$f(x)=0 \rightsquigarrow \alpha_n=0$

$$\beta_n=\frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2vL^2}{n^2\pi^2 c\,a(L-a)}\sin\frac{n\pi}{L}a$$



معادله‌ی انتشار حرارت غیر اتلافی یک بعدی :

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $c^2=\dfrac{K}{\rho c_p}$ ← ضریب انتقال حرارت $u(x,t)$ دمای نقاط مختلف میله در زمان t

دمای نقاط سر و ته ← $u(0,t)=u(L,t)=0$: شرایط مرزی

$u(x,0)=f(x)$: شرایط اولیه

که در لحظه‌ی ۰ دمای نقاط روی میله در دمای اولیه می‌باشد

روش جداسازی متغیرها :

$u(x,t)=F(x)G(t)$

(1) $\Rightarrow FG'=c^2F''G \rightsquigarrow \dfrac{G'}{c^2G}=\dfrac{F''}{F}=K$ تساوی تنها زمانی امکان پذیر است که مساوی عدد ثابتی مثل K باشد.

می‌توان ثابت کرد برای $K>0$ و $K=0$ فقط $u(x,t)=0$ بدست می‌آید.

پس $K<0$ و $K=-\mu^2$

$$\begin{cases} F''-KF=0 \\ G'-Kc^2G=0 \end{cases}$$

Subject
Date

$$\Rightarrow \begin{cases} F''+\mu^2 F=0 \quad ② \quad \xrightarrow{\text{حل}} F(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x \\ G'+(\mu c)^2 G=0 \quad ③ \quad \xrightarrow{\text{حل}} G(t)=Ae^{-(\mu c)^2 t} \end{cases}$$

$$u(0,t)=0 \Rightarrow F(0)G(t)=0 \Rightarrow F(0)=0$$

$$u(L,t)=0 \Rightarrow F(L)G(t)=0 \Rightarrow F(L)=0$$

$$F(0)=0 \rightarrow A\cos 0+B\sin 0=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow F(x)=B\sin\mu x$$

$$F(L)=0 \rightarrow \underbrace{B}_{\text{نباید ۰ بشه}}\ \underbrace{\sin\mu L}_{\text{تنها این باید ۰ بشه}}=0 \Rightarrow \mu L=n\pi \Rightarrow \mu=\frac{n\pi}{L}$$

$$\Rightarrow F_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$G_n(t)=A_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n=\frac{n\pi c}{L}$$

$$\Rightarrow u_n(x,t)=\alpha_n e^{-\lambda_n^2 t}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{-\lambda_n^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad \lambda_n=\frac{n\pi c}{L}$$

$$u(x,0)=f(x) \xrightarrow{t=0} f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad \alpha_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

exam: برای تابع $f(-x)=f(x)=e^{-kx}$ که $k>0$ ، $x>0$ انتگرال فوریه را محاسبه کرده و سپس

با توجه به انتگرال فوریه محاسبه شده مقدار $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{4+x^2}$ را بدست آورید؟

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{2}{\pi}\frac{k}{k^2+\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda=e^{-kx}$$

PAPCO

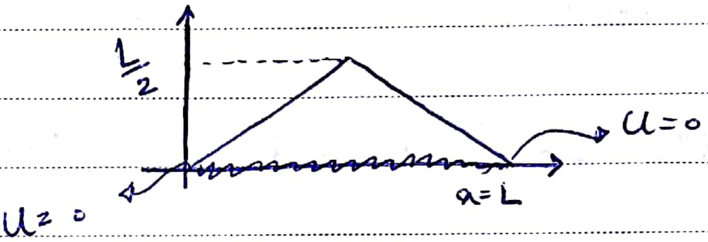
Scanned by CamScanner

$$\text{if } K=2 \Rightarrow e^{-2x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\cos\lambda x}{4+\lambda^2}\,d\lambda$$

$$\text{if } x=2 \Rightarrow e^{-4} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\cos 2\lambda}{4+\lambda^2}\,d\lambda \Rightarrow \frac{\pi}{4}e^{-4} = \int_0^\infty \frac{\cos 2\lambda}{4+\lambda^2}\,d\lambda$$

مثال) میله‌ی حرارتی یک بعدی مطابق رابطه‌ی زیر در دمای اولیه‌ی $f(x)$ قرار گرفته است. دو طرف میله در دمای صفر ثابت شده است. توزیع دما در زمان‌های مختلف را بدست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ L-x & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

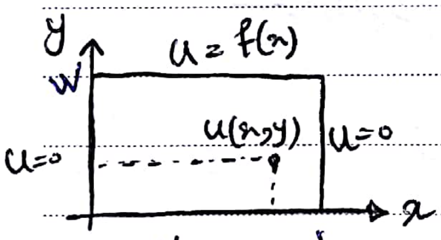


$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{n\pi}{L}x\, e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \cdots = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{4L}{n^2\pi^2} & n=1,5,9,\ldots \\ \frac{-4L}{n^2\pi^2} & n=3,7,11,\ldots \end{cases}$$

$\alpha_n = \checkmark \rightarrow u(x,t)$

انتشار حرارت دو بعدی دائمی:



$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

روش حل: جداسازی متغیرها

$$u(x,y) = F(x)G(y)$$

$$F''G + FG'' = 0 \Rightarrow \frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = K \rightarrow \begin{cases} F'' - KF = 0 & (1) \\ G'' + KG = 0 & (2) \end{cases}$$

Subject
Date

شرایط مرزی: $u(0,y)=F(0)\,G(y)=0 \Rightarrow F(0)=0$. $K=0$ و مثبت و منفی را بررسی می‌کنیم.

مرز راست $u(L,y)=F(L)\,G(y)=0 \Rightarrow F(L)=0$

مرز پایین $u(x,0)=F(x)\,G(0)=0 \Rightarrow G(0)=0$

مرز بالا $u(x,W)=F(x)\,G(W)=f(x)$

الف) $K=0$

① $\to F''=0 \Rightarrow F(x)=ax+b$

$F(0)=0 \Rightarrow b=0 \to F(x)=ax$ *

② $\to G''=0 \Rightarrow G(y)=cy+d$ $\qquad G(0)=0 \to d=0 \Rightarrow G(y)=cy$ **

$\xRightarrow[**]{*} u(x,y)=Axy$ $\qquad$ اما $F(L)=0 \Rightarrow aL=0 \Rightarrow a=0$ ×

ب) $K>0$ یا $K=\mu^2$ (ثابت کنید این حالت جواب غیر واقعی می‌دهد)

ج) $K<0$ یا $K=-\mu^2$

① $F''+\mu^2F=0 \Rightarrow F(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x$

$F(0)=0 \to A=0 \to F(x)=B\sin\mu x$

$F(L)=0 \to B\sin\mu L=0 \to \sin\mu L=0 \Rightarrow \mu=\frac{n\pi}{L}$

$\Rightarrow F_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{L}x$

② $G''-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2G=0 \to G_n(x)=D_n e^{\frac{n\pi}{L}y}+C_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}$

$G(0)=0 \Rightarrow D_n+C_n=0 \Rightarrow C_n=-D_n$

$G_n(y)=D_n\left(e^{\frac{n\pi}{L}y}-e^{-\frac{n\pi}{L}y}\right)$

$\Rightarrow u_n(x,y)=\alpha_n\sin\frac{n\pi x}{L}\left(e^{\frac{n\pi}{L}y}-e^{-\frac{n\pi}{L}y}\right)$

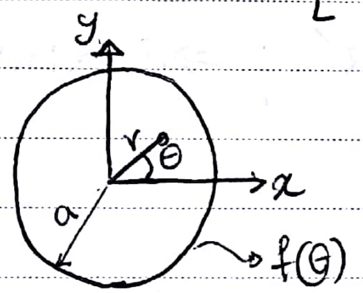
$$u_n(x,y) = \underbrace{2\alpha_n}_{\beta_n} \sin\frac{n\pi x}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

$$u_n(x,y) = \beta_n \sin\frac{n\pi}{L}x \sinh\frac{n\pi}{L}y \Rightarrow u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\frac{n\pi}{L}x \sinh\frac{n\pi}{L}y$$

مرز بالا: $u(x,y) = f(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\beta_n \sinh\frac{n\pi}{L}w}_{b_n} \sin\frac{n\pi}{L}x$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$\Longrightarrow \beta_n = \frac{2}{L\sinh\frac{n\pi w}{L}}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$



دستگاه مختصات قطبی:

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

به عنوان تمرین ثابت کنید:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \\ u(a,\theta) = f(\theta) \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi \rightsquigarrow L = \pi \end{cases}$$

روش جداسازی متغیرها:

$$u(r,\theta)=R(r)\,\Theta(\theta)$$

$$\Rightarrow R''\Theta+\frac{1}{r}R'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0\Rightarrow r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=K\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} r^2R''+rR'-KR=0 & (1)\\ \Theta''+K\Theta=0 & (2)\end{cases}$$

الف) $K=0$

$$(2):\ \Theta''=0\Rightarrow\Theta=C\theta+D$$

$$(1):\ r^2R''+rR'=0\Rightarrow rR''+R'=0\Rightarrow\frac{R''}{R'}=-\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{d}{dr}\ln(R')=-\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow\ln R'=-\ln r+B=\ln\frac{1}{r}+B=\ln\frac{\alpha}{r}\Rightarrow R'=\frac{\alpha}{r}\Rightarrow R=\alpha\ln r+\beta$$

$$u(r,\theta)=(\alpha\ln r+\beta)(c\theta+D)$$

در $r=0$ دمای دیسک معلوم است پس $\alpha=0$ $\qquad u(r,\theta)=c\theta+d$

از آنجایی که دیسک به ازای θ خاص چرخش 2π رادیان دوباره به همان زاویه برمی‌گردیم رابطه‌ی فوق به ازای چرخش‌های مختلف جواب‌های متفاوت می‌دهد

$$C=0\Rightarrow u(r,\theta)=d$$

اگر دما ثابت باشد توزیع درجه حرارت می‌تواند یک عدد ثابت باشد پس:

$K=0$ فقط در حالتی که دما در دیواره ثابت [است] می‌تواند جواب مسئله باشد.

ب) $K=-\mu^2$

$$(2)\ \Theta''-\mu^2\Theta=0\Rightarrow\Theta=Ae^{\mu\theta}+Be^{-\mu\theta}$$

Subject:
Date

مشابه حالت اول اگر Θ را با دوره‌ی 2π بخواهیم جواب های متفاوتی نمی دهد

$\Longrightarrow A , B = 0 \rightarrow \Theta = 0$ ✗

ج) $K = +\mu^2$

$② \rightarrow \Theta'' + \mu^2 \Theta = 0$

$\Theta(\theta) = A\cos\mu\theta + B\sin\mu\theta$

برای اینکه متناوب شود حتما باید μ عدد صحیح باشد $\mu = n \in \mathbb{Z}$ $\quad n = 0, \pm 1, \ldots$

$$\Theta_n = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$$

$① = r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0 \xrightarrow[\text{اویلر}]{\text{معادله‌ی دیفرانسیل}} R_n = C_n r^n + D_n r^{-n}$

$x^2 y'' + xy' - n^2 y = 0 \qquad x = e^t \rightarrow t = \ln x$

$(D)(D-1)y + Dy - n^2 y = 0 \Rightarrow (D)(D-1) + D - n^2 = 0$

$\Rightarrow D^2 - n^2 = 0 \Rightarrow D = \pm n \Rightarrow y_g = C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt} = Cr^n + Dr^{-n}$

چون در مرکز صفر $(r=0)$ نمی تواند ∞ باشد پس $D_n = 0$ پس $R_n = C_n r^n$

$u_n(r,\theta) = \Theta_n(\theta) R_n(r) = (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) r^n$

$$u(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) r^n$$

Subject :
Date

- ضریب $\frac{\alpha_0}{2}$ مربوط به $n=0$ است چون در $K=0$ جواب داریم، پس برای اینکه شبیه سری فوریه شود

$n=0$ را جایگذاری می‌کنیم و بازه‌ی Σ را از $n=1$ تا ∞ در نظر می‌گیریم.

$$u(a,\theta)=f(\theta)\longrightarrow \boxed{u(a,\theta)=f(\theta)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)a^n}$$

ضرایب :

$$\begin{cases}\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta & \alpha_n a^n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos n\theta\, d\theta\\ \beta_n a^n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin n\theta\, d\theta\end{cases}$$

مثال) مسئله‌ی دیریکله داخل دایره به شعاع $a=2$ با شرط مرزی $f(\theta)=\underbrace{-2+3\sin\theta+7\cos3\theta}_{\text{خودش سری فوریه}}$ را بدست آورید؟ (توزیع دما)

$$\frac{\alpha_0}{2}=-2 \qquad \beta_1 2^1=3\Rightarrow\beta_1=\frac{3}{2}\ \&\ \beta_n=0\quad n\neq1$$

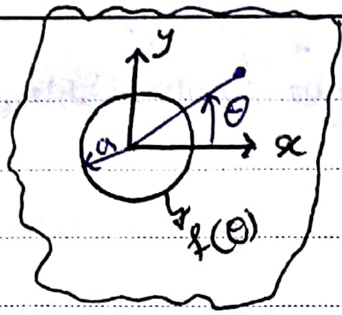
$$\alpha_3 2^3=7\Rightarrow\alpha_3=\frac{7}{8}\ \&\ \alpha_n=0\quad n\neq3$$

* اگر ضرایب θ عدد صحیح نبود مجبور بودیم انتگرال بزنیم.

$$u(r,\theta)=-2+\frac{7}{8}\cos3\theta\, r^3+\frac{3}{2}\sin\theta\, r^1$$

$$u(r,\theta)=-2+7\left(\frac{r}{2}\right)^3\cos3\theta+3\left(\frac{r}{2}\right)^1\sin\theta$$

Subject:
Date



$r \geq a$

مسائل دیریکله خارج یک دایره :

اگر صفحه خیلی بزرگ است (در مقایسه با ابعاد حفره)

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

$$u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$$

$$\begin{cases} \Theta'' + K\Theta = 0 \quad ② \Longrightarrow \Theta_n = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \\ r^2 R'' + rR' - KR = 0 \quad ① \Rightarrow R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} \end{cases}$$

برای $K = \mu^2$

تا اینجا مسئله تفاوتی با مسئله ی درون دایره نداشت . فقط شرایط مرزی تفاوت دارد پس :

در r های بزرگ r^n نمی تواند ∞ باشد پس حتماً C_n باید 0 باشد پس $R_n(r) = D_n r^{-n}$

$$u(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta\right) \frac{1}{r^n}$$

$$B.C: \; u(a,\theta) = f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta\right) \frac{1}{a^n}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta \qquad \frac{\alpha_n}{a^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta \\ \frac{\beta_n}{a^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta \end{cases}$$

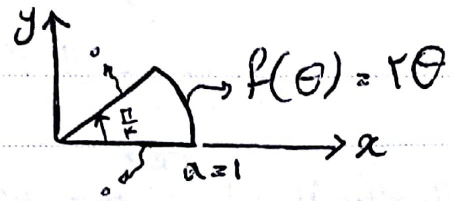
ضرایب رو پیدا می کنیم و در $u(r,\theta)$ قرار میدیم .

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

حل معادله‌ی دیریکله درون قطاع دایره :



$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

روش حل : جداسازی متغیرها

$$\begin{cases} \Theta'' + K\Theta = 0 \\ r^2 R'' + rR' - KR = 0 \end{cases}$$

برای حالت $K=0$ ← جواب ثابت

برای حالت $K<0$ ← جواب ندارد

برای حالت $K>0$ ←

$$\Theta = A\sin\mu\theta + B\cos\mu\theta$$

$$u(r,0) = 0 \Rightarrow R(r)\Theta(0) = 0 \Rightarrow \Theta(0) = 0$$

$$\Theta(0) = 0 \Rightarrow A(0) + B(1) = 0 \Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$u(r,\tfrac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow R(r)\Theta(\tfrac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \Theta(\tfrac{\pi}{4}) = 0$$

$$\Theta(\tfrac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow A\sin\tfrac{\pi}{4}\mu = 0 \Rightarrow \frac{\mu\pi}{4} = n\pi \Rightarrow \mu = ۴n$$

$$\Theta_n(\theta) = A\sin ۴n\theta$$

$$① \Rightarrow r^2R'' + rR' - (۴n^2)R = 0 \Rightarrow R(r) = C_n r^{۴n} + D_n r^{-۴n}$$

برای $r=0$ ← $R(r) = \infty$ ، اما با توجه به مسئله نمی‌تواند ∞ باشد پس $D_n = 0$ است

P4PCO

Subject:
Date

$R_n(r) = C_n r^{4n}$

$\Rightarrow u(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin 4n\theta) r^{4n} \to r=0 \to u=0 \to \frac{\alpha_0}{2}=0 \to \alpha_0=0$

$\Rightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin 4n\theta) r^{4n}$

شرایط مرزی: $u(a,\theta) = 2\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin 4n\theta (a^{4n})$

$\alpha_n a^{4n} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} 2\theta \sin 4n\theta \, d\theta = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} 2\theta \sin 4n\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi/4}\underbrace{\int_{0}^{\pi/4} (2\theta)\sin 4n\theta \, d\theta}_{\text{جزء به جزء}}$

$\dots \Rightarrow \alpha_n = \frac{\bigcirc}{a^{4n}}$ ✓

کاربرد تبدیلات فوریه در حل معادلات PDE:

الف) $F_s(u_x) = \int_{0}^{L} u_x \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx = \overset{\text{جزء به جزء}}{\dots} = -\frac{n\pi}{L}\int_{0}^{L} u \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx = -\frac{n\pi}{L} F_c[u]$

ب) $F_c[u_x] = \int_{0}^{L} u_x \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx = \underset{\text{جزء}}{\overset{\text{جزء به}}{\dots}} = \frac{n\pi}{L} F_s(u) - \{u(0,t) - u(L,t)\cos n\pi\}$

ج) $F_s(u_{xx}) = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} F_s(u) + \frac{n\pi}{L}\{u(0,t) - u(L,t)\cos n\pi\}$

د) $F_c(u_{xx}) = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} F_c[u] - \{u_x(0,t) - u_x(L,t)\cos n\pi\}$

توی امتحان می‌گه بهمون که از روش جداسازی حل کنیم یا از تبدیل فوریه. اگر نگفت معمولا از هر کدوم که خواستی حل می‌کنی.

Subject:
Date

مثال) معادله PDE زیر را به کمک تبدیلات محدود فوریه حل کنید؟

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} \\ U(0,t) = U(4,t) = 0 \\ U(x,0) = 2x \end{cases}$$

از طرفین معادله اصلی تبدیل فوریه محدود سینوسی بگیرید.

$$F_s(U_t) = F_s[U_{xx}]$$

مرزی

$$\int_0^4 u_t \sin\frac{n\pi x}{4}\,dx = -\frac{n^2\pi^2}{16}F_s(U) + \frac{n\pi}{4}\left\{\cancel{u(0,t)} - \cancel{u(4,t)}\cos n\pi\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^4 u \sin\frac{n\pi x}{4}\,dx = -\frac{n^2\pi^2}{16}F_s[u] \Rightarrow \left\{F_s(U) = A e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t}\right. \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}F_s(u) = -\frac{n^2\pi^2}{16}F_s[u] \Rightarrow y' = \alpha y$$

$$U(x,0) = 2x \longrightarrow F_s[u(x,0)] = \int_0^4 2x \sin\frac{n\pi x}{4}\,dx = \frac{32}{n\pi}\{-\cos n\pi\}$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{32}{n\pi} \Longrightarrow F_s[u(x,0)] = (-1)^{n+1}\frac{32}{n\pi} \quad (2) \longrightarrow A$$

$$(1),(2) \longrightarrow F_s[U] = (-1)^{n+1}\frac{32}{n\pi}e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t}$$

$$f(x) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} F_s(n)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u(x,t) = \frac{2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,32}{n\pi}e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

* از تبدیل فوریه سینوسی استفاده کردیم چون شرایط مرزی u_x نداشت و بصورت عادی (دیریکله بود)

شرایط مرزی:
- دیریکله: خود مقدار تابع روی مرز مشخص باشه
- نیومن: مشتق تابع روی مرز مشخص باشه

Subject
Date

- فصل سوم -

- آنالیز اعداد مختلط -

اعداد مختلط به شکل $z = x+iy$ نمایش داده می‌شوند

$x = Re(z)$

$y = Im(z)$

اگر $z_1 = x_1+iy_1$ و $z_2 = x_2+iy_2$:

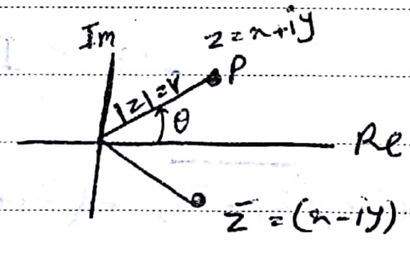
و $i^2 = -1$

جمع اعداد مختلط و تفریق : $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

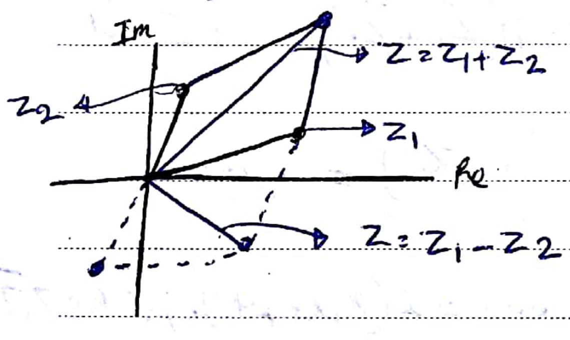
ضرب : $z_1 z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

تقسیم : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}$

مزدوج : $\bar{z} = x - iy$



صورت نمایش اعداد مختلط :



در دستگاه مختصات قطبی :

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arg(z) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Subject
Date

$$\Rightarrow z = x+iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r\{\cos\theta + i\sin\theta\} = re^{i\theta}$$

مزدوج	قدرمطلق
$\operatorname{Re} z = x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$	$\lvert z\rvert = \lvert \bar{z}\rvert$
$\operatorname{Im} z = y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$	$\lvert z_1+z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$ *
$\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$	$\big\lvert \lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert \big\rvert \leq \lvert z_1 - z_2\rvert$
$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$	$\lvert z_1 z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \lvert z_2\rvert$
$\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$	$\lvert z_1/z_2\rvert = \dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$
$z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$	$-\lvert z\rvert \leq \operatorname{Re} z \leq \lvert z\rvert$
	$-\lvert z\rvert \leq \operatorname{Im} z \leq \lvert z\rvert$

خودش × مزدوجش

اثبات:

$$*:\ \lvert z_1+z_2\rvert^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$= \lvert z_1\rvert^2 + \lvert z_2\rvert^2 + (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) \Rightarrow (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) =$$ خط بعد

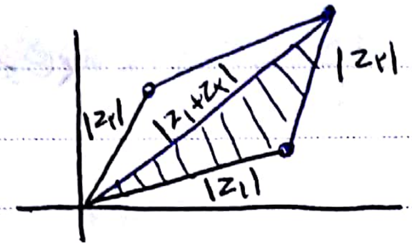
$$= (x_1+iy_1)(x_2-iy_2) + (x_2+iy_2)(x_1-iy_1) = \ldots = 2(x_1x_2+y_1y_2) = 2\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2$$

$$(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 2\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2 \leq 2\lvert z_1\bar{z}_2\rvert = 2\lvert z_1\rvert\lvert\bar{z}_2\rvert = 2\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert$$

$$\Rightarrow \lvert z_1+z_2\rvert^2 \leq \lvert z_1\rvert^2 + \lvert z_2\rvert^2 + 2\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert$$

$$\lvert z_1+z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$$

Subject:
Date



روش ۲: مجموع دو ضلع از ضلع دیگر مثلث بزرگتر است

فرم قطبی اعداد مختلط:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$\Longrightarrow z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2| \\ \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \end{cases}$$

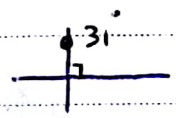
$$\frac{z_1}{z_2} = r_1 e^{i\theta_1} \times \frac{1}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2| \\ \arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg(z_2) \end{cases}$$

قرارداد: آرگومان را در بازه‌ی $-\pi < \theta < \pi$ در نظر می‌گیریم.

$$\text{if} \begin{cases} z_1 = -2+2i \\ z_2 = 3i \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} |z_1| = 2\sqrt{2} \;;\; \arg z_1 = 3\pi/4 \\ |z_2| = 3 \;;\; \arg z_2 = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

رسم



Subject:
Date

$|z_1 z_2| = 4\sqrt{2}$, $\arg(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{4} \rightsquigarrow -\pi \leq \theta \leq \pi$

$\arg(z_1/z_2) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ ✓

$z^n = \{|z| e^{i\theta}\}^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

مثال

① $(1+i)^n = \{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\}^n = \sqrt{2}^n\{\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\}$

② $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$

ریشه‌ی صحیح اعداد مختلط: فرض کنید z یک عدد مختلط و W ریشه‌ی nام آن باشد

$W = \sqrt[n]{z}$, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $W = \underset{?}{R}(\cos\underset{?}{\phi} + i\sin\phi)$

$\Rightarrow W^n = z \rightsquigarrow R^n((\cos n\phi) + i\sin n\phi)) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

دو عدد مختلط وقتی باهم برابرند که اندازه و آرگومان آنها باهم برابر باشد.

$\Rightarrow R = \sqrt[n]{r}$

$\hookrightarrow n\phi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{2k\pi + \theta}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$\Rightarrow W = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

برای $k=0$ اصطلاحاً ریشه‌ی اصلی z می‌گویند.

- اگر گفت ریشه‌ی اصلی $k=0$ را بدست می‌آوریم ولی اگر گفت تمام ریشه‌ها از فرمول بالا

PAPCO

Scanned by CamScanner

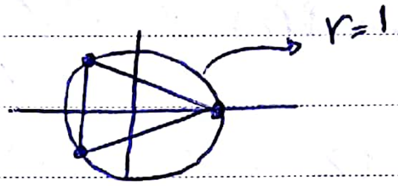
Subject:
Date

مثال) $\sqrt[n]{1}$ را بدست آورید؟

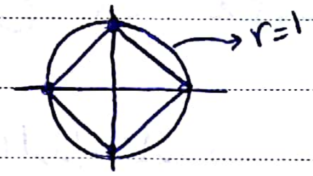
$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

$\Rightarrow W = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \; k = 0, 1, \dots, n-1$

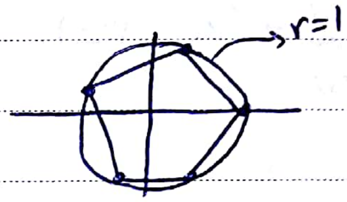
if $n = 3 \Rightarrow k = 0, 1, 2$



if $n = 4 \Rightarrow$



if $n = 5 \Rightarrow$



مثال) به کمک عبارت $(1+i)^n$ دنباله‌ی زیر را محاسبه کنید؟

$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots = ?$

$1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = ?$

$(1+i)^n = 1 + \binom{n}{1}\underbrace{i}_{i} + \binom{n}{2}\underbrace{i^2}_{-1} + \binom{n}{3}\underbrace{i^3}_{-i} + \dots + \binom{n}{n-1}i^{n-1} + i^n$

$\{1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots\} + i\{\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots\} = \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

$?_1 = \sqrt{2} \sin\frac{n\pi}{4}$ $\quad ?_2 = \sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}$

توابع مختلط:

$W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

مثال) $W = f(z) = 2iz + 4\bar{z} = 2i(x+iy) + 4(x-iy)$

$= \underbrace{(4x - 2y)}_{U} + i\underbrace{(2x - 4y)}_{V}$ ← ساده شده‌ی تابع مختلط

PAPCO

Subject:
Date

مشتق توابع مختلط: $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

مثال) $f(z)=z^2 \Rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{(z+\Delta z)^2-(z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{z^2+\Delta z^2+2z\Delta z-z^2}{\Delta z}$

$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} (\Delta z+2z) = 2z$ مثل توابع معمولی $z^2 \to 2z$

قضایای مشتق گیری از توابع مختلط:

اگر f و g دو تابع مختلط و مشتق پذیر باشند:

$(cf)' = cf'$

$(fg)' = f'g+fg'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-g'f}{g^2}$

$(f+g)' = f'+g'$

سوال) آیا همه‌ی توابع مختلط مشتق پذیر اند؟ خیر

$f(z) = \bar{z} = x-iy$

$\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim \dfrac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$

$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right) = 1$

$\lim_{\Delta y \to 0}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right) = -1$

مشتق ناپذیر است

تابع $f(z)$ را در ناحیه‌ی R تحلیلی می‌گویند اگر در این ناحیه تعریف شده باشند و مشتق پذیر باشند.

قضیه کوشی - ریمان: اگر تابع $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ در ناحیه‌ی R است اگر و فقط اگر

$u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$

P4PCO

Subject:
Date

در صورتی که تابع تحلیلی باشد آنگاه $f'(z) = u_x + i v_x = v_y - i u_y$

مثال) $f(z) = \bar{z} \xrightarrow{\text{اول ساده می کنیم}} \underbrace{x}_{u} - \underbrace{iy}_{iv}$

$u_x = 1 \;,\; v_y = -1 \quad \times$

$u_y = 0 \;,\; v_x = 0 \quad \checkmark$

پس مشتق پذیر نیست

مثال) $f(z) = z^2 \Rightarrow (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u} + \underbrace{2xy}_{v} i$

$u_x = 2x \;,\; v_y = 2x \quad \checkmark$

$u_y = -2y \;,\; v_x = 2y \quad \checkmark$

مشتق پذیر پس $f'(z) = u_x + i v_x = 2x + 2y i = 2z$

توابع رایج مختلط:

① توابع نمایی $f(z) = e^z$

$f = u + iv$

$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$u = e^x \cos y$ ، $v = e^x \sin y$ $\xrightarrow{\text{کوشی ریمان}}$ $\begin{cases} u_x = e^x \cos y \;,\; v_y = e^x \cos y \Rightarrow u_x = v_y \\ u_y = -e^x \sin y \;,\; v_x = e^x \sin y \Rightarrow u_y = -v_x \end{cases}$

بنابراین $f(z)$ تابع تحلیلی است

$\frac{df}{dz} = u_x + i v_x = e^x(\cos y) + i e^x \sin y$

$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$

$\Longrightarrow (e^z)' = e^z$

PAPCO

Subject:
Date

می‌توان ثابت کرد: $\begin{cases} e^{z_1}\times e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \\ |e^{z}| = e^{x} \\ \arg(e^{z}) = y \pm 2n\pi \end{cases}$

مثال) $e^{2\pi i} = e^{0}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 1$

می‌توان گفت $e^{z}\times \underbrace{e^{2\pi i}}_{1} = e^{z} \Rightarrow e^{2\pi i+z} = e^{z}$ ⟵ $2\pi i$ دوره تناوب e^{z}

۲) توابع مثلثاتی

تعریف $\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{cases}$ ⟵ $e^{iz} = \cos z + i\sin z$

$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ $\qquad \cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ $\qquad$ از آنجایی که توابع‌های تحلیلی هستند

پس می‌توان نتیجه گرفت توابع مثلثاتی تحلیلی هستند پس داریم:

$(\sin z)' = \cos z \qquad (\cos z)' = -\sin z \qquad (\tan z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$

مثال) ثابت کنید که $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ ؟

$\sin z = \dfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) = \dfrac{1}{2i}\left\{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right\} = \dfrac{1}{2i}\left\{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}\right\}$

$= \dfrac{1}{2i}\left\{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right\}$

Subject:
Date

$$\frac{1}{2i}\left\{\cos x\left(e^{-y}-e^{y}\right)+i\sin x\left(e^{-y}+e^{y}\right)\right\}=\frac{-i}{2}\left\{\ldots\right\}$$

$$=-i\cos x\left(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\right)+\sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)=\underbrace{\sin x\cosh y}_{u}+\underbrace{i\cos x\sinh y}_{iv}$$

$$\Rightarrow |\sin z|^2=\left(\sin x\cosh y\right)^2+\left(\cos x\sinh y\right)^2=\sin^2 x\cosh^2 y+\left(1-\sin^2 x\right)\sinh^2 y$$

$$=\sin^2 x\left\{\underbrace{\cosh^2 y-\sinh^2 y}_{1}\right\}+\sinh^2 y=$$ صورت سوال

مثال) معادله‌ی $\cos z=5$ را حل کنید؟

$$\cos z=\frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{iz}}_{A}-\underbrace{e^{-iz}}_{\frac{1}{A}}\right)=5\Longrightarrow A+\frac{1}{A}=10\Rightarrow A^2-10A+1=0$$

$$\Longrightarrow A=5\pm\sqrt{24}\Longrightarrow e^{iz}=5\pm\sqrt{24}\Longrightarrow e^{i(x+iy)}=e^{-y+ix}=e^{-y}\times e^{ix}=$$

$$=e^{-y}\left(\cos x+i\sin x\right)=5\pm\sqrt{24}\xrightarrow[\text{اندازه می‌گیریم}]{\text{از طرفین}}e^{-y}=5\pm\sqrt{24}\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\ln}\ldots$$

$$\Rightarrow y=\pm 2{,}292 \rightsquigarrow \underbrace{x=\pm 2n\pi}_{|\cos x+i\sin x|=1}\Longrightarrow z=\pm 2{,}292i\pm 2n\pi$$

می‌توان ثابت کرد:

$$\begin{cases}\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2\\ \sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\sin z_2\cos z_1\\ \sin^2 z+\cos^2 z=1\end{cases}$$

③ توابع هایپربولیک:

$$\cosh z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)\qquad \sinh z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)$$

Subject:
Date:

چون تحلیلی هستند پس:

$(\cosh z)' = \sinh z$

$(\sinh z)' = \cosh z$

$\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$ $\qquad \coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$

④ توابع لگاریتمی:

$W = \ln z \rightsquigarrow u + iv$

$$Z = e^{W} = e^{u+iv} = e^{u} \times e^{iv} \Rightarrow \underbrace{re^{i\theta}}_{z} = e^{u} \times e^{iv} \Rightarrow \begin{cases} r = e^{u} \Rightarrow u = \ln r \\ \theta = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = \ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r + i\theta = \ln|z| + i\arg z$$

چون $\arg z$ می‌تواند $\pm 2n\pi$ اضافه شود بنابراین لگاریتم یک عدد مختلط بی‌نهایت جواب دارد.

لگاریتم اصلی: وقتی $-\pi \leq \arg z \leq +\pi$ است.

مثال) مقدار اصلی لگاریتم ۱ را حساب کنید؟ $(\ln 1)$

$\overset{r=1}{} \quad \overset{\theta=0}{}$

$1 = re^{i\theta} = 1 \times e^{i \times 0}$

$$\Rightarrow \ln 1 = \ln(1) + i(\pm 2n\pi + 0) = \pm 2n\pi i \Rightarrow \ln 1 = 0$$

$\hookrightarrow n = 0 \rightsquigarrow$ اصلی

آیا $f(z) = \ln z$ تحلیلی است؟

$\ln z = \ln r + i(\theta + c)$

$$= \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + i\left(\tan^{-1}\frac{y}{x} + c\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)}_{u} + i\underbrace{\left(\tan^{-1}\frac{y}{x} + c\right)}_{v}$$

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v_y = \dfrac{1/x}{1+(y/x)^2} \end{cases} \Rightarrow u_x = v_y \rightsquigarrow \text{تحلیلی است}$$

$$(\operatorname{Ln} z)' = u_x + i v_x = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}$$

می‌توان ثابت کرد:

$$\begin{cases} \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 \\ \operatorname{Ln}(z_1/z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2 \end{cases}$$

۵) توابع توانی:

اگر c یک عدد مختلط باشد آنگاه $\Leftarrow$ $z^c = e^{c \operatorname{Ln} z}$

مثال) مقدار i^i را تا حد امکان ساده کنید؟ ($i \to z$، $i \to c$، $u+iv$)

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i}$$

$$\operatorname{Ln} i = \operatorname{Ln}|i| + i \arg i = 0 + i\big(\underbrace{\tfrac{\pi}{2} \pm 2n\pi}_{\text{چرخش}}\big) \Rightarrow i \operatorname{Ln} i = -\left(\tfrac{\pi}{2} \pm 2n\pi\right)$$

$$\Rightarrow e^{i \operatorname{Ln} i} = \underbrace{e^{-(\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi)}}_{u} + \underbrace{\quad}_{iv}$$

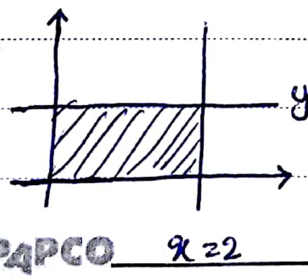
$iv \to$ ندارد

پایان ترم ۱۰۰٪

نگاشت (Mapping): یک تابع مختلط تحلیلی باشد $f(z)$ را در نظر بگیرید

مثال) تصویر ناحیه‌ی محدود به خطوط $y=0$ ، $y=1$ ، $x=0$ و $x=2$ را تحت تابع $W = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z$ را بیابید.

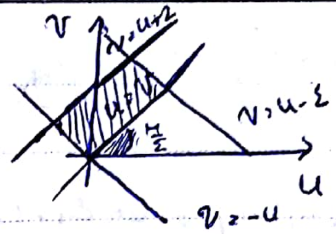
$$f(z) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i \sin\tfrac{\pi}{4}\right)(x+iy) = \underbrace{(x-y)}_{u} + i\underbrace{(x+y)}_{v}$$



line $y=0 \rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow u = v$

Subject :
Date

line $y=1 \Rightarrow \begin{cases} u=x-1 \\ v=x+1 \end{cases} \rightsquigarrow u+1=v-1$ یا $v=u+2$



line $x=0 \Rightarrow \begin{cases} u=-y \\ v=y \end{cases} \Rightarrow v=-u$

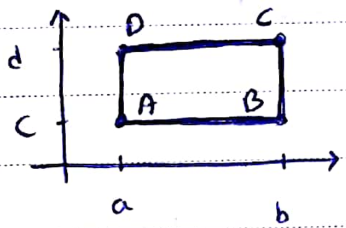
line $x=2 \Rightarrow \begin{cases} u=2-y \\ v=2+y \end{cases} \Longrightarrow u+v=4 \Rightarrow v=4-u$

پس می‌توان گفت $f(z)=ae^{i\theta}z$ ، اضلاع را a برابر می‌کند و به اندازه‌ی θ می‌چرخاند.

مثال) تصویر ناحیه‌ی $0<a<x<b$ و $0<c<y<d$ را تحت نگاشت $W=e^z$ بیابید؟

① ابتدا تابع را ساده کنید ② شکل اول را دقیق رسم کنید ③ بین u و v یک رابطه پیدا کنید

$W=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \rightsquigarrow \begin{cases} u=e^x\cos y \\ v=e^x\sin y \end{cases}$



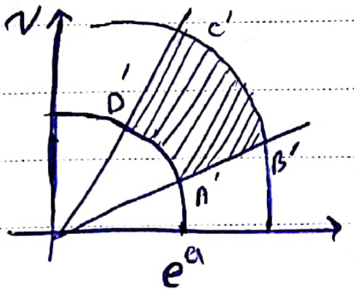
line $x=a \rightsquigarrow \left| \begin{matrix} u=e^a\cos y \\ v=e^a\sin y \end{matrix} \right. \rightsquigarrow u^2+v^2=e^{2a}$

دایره به مرکز صفر و شعاع e^a

line $x=b \rightsquigarrow \left| \begin{matrix} u=e^b\cos y \\ v=e^b\sin y \end{matrix} \right. \rightsquigarrow u^2+v^2=e^{2b}$ ← مثل قبلی دایره است ولی بزرگتر از اول

line $y=c \rightsquigarrow \left| \begin{matrix} u=e^x\cos c \\ v=e^x\sin c \end{matrix} \right. \rightsquigarrow \frac{v}{u}=\tan c \Rightarrow v=u\tan c$ → خط با شیب $\tan c$

line $y=d \rightsquigarrow \left| \begin{matrix} u=e^x\cos d \\ v=e^x\sin d \end{matrix} \right. \rightsquigarrow \frac{v}{u}=\tan d \Longrightarrow v=u\tan d$ → خط با شیب بزرگتر $(d>c)$

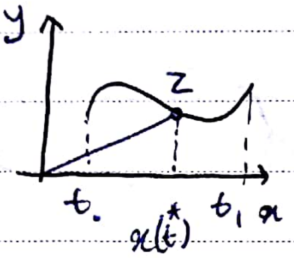


(باید x و y را از بین ببریم)

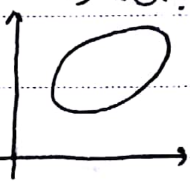
PAPCO

Subject:
Date

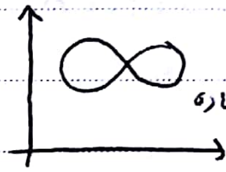
تعریف: اگر توابع حقیقی $x(t)$ و $y(t)$ در بازه‌ی $[t_1, t_2]$ پیوسته باشند معادله‌ی $z(t) = x(t) + iy(t)$ یک خم پیوسته را ایجاد می‌کند



خم باز

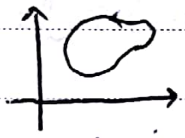


خم بسته‌ی ساده

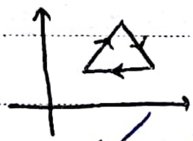


خم بسته غیرساده

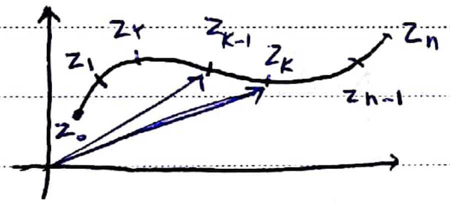
اگر توابع x و y در بازه‌ی ذکر شده مشتق پذیر بوده و مشتق‌های آنها پیوسته باشند خم حاصل از $x(t)$ و $y(t)$ را خم هموار می‌گویند و اگر تعداد نقاط غیرمشتق پذیر آن محدود باشد به آن خم حاصل از $x(t)$ و $y(t)$ خم هموار تکه‌ای می‌گویند.



خم هموار

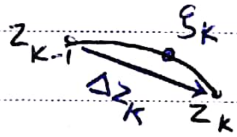


خم هموار تکه‌ای



یک خم هموار را به n بخش مساوی تقسیم می‌کنیم

یک کمان را در نظر می‌گیریم:



حال یک تابع دلخواه مانند $f(z)$ را در نظر بگیرید:

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta z_k$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} S_n = \int_C f(z)\,dz$$

انتگرال منحنی خط

C ~ خم

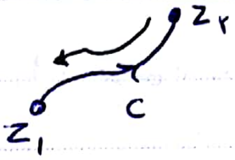
حاصل انتگرال روی هر خط متفاوت است.

ویژگی‌ها:

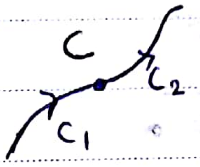
- اگر f و g روی خم C انتگرال پذیر باشند، آنگاه انتگرال $\int_C (af(z)+bg(z))dz = a\int_C f(z)dz + b\int_C g(z)dz$

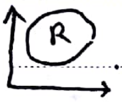
Subject:
Date

ق 2: $\int_{z_1 \, C}^{z_2} f(z)dz = -\int_{z_2 \, C}^{z_1} f(z)dz$

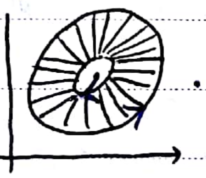


ق 3: $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$



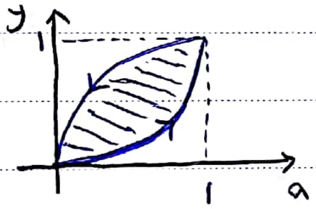


برای خم های بسته یک ناحیه ایجاد می‌شود که به آن ناحیه‌ی R می‌گویند و مرز ناحیه همان معادله‌ی خم می‌باشد.



قرارداد حرکت مثبت برای خم های بسته: یعنی سمت چپ متحرک سمت ناحیه‌ی R باشد.

مثال) انتگرال $f(z)=x$ را روی منحنی بسته‌ی C بدست آورید، که C مرز ناحیه‌ی $y=x^2$ و $x=y^2$ می‌باشد.



$\oint f(z)dz \qquad f(z)=x \qquad dz=dx+idy$

$\Rightarrow \oint_C x(dx+idy) = \underbrace{\oint_C x\,dx}_{I_1} + i\underbrace{\oint_C x\,dy}_{I_2}$

$I_1 = \oint_C x\,dx = \oint_{C_1} x\,dx + \int_{C_2} x\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_{C_2} x\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^0 x\,dx = 0$

$y=x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$

$I_2 = \oint_C x\,dy = \int_{C_1} x\,dy + \int_{C_2} x\,dy = \int_0^1 x(2x\,dx) + \int_{C_2} x\,dy$

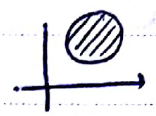
$= \frac{2}{3} + \int_{C_2} y^2 dy = \frac{2}{3} + \int_1^0 y^2 dy = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

به این روش حل روش حل مستقیم می‌گویند.

Subject:
Date

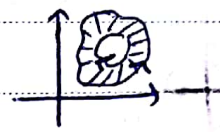
ق کوشی: اگر $f(z)$ در ناحیه‌ی R و روی مرز C تحلیلی باشند و $f'(z)$ نیز پیوسته باشد آنگاه

که ناحیه‌ی یکپارچه هم ساده



$$\oint_C f(z)dz = 0$$

اگر $f(z)$ در ناحیه‌ی یکپارچه‌ی غیرساده و مرز آن تحلیلی باشد و ،،،،،، ... آنگاه

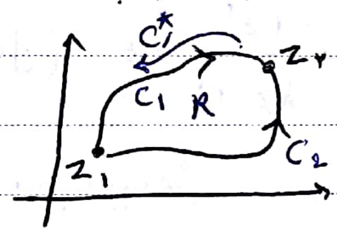


$$\oint_C f(z)dz = 0$$

$C = C_1 + C_2$

نتایج مهم قضیه‌ی کوشی:

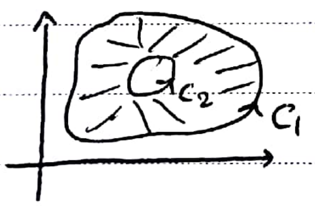
(۱) انتگرال منحنی الخط یک تابع تحلیلی به مسیر حرکت بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدا و انتهای خم وابسته است.



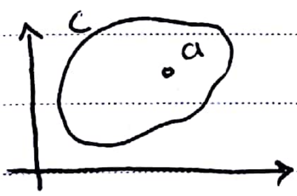
$$\oint f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C^*} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} f(z)dz = -\int_{C^*} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$$

(۲) اگر تابع $f(z)$ در ناحیه‌ی R و مرزهای آن مطابق شکل تحلیلی باشد آنگاه:



$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$



(3) $$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a)$$

اگر $f(z)$ درون و روی مرز ناحیه تحلیلی باشد.

P4PCO

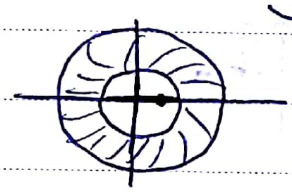
در مختصات قطبی: دایره $\Leftarrow z = \varepsilon e^{i\theta}$ حال اگر انتقال بدیم $z - a = \varepsilon e^{i\theta}$

Subject :
Date

قضیه کلی کوشی : $\oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$, $n=0,1,\dots$

اگر $f(z)$ روی C و درون آن تحلیلی باشد .

مثال) مطلوب است محاسبه $I=\oint_C \frac{dz}{(2z+1)(z^2-9)}$ که C مرز ناحیه $R=\underbrace{\{z;\ 1<|z|<2\}}_{\text{حلقه}}$ می باشد .



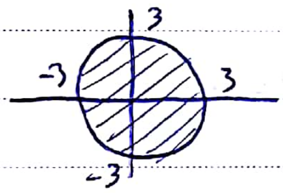
اولین کار رسم منحنی

نقاط غیر تحلیلی : $z=\underbrace{-\frac{1}{2} \text{ و } \pm 3}$

هیچ کدام از این نقاط در ناحیه نیستند . پس تابع ما تحلیلی است

پس جواب انتگرال مساوی صفر است ← طبق ق کوشی

مثال) $I=\int_C \frac{\sin \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\, dz$ که $C: |z|=3$



رسم ناحیه و مرز

نقاط غیر تحلیلی : $z=\underbrace{1 \text{ و } 2}$

هردو درون ناحیه هستند

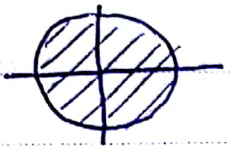
اگر یک نقطه بود از قضیه 3 کوشی استفاده می کردیم ($\oint \frac{f(z)}{(z-a)}$) .

$$\frac{\sin \pi z^2}{(z-1)(z-2)} = \sin \pi z^2 \left\{ \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \right\}$$

$$I = \oint_C \frac{\sin \pi z^2}{z-2}\, dz - \oint_C \frac{\sin \pi z^2}{z-1}\, dz$$

$$\overset{\text{ق}}{\underset{3}{=}} 2\pi i f(2) - 2\pi i f(1) = 2\pi i \sin 4\pi - 2\pi i \sin \pi = 0$$

مثال) $I = \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\, dz$ نقاط غیرتحلیلی : $\underbrace{z=-1}_{\text{داخل ناحیه}}$



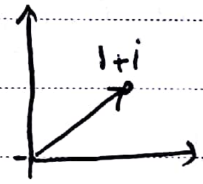
$I = \frac{2\pi i}{3!} f'''(-1)$

$f(z) = e^{2z} \Rightarrow f'''(z) = 8e^{2z} \Rightarrow f'''(-1) = 8e^{-2}$

$\Rightarrow \frac{16\pi i}{3\times 2} e^{-2} = \frac{8\pi i}{3} e^{-2}$

نکته: اگر $f(z)$ تحلیلی و مشتق $f(z)$ باشد آنگاه $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$

مثال) انتگرال $\int_C (z^2+z)\,dz$ را روی خط زیر حساب کنید.



تحلیلی است چه فقط به نقطه ابتدا و انتها بستگی دارد

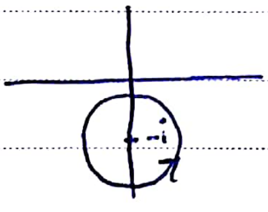
$\int_0^{1+i} (z^2+z)\,dz = \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1+i} = \underbrace{\frac{(1+i)^3}{3} + \frac{(1+i)^2}{2}}_{\text{باید ساده کنیم}}$

$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = (1+i)^3$ و $2\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right) \Rightarrow (1+i)^2$

$\xRightarrow{\text{با حساب کردن}} I = \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{3} i\right)$

مثال) $I = \oint_C \frac{e^z}{1+z^2}\, dz$ $C: |z+i| = 1$



$= \oint \frac{e^z}{(z+i)(z-i)}$ $f(z)$

غیرتحلیلی‌ها: $z = \pm i$

Subject:
Date

$$= 2\pi i\, f(-i) = 2\pi i \frac{e^{-i}}{-i-i} = \underbrace{-\pi e^{-i}}_{\text{ساده}} = -\pi(\cos 1 - i \sin 1) = \checkmark$$

- دنباله‌ی $\overset{\text{دنباله‌ی توانی}}{\boxed{f_n(z) = a_n(z-z_0)^n}}$ از توابع مختلط را در نظر بگیرید که $n = 0, 1, 2, \dots$ و a_nها می‌توانند عددی حقیقی یا مختلط باشند:

سری توابع مختلط (سری توانی):

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$S(z_0) = a_0$ و

اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه ثابت می‌شود:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

→ بسط تیلور تابع f حول نقطه‌ی z_0

حال اگر $z_0 = 0$ در نظر باشد، بسط مک لورن بدست می‌آید

مثال) تابع $f(z) = \frac{1}{1-z}$ را در نظر بگیرید. مطلوب است بسط مک لورن تابع f؟
← حول نقطه‌ی ۰

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \rightsquigarrow f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2\times 1}{(1-z)^3} \Longrightarrow$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$ ← با استقرا ریاضی بدست آورید

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f''(0) = 2! \\ \vdots \\ f^{(n)}(0) = n! \end{cases}$$

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Subject:
Date

مثال) بسط مک لورن تابع $f(z)=\ln(1+z)$ را بدست آورید؟

$$f^{(n)}(z)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}$$ ← با حل فرمول بدست آمد

جواب آخر: $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots$

مثال) بسط مک لورن $f(z)=\ln\frac{1+z}{1-z}$ را بیابید؟ ← تابع را ساده تر می کنیم تا مشتق گیری راحت شود

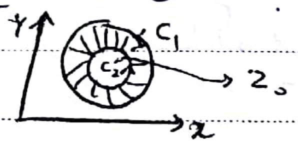
$$f(z)=\left(\ln(1+z)\right)-\left(\ln(1-z)\right)=\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots\right)-\left(-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots\right)$$

$$f(z)=2\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right)$$

قضیه لوران: اگر تابع $f(z)$ روی مرز و درون ناحیه ی حلقوی شکل (R) با مرکز مشترک z تحلیلی باشد

آنگاه برای تمامی نواحی تحلیلی R داریم:

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n}_{\text{بخش تحلیلی}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{بخش اصلی}}$$



که این سری در اصطلاح سری لورانت می گویند.

اگر بخش اصلی سری لورانت دارای تعداد محدودی جمله باشد، آنگاه:

$$\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

که z در اصطلاح قطب مرتبه ی nام تابع $f(z)$ می گویند.

Subject:
Date

مثال) سری لوران $f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^3}$ را حول $z_0=1$ بیابید؟

سری تیلور ✗ ← چون اصلاً در نقطه‌ی z_0 مشتق‌پذیر نیست (تحلیلی نیست)

$$\underbrace{g(z)=e^z}_{\text{قسمت تحلیلی تابع}} \xrightarrow[\text{حول } z_0]{\text{سری تیلور}} g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$=e^2\left\{1+\frac{2}{1!}(z-1)+\frac{2^2}{2!}(z-1)^2+\frac{2^3}{3!}(z-1)^3+\dots\right\}$$

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-1)^3}=e^2\left\{\underbrace{\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{2}{1!}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{2^2}{2!}\frac{1}{z-1}}_{\text{بخش اصلی}}+\underbrace{\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}(z-1)+\dots}_{\text{بخش تحلیلی}}\right\}$$

بنابراین $z_0=1$ قطب مرتبه‌ی 3 می‌باشد.

مثال) سری لوران تابع $f(z)=z^{-5}\sin z$ را در همسایگی نقطه‌ی $z_0=0$ را بدست آورید؟ $\frac{\sin z}{z^5}$

$$g(z)=\sin z \xrightarrow{\text{سری مک لوران}} \sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots$$

$$\Rightarrow f(z)=\underbrace{\frac{1}{z^4}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}}_{\text{بخش اصلی}}+\underbrace{\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}z^2+\dots}_{\text{بخش تحلیلی}}$$

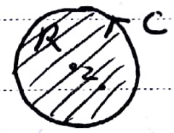
z_0 قطب مرتبه‌ی 4 می‌باشد.

Subject:
Date

حساب مانده‌ها: می‌دانیم اگر تابع $f(z)$ روی دایره‌ی C و درون دایره بجز در مرکز دایره یعنی $z=z_0$

تحلیلی باشد دارای سری لوران حول z_0 می‌باشد

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$



آنگاه:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, b_1$$

$b_1 \rightarrow$ در بسط سری لوران ضریب z^{-1}

توضیح: اگر z_0 قطب مرتبه‌ی n باشد آنگاه:

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z-z_0)^m f(z) \right\}$$

$m \rightarrow$ مرتبه‌ی قطب

به b_1 در اصطلاح مانده‌ی تابع $f(z)$ در قطب z_0 می‌گویند.

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$$

مثال) مانده‌ی توابع زیر را در قطب هایش محاسبه کنید؟

$$f(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

ابتدا قطب‌ها را پیدا می‌کنیم

پیدا کردن قطب‌ها:
$$\begin{cases} z=-1 \rightarrow \text{قطب مرتبه‌ی } 2 \\ z=\pm 2i \rightarrow \text{قطب مرتبه‌ی } 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 f(z) \right\}$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z^2-2z}{(z^2+4)} \right\} = \dots = \frac{-14}{15}$$

اگر $m=1$ بود dz^0 یعنی اصلاً مشتق نگیرید.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

نکته: برای توابع $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ اگر z_0 قطب مرتبه‌ی ۱ باشد آنگاه:

* حتماً باید مرتبه‌ی ۱ باشد. $$b_1 = \underset{z=z_0}{\text{Res}}\, f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

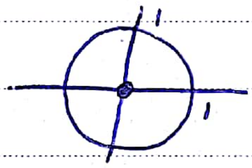
پس برای مثال قبل داریم:

$$b_1 = \frac{z^2 - 2z}{2(z+1)(z^2+4)+2z(z+1)^2}\Bigg|_{z=2i} = \frac{-4-4i}{4i(2i+1)^2} = \frac{7i+1}{25}$$

$$b_1 = \underset{z=-2i}{\text{Res}}\, f(z) = \frac{p(-2i)}{q'(2i)} = \dots = \frac{7-i}{25}$$

مثال)

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4}\, dz \;:$$



برای حل انتگرال اول رسم تابع

از رابطه‌ی انتگرال‌های کوشی:

$$\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$= \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{-2\pi i}{6} = \frac{-\pi i}{3}$$

$$f(z) = \sin z \rightsquigarrow f^{(3)}(z_0) = -\cos(0) = -1$$

راه حل دوم: حساب مانده‌ها:

$$\frac{\sin z}{z^4} = \underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z}}_{\text{اصلی}} + \frac{z}{5!} - \dots$$

اصلی → قطب مرتبه‌ی 3

$$b_1 = -\frac{1}{3!} \Longrightarrow \oint = 2\pi i\, b_1 = \frac{2\pi i}{-3!} = \frac{-\pi i}{3}$$

P4PCO

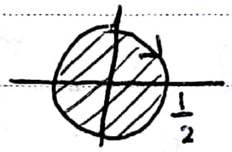
Subject:
Date

یا b_1 را از روش دیگر پیدا می‌کردیم : $b_1 = \lim_{z \to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ z^3 \frac{\sin z}{z^4} \right\}$

با دو بار مشتق گیری و حد زدن جواب بدست می‌آید.

- از روش سری لوران میشه حل کرد چون مرتبه‌ی ۱ است.

مثال) حاصل انتگرال را بیابید؟ $\oint_C \frac{1}{z^3 - z^4}\, dz$, C :



قدم اول: رسم تابع (خودش داده)

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = \frac{1}{z^3(1-z)} \begin{cases} z = 0 & \text{داخل} \\ z = 1 \rightsquigarrow \notin C & \text{خارج} \end{cases}$$

حرکت خلاف جهت

روش انتگرال کوشی : $I = \oint_C \frac{\overbrace{\frac{1}{1-z}}^{f(z)}}{z^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(0) = -2\pi i$

روش دوم: حساب مانده‌ها

باید مانده‌ی تابع در قطب ($z_0 = 0$) را بدست آوریم. واضح است z قطب مرتبه‌ی 3 است. (چون چیزی نداریم که در ادامه ساده شود)

$$b_1 = \lim \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ z^3 \times \frac{1}{z^3(1-z)} \right\} = \dots = 1$$

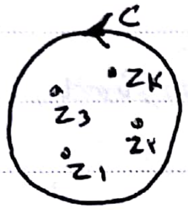
راه حل دوم b_1 :

$$\frac{1}{z-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \Rightarrow \frac{1}{(z^3)(1-z)} = \underbrace{\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}}_{\text{اصلی}} + \underbrace{1 + z^2 + \dots}_{\text{تحلیلی}}$$

$b_1 = 1 \Rightarrow I = -2\pi i \times 1$

خلاف جهت

قضیه: اگر تابع $f(z)$ روی و درون ناحیه‌ی بسته C بجز نقاط $z_1, z_2, \ldots, z_k$ تحلیلی باشد:



$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z)$$

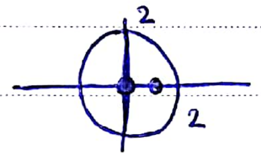
یعنی اگر تعداد نقاط غیرتحلیلی زیاد بود باید تک تک b ها رو پیدا کنیم بعد با هم جمع کنیم.

مثال) انتگرال $\oint_C \dfrac{4-3z}{z^2-z}\,dz$ را بیابید؟

الف) $|z|=2$ ب) $|z|=\frac{1}{2}$ ج) $|z-2|=1$

حل: مرتبه‌ی ۱

الف)



$z=0, 1$: نقاط غیرتحلیلی

هر دو درون ناحیه هستند

پس b_1 تا ۲ پیدا می‌کنیم.

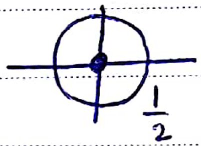
پس از روش تقسیم:

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{P(0)}{q'(0)} = -4$$

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \frac{P(1)}{q'(1)} = 1$$

پس $I = 2\pi i(-4+1) = -6\pi i$

ب)

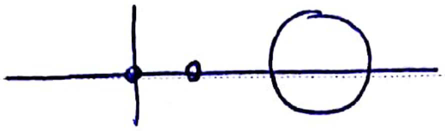


$z=0$ نقاط غیرتحلیلی داخل ✓

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{P(0)}{q'(0)} = -4$$

پس $I = 2\pi i(-4) = -8\pi i$

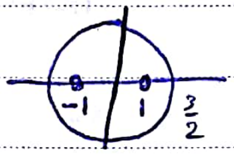
ج)



هیچکدام از نقاط داخل نیستند پس $I=0$

مثال)

$$I=\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\tan z}{z^2-1}\,dz$$



$f(z)=\frac{\tan z}{z^2-1}$ نقاط غیرتحلیلی (قطب‌ها)
$$\begin{cases} z=1 \\ z=-1 \\ z=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots \end{cases}$$

حال ببینیم کدام نقطه‌ها داخل هستند:

$\frac{\pi}{2}=\frac{3,14}{2}>1,5$ ← پس خارج اند

پس دو نقطه‌ی غیرتحلیلی دارند. پس سراغ حساب مانده‌ها می‌رویم

مخرج رو که عبارت توان ۲ است

تستی ← $z=1, z=-1$ ← قطب مرتبه‌ی 1

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z)=\frac{p(1)}{q'(1)}$$ ← برای ساده‌تر شدن p رو $\frac{\tan z}{z+1}$ و q رو $z-1$ در نظر می‌گیریم.

$$\Rightarrow \frac{\frac{\tan(1)}{2}}{1}=\frac{\tan(1)}{2}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z)=\frac{p(-1)}{q'(-1)}=\frac{\frac{\tan(-1)}{(-1)+(-1)}}{1}=\frac{\tan(1)}{2}$$

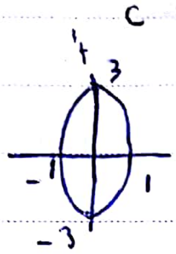
$$I=2\pi i\left(\sum \operatorname{Res}\right)=2\pi i\left(\frac{\tan(1)}{2}+\frac{\tan(1)}{2}\right)=9,78\, i$$

Subject:
Date

مثال)

$$I = \oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\frac{\pi}{z}} \right) dz$$

C: یک بیضی به معادله‌ی $9x^2+y^2=9$



$$I = \underbrace{\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}\,dz}_{I_1} + \underbrace{\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}\,dz}_{I_2}$$

$z^4-16=(z^2+4)(z^2-4)$ ⟵ نقاط غیرتحلیلی

- $z=2$ × خارج
- $z=-2$ × خارج
- $z=2i$ ✓ داخل
- $z=-2i$ ✓ داخل

قطب مرتبه‌ی ۱

$$\operatorname{Res}_{z=2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \frac{(2i)e^{\pi(2i)}}{4(2i)^3} = \dots = -\frac{1}{16}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \frac{(-2i)e^{\pi(-2i)}}{4(-2i)^3} = \dots = -\frac{1}{16}$$

$$I_1 = 2\pi i\left(-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)$$

واضح است که $z=0$ یک نقطه‌ی غیرتحلیلی برای تابع $ze^{\pi/z}$ می‌باشد.

صورتی معادله مشخص نیست پس از سری استفاده می‌کنیم :

$$ze^{\pi/z} = z\left(1+\frac{\pi}{z}+\frac{1}{2!}\frac{\pi^2}{z^2}+\dots\right) = \underbrace{z+\pi}_{\text{بخش تحلیلی}}+\underbrace{\frac{\pi^2}{2!}\frac{1}{z}+\dots}_{\text{بخش اصلی}}$$

$$I_2 = 2\pi i\left(\frac{\pi^2}{2!}\right) \Leftarrow b_1$$

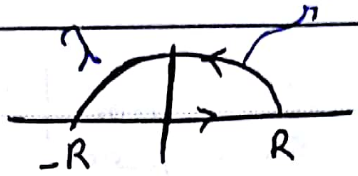
P4PCO

Subject:
Date

$Re^{i\theta} \longrightarrow$ جهت روی نیم دایره

مثال) حاصل انتگرال:

$$I=\oint_C \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$$



$R>2$

نقاط غیرتحلیلی:
- $z=i$ ✓ قطب مرتبه ی ۱
- $z=-i$ ✗
- $z=2i$ ✓ قطب مرتبه ی ۱
- $z=-2i$ ✗

روش تستی

$$\underset{z=i}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{P(i)}{q'(i)}=\frac{\frac{i^2}{i^2+4}}{2i}=-\frac{1}{6i}$$

$$\underset{z=2i}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{P(2i)}{q'(2i)}=\frac{\frac{(2i)^2}{(2i)^2+1}}{2\times 2i}=\frac{1}{3i}$$

$$I=2\pi i\left(-\frac{1}{6i}+\frac{1}{3i}\right)=\frac{\pi}{3}$$

حال به کمک انتگرال فوق حاصل انتگرال حقیقی : $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ را بدست آورید؟

انتگرال بالا را به دو قسمت تقسیم می کنیم:

$$I=\int_\lambda \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz+\int_{-R}^{R}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{\pi}{3}$$

روی خم λ : $z=Re^{i\theta}$

$\longrightarrow |z|=R\ ;\ |z|^2=R^2\ ;\ |z^2+1|>R^2\ ;\ |z^2+4|>R^2$

$dz=iRe^{i\theta}d\theta \rightarrow |dz|=R\,d\theta$

$$\Longrightarrow 0<\left|\int_\lambda \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)(z^2+4)}\right|<\int_\lambda \frac{|z^2||dz|}{|z^2+1||z^2+4|}<\int \frac{R^2\times R\,d\theta}{R^2\times R^2}=\frac{1}{R}\int_0^\pi d\theta=\frac{\pi}{R}$$

$$0 \le \left|\int_\lambda \frac{z^2dz}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| \le \frac{\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{if} \lim_{R\to\infty}\left|\int_\lambda \frac{z^2dz}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| = 0$$

$$\Rightarrow if\ R\to\infty:\ \int_\lambda \frac{z^2dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = 0$$

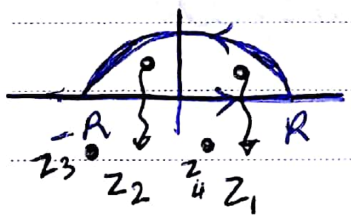
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{3}$$

اگر در این سوال انتگرال اولیه داده نمی‌شد و حاصل انتگرال را می‌خواست، جای x ها z قرار می‌دادیم و روی

یک نیم‌دایره مثل قبل حساب می‌کنیم:

مثال) حاصل انتگرال را بیابید.
$$I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$$

اول یک تابع مختلط و یک نیم‌دایره می‌سازیم:
$$f(z)=\frac{1}{1+z^4}\ ;\ \bar{I}=\oint_c \frac{1}{1+z^4}dz$$



نقاط غیرعادی: $z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1$ ریشه‌های چهارم عدد -1

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} \checkmark \\ z_2 = e^{3\frac{\pi}{4}i} \checkmark \\ z_3 = e^{-3\frac{\pi}{4}i} \times \\ z_4 = e^{-\frac{\pi}{4}i} \times \end{cases}$$

مقبولند

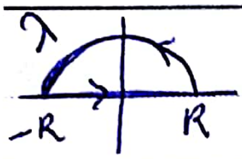
روش تستی ✓

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{p}{q'} = -\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} = \frac{p}{q'} = \frac{1}{4}e^{-\frac{9\pi i}{4}} \underset{\text{حذف } 2\pi}{=} \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}}+\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}\right) = \dots = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Subject :
Date



حال سراغ مرحله‌ی بعد می‌رویم :

چون همش روی کل دایره هاست

$$I = \int_{\lambda} \frac{dz}{1+z^4} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

وقتی روی λ حرکت می‌کنیم : $z = Re^{i\theta} \Rightarrow |z| = R \,;\, |dz| = R\,d\theta \,;\, |z^4+1| > R^4$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \left| \int_{\lambda} \frac{dz}{z^4+1} \right| \leqslant \int \frac{|dz|}{|z^4+1|} \leqslant \int_0^{\pi} \frac{R\,d\theta}{R^4} = \frac{\pi}{R^3}$$

if $R \to \infty \Rightarrow \int_{\lambda} \frac{dz}{z^4+1} = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

انتگرال توابع گویا از sin و cos به کمک توابع مختلط :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta}$$

برای تمام مسئله‌های با این شکل

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \Rightarrow \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

$$z = e^{i\theta} \rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta \rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

حرکت zها دایره‌ای به شعاع ۱ می‌باشد

PAPCO

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2} - \frac{z+1/z}{2}} = \frac{-2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1}$$

قطب‌ها: $\begin{cases} z = \sqrt{2}-1 \ \checkmark & \text{مرتبه‌ی ۱} \rightarrow \text{ساده} \\ z = \sqrt{2}+1 \ \times \end{cases}$

$$\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1} f(z) = \frac{P()}{Q'()} = \dots = -\frac{1}{2}$$

فراموش شده

$$\Longrightarrow I = \left(\frac{-2}{i}\right)\left(2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2\pi$$

$\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}+1} f(z) \ \times \rightsquigarrow$ داخل ناحیه نیست

مثال)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta$$

$$\cos 3\theta = \frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2} = \frac{z^3+z^{-3}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{z+1/z}{2}$$

$$z = e^{i\theta} \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\Longrightarrow I = \frac{-1}{2i}\oint \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\, dz$$

قطب‌ها: $\begin{cases} z=0 \ \checkmark & \text{مرتبه‌ی ۳} \rightsquigarrow \\ z=\frac{1}{2} \ \checkmark & \text{مرتبه‌ی ۱} \longrightarrow \text{ساده} \\ z=2 \ \times \end{cases}$

Subject :
Date

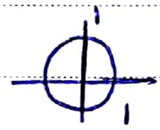
$$\underset{z=0}{Res}\, f(z) = \frac{1}{2i}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^۳ \times \frac{z^۴+1}{z^۳(۲z-1)(z-2)}\right) = \dots = \frac{21}{8}$$

$$\underset{z=\frac{1}{2}}{Res} = \frac{P(\,)}{q'(\,)} = \frac{P(\frac{1}{2})}{q'(\frac{1}{2})} = \frac{-۴۵}{۲۴}$$

$P(\,) \to$ همه کسر بجز $(۲z-1)$ ، $q'(\,) \to ۲z-1$

مثال) حاصل را بیابید؟

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z-\sin z}\, dz$$



نقاط غیر تحلیلی : $\sin z = z \to z=0$ قطب مرتبه‌ی چند؟

برای مشخص کردن مرتبه‌ی قطب :

$$\sin z = z - \frac{z^۳}{۳!} + \frac{z^۵}{۵!} - \frac{z^۷}{۷!} + \dots$$

$$\Rightarrow z - \sin z = \frac{z^۳}{3!} - \frac{z^۵}{۵!} + \frac{z^۷}{۷!} - \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-\sin z} = \frac{1}{z^۳\left(\frac{1}{3!} - \frac{z^۲}{۵!} + \frac{z^۴}{۷!} - \dots\right)}$$

پس قطب مرتبه‌ی ۳

$$\underset{z=0}{Res}\, f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^۳ \times \frac{1}{z-\sin z}\right) = \frac{3}{10} \to I = ۲\pi i\left(\frac{۳}{۱۰}\right)$$

$$= \frac{۳\pi i}{5}$$

پس اگر sin یا tan داشتیم به تیلور می‌بریم برای مرتبه‌ی قطب

$$f(z) = \frac{1+z}{1-\cos z}$$

فرض کنیم انتگرال تابع مقابل را می‌خواهیم محاسبه کنیم :

قطب $z=0$ مرتبه؟

Subject :
Date

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots \Rightarrow z^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \cdots\right)$$

پس قطب مرتبه‌ی ۲ است.